Homework III

La soluzione degli esercizi deve essere caricata sul portale del corso entro le ore 23:59 del 15 Gennaio 2023, sotto il nome di Homework3.

Esercizio 1. Dato un grafo $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ di ordine $n = |\mathcal{V}| \geq 2$, privo di self-loop e tale che ogni nodo abbia grado uscente $w_i = \sum_j W_{ij} > 0$, si consideri il gioco quadratico con insieme dei giocatori $\mathcal{V}$, spazio delle azioni $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ coincidente con l'asse reale per ciascun giocatore e funzioni di utilità

$$u_i(x) = -\frac{x_i^2}{2} + c_i x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j x_i \,, \qquad i \in \mathcal{V}\,,$$

dove $\beta \geq 0$ è un parametro scalare non negativo e $c \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}}$ è un vettore.

(a) Si determinino le funzioni di best response per ciascun giocatore.

(b) Si discutano esistenza e unicità degli equilibri di Nash al variare del parametro $\beta \geq 0$, dimostrando in particolare che esiste un unico equilibrio di Nash nel caso in cui

$$\beta w_i < 1\,, \qquad \forall i \in \mathcal{V}\,. \tag{1}$$

(c) Si mostri che quando esiste ed è unico l'equilibrio di Nash

$$x^* = Mc$$

dipende linearmente dal vettore c, mostrando in particolare che, nel caso in cui vale la condizione (1), tale matrice M ha componenti tutte non negative.

Si consideri ora il caso in cui vale la (1). Sia

$$y = \sum_{j \in \mathcal{V}} x_j^*\,.$$

(d) Si mostri che y può essere espresso come il prodotto scalare tra il vettore c e una versione opportunamente normalizzata del vettore di centralità di Katz del grafo.

(e) Si determini un'espressione per la varianza di y nel caso in cui le componenti c_i del vettore c sono variabili aleatorie indipendenti a media nulla e varianza σ_i^2.

Nel caso in cui $c = \mathbb{1}$ e il grafo è indiretto, cioè $W' = W$, si consideri ora il problema di determinare il "key player" $i \in \mathcal{V}$ la cui rimozione dalla rete comporti la maggior riduzione di y. Più precisamente, per $i \in \mathcal{V}$, siano $W^{(-i)}$ la matrice ottenuta da W rimuovendone la i-esima riga e la i-esima colonna e $\mathcal{G}^{(-i)}$ il grafo di insieme dei nodi $\mathcal{V} \setminus \{i\}$ e matrice dei pesi $W^{(-i)}$.

(f) Si mostri che per i β per i quali la (1) è soddisfatta, il gioco quadratico sul grafo ristretto $\mathcal{G}^{(-i)}$ ammette un unico equilibrio di Nash

$$x^{*(-i)} = M^{(-i)} \mathbb{1}\,.$$

(g*) **Facoltativo:** Si mostri che

$$M_{ij} M_{ik} = M_{ii}(M_{jk} - M_{jk}^{(-i)})$$

per ogni $k \neq i \neq j$.

(h) Usando il punto (g) si dimostri che un nodo i^* in $\mathcal{V}$ massimizza

$$y - y^{(-i)}\,, \qquad y^{(-i)} = \sum_{j \neq i} x_j^{*(-i)}$$

se e solo se i^* massimizza il rapporto

$$z_i^2 / M_{ii}$$

dove $z = M\mathbb{1}$.

