POLITECNICO DI TORINO

Corso di laurea di 1° livello in Matematica per l'ingegneria

Tesi di laurea di 1° livello

Lo sviluppo storico dell'Analisi non-standard

Relatore
Prof. Francesco Malaspina

Candidato
Riccardo Racca

Anno accademico 2021-2022

Ringraziamenti

Prima di iniziare a discutere il contenuto di questa tesi, voglio prendermi un momento per ringraziare alcune delle persone che più hanno contribuito al compimento di questo percorso. Ringrazio mia madre Anna Maria Racca, per essersi fatta carico di innumerevoli responsabilità anche durante periodi difficili della sua vita. Ringrazio mio zio Gianfranco Racca, per essere stato un esempio paterno in grado di tramandare valori fondamentali quali la tenacia e la forza d'animo. Ringrazio mia sorella Eugenia Bascone, per essere stata esempio di irriverenza e spensieratezza. Ringrazio mia sorella Sara Bascone, per avermi insegnato l'importanza dell'amore e della famiglia. Ringrazio mia sorella Martina Bascone, per essere un'eterna sognatrice da cui prendere spunto. Ringrazio il mio relatore, il Prof. F.Malaspina, per avermi proposto questo argomento e per essere stato un insegnante straordinario, contraddistinto dalla sua estrema gentilezza. Ringrazio tutte le persone che mi hanno incoraggiato a scegliere questo percorso, vedendo qualcosa in me che io non vedevo ancora. Ringrazio, infine, i miei cari amici e la mia fidanzata per essermi stati accanto nei momenti di grande difficoltà, specialmente durante quest'ultimo anno, e per aver condiviso con me le più limpide gioie ed i più bui dolori... non vi dimenticherò mai.

Indice

Introduzione

Alla base delle nozioni fondamentali dell'analisi matematica vi è il concetto di limite. Derivate, integrali, somma di serie infinite e la continuità di funzioni sono tutti concetti definiti con la nozione di limite.

Per esempio, sia $f(x)$ una funzione dall'intervallo (0,1) a valori in $\mathbb{R}$ e sia x_0 un numero che appartiene al precedente intervallo. Quindi sia a la *derivata* di $f(x)$ nel punto x_0, in simboli:

$$f'(x_0) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} = a \tag{1}$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \tag{2}$$

Ipotizziamo di chiedere ad un buon matematico il significato della formula 2. Possiamo fare affidamento sul fatto che, salvo variazioni non essenziali e terminologiche, la sua spiegazione sarà dunque:

Per ogni numero positivo ϵ preso a piacere esiste un numero δ postivo tale per cui: $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - a\right| < \epsilon$ per ogni x in (0,1) per cui $0 < |x - x_0| < \delta$

Proviamo a chiedere al nostro matematico se lui accetterebbe o meno la seguente, e più diretta, interpretazione di 1 e 2: Per ogni x nell'intervallo di definizione di $f(x)$ tale che $dx = x - x_0$ è infinitamente vicino a 0, ma non esattamente 0, il rapporto $\frac{df}{dx}$, dove $df = f(x) - f(x_0)$, è infinitamente vicino ad a.

A questa domanda noi potremmo aspettarci in risposta che la nostra definizione sia più semplice apparentemente, ma che sia anche priva di significato proprio. Perché se noi provassimo a spiegare che due numeri sono infinitamente vicini l'uno con l'altro quando la loro distanza, in modulo, è infinitamente piccola, per esempio, minore di ogni numero positivo, probabilmente ci troveremo di fronte alla controreplica che ciò è possibile solo se i numeri coincidono. E quindi ci verrebbe detto in modo caritatevole che questo ovviamente non è ciò che intendevamo, poiché renderebbe la nostra spiegazione banalmente errata.

Tuttavia, nonostante questa controreplica, l'idea di infinitamente piccolo, detto anche infinitesimo o quantità infinitesima, sembra essere naturale secondo la nostra intuizione.

A supporto della maggiore intuitività del metodo appena accennato, abbiamo il decorso storico degli eventi. Sappiamo, infatti, che a seguito della forte caratterizzazione matematica del seicento incentrata sulla risoluzione del celebre "problema delle tangenti", e del suo "naturale" problema inverso, due matematici svilupparono in contemporanea un metodo per venire a capo dei suddetti problemi, basato proprio sul concetto di infinitesimo. Questi due matematici furono Gottfried Wilhelm Leibniz e Isaac Newton, i quali sono riconosciuti equamente come i fondatori dell'Analisi Matematica, una nuova disciplina della matematica nata proprio a seguito dello studio di tali problemi e di altre questioni di minor rilievo.

Nonostante essi siano oggi riconosciuti come i 'padri' dell'Analisi Matematica, inizialmente subirono numerose critiche, ben giustificate, per i metodi da loro introdotti e sviluppati.

In effetti, malgrado i loro risultati corretti (o parzialmente corretti) c'era qualcosa che inceppava gli ingranaggi del metodo da loro sviluppato: si trattava proprio della nozione di infinitesimo, o di numero infinitamente piccolo, visto che non si riusciva a darne una definizione rigorosa e non autocontraddittoria. Esso venne pensato come un numero minore in valore assoluto rispetto a qualsiasi altro reale positivo e contemporaneamente diverso da zero, ma sappiamo che tutti i numeri reali devono rispettare la proprietà di Archimede (che vedremo in seguito) e perciò tale idea, nei numeri reali, non poteva funzionare. Eppure questo strano oggetto fu indispensabile, essendo proprio lo strumento che permise lo sviluppo del calcolo differenziale (che possiamo chiamare anche calcolo infinitesimale) e quindi la risoluzione dei problemi citati.

Per completezza è giusto dire che questo misterioso oggetto ha da sempre incuriosito il pensiero dell'uomo, infatti possiamo apprezzare come lo stesso Euclide, nei suoi *Elementi*, datati intorno al lontano 300 A.C., abbia già dato traccia di essere consapevole del problema dell'infinitamente piccolo. Infatti, nel libro dedicato alla teoria delle proporzioni, si legge la seguente definizione:

"Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente." (Euclide, Gli elementi, Libro V, Definizione IV)

Ma lo scopo della tesi è quello di apprezzare lo sviluppo rigoroso del concetto di infinitesimo applicato all'Analisi Matematica, perciò tralasceremo le nozioni storiche non riguardanti questo sviluppo, nonostante esse possano offrire spunti molto interessanti.

Capitolo 1

Il rigore matematico a sostegno dell'intuizione iniziale

1.1 Cenni del metodo infinitesimale

Esaminiamo a grandi linee il metodo infinitesimale per la risoluzione del problema delle tangenti. Entrando nel merito della questione, questo problema richiede la determinazione della retta tangente al grafico di una data funzione reale di variabile reale in ogni suo punto.

Data una funzione reale $y = f(x)$ ed il suo grafico, consideriamo un generico punto (x, y) appartenente al suddetto grafico. Dando un incremento Δx alla variabile indipendete x si ottiene un corrispondente incremento della variabile y che risulta essere $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Il punto del grafico corrispondente a questi due incrementi sarà perciò $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Se tracciamo la retta passante da esso e da (x, y) è facile vedere che in corrispondenza ad un incremento sempre più piccolo della variabile indipendente x, tale retta approssima sempre meglio la retta tangente al punto (x, y). Il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per i nostri due punti, ed in particolare rappresenterà, ad incrementi Δx man mano sempre minori, una migliore approssimazione del coefficiente angolare della retta tangente. E fino a qui tutto procede senza intoppi.

Ma a noi non interessa un'approssimazione, seppur buona, della tangente: noi vogliamo la tangente vera e propria! Ed ora arriva la parte che Leibniz e Newton non riuscirono a rigorizzare, benché producesse risultati corretti.

Immaginiamo di mettere sotto un microscopio molto molto potente (ovvero con precisione infinita a piacere) il grafico della nostra funzione. Ebbene, se ci focalizziamo sul punto (x, y) ci accorgiamo che la curva è *indistinguibile* dalla sua retta tangente in quel punto. Possiamo allora pensare che il nostro grafico sia costituito da tanti piccoli tratti rettilinei e diciamo che per tratti infinitesimi la curva si può considerare dritta. Ma qual è il significato preciso della parola "*infinitesimi*" ? Teniamo per il momento questo concetto come intuitivo. (cioè come se dx fosse l'incremento posto con la lente di ingrandimento, o al microscopio, affinché il grafico si confonda con la tangente nel punto (x, y).)

Supponiamo di dare un incremento infinitesimo dx alla variabile indipendente x (scriviamo dx anziché Δx per indicare, appunto, un incremento infinitesimo). La variabile dipendente verrà incrementata di una quantità anch'essa infinitesima (siamo sicuri che sia anch'essa infinitesima per un risultato cruciale che vedremo alla fine della tesi) $dy = f(x+dx) - f(x)$ e dunque, in accordo con quanto detto, la retta passante per i punti (x, y) e $(x+dx, y+dy)$ è proprio la tangente cercata, ed il rapporto $\frac{dy}{dx}$ rappresenta il suo coefficiente angolare.

Per non lasciare misteri, facciamo vedere perché il rapporto $\frac{dy}{dx}$ rappresenta il coefficiente angolare:

$$\beta = m\alpha + q$$

Ora impostiamo un sistema affinchè la retta passi per i punti x e $x + dx$:

$$\begin{cases} f(x+dx) = m(x+dx) + q \\ f(x) = mx + q \end{cases}$$

Da cui otteniamo:

$$f(x) = mx + f(x+dx) - m(x+dx)$$

$$f(x) - f(x+dx) = m(-dx)$$

$$m = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

Si noti che il cambiamento $\Delta \to d$ sta ad indicare semplicemente incrementi infinitesimi, cioè vale l'uguaglianza:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

quando $\Delta x = dx$ è infinitesimo.

Facciamo ora un esempio per fissare le idee. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ ed il punto del suo grafico di ascissa x_0 e diamo un incremento dx (infinitesimo) alla variabile indipendente. Assumendo l'ipotesi, per la verità un po' vaga di Leibniz, secondo la quale gli infinitesimi obbedirebbero alle regole elementari dell'aritmetica dei numeri reali, si ha:

$$dy = f(x_0 + dx) - f(x_0) = (x_0 + dx)^2 - x_0^2 =$$

$$= x_0^2 + dx^2 + 2x_0 dx - x_0^2 = dx^2 + 2x_0 dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2 + 2x_0 dx}{dx} = 2x_0 + dx$$

A questo punto il procedimento di Leibniz e Newton consiste nel far letteralmente scomparire ogni termine infinitesimo a destra, ottenendo cioè:

$$\frac{dy}{dx} = 2x_0$$

Questo risultato sappiamo essere corretto, ma non è difficile trovare delle critiche al procedimento svolto per ottenerlo, infatti:

1. quali sono le regole elementari a cui gli infinitesimi obbediscono?

2. secondo quale criterio si è potuto eliminare il termine dx?

Tutto questo tralasciando in ogni caso il problema fondamentale: che cosa sono gli *infinitesimi*?

Prima di tentare di dare una risposta a queste domande, introduciamo un po' di terminologia. Data una funzione reale $y = f(x)$ ed un generico punto del suo dominio x_0, il rapporto $\frac{dy}{dx}|_{x_0}$ si chiama *derivata* della funzione $y = f(x)$ nel punto x_0 (ricordiamo che $\frac{dy}{dx}|_{x_0}$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel suo punto di ascissa x_0). La funzione che associa ad ogni punto x del dominio di f la derivata in x si chiama semplicemente *derivata di* $y = f(x)$ e si denota con $y' = f'(x)$.

Introduciamo ora una nuova funzione df dipendente da due variabili reali x e dx definita da $df(x, dx) = f'(x)dx$. Fissati x e dx, il valore di questa nuova funzione reale rappresenta l'incremento dal punto $(x, f(x))$ lungo la retta tangente in corrispondenza ad un incremento dx (reale) della variabile indipendente.

Riprendiamo ora il discorso infinitesimale e supponendo dx infinitesimo, l'incremento lungo la retta tangente e quello lungo il grafico coincidono (essendo una sovrapposizione perfetta) e possiamo scrivere:

$$dy = f(x + dx) - f(x) = f'(x)dx$$

e dividendo per dx:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ritrovando così la notazione per la derivata in un punto generico. La variabile dipendente dy si chiama *differenziale* di f (o di y), mentre la variabile indipendente dx si chiama differenziale di x.

Notiamo che per Leibniz il differenziale dy era semplicemente l'incremento infinitesimo che subiva la variabile y in corrispondenza ad un incremento infinitesimo dx.

Riprendiamo ora la nostra (o meglio quella di Leibniz) definizione di derivata:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = f'(x)$$

con dx infinitesimo.

Ora, se $dy = f'(x)dx$ rappresenta l'incremento infinitesimo della variabile y, la somma di tutti questi incrementi ricostruirà y. Tale somma viene indicata da Leibniz con una 'S' alungata:

$$y = \int dy$$

e sostituendo con l'espressione di dy, otteniamo:

$$y = \int f'(x)dx = f(x)$$

Questa operazione si chiama *integrazione* e risulta essere l'operazione inversa della derivazione (o meglio della differenziazione). Nel nostro esempio:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x \Rightarrow y = \int f'(x)dx = x^2$$

Questo è il punto di partenza per la risoluzione del problema inverso a quello delle tangenti, ovvero: data una relazione fra la tangente ed il punto, risalire al grafico della funzione.

Nel 1734 venne pubblicata una spietata critica al metodo infinitesimale di Newton e Leibniz dal vescovo Bishop George Berkeley il quale sosteneva, a ragione, la contraddittorietà della nozione di infinitesimo. In effetti, come può un numero essere più piccolo in valore assoluto di qualsiasi altro numero positivo e tuttavia essere diverso da zero (nel campo dei numeri reali)? Il campo dei numeri reali deve soddisfare, infatti, la seguente proprietà, detta di Archimede: *per ogni numero reale positivo a esistu un numero naturale n tale che* $\frac{1}{n} < a$.

Questo ci dice che non può esistere nessun numero reale positivo che sia più piccolo di ogni altro numero reale positivo ($\frac{1}{n}$ è un numero reale). Ciò sancisce la caduta degli infinitesimi e di tutto il ragionamento che ci ha portato alla definizione di derivata: se dx non è zero, allora è diverso da zero e nell'esempio considerato non abbiamo il diritto di eliminarlo impunemente. Se è zero il rapporto $\frac{dy}{dx}$ assume il valore $\frac{0}{0}$ che è un'espressione priva di significato.

Scrisse Berkeley: "*Una volta ammesso che gli incrementi scompaiono, cioè che gli incrementi siano nulli o che non vi siano incrementi, cade la precedente ipotesi che gli incrementi fossero qualcosa, o che vi fossero incrementi, mentre viene mantenuta una conseguenza di tale ipotesi, cioè un'espressione ottenuta mediante essa.*"

Tuttavia, i matematici persistettero nell'uso del metodo infinitesimale per un altro secolo ottenendo grandi risultati, così come fisici ed ingegneri. Questo fino a quando, nel XIX secolo, si presentò una forte esigenza di rigore matematico, ed il calcolo differenziale venne completamente riformulato da Karl Weierstrass, tra il 1870 ed il 1880, introducendo il concetto di limite, il quale permise di operare in termini di soli numeri reali eliminando una volta per tutte l'uso degli infinitesimi.

Intuitivamente possiamo apprezzare il cambiamento teorico, tramite le due distinte interpretazioni usate per la risoluzione del problema delle tangenti:

1. Interpretazione statica, che è quella che ha creato il metodo, prendendo due punti infinitamente vicini, la tangente è la retta passante per quei due punti lì. (Usata da Leibniz e Newton)

2. Interpretazione dinamica, quella che conosciamo tutti, con il limite delle secanti. (Introdotta nel XIX secolo)

1.2 Alcuni risultati cruciali ottenuti con la nozione di limite

Definzione di limite di una funzione in un punto: Si dice che f ammette limite l, o tende a l, per x che tende a x_0, e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se per ogni intorno V di l esiste un intorno U di x_0 tale che, se $x \in U \cap X, x \neq x_0$ allora $f(x) \in V$. (è fondamentale che $x \neq x_0$)

Definzione limdiite di una funzione in un punto (alternativa): La definizione formale metrica di limite stabilisce che: l è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 se per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste un altro numero reale positivo $\delta(\epsilon)$ tale che se: $0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon)$, allora $|f(x) - l| < \epsilon$, o con formalismo matematico:

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta(\epsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta(\epsilon) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

che è riassunto dalla scrittura:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

Definizione di continuità con la nozione di limite: Se $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo) e $c \in I$, si dice che f è continua in c se esiste

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Si dice che f è continua in I se è continua in ciascun punto di I. Una funzione non continua in un punto c si dice discontinua in c.

Definzione di discontinuità eliminabile: Supponiamo che esista il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$, e supponiamo che f non sia definita in x_0, oppure che sia definita ma $f(x_0) \neq l$. Allora diciamo che f ha una discontinuità eliminabile in x_0.

Definizione di limite di una funzione "ad infinito": Diciamo che f ha limite $l \in \mathbb{R}$ per x che tende a $+\infty$, e scriviamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

se, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in X$ con $x > K$ risulti $|f(x) - l| < \epsilon$.