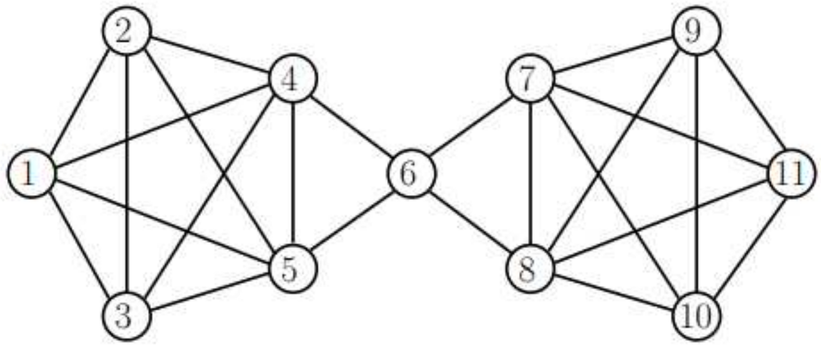


Figure 1: Grafo dell'Esercizio 1 (i).

(i) Nell caso particolare in cui W è la matrice di adiacenza del grafo semplice riportato in Figura 1, per valori $\beta = 0.1$ e $\beta = 0.2$, si calcolino le quantità z_i e M_{ii} per ciascun nodo i e si individui un "key player". (**Suggerimento**: le simmetrie del grafo permettono di ridurre sensibilmente la dimensione del problema.)

ESERCIZIO 1

a) Best response per ciascun giocatore

Modello generale: $u_i(x) = \rho_i(x_i) + \delta x_i \sum_j W_{ij} x_j$

Nostro caso: $u_i(x) = \rho_i(x_i) + \beta x_i \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j$,

con $\rho_i(x_i) = c_i x_i - \frac{1}{2} x_i^2$

RICOMPENSA MARGINALE INDIVIDUALE DAL LIVELLO x_i

COSTO PER ELEVARE IL LIVELLO DI ATTIVITA' x_i

Poiché $\beta \geq 0$ per ipotesi, allora l'effetto sull'esterno e' positivo e $B(x_{-i})$ e' lo scalare x_i tale che

$$\frac{\partial u_i(x_i)}{\partial x_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow c_i - x_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j = 0$$

$$\Leftrightarrow x_i = c_i + \beta \sum_{j \neq i} W_{ij} x_j$$ BEST RESPONSE

b) x^* e' Nash $\Leftrightarrow$ $x_i^* = c_i + \beta(Wx^*)_i \quad \forall i \in V$

Dunque gli equilibri sono le configurazioni x^* tali che:

$$x^* = c + \beta W x^* \Leftrightarrow x^* - \beta W x^* = c$$

$$\Leftrightarrow (I - \beta W) x^* = c$$

Allora l'equilibrio di Nash esiste ed e' unico se:

β^{-1} NON E' autovalore della matrice W, infatti:

se β^{-1} fosse un autovalore di W avremmo un autovalore di $(I - \beta W)$ uguale a zero e quindi il determinante di $(I - \beta W)$ anch'esso uguale a zero che implica la non invertibilità di $(I - \beta W)$.

Se vale $\beta w_i < 1$ $\forall i \in V$ allora la matrice $(I - \beta W)$ notiamo essere a diagonale dominante per righe in senso stretto e ciò mi garantisce che la matrice $(I - \beta W)$ è sempre invertibile.

Quindi $\exists !$ x^* equilibrio di Nash.

c) Nel nostro caso: $x^* = Mc = (I - \beta W)^{-1} c$,

poiché M è una matrice, x^* dipende linearmente dal vettore c, inoltre mostriamo che il raggio spettrale $R(\beta W) < 1$:

Usiamo la norma indotta con $p = \infty$ definita come segue:

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

per dimostrare che $\rho(\beta W) < 1$ essendo una norma indotta $\|\cdot\|$ soddisfa la disuguaglianza:

$$\|A\| \geq \rho(A)$$

quindi abbiamo

$$\rho(\beta W) \leq \|\beta W\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{m} |\beta W_{ij}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } (1)}}{<} 1$$

quindi posso scrivere $x^* = Mc = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k c$

siccome gli elementi di $\beta^k W^k$ sono formate da somme e prodotti di fattori positivi questo comporta che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k W^k \quad \text{converge} \quad (\rho(\beta W) < 1)$$

ad una matrice con elementi $M_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$.