Definizione di funzione derivabile in un punto: Una funzione f definita in un intorno di x_0 si dice derivabile in x_0 se esiste finito il limite:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se f è derivabile il valore di tale limite si dice derivata di f in x_0 e viene denotato con uno dei seguenti simboli: $f'(x_0), Df(x_0), \frac{df}{dx}|_{x=x_0}$. ($\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ viene chiamato "rapporto incrementale")

Osservazione: il limite appena definito può essere riscritto tramite l'utilizzo di $h = x - x_0$, nella forma:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

1.3 Sostituzione del metodo infinitesimale con la teoria "nuova"

Riprendiamo l'esempio precedente e ragioniamo come proposto da Weierstrass. Sia Δx un numero reale qualsiasi e calcoliamo il rapporto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

Ebbene, vediamo che $2x_0$ è il numero che viene approssimato sempre meglio scegliendo Δx sempre più piccolo (dato che Δx è arbitrario) e diciamo quindi che $2x_0$ è il limite di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ per Δx tendente a zero, in simboli:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0$$

Risulta allora naturale assumere la seguente come definizione di derivata:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Mantenendo l'antica notazione, dove il cambiamento di Δ in d indica semplicemente un'operazione di passaggio al limite.

Nulla da dire riguardo il rigore matematico di questa definizione: gli infinitesimi non vengono neppure sfiorati e siamo giunti al risultato che volevamo senza contraddizioni; il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ non è mai privo di significato, perchè non viene mai posto $\Delta x = 0$. Facciamo però notare che quella che abbiamo dato sarebbe una definizione accettabile di derivata nel caso in cui avessimo già acquisito il concetto di limite. Altrimenti, la definizione completa sarebbe la seguente: la derivata di f in x_0 è ϕ se per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste δ (che dipende da ϵ e da x_0) tale che per ogni $\Delta x \neq 0$ con $|\Delta x| < \delta$ si ha $\left|\frac{\Delta y}{\Delta x} - \phi\right| < \epsilon$.

L'approccio di Weierstrass è quello "standard" ormai consolidato che viene insegnato oggi nei corsi di Analisi. Tuttavia, pur essendo un metodo rigoroso, come possiamo osservare ad esempio dalla definizione precedente, ha il difetto di farci perdere l'intuizione iniziale che aveva dato il via alla nascita del calcolo infinitesimale e che comunque ci aveva condotto a delle conclusioni corrette. E se i risultati sono corretti, non potrà esserlo in qualche modo anche il procedimento? La risposta a questa domanda è sì, e ora vedremo come. Nel 1961 il matematico americano di origine tedesca Abraham Robinson trovò un modo per rendere rigoroso il calcolo differenziale, usando gli infinitesimi; servendosi in modo essenziale della logica matematica. Robinson battezzò questo "nuovo" calcolo differenziale *Analisi Non-Standard*, in quanto esso si basa appunto su un modello non-standard dei numeri reali.

Spieghiamo il significato preciso di queste parole introducendo a tale scopo alcune nozioni di logica matematica.

1.4 Cenni di logica matematica

Chiamiamo linguaggio formale un linguaggio con un vocabolario ed un certo numero di regole prefissate. Un esempio di quanto appena detto è il linguaggio del primo ordine, detta anche logica del primo ordine.

Prima di procedere con le entità del linguaggio è bene dire che la logica del primo ordine è caratterizzata tramite una sintassi composta da:

- un alfabeto di simboli (che sono simboli rappresentati variabili, costanti, predicati, funzioni, connettivi, quantificatori o punteggiatura)

- un insieme di termini (che denotano gli "oggetti" dell'insieme che si sta considerando)
- un insieme di formule ben formate (fbf) cioè un insieme di stringhe composte da simboli dell'alfabeto che vengono considerate sintatticamente corrette.
- L'alfabeto include:
  1. simboli per costanti individuali: che sono da pensare come nomi propri degli individui, cioè degli elementi del dominio. (ex. a, b, c, ...)
  2. simboli per variabili individuali: essi sono dei simboli che serviranno ad indicare degli elementi del dominio generici non specifici, a differenza delle costanti. (ex. u,v,w,x,y,z, ...)
  3. simboli di funzione:f^i, g^j, h^ldove i, j, l sono le rispettive arità (arità = numero di elementi richiesti in entrata)
  4. simboli di predicato (= relazione): p^i, q^j, r^l dove i, j, l sono le rispettive arità .
  5. connettivi logici: $\leftarrow, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg$
  6. quantificatori: $\exists, \forall$
  7. simboli ausiliari: (),
- termine: definito ricorsivamente come segue:
  1. una costante individuale è un termine;
  2. una variabile è un termine;
  3. se f^n è un simbolo di funzione con arità n e $t_1...t_n$ sono termini, allora $f^n(t_1, ..., t_n)$ è un termine;
  4. nient'altro è un termine.
- fbf: definita ricorsivamente come segue:
  1. se p^n è un simbolo di predicato e $t_1, ..., t_n$ sono termini, allora $p^n(t_1, ..., t_n)$ è una fbf (atomica);
  2. se F e G sono fbf, allora lo sono anche: $\neg F, F \vee G, F \wedge G, F \rightarrow G, F \longleftrightarrow G$;
  3. se F è una fbf ed x è una variabile, allora anche $\forall xF$ e $\exists xF$ sono fbf;
  4. tutte e sole le fbf sono definite dalle regole precedenti.

Il linguaggio L racchiude tutto quello appena detto, ovvero i simboli che posso usare e le fbf che posso usare. Esempi:

1. $\forall x, \exists y(p(x, y) \rightarrow q(x))$ (qualunque sia x, esiste un y tale che se x è in relazione p con y allora x gode della proprietà q)
2. $\neg\exists x(p(x, a) \wedge q(f(x)))$
3. $\forall x(p(x, g(x)) \leftarrow q(x) \wedge \neg r(x))$

4. $\neg\exists x(p(x,a) \wedge f(x)) \leftarrow$ non significa nulla, perché $f(x)$ non è una proprietà né una condizione.

Parliamo ora di quantificatori e di formule chiuse:

- in una fbf i quantificatori compaiono necessariamente davanti e sono associati ad una variabile (quella che compare immediatamente dopo il simbolo $\forall$ oppure $\exists$);
- in una formula del tipo $\forall xF$ (oppure $\exists xF$) la variabile x e la formula F sono dette, rispettivamente, **indice** e **campo d'azione** del quantificatore $\forall$ (oppure $\exists$);
- un'occorrenza di una variabile x in una formula è detta **vincolata** se e solo se x è l'indice di un quantificatore oppure appartiene al campo d'azione di un quantificatore avente x come indici. Diversamente, l'occorrenza di x è detta **libera**;
- una formula **chiusa** è una formula senza occorrenze libere di alcuna variabile; es:
    1. $\exists x(p(x,y)) \wedge q(x)$ ha un'occorrenza libera per x e per y.
    2. $\exists x(p(x,y) \wedge q(x))$ ha un'occorrenza libera per y.
    3. $\forall x, \exists y(p(x,y) \wedge q(x))$ è chiusa.
- una formula non chiusa è detta **apeta**.

Finora sono state date delle regole per una "corretta" formazione degli enunciati di un linguaggio del primo ordine (le fbf) senza considerare che cosa questi volessero significare ed in questa sezione ci occuperemo proprio dell'interpretazione di esse, ma è bene sapere che per interpretare una formula della logica dei predicati servono molte informazioni, infatti, una formula atomica $p^n(t_1...t_n)$ può assumere un valore vero o falso a seconda dei termini che vi compaiono, i quali prendono valori in un certo contesto di riferimento e, a loro volta, i termini dipendono da simboli di costante, variabile e funzione, a cui bisogna attribuire un significato.

Esempio: Si consideri la formula $\forall xP(x)$. Per dire se sia vera o falsa, bisogna interpretare P, specificando il contesto in cui tale proprietà è espressa (ovvero l'insieme su cui varia la variabile quantificata x) e il suo significato in tale contesto.

- Si potrebbe ad esempio interpretare la formula nel contesto dei numeri naturali, facendo quindi variare x su tutti i numeri naturali, e attribuendo al predicato $P(x)$ il significato "il numero x è pari". In questo contesto, la formula significa "tutti i numeri naturali sono pari", dunque è falsa.
- Si potrebbe invece interpretare la formula nel contesto zoologico (nel quale x varia su tutti gli animali), attribuendo a $P(x)$ il significato "l'animale x respira". In questo contesto, la formula viene letta come "tutti gli animali respirano", e risulta allora vera.

L'interpretazione semantica è formata da:

- **Pre-interpretazione** J di un linguaggio del primo ordine L:

1. insieme D: **dominio** della pre-interpretazione. (l'insieme degli oggetti di cui la logica parlerà)
2. per ogni costante in L, assegnamento di un elemento in D. (non a tutti gli elementi del dominio verrà associata una costante, ma è importante che ad ogni costante venga associato un elemento del dominio)
3. Per ogni simbolo di funzione n-aria in L, assegnamento di una corrispondenza da D^n a D. (cioè qua associo i simboli di costanti e di funzioni di L a "veri" elementi e funzioni di D)

- **Interpretazione** I di un linguaggio del primo ordine L:
  1. una pre-interpretazione J di L con dominio D;
  2. assegnamento di una corrispondenza da D^n a $\{V, F\}$ (relazione su D^n e proprietà su D) ad ogni simbolo di predicato n-ario in L.

Assegnamento sulle variabili e sui termini:

- **assegnamento sulle variabili** V (data una pre-interpretazione J): assegnamento di un elemento del dominio D di J ad ogni variabile in L.

- **assegnamento sui termini** (data una pre-interpretazione J con dominio D ed un assegnamento V sulle variabili):
  - ogni variabile ha il suo assegnamento secondo V;
  - ogni costante ha il suo assegnamento secondo J;
  - se $d_1, ..., d_n$ sono gli elementi di D assegnati ai termini $t_1, ..., t_n$ e f' è la corrispondenza da D^n a D assegnata al simbolo di funzione n-aria f, allora $f'(d_1, ..., d_n) \in D$ è l'elemento di D assegnato a $f(t_1, ..., t_n)$.

Verità di una formula: (ad una formula in L si dà un valore di verità, Vero o Falso, come segue:)

1. $p(t_1, ..., t_n)$ si esamina il valore di $p'(d_1, ..., d_n)$ dove p' è la corrispondenza assegnata a p da I, e $d_1, ..., d_n$ sono gli elementi di D assegnati ai termini $t_1, ..., t_n$ (dall'assegnamento sui termini rispetto a J e V).
2.

F	G	$\neg F$	$F \wedge G$	$F \vee G$	$F \rightarrow G$	$F \leftrightarrow G$
VERO	VERO	FALSO	VERO	VERO	VERO	VERO
VERO	FALSO	FALSO	FALSO	VERO	FALSO	FALSO
FALSO	VERO	VERO	FALSO	VERO	VERO	FALSO
FALSO	FALSO	VERO	FALSO	FALSO	VERO	VERO

3. $\exists x F$ ha un valore di verità **Vero** se esiste $d \in D$ tale che F ha valore di verità Vero rispetto ad I e $V(x/d)$ (dove $V(x/d)$ è V eccetto che x è assegnata a d); altrimenti il suo valore di verità è Falso.

4. $\forall x F$ ha valore di verità **Vero** se, **per ogni** $d \in D$, F ha valore di verità Vero rispetto ad I e $V(x/d)$; altrimenti il suo valore di verità è Falso.

Modelli di formule chiuse:

- un'interpretazione I per un linguaggio del primo ordine L è un **modello per una formula chiusa** F di L se la rende vera; es: $D : \mathbb{N}^+, p :<$; è un modello per $\forall x, \exists y p(x,y)$ ma non per $\exists y, \forall x p(x,y)$
- **assiomi propri di una teoria** T:insieme di formule chiuse;
- un **modello per una teoria** T: è un'interpretazione che è un modello per ogni suo assioma;
- **teoria** T: insieme dei risultati dedotti dagli assiomi propri;
- I è un **modello per un insieme di formule chiuse** $S = \{F_1, ..., F_n\}$ se e solo se è un modello per $F_1 \wedge ... \wedge F_n$;
- un insieme di formule chiuse S è:
    1. **soddisfacibile**: se esiste un'interpretazione modello per S;
    2. **valido**: se ogni interpretazione è modello per S;
    3. **insoddisfacibile**: se nessun'interpretazione è modello per S.

1.5 La logica fondante l'Analisi non-standard

Prendiamo come punto di partenza ora il sistema dei numeri reali $\mathbb{R}$, che chiameremo universo standard, ed il calcolo differenziale di Weierstrass (o Analisi Standard). Designamo con L il linguaggio formale in cui parliamo di $\mathbb{R}$ e con K l'insieme di tutte le fbf (formule ben formate o proposizioni) di L. Dicendo che $\mathbb{R}$ è un modello di K intendiamo che $\mathbb{R}$ è una struttura matematica tale che ogni proposizione di K, interpretata come riferentesi a $\mathbb{R}$, è vera.

Una conseguenza di un celebre Teorema di Gödel (che vedremo a breve) è l'esistenza di un **universo non-standard** $\mathbb{R}^*$, differente da $\mathbb{R}$, che è anch'esso un modello di K (un modello non-standard, appunto): $\mathbb{R}^*$ è una struttura matematica tale per cui **ogni proposizione di K interpretata come riferentesi a $\mathbb{R}^*$ è vera**. Ad esempio consideriamo la seguente proposizione: 'se $a < b$, allora $a + c < b + c$ per tutti $a, b, c \in \mathbb{R}$ '. In simboli:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a < b \implies a + c < b + c$$

Prendendo per buono il fatto che essa è una proposizione formale dell'insieme K, se viene riferita a $\mathbb{R}$ allora 'a, b, c' sono numeri reali, la relazione '$<$' è l'usuale relazione d'ordine stretto e la proposizione risulta vera. Se essa è riferita invece a $\mathbb{R}^*$ gli elementi 'a, b, c' sono oggetti propri di $\mathbb{R}^*$ e con un'opportuna interpretazione di '$<$' la proposizione rimane comunque vera.

Un altro fatto interessante è che $\mathbb{R}^*$ risulta essere un campo ordinato più ampio di $\mathbb{R}$ ed inoltre risulta contenere una sotto-struttura esattamente identificabile con $\mathbb{R}$ (isomorfa ad $\mathbb{R}$). Possiamo ancora chiamare $\mathbb{R}$ tale sotto-struttura così come possiamo denotare i suoi elementi con gli usuali nomi dei numeri reali (ad es. l'elemento corrispondente a 5 nella nuova struttura viene chiamato sempre 5) e continuare a lavorare con essa come se fosse proprio l'antico $\mathbb{R}$. Possiamo dunque affermare che $\mathbb{R}^*$ contiene $\mathbb{R}$ e in più altri oggetti fra cui, guarda caso, i famosi infinitesimi. $\mathbb{R}^*$ viene chiamato sistema dei numeri iperreali e su di esso si fonda l'Analisi Non-Standard.

I numeri iperreali, come aveva vagamente supposto Leibniz, godono delle stesse proprietà formali dei numeri reali (o numeri standard) o meglio godono delle stesse proprietà che possono essere espresse nel linguaggio formale L.

Un numero iperreale infinitesimo è un numero minore in valore assoluto di qualsiasi altro numero reale positivo e tuttavia diverso da zero: è un numero non-archimedeo (non soddisfa la proprietà di Archimede).

L'esistenza di "strani" numeri non contemplati dall'aritmetica usuale fu scoperta per la prima volta nel 1934 dal logico norvegese Thoralf A. Skolem che costruì un modello non-standard dei numeri naturali. Successivamente questa costruzione fu ampliata fino ad arrivare al campo dei numeri iperreali. Il termine "iperreale" è dovuto ad Edwin Hewitt in un articolo del 1948. La geniale intuizione di Robinson fu quella di utilizzare gli infinitesimi per riformulare l'Analisi Matematica. Ripercorriamo questa ricostruzione partendo dal Teorema di completezza di Gödel:

Teorema di completezza: *Un insieme di proposizioni è logicamente coerente (nessuna contraddizione può essere dedotta da esso) se e solo se esso ha un modello, cioè se e solo se esiste un universo in cui esse sono tutte vere.*

Accanto al Teorema di completezza abbiamo l'importante corollario dovuto a Malcev-Henkin:

Teorema di compattezza: *Sia P un insieme di proposizioni di un linguaggio formale L. Supponiamo che nell'universo standard ogni sottoinsieme finito di P sia vero. Allora esiste un universo non-standard in cui tutte le proposizioni di P sono contemporaneamente vere.* (Il teorema di compattezza è una diretta conseguenza del teorema di completezza.)

A questo punto siamo pronti a dimostrare l'esistenza degli infinitesimi. Consideriamo il seguente insieme di proposizioni:

- $c > 0$
- $c < \frac{1}{2}$
- $c < \frac{1}{3}$
- ...
- $c < \frac{1}{n}$
- ...

Ognuna di queste proposizioni è esprimibile nel linguaggio formale L, e se riferita all'universo standard $\mathbb{R}$ si ha evidentemente che ogni sottoinsieme finito di questa collezione è vero. Infatti, dato un qualunque numero nella forma $\frac{1}{n}$ con n naturale, il numero $\frac{1}{2n}$ è maggiore di zero e minore di $\frac{1}{n}$ (ricordiamo che queste proposizioni non possono essere tutte contemporaneamente vere nell'universo standard per la Proprietà di Archimede).