d) La centralità di Katz è data da: $z = (I - \lambda_W^{-1}(1-b)W')^{-1} b\,\mu$

Normalizzandola $\left(\mu = \frac{\mathbb{1}}{n}\right)$ otteniamo: $z = (I - \lambda_W^{-1}(1-b)W')^{-1} b \frac{\mathbb{1}}{n}$

$$\frac{n}{b} z^T = \left((I - \lambda_W^{-1}(1-b)W')^{-1}\mathbb{1}\right)^T = \mathbb{1}^T \left(I - \lambda_W^{-1}(1-b)W\right)^{-1}$$

Scelgo b tale che $\lambda_W^{-1}(1-b) = \beta$ e tale che $\beta \neq \lambda_i^{-1}$ $\forall i = 1,\dots,|V|$, con λ_i autovalori di W

$$x^* = (I - \beta W)^{-1} c \quad \text{e} \quad y = \mathbb{1}^T x^*$$

$$\text{ma} \quad \langle z, c \rangle \frac{n}{b} = \mathbb{1}^T \underbrace{(I - \beta W)^{-1} c}_{x^*} = \langle \mathbb{1}, x^* \rangle = y$$

e) Espressione della varianza di y dato che $c_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$

$$y = \mathbb{1}^T x^* = \sum_i \left(\sum_j M_{ij} \cdot c_j\right) = \sum_j \left(\sum_i M_{ij} \cdot c_j\right) = \sum_j c_j \left(\sum_i M_{ij}\right)$$

$$Var(y) = \sum_j \left(\sum_i M_{ij}\right)^2 Var(c_j) = \sum_j \left(\sum_i M_{ij}\right)^2 \sigma^2$$

f) $c = \mathbb{1}$ e $y = \sum_{j \in V} x_j^* = \langle z, c \rangle \frac{n}{b}$,

con b tale che $\lambda_W^{-1}(1-b) = \beta$ e tale che $\beta \neq \lambda_i^{-1}$ $\forall i = 1,\dots,|V|$, con λ_i autovalori di W

dove $z = (I - \beta W')^{-1} b \frac{1}{n} \mathbb{1}$

$= (I - \beta W')^{-1} b \frac{1}{n} \mathbb{1}$ POICHÉ W È SIMMETRICA $W' = W$

$= \frac{b}{n}(I - \beta W)^{-1} \mathbb{1} = \frac{b}{n} x^*$ POICHÉ $(I - \beta W)^{-1}$ È NASH

A questo punto possiamo scrivere: $y = \sum_{j \in V} x_j^* = \sum_{j \in V} \frac{n}{b} z_j = \frac{n}{b} \sum_{j \in V} z_j$

Per ridurre y togliendo un z_i, tolgo i t.c. $z_i = \max_j \{z_j\}$, inoltre

si ha che $w_j \geq w_j^{(-i)} > \frac{1}{\beta}$ quindi anche per il nuovo grafo vale (1)

Allora, per il punto b, $\exists!$ x^* equilibrio di Nash definito come segue:

$$x^{*(-i)} = (I - \beta W^{(-i)})^{-1} c \underset{\substack{\text{posto } M^{(-i)} = (I - \beta W^{(-i)})^{-1} \\ \text{e } c = \mathbb{1}}}{=} M^{(-i)} \mathbb{1}$$

g) Osservando la consegna

$$M_{ij} M_{jk} = M_{ii} \left(M_{jk} - M_{jk}^{(-i)} \right) \qquad \forall\, k \neq i \neq j$$

ci è sorto il dubbio che mancassero dei vincoli sugli indici, per esempio se considero $j = n$ la dimensione di M, l'elemento $M_{jk}^{(-i)}$ non esiste visto che $M^{(-i)}$ ha dimensione $n-1$.
Perciò l'abbiamo resa soggetta a ulteriori vincoli, riscrivendola come segue

$$M_{ij} M_{jk} = M_{ii} \left(M_{jk} - M_{ab}^{(-i)} \right) \qquad \forall\, k \neq i \neq j$$

dove :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{se } j < i & \Rightarrow & a = j \\ \text{se } j > i & \Rightarrow & a = j - 1 \\ \text{se } k < i & \Rightarrow & b = k \\ \text{se } k > i & \Rightarrow & b = k - j \end{array}\right\} \quad (\ast)$$

Il seguente punto è stato svolto per ultimo, quindi nella risoluzione dei punti h) e i) abbiamo supposto l'uguaglianza del testo vera $\forall\, k \neq i \neq j$

Segue un tentativo incompleto di dimostrazione della consegna del testo senza i vincoli $(\ast)$

$$M_{ij} M_{ik} = M_{ii}\left(M_{jk} - M_{jk}^{(-i)}\right)$$

$j < i \rightarrow j$
$j > i \rightarrow j-1$
$k < i \rightarrow k$
$k > i \rightarrow k-1$

$$M_{ij} = \frac{1}{\det(I-\beta W)} (-1)^{j+i} \det\left([I-\beta W]_{j,i}\right)$$

$$M_{ik} = \frac{1}{\det(I-\beta W)} (-1)^{k+i} \det\left([I-\beta W]_{k,i}\right)$$

$$M_{ij} M_{ik} = \frac{1}{\det(I-\beta W)^2} (-1)^{j+k+2i} \det\left([I-\beta W]_{j,i}\right) \det\left([I-\beta W]_{k,i}\right)$$

$\cancel{M_{jk}}$

$$M_{ii}\left(M_{jk} - M_{jk}^{(-i)}\right) = \frac{1}{\det(I-\beta W)} (-1)^{i+i} \det\left([I-\beta W]_{i,i}\right) \cdot$$

$$\left(\frac{1}{\det(I-\beta W)} (-1)^{k+j} \det\left([I-\beta W]_{k,j}\right) - \frac{1}{\det(I-\beta W^{(-i)})} (-1)^{k+j} \det\left([I-\beta W^{(-i)}]_{k,j}\right) \right)$$

$$\det([I-\beta W]) = \det([I-\beta W^{(-i)}])$$

$$\det\left([I-\beta W]_{j,i}\right) \det\left([I-\beta W]_{k,i}\right) =$$

$$= \det\left([I-\beta W]_{i,i}\right) \det\left([I-\beta W]_{k,j}\right) - \det[I-\beta W] \det\left([I-\beta W^{(-i)}]_{k,j}\right)$$

h) $z = M\mathbb{1} = x^*$ $\qquad M_{ii} = \frac{M_{ij}M_{ik}}{M_{jk} - M_{jk}}$

Dunque $\frac{z_i^2}{M_{ii}} = \frac{x_i^*}{M_{ii}}$

$$y = x^{*T}\mathbb{1} = \sum_{ij} M_{ij} \quad e \quad y^{(-i)} = \mathbb{1}^T x^{*(-i)} = \sum_{ij} M_{ij}^{(-i)}$$

perciò: $y - y^{(-i)} = \mathbb{1}^T x^* - \mathbb{1}^T x^{*(-i)}$

Inoltre: $\sum_i \sum_j M_{ij}^{(-i)} = \mathbb{1}^T M^{(-i)} \mathbb{1}$ SOMMO TUTTI GLI ELEMENTI DI M

$$\max_i \left(\sum_k \sum_j M_{kj} - \sum_k \sum_j M_{kj}^{(-i)} \right) = \sum_{k=i} \sum_{j\neq i} M_{kj} - M_{kj}^{(-i)} + \sum_j M_{ij} - M_{ii}$$

$$\max_i \sum_{k=i} \sum_{k\neq j} \frac{M_{ij}M_{ik}}{M_{ii}} + \sum_j [\underbrace{M_{ji}}_{x_i^*} + \underbrace{M_{ij}}_{x_i^*}] - M_{ii}$$

perché $W = W^T$

$$= \sum_{k\neq i} \sum_{j\neq i} \frac{M_{ij}M_{ik}}{M_{ii}} + 2\underbrace{x_i^*}_{= z_i} - M_{ii}$$