Dal Teorema di compattezza deduciamo che esiste un universo non-standard $\mathbb{R}^*$ in cui tutte le proposizioni sono simultaneamente vere, dunque esiste una struttura $\mathbb{R}^*$ che contiene un numero c maggiore di zero e minore di $\frac{1}{n}$ **qualunque** sia n.

Capitolo 2

Lo sviluppo dell'Analisi non-standard

2.1 Modello dei numeri iperreali

I numeri reali formano un campo ordinato completo $\Re = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, infatti, nel linguaggio formale possiamo scrivere:

- Leggi associative:
$$\forall x \forall y \forall z \, [x + (y + z) = (x + y) + z]$$
$$\forall x \forall y \forall z \, [x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z]$$

- Leggi commutative:
$$\forall x \forall y \, [x + y = y + x]$$
$$\forall x \forall y \, [x \cdot y = y \cdot x]$$

- Legge distributiva:
$$\forall x \forall y \forall z \, [x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z]$$

- Leggi degli elementi neutri:
$$\forall x \, [x + 0 = x]$$
$$\forall x \, [x \cdot 1 = x]$$

- Esistenza dell'opposto e del reciproco:
$$\forall x, \exists y \, [x + y = 0]$$
$$\forall x \, [x \neq 0 \rightarrow \exists y \, (x \cdot y = 1)]$$

- Leggi dell'ordinamento:
$$\forall x \, [x \leq x]$$
$$\forall x \forall y \, [x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y]$$
$$\forall x \forall y \forall z \, [x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z]$$

- Legge di dicotomia:
$$\forall x \forall y \, [x \le y \vee y \le x]$$

- Leggi di compatibilità dell'ordinamento:
$$\forall x \forall y \forall z \, [x \le y \to x + z \le y + z]$$
$$\forall x \forall y \forall z \, [0 \le z \wedge x \le y \to x \cdot z \le y \cdot z]$$

Un esempio di modello della teoria di numeri reali che soddisfa gli assiomi è:

- **Classi di successioni di Cauchy**: Un numero reale è una classe di equivalenza di successioni $\langle r_n \rangle$ di Cauchy di numeri razionali, cioè tali che:
$$\lim_{n,m \to +\infty} |r_n - r_m| = 0$$
Due successioni di Cauchy $\langle r_n \rangle$ e $\langle s_n \rangle$ sono equivalenti se:
$$\lim_{n \to +\infty} |r_n - s_n| = 0$$

Sia $\Re = (\mathbb{R}, +, \cdot, \le)$ il campo ordinato (completo) dei numeri reali. Sia $\hat{\mathbb{R}}$ l'insieme delle successioni reali, i cui elementi sono della forma:
$$r = \langle r_1, r_2, ... \rangle = \langle r_i \rangle$$

Se $r = \langle r_i \rangle$ e se $s = \langle s_i \rangle$ sono due elementi di $\hat{\mathbb{R}}$, si possono definire le operazioni $\oplus$ e $\odot$ nel seguente modo:
$$r \oplus s = \langle r_i + s_i \rangle$$
$$r \odot s = \langle r_i \cdot s_i \rangle$$

$\left(\hat{\mathbb{R}}, \oplus, \odot\right)$ è un anello commutativo con zero pari a $\langle 0{,}0{,}0, ... \rangle$ e unità $\langle 1{,}1{,}1, ... \rangle$, ma *non* è un campo perché, ad esempio:
$$\langle 1{,}0{,}1{,}0{,}1, ... \rangle \odot \langle 0{,}1{,}0{,}1{,}0, ... \rangle = \langle 0{,}0{,}0, ... \rangle$$

senza che nessuno dei due sia zero. **Come fare?** Serve un metodo che permetta di selezionare uno fra $\langle 1{,}0{,}1{,}0{,}1, ... \rangle$ e $\langle 0{,}1{,}0{,}1{,}0, ... \rangle$ ed identificarlo come zero. La tecnica che presentiamo è quella della "costruzione di un'ultrapotenza di $\mathbb{R}$", che si basa sulla nozione di ultrafiltro.

Definizione: (filtro) Un filtro su $\mathbb{N}$ è una collezione *non* vuota $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con le seguenti prorietà:

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. Se $A, B \in \mathcal{F}$, allora $A \cap B \in \mathcal{F}$
3. Se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$, allora $B \in \mathcal{F}$

Definizione: (ultrafiltro) Un filtro $\mathcal{F}$ su $\mathbb{N}$ è un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ se, per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$, si ha che $A \in \mathbb{F}$ oppure il suo complementare $A' = \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$ (ma non entrambi per le proprietà 1 e 2).

Definizione: (filtro cofinito) La famiglia: $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$= $\{ A \subseteq \mathbb{N} | \mathbb{N} \setminus A$ è finito $\}$ è un filtro chiamato cofinito o di Fréchet.

Definizione: (ultrafiltro libero) Un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ si dice libero se contiene $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$. (è importante il concetto intuitivo di inglobazione per capire il significato di filtro, ultrafiltro ed ultrafiltro libero)

Applicando il Lemma di Zorn si può dimostrare il seguente teorema: *Esiste un ultrafiltro libero su* $\mathbb{N}$.

Esempi di filtri, ultrafiltri, filtri cofiniti e ultrafiltri liberi:

- Filtro: $\mathcal{F} = \{ c = \{1, 2, ...,10\}$, tutti gli insiemi concentrici, con centro 'c' nel senso dell'inclusione $\}$
- Ultrafiltro: $U = \{\{1\}, A \subseteq \mathbb{N} | 1 \in A\}$, (notiamo che $\mathcal{F}$ non è un ultrafiltro perché non vale "per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$, o $A \in \mathcal{F}$ oppure il suo complementare $A' = \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}$", infatti ad $\mathcal{F}$ mancano sia $\{1\}$ che $\mathbb{N} \setminus \{1\}$)
- Filtro cofinito: $\mathcal{F}_{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N}, \{2,3,4, ...\}, \{3,4,5, ...\}, \{4,5,6, ...\}, ...\}$
- Ultrafiltro libero: $U_{libero} = \{\mathcal{F}_{\mathbb{N}}, 2\mathbb{N}, 4\mathbb{N}, ...\}$, dove con $2\mathbb{N}$ indichiamo l'insieme dei numeri pari, con $4\mathbb{N}$ indichiamo l'insieme dei numeri multipli di 4 ecc... . (Osserviamo che U non è un ultrafiltro libero perchè non contiene $\mathcal{F}_{\mathbb{N}}$, infatti esso è privo, ad esempio, di $\{2,3,4, ...\}, \{3,4,5, ...\}, \{4,5,6, ...\}$)

Consideriamo un ultrafilitro libero U su $\mathbb{N}$.

Definizione: (successioni uguali quasi ovunque) Se $r = \langle r_i \rangle$ e $s = \langle s_i \rangle$ sono elementi di $\hat{\mathbb{R}}$, allora:

$$r \equiv s \iff \{i \in \mathbb{N} | r_i = s_i\} \in U$$

In questo caso diciamo che r ed s sono uguali quasi ovunque e scriviamo $\langle r_i \rangle = \langle s_i \rangle$ q.o.. La relazione $\equiv$ è di equivalenza su $\hat{\mathbb{R}}$.

Osserviamo che due successioni possono avere lo stesso limite per $n \to +\infty$ e tuttavia non essere equivalenti, ad esempio: $\left\langle 1 \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ... \right\rangle \not\equiv \langle 0,0,0,0, ...\rangle$ poiché $\emptyset \notin U$. Inoltre si vede che solo una delle due successioni $\langle 1,0,1,0,1, ...\rangle$ e $\langle 0,1,0,1,0, ...\rangle$ è equivalente a $\langle 0,0,0,0, ...\rangle$. (perché in U sono contenuti i pari oppure i dispari)

La classe di equivalenza contenente la successione $r = \langle r_i \rangle$ si indica con $\mathbf{r}$ oppure con $[r]$. Denotiamo con $\mathbb{R}^*$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\hat{\mathbb{R}}$ indotte da ' $\equiv$ ' e inoltre chiamiamo l'insieme $\mathbb{R}^* = \hat{\mathbb{R}} / \equiv$ insieme dei numeri iperreali.

Definiamo in $\mathbb{R}^*$ le seguenti operazioni e relazioni. Siano $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$ e $\mathbf{s} = [\langle s_i \rangle]$. Allora definiamo:

- $\mathbf{r} + \mathbf{s} = [\langle r_i + s_i \rangle]$, cioè $[r] + [s] = [r \oplus s]$
- $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = [\langle r_i \cdot s_i \rangle]$, cioè $[r] \cdot [s] = [r \odot s]$
- $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ se e solo se $\{i \in N | r_i < s_i\} \in U$

- $\mathbf{r} \leq \mathbf{s}$ se e solo se $\mathbf{r} < \mathbf{s}$ o $\mathbf{r} = \mathbf{s}$ (sse $\{i \in N | r_i < s_i\} \in U$)

Si verifica facilmente che queste definizioni sono ben poste.

Teorema: La struttura $\Re^* = (\mathbb{R}^*, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato.

Definizione: (positività, negatività e valore assoluto di un numero iperreale) Un numero $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^*$ è positivo se $\mathbf{r} > 0$, negativo se $\mathbf{r} < 0$; il valore assoluto di $\mathbf{r}$ si definisce come:

$$|\mathbf{r}| = \begin{cases} \mathbf{r}, \mathbf{r} > 0 \\ 0, \mathbf{r} = 0 \\ -\mathbf{r}, \mathbf{r} < 0 \end{cases}$$

(i segni di uguaglianza e disuguaglianza utilizzati in questa definizione sono intesi come definiti poco sopra.)

Si può dimostrare facilmente che:

- se $\mathbf{r} = [\langle r_i \rangle]$, allora $|\mathbf{r}| = [\langle [r_i] \rangle]$ ($\leftarrow$ risultato non scontato, cioè il valore assoluto della classe di equivalenza è uguale alla classe di equivalenza del valore assoluto)
- $|\mathbf{r} + \mathbf{s}| \leq |\mathbf{r}| + |\mathbf{s}|$ ($\leftarrow$ disuguaglianza triangolare)
- $|\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}| \leq |\mathbf{r}| \cdot |\mathbf{s}|$ ($\leftarrow$ linearità col prodotto)

Consideriamo la funzione: *: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, sia $*(r) = [\langle r, r, r, ... \rangle]$ ed indichiamo $*(r)$ con r^*; esempio: $5^* = [\langle 5{,}5{,}5{,}5, ... \rangle] = [\langle 1{,}5{,}5{,}5, ... \rangle] = [\langle 5{,}5, \pi{,}5, ... \rangle] = ...$

Teorema: * induce un isomorfismo di campi ordinati fra $\mathbb{R}$ e $*(\mathbb{R})$.

Dunque $\mathbb{R}^*$ contiene un sottocampo ordinato $*(\mathbb{R})$ isomorfo a $\mathbb{R}$, che chiamiamo insieme dei numeri standard. (essenzialmente questo teorema conferma l'intuizione che suggerisce di associare 1-a-1 il numero $5 \in \mathbb{R}$ al numero $[\langle 5{,}5{,}5{,}5, ... \rangle] \in \mathbb{R}^*$)

Il suo complementare è l'insieme dei numeri non-standard. Quindi $\mathbb{R}^*$ è un'estensione propria di $\mathbb{R}$, infatti:

1. il numero $w = [\langle 1{,}2{,}3, ... \rangle]$ non può essere uguale a nessun numero standard r^*=$[\langle r, r, r, ... \rangle]$ poiché l'insieme: $A = \{i \in \mathbb{N} | i = r\} \notin U$, dato che A contiene al massimo un numero naturale;
2. il numero $w^{-1} = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ... \right\rangle\right]$ non può essere uguale a nessun numero standard r^*=$[\langle r, r, r, ... \rangle]$ poiché l'insieme: $A = \left\{ i \in \mathbb{N} | \frac{1}{i} = r \right\} \notin U$, per lo stesso motivo precedente;

Convenzioni notazionali:

- Identifichiamo $*(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}$ e conveniamo di utilizzare sempre la notazione $\mathbb{R}$;
- i numeri r^* verranno indicati semplicemente con r; (ad es. 5 al posto di 5^* per $[\langle 5{,}5{,}5, ... \rangle]$)
- sia i numeri di $\mathbb{R}^*$ che quelli di $\mathbb{R}$ verranno indicati con lettere minuscole.

Sia $s \in \mathbb{R}^*$. Allora:

- s è infinito se $|s| > n$ per tutti i numeri naturali standard n;
- s è finito se $|s| < n$ per qualche numero naturale standard n;
- s è infinitesimo se $|s| < \frac{1}{n}$ per tutti i naturali standard n.

(anche qua i segni di uguaglianza e disuguaglianza sono gli stessi definiti sopra.)

Esempi:

- il numero $w^{-1} = \left[\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right\rangle\right]$ è infinitesimo, poiché $w^{-1} < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato. Infatti, fissato $n \in N$, $\left\{i \in \mathbb{N} | {w_i}^{-1} < \frac{1}{n}\right\} \in U$ ($\leftarrow$ intuitivamente basta pensare che da un certo punto in poi ${w_i}^{-1}$ è minore di $\frac{1}{n}$, perciò si ottiene sicuramente un insieme di indici $\in U$, siccome U contiene il filtro cofinito per definizione)
- il numero $w = [\langle 1, 2, 3, ...\rangle]$ è infinito, poiché $n < w$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato. Infatti, fissato $n \in N$,$\{i \in \mathbb{N} | i \in \mathbb{N} < n < w_i\} \in U$ ($\leftarrow$ il ragionamento precedentemente scritto vale tale e quale anche in questo caso). Notiamo inoltre che esistono infiniti numeri maggiori di w ; si considerino ad esempio i numeri $[\langle 2, 3, 4, ...\rangle]$, $[\langle 3, 4, 5, ...\rangle]$, ecc. . . (questo ci suggerisce un risultato importante espresso nel libro di A. Robinson, ovvero, non esistono né il numero infinito (infinitesimo) più grande di tutti né il numero infinito (infinitesimo) più piccolo di tutti)
- 0 è infinitesimo. Esso è tuttavia l'unico numero reale infinitesimo.

Si può dimostrare facilmente che, data una successione $r = \langle r_n \rangle$

- se $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$, allora $\mathbf{r} = [\langle r_n \rangle]$ è infinitesimo;
- se $\lim_{n\to+\infty} r_n = \pm\infty$, allora $\mathbf{r} = [\langle r_n \rangle]$ è infinito (positivo o negativo).

Teorema:

1. Somme, differenze e prodotti di infinitesimi sono infinitesimi;
2. il prodotto di un infinitesimo e di un numero finito è infinitesimo.

(come informalmente aveva supposto Leibniz)

2.2 La relazione ≈ e le monadi

Definizione: (numeri infinitamente vicini) Due numeri iperreali 'b' e 'c' sono infinitamente vicini ($b \approx c$) se la loro differenza '$c - b$' è un infinitesimo.

La relazione $\approx$ è di equivalenza su $\mathbb{R}^*$, infatti:

- Riflessività: ($a \approx a$). Infatti, $a - a = 0$ (infinitesimo)
- Simmetria: ($a \approx b$ implica $b \approx a$). Infatti, se $b - a = \epsilon$ è infinitesimo, allora anche $a - b = -\epsilon$ è infinitesimo.

- Transitività: ($a \approx b$ e $b \approx c$ implica $a \approx c$). Infatti, se $b - a = \epsilon$ è infinitesimo e $c - b = \epsilon'$ è infinitesimo, allora: $c = b + \epsilon'$ e $a = b - \epsilon$. Dunque: $c - a = b + \epsilon' - b + \epsilon = \epsilon' + \epsilon$ è infinitesimo perché somma di due infinitesimi.

Osserviamo che la relazione $\approx$ genera delle classi di equivalenza che sono identificabili con degli intervalli.

Definizione:(monade) Si chiama monade di $x \in \mathbb{R}^*$ l'insieme $m(x)$ dei numeri infinitamente vicini a x, ovvero:

$$m(x) = \{y \in \mathbb{R}^* | x \approx y\}$$

- Due monadi $m(x)$ e $m(y)$ o coincidono (questo se $x \approx y$) oppure sono disgiunte;
- $m(0)$ è l'insieme degli infinitesimi;
- per ogni $x \in \mathbb{R}^*$ si ha: $m(x) = \{y \in \mathbb{R}^* | y = x + \epsilon\}$, con ϵ infinitesimo opportuno;
- Dall'osservazione poco sopra notiamo come $m(x)$ è un intervallo.

Teorema: (della parte standard) Ogni numero iperreale finito è infinitamente vicino ad uno e un solo numero reale.

Definizione: (parte standard di un numero iperreale finito) Sia 'b' un numero iperreale finito. L'unico numero reale a cui 'b' è infinitamente vicino si chiama parte standard di b e viene denotata con $^\circ b$ oppure con $st(b)$.

Osserviamo, cioè, che ogni monade $m(x)$ (classe di equivalenza rispetto a $\approx$ di x) contiene solamente un numero reale standard che viene denotato come $^\circ x = st(x)$ cioè la parte standard di x.