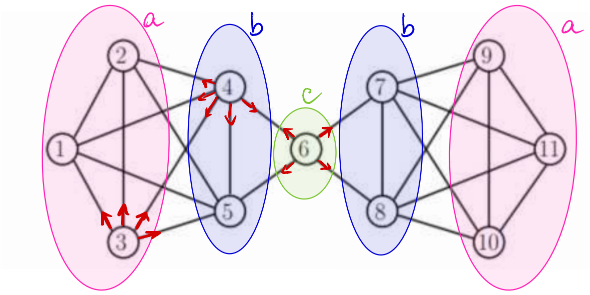
$$= \frac{1}{M_{ii}} \sum_{k\neq i} \sum_{j\neq i} M_{ij}M_{ik} + 2z_i - M_{ii}$$

$$= \frac{1}{M_{ii}} (x_i^* - M_{ii})^2 + 2z_i - M_{ii}$$

$$= \frac{1}{M_{ii}} (z_i^2 - 2z_iM_{ii} + M_{ii}^2) + 2z_i - M_{ii}$$

$$= \frac{z_i^2}{M_{ii}} - \cancel{2z_i} + \cancel{M_{ii}} + \cancel{2z_i} - \cancel{M_{ii}}$$

i) Sfruttando le simmetrie, possiamo modificare il grafo come segue: raggruppiamo i nodi con lo stesso grado e la stessa eigenvector centrality



A cui corrisponde la seguente matrice di adiacenza:

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Dunque, a questo punto, poiché vale che $x^* = M\mathbb{1} = z$, con $M = (I - \beta\tilde{W})^{-1}$

- PER $\beta = 0{,}1$

$$z = (I - \beta\tilde{W})^{-1}\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1{,}7197 \\ 1{,}8790 \\ 1{,}7516 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{aligned} M_{11} &= 1{,}3694 \\ M_{22} &= 1{,}2739 \\ M_{33} &= 1{,}0510 \end{aligned}$$

Per il "key player" sfruttiamo il punto precedente:

$$\max\left\{\frac{z_i^2}{M_{ii}},\ i = 1:3\right\} = \max\left\{2{,}15;\ 2{,}77;\ 2{,}91\right\} = 2{,}91$$

che corrisponde al nodo 6 del grafo iniziale

- PER $\beta = 0{,}2$

$$z = (I - \beta\tilde{W})^{-1}\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 7{,}7778 \\ 9{,}1667 \\ 8{,}3333 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{aligned} M_{11} &= 4{,}444 \\ M_{22} &= 4{,}1667 \\ M_{33} &= 1{,}6667 \end{aligned}$$

Per il "key player" sfruttiamo il punto precedente:

$$\max\left\{\frac{z_i^2}{M_{ii}},\ i = 1:3\right\} = \max\left\{13{,}61;\ 20{,}16;\ 41{,}66\right\} = 41{,}66$$

che corrisponde al nodo 6 del grafo iniziale

Se ne deduce che per $\beta = 0{,}1$ e per $\beta = 0{,}2$ il "key player" resta il nodo 6.

Esercizio 2. Si consideri un gioco $(\mathcal{V}, \mathcal{A}, \{u_i\})$ con insieme dei giocatori $\mathcal{V} = \{1, 2, \ldots, n\}$ e insieme delle azioni $\mathcal{A} = \{-1, +1\}$. I giocatori sono divisi in due classi, $\mathcal{V}_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ e $\mathcal{V}_2 = \{n_1 + 1, \ldots n\}$, e le funzioni utilità sono date da

$$u_i(x_i, x_{-i}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |x_i + x_j| \text{ se } i \in \mathcal{V}_1 \\ \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} |x_i - x_j| \text{ se } i \in \mathcal{V}_2 \end{cases}$$

In altre parole i giocatori in $\mathcal{V}_1$ hanno la funzione utilità di un gioco di coordinamento, mentre quelli in $\mathcal{V}_2$ hanno la funzione utilità di un gioco di anti-coordinamento. Si determinino gli eventuali equilibri di Nash (a strategia pura) del gioco nei casi in cui $n = 3$ e:

(a1) $n_1 = 3$;

(a2) $n_1 = 2$;

(a3) $n_1 = 1$;

(a4) $n_1 = 0$.

Si studi in dettaglio la catena di Markov $X(t)$ a tempo continuo corrispondente alla dinamica di *best response* asincrona per il gioco di sopra. In particolare, se ne rappresenti il grafo delle transizioni di configurazione con i relativi *rate* di ransizione e si determini il limite

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(X(t) = x | X(0) = (+1, -1, +1)), \qquad x \in \{-1, +1\}^3$$

della distribuzione di probabilità condizionata alla configurazione iniziale $X(0) = (+1, -1, +1)$ nei casi in cui $n = 3$ e:

(b1) $n_1 = 3$;

(b2) $n_1 = 0$.

ESERCIZIO 2

Di seguito sono presenti i best response graphs per tutte le situazioni richieste.

Abbiamo verificato quali nodi non posseggono alcun arco diretto uscente e quindi sono equilibri di Nash (non è esistente l'arco nel verso opposto):

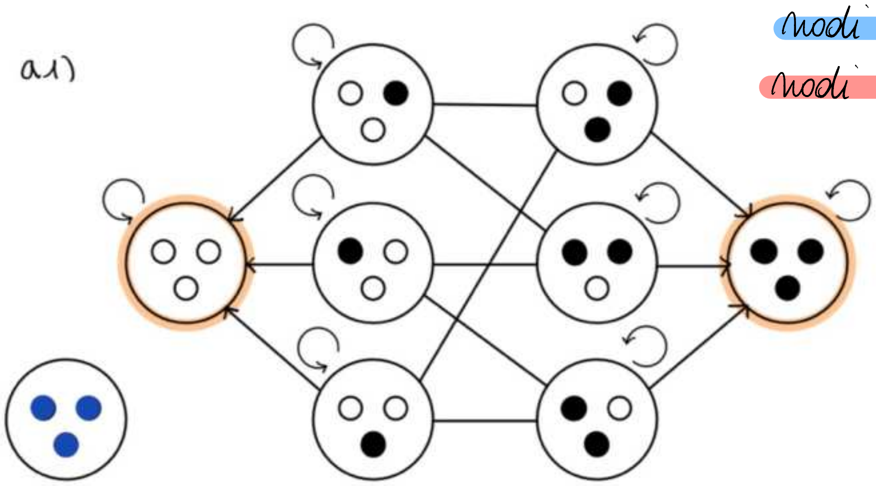
se per assurdo, un Nash i avesse un arco diretto uscente $i \to j$ sul best response graph e l'arco $j \to i$ non esistesse

$\Rightarrow$ vorrebbe dire che esiste un giocatore che passando da i a j migliora strettamente la sua utilità: ma questo è assurdo se i è un Nash.