Esempio: sia ϵ un infinitesimo:

- $3 + \epsilon$ è infinitamente vicino a 3 perché $(3 + \epsilon) - 3 = \epsilon$ è infinitesimo: $st(3 + \epsilon) = 3$
- $7 + \epsilon$ è infinitamente vicino a 7, ma anche a $7 + 2\epsilon$ e a $7 + \epsilon^2$. Sia $7 + \epsilon$ che $7 + 2\epsilon$ che $7 + \epsilon^2$ sono infinitamente vicini a 7 e a nessun altro numero reale: $st(7 + \epsilon) = st(7 + 2\epsilon) = st(7 + \epsilon^2) = 7$
- banalmente $2 \approx 2$ dato che $2 - 2 = 0$ è infinitesimo; $st(2) = 2$
- riprendiamo brevemente quanto detto sopra aggiungendo che oltre al fatto che ogni monade di numeri finiti contiene uno e un solo numero reale, vale anche che ogni numero iperreale finito si può scrivere nella forma $x + \epsilon$, con $x \in \mathbb{R}$ e ϵ infinitesimo opportuni.

2.3 Alcuni risultati dell'Analisi non-standard

Un altro concetto di fondamentale importanza è il seguente: sia data una funzione reale f, allora esiste una corrispondente funzione iperreale f^* (cioè sia il dominio che il codominio sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^*$) chiamata *estensione naturale* di f che gode delle seguenti "naturali" proprietà:

1. Se r è un numero reale e $f(r)$ è definita, allora $f^*(r) = f(r)$;

2. Se r è un numero reale e $f(r)$ non è definita, allora $f^*(r)$ non è definita;

3. Se f è data da una certa regola, allora f^* è data dalla stessa regola applicata ai numeri iperreali.

Ad esempio se f è definita dalla regola $f(x) = \sqrt{x}$, dove x varia nell'insieme dei numeri reali maggiori o uguali di 0, la sua estensione naturale è $f^*(x) = \sqrt{x}$, dove x varia nell'insieme dei numeri iperreali maggiori o uguali di 0.

Lavorare con una funzione o con la sua estensione naturale è, come si può facilmente intuire, praticamente la stessa cosa: ciò ci consente di alleggerire la notazione eliminando l'asterisco (scrivendo cioè sempre f al posto di f^*) e soprattutto ci dà la possibilità di trattare f^* come se fosse effettivamente la funzione reale f. L'estensione naturale ci permette, ad esempio, di giustificare scritture del tipo $f(3+c)$ quando c è infinitesimo. Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per rigorizzare finalmente il metodo infinitesimale di Leibniz e Newton.

Cominciamo con l'introduzione preliminare di alcuni risultati cardine dell'Analisi Matematica attraverso la lente della teoria non-standard per poi giungere, infine, al tanto contestato concetto di derivata.

Sia $f(x)$ una funzione a valori reali di una variabile reale x in $\mathbb{R}$ che è definita in un intervallo (a, b), 'a' e 'b' standard, $a < b$. Nel passaggio a $\mathbb{R}^*$, $f(x)$ è estesa a una funzione che è definita per tutti i numeri x in $\mathbb{R}^*$ tali che $a < x < b$, e come annunciato noi denoteremo questa funzione nuovamente tramite $f(x)$. A questo punto siamo pronti ad enunciare il seguente:

Teorema: (limite estremo destro) Per far si che il numero reale standard 'c' sia il limite di $f(x)$ in $\mathbb{R}$ all'avvicinarsi di x a 'b' (da sinistra), cioè $\lim_{x\to b} f(x) = c$, è necessario e sufficiente che $f(x) \approx c$ per tutti gli $x \approx b$, con $a < x < b$. (è molto importante il concetto di avvicinamento senza "contatto", qua non viene espressamente scritto ma x non può toccare 'b' perché siamo in un intervallo aperto. Apprezzeremo questo concetto nel caso in cui il limite è in un punto interno al dominio)

Dimostrazione: (1) dimostriamo che è necessaria: $\lim_{x\to b} f(x) = c \implies f(x) \approx c$, per tutti gli $x \approx b$) Sia $\lim_{x\to b} f(x) = c$ nel senso ordinario. Ovvero, dato ϵ un numero standard positivo. Allora esiste un numero standard positivo h tale che $|f(x) - c| < \epsilon$ per $|x - b| < h$, $a < x < b$. $\leftarrow$ la definizione di limite classico. Ipotizziamo che $x \approx b$ allora $|x - b|$ è infinitesimale allora è minore di qualsiasi numero standard h, cioè $|x - b| < h$. Ma sappiamo che questo implica, dalla definizione di limite, che $|f(x) - c| < \epsilon$ e siccome ϵ è un arbitrario positivo in $\mathbb{R}$, questo mostra che $f(x) \approx c$, qua abbiamo sfruttato il fatto che $|f(x) - c|$ batte qualsiasi numero standard positivo arbitrario, ma questa è proprio la definizione intuitiva di infinitesimo, quindi è vero che $f(x) \approx c$; la condizione del teorema è necessaria.

(2) dimostriamo che è sufficiente: $f(x) \approx c$ per tutti gli $x \approx b \implies \lim_{x\to b} f(x) = c$) Supponiamo che $f(x) \approx c$ per tutti gli $x \approx b$ sia soddisfatta e scegliamo un qualsiasi positivo infinitesimale h. Allora la seguente proposizione semi-formale è vera in *R (la struttura di $\mathbb{R}^*$), per un arbitrario standard positivo ϵ: 3.4.2 $\forall(x)[[|x - b| < h \wedge a < x < b] \supset |f(x) - c| < \epsilon]$. ($\leftarrow$ abbiamo solamente scritto $f(x) \approx c$ per tutti gli $x \approx b$ in un linguaggio formale, sfruttando il fatto che ϵ è un reale standard.) Quindi, in *R, è vero che: 3.4.3 $\exists(y)[y > 0 \wedge [(\forall x)[[|x - b| < y \wedge a < x < b] \supset |f(x) - c| < \epsilon]]]$. (← ovvero esiste un y che mi permette di "battere" ϵ.) Ma 3.4.3 è ammissibile in R (la struttura di $\mathbb{R}$), di conseguenza, deve appartenere a K e deve valere anche in R. Siccome ϵ è un positivo standard ma arbitrario noi concludiamo direttamente dalla interpretazione di 3.4.3 in R che $\lim_{x \to b} f(x) = c$. Questo conclude la dimostrazione.

Osservazione: una definizione pressoché identica può essere proposta anche per il limite verso l'estremo sinistro dell'intervallo.

3.4.4 Teorema: (limite punto interno) Per far si che il numero reale standard 'c' sia il limite di $f(x)$ in $\mathbb{R}$ all'avvicinarsi di x a 'x_0' , con x_0 punto (numero) standard, $a < x_0 < b$, è necessario e sufficiente che $f(x) \approx c$, per tutti gli $x \neq x_0$ tali che $x \approx x_0$. (il teorema continua a valere, come anticipato precedentemente, anche nel caso in cui $f(x)$ fosse definita nell'intervallo (a, b) privato del punto $x = x_0$.)

Con la precedente $f(x)$ e tramite la definizione di limite appena data, la definizione classica di continuità in un punto ci porta immediatamente a:

3.4.5 Teorema: La funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ è continua in un punto standard $x_0 \in (a, b)$ se e solo se $f(x) \approx f(x_0)$ per tutti gli $x \approx x_0$. (che è equivalente a dire che $f(x)$ mappa la monade di x_0 nella monade di $f(x_0)$.) Il contenuto intuitivo di questa definizione è evidente, una funzione f è continua nel punto x_0 se i punti "vicini" ad x_0 hanno una immagine "vicina" a $f(x_0)$.

3.4.7 Teorema: $f(x)$ è limitato in x_0 se e solo se $f(x)$ è finito nella monade di x_0 in *R.

Dimostrazione: (1) Condizione necessaria: $f(x)$ è limitato in $x_0 \implies f(x)$ è finito nella monade di x_0 in *R) Se $f(x)$ è limitata in x_0 allora '$|f(x)| < m$ per tutti gli x tali che $|x - x_0| < h$' è vera in R, per qualche standard $h > 0$ e $m > 0$. La proposizione tra apici può essere formulata tramite il linguaggio formale K, perciò è valida anche in *R. Ora, in *R, vale che $|x - x0| < h$ per tutti gli x nella monade di x_0 siccome, per tali x, $|x - x_0|$ è infinitesimale. Quindi $|f(x)| < m$ per tutti gli x nella monade di x_0; la condizione del teorema è necessaria.