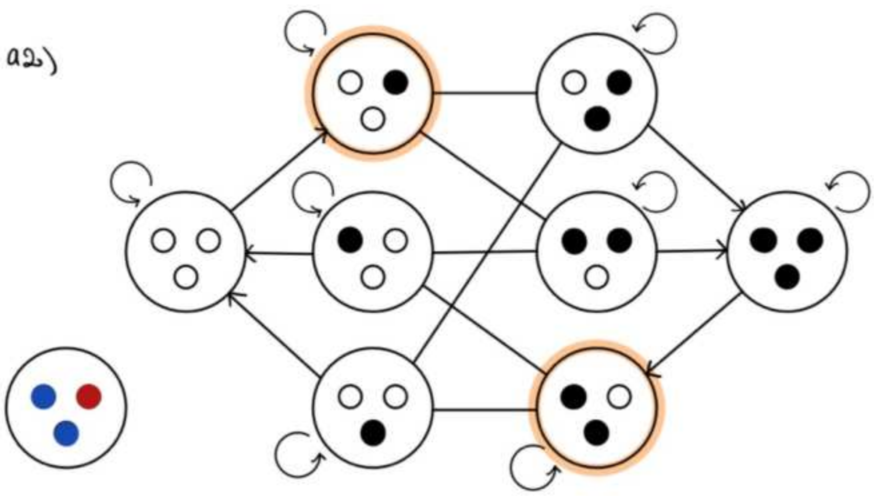
nodi blu: giocano a coordinarsi

nodi rossi: giocano ad anticoordinarsi

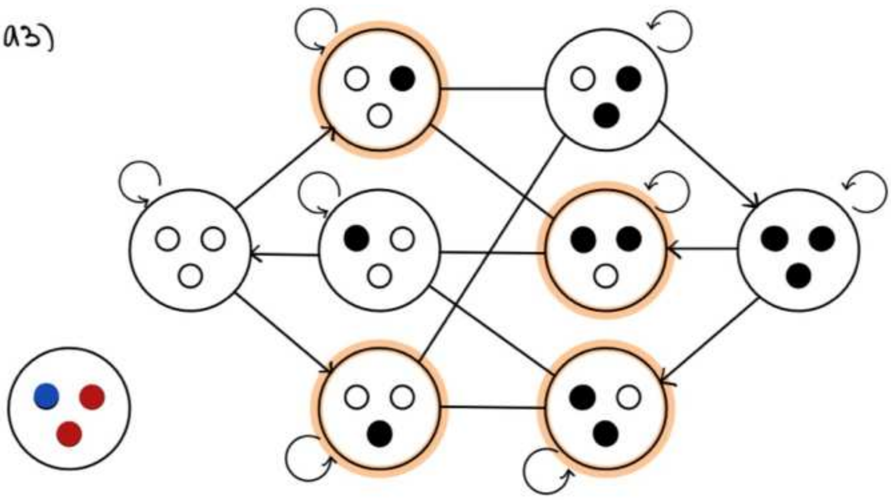
a1)



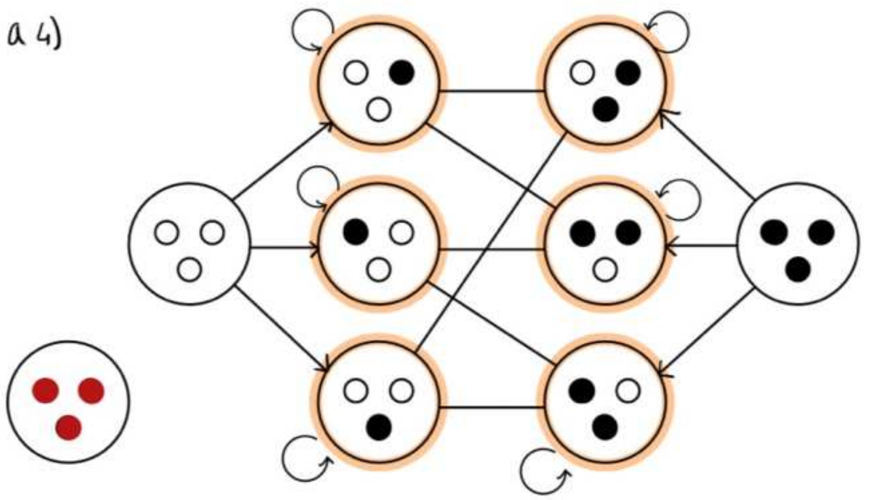
a2)



a3)