(2) Condizione sufficiente: $f(x)$ è finito nella monade di x_0 in *R $\implies f(x)$ è limitato in x_0) Se la condizione '$f(x)$ è finito nella monade di x_0 in *R' è soddisfatta, scegliamo h infinitesimale positivo e m finito positivo. Allora è vero in *R, da ipotesi, che $|f(x)| < m$ per tutti gli x per cui $|x - x_0| < h$ siccome tutti questi x sono nella monade di x_0. Perciò la proposizione 'esiste $y > 0$ e $z > 0$ tale che $|f(x)| < z$ per tutti gli x tali che $|x - x_0| < y$' è valida in *R. Ma questa proposizione può essere trascritta nel linguaggio formale Λ, nel linguaggio di K e, di conseguenza, appartiene a K ed è valida in R. Questo prova che la condizione è anche sufficiente e completa la dimostrazione.

3.4.8 Teorema: Sia $f(x)$ la funzione trattata finora e sia un punto x_0 interno, se $f(x)$ è continua in x_0 allora è limitata in x_0. (Diretta conseguenza di 3.4.5 e 3.4.7)

Introduciamo adesso una "vecchia conoscenza" che ci aiuterà a definire la derivata tramite gli infinitesimi. Sia $f(x)$ definita come al solito e sia $a < x_0 < b$, dove x_0 è standard; consideriamo la funzione:

$$k(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$k(x)$ è definito per tutti i valori di x in (a, b), sia in R che in *R, eccetto per $x = x_0$. La derivata di $f(x)$ in x_0, $f'(x)$ è data, classicamente, da $\lim_{x \to x_0} k(x)$ ovunque il limite esista. Quindi, da 3.4.4, otteniamo:

Teorema: Affinché il numero reale standard c sia la derivata di $f(x)$ in x_0 è necessario e sufficiente che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx c$$

per tutti gli $x \neq x_0$ nella monade di x_0. E questo ci porta finalmente alla definizione di derivata data da Robinson:

Definizione: Sia f una funzione reale di una variabile reale e x_0 un punto del suo dominio. La derivata di f in x_0 è c se:

$$c = st\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right) = f'(x_0)$$

per ogni infinitesimo $\Delta x \neq 0$.

La derivata non è più solamente il rapporto $\Delta y/\Delta x$ con Δx infinitesimo, bensì la parte standard di tale rapporto: una lieve ma essenziale modifica della definizione di Leibniz che ci permette di giungere ai risultati sperati evitando ogni contraddizione, pur rimanendo ispirati all'antico metodo infinitesimale.

Riprendiamo il nostro esempio dal punto in cui ci eravamo bloccati, cioè:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^2 + 2x_0 dx}{dx} = 2x_0 + dx$$

Procedendo nel modo suggeritoci da Robinson:

$$st(2x_0 + dx) = 2x_0$$

che è proprio il risultato che volevamo!

Inoltre è bene anche far notare come la definizione di derivata appena data conduca perfettamente ai risultati successivi conosciuti dell'Analisi Matematica classica, infatti, sono sempre validi i seguenti risultati: (giusto per citarne alcuni)

- Teorema: Se $f(x)$ è differenziabile (possiede una derivata) in x_0 in R, allora $f(x)$ è continua in x_0 in R.

  Dimostrazione: Se $f(x)$ è differenziabile in x_0 allora per tutti gli $x \neq x_0$ nella monade di x_0, vale che: $f(x) - f(x_0) \approx c(x - x_0)$ dove c è la derivata di $f(x)$ in x_0. Questo mostra che per tali x, $f(x) - f(x_0)$ è infinitesimale e perciò $f(x)$ è continuo in x_0 per 3.4.5 .

- Rimangono valide le regole di derivazione classiche (come derivata di un prodotto, di un rapporto, composta ecc...)

- Teorema: Supponiamo che $f(x)$ ammetta un massimo (relativo) nel punto standard x_0 dove $a < x_0 < b$, e che sia differenziabile in quel punto. Allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione: Si scelgano due punti x_1 ed x_2 nella monade di x_0 tali che $x_1 < x_0 < x_2$. Allora $f(x_1) - f(x_0) \leq 0$ e $f(x_2) - f(x_0) \leq 0$, queste due disuguaglianze sono garantite da ipotesi e quindi: $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \geq 0$ e $\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} \leq 0$. Ma

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \approx \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

e l'unico numero reale standard che ammette nella sua monade elementi non-negativi (≥ 0) e non-positivi (≤ 0) è proprio il numero 0. Quindi $f'(x_0) = 0$ come volevasi dimostrare. (le stesse conclusioni si sarebbero potute applicare se $f(x)$ avesse ammesso un punto di minimo in x_0.)

Ora che abbiamo un quadro più ampio della situazione possiamo attualizzare anche le notazioni formali, le quali risultano lievemente diverse da quelle precedenti. Siano dati una funzione reale f di una variabile reale, un punto x_0 del suo dominio ed un numero iperreale Δx, indichiamo con Δy la quantità $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ (ovvero la differenza riscontrata dalla funzione a seguito dell'incremento Δx) ; il rapporto $\Delta y/\Delta x$ si chiama *rapporto incrementale*. Denotiamo con dy non più la quantità $f(x_0 + dx) - f(x_0)$, bensì $dy = df(x, \Delta x) = f'(x)\Delta x$, dove x e Δx sono numeri iperreali qualunque per i quali tale espressione abbia senso. (ovvero la differenza riscontrata dalla retta tangente il punto a seguito dell'incremento infinitesimo Δx). Per mantenere uniforme la nostra notazione introduciamo il simbolo dx come altro nome per Δx (per una variabile indipendente dx anziché Δx è la stessa cosa) e scriviamo $dy = df(x, dx) = f'(x)dx$. La variabile dipendente dy si chiama ancora differenziale di y, e la variabile indipendente dx si chiama differenziale di x. Quando $dx \neq 0$ (precisazione non superflua visto che 0 è infinitesimo) è lecito dividere ambo i membri della precedente equazione per dx ottenendo:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Esaminiamo il rapporto fra $\Delta y/\Delta x$ e dy/dx. Mentre Δx e dx sono uguali, Δy e dy sono diversi: Δy è il cambiamento di y lungo la curva e dy è il cambiamento di y lungo la tangente. Dalla definizione di derivata e da quanto visto finora, si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}|_{x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx}|_{x_0} = f'(x_0)$$

Dalla definizione di derivata data sopra:

$$f'(x_0) = st\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

Da cui si ottiene la relazione:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

se $\Delta x = dx$ è infinitesimo. (osserviamo che vige la relazione di equivalenza '$\approx$', perché uno è la parte standard dell'altro e perciò sono infinitamente vicini) che sostituisce quella antica:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

se $\Delta x = dx$ è infinitesimo. Anzi, vale addirittura il seguente:

Teorema dell'incremento: Sia $y = f(x)$. Supponiamo che $f'(x)$ esista per un certo valore di x e che Δx sia infinitesimo. Allora Δy e dy sono infinitesimi e inoltre: $\Delta y = dy + \epsilon \Delta x$ per qualche infinitesimo ϵ che dipende da x e Δx.

Se avessimo a disposizione le regole dell'algebra dei numeri iperreali sarebbe facile dimostrare che $\epsilon \Delta x$ è un infinitesimo ancora più piccolo di Δx. Dunque se Δx è infinitesimo Δy e dy sono infinitamente vicini e ancora di più: sono talmente vicini da differire per una quantità infinitesima ancora più piccola dello stesso Δx. Questo corrisponde al principio dell'Analisi standard secondo cui, in un punto, il differenziale dy e l'incremento Δy differiscono per una funzione infinitesima (cioè il cui limite è 0) di ordine superiore rispetto a Δx quando $\Delta x \to 0$ (Δx tende a 0). L'Analisi Non-Standard è dunque un ben fondato metodo matematico.

Concludiamo citando una frase di Abraham Robinson tratta dal suo libro *Non-Standard Analysis*, e che solo l'umiltà di una mente geniale come la sua poteva dettare: "*Il fatto che questo libro contenga solo applicazioni alla Matematica Applicata classica è probabilmente una testimonianza delle limitazioni dell'autore e non del metodo.*" .

Bibliografia

[1] Nicola, F., Analisi Matematica I - appunti delle lezioni, terza edizione, CLUT, Torino, 2018.

[2] Bramanti, M., Pagani, C.,D., Salsa S., Analisi Matematica 1, Zanichelli, 2008.

[3] Malaspina, F., Analisi non standard, dispense.

[4] Di Nasso, M., I numeri infinitesimi e l'Analisi nonstandard, dispense: https://people.dm.unipi.it/dinasso/papers/it1.pdf.

[5] Dossena, R., Introduzione all'analisi non standard, dispense: 1) http://rdossena.altervista.org/Articoli/ANS-Novello-2021.pdf, 2021. 2) http://www-9.unipv.it/webphilos_lab/dossena/AnalisiNonStandard.pdf.

[6] Dossena, R., L'analisi non strandard, dispense: http://www-9.unipv.it/webphilos_lab/dossena/ANS-21apr2010-Pavia.pdf, 2010.

[7] Robinson, A., Non-Standard Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1966.