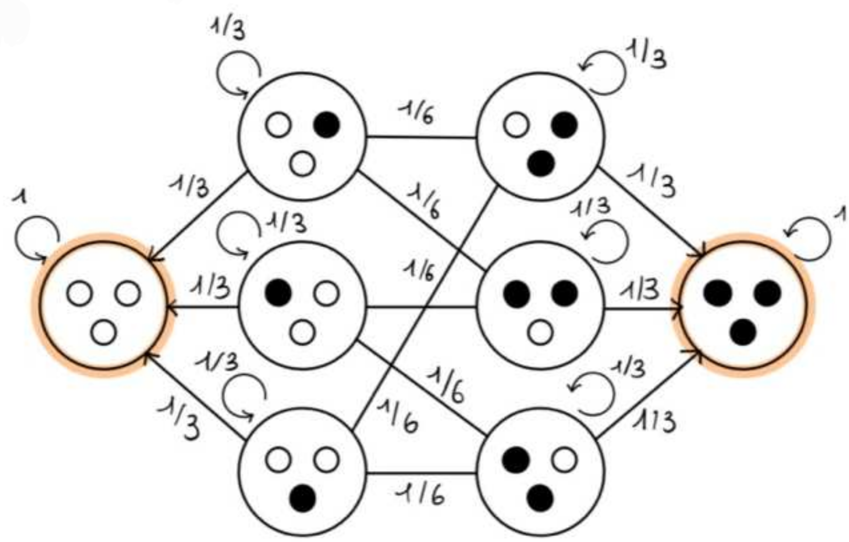
a4)



b) I rate di transizione sono dati dalla formula:

$$x \neq y, \quad \mathbb{P}_{xy} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \dfrac{1}{|B_i(x_{-i})|} & \text{se } (x,y) \in \mathcal{E}_{BR} \text{ per } i \text{ tc } x_i \neq x_j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dunque nel caso b1) dove $n_1 = 3$:



Il rate dei self-loop è calcolato come:

$$1 - \sum_{y}' P_{xy} \quad , \quad y \neq x$$

in questo caso:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(x(t) = X \mid X(0) = (+1, -1, +1)) = a,$$

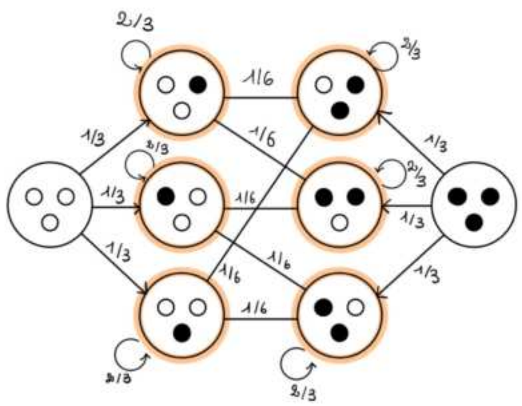
in particolare:

- $a = 0$: se X non è Nash essendo uno stato transiente
- Per gli equilibri di Nash possiamo calcolarla calcolando la probabilità di entrare in uno stato assorbente, cioè:

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(x(t) = (1,1,1) \mid X(0) = (+1, -1, +1)) = (I - P_{TT})^{-1} P_{TR} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(x(t) = (-1,-1,-1) \mid X(0) = (+1, -1, +1)) = (I - P_{TT})^{-1} P_{TR} = \frac{1}{3}$$

Mentre nel caso b2) dove $n_1 = 0$:



dal momento che il nodo di partenza si trova già in una classe assorbente

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(x(t) = X \mid X(0) = (+1, -1, +1)) = 0, \ \forall X \notin C_a$$

essendo C_a la classe assorbente.

Visto che $X(0)$ appartiene alla classe assorbente C_a e siccome C_a è fortemente connessa e aperiodica esiste la distribuzione limite che sappiamo coincidere con la distribuzione invariante.

Quindi concludiamo che $\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(x(t) \in C_a \mid X(0) = (+1, -1, +1)) = \frac{1}{6}$

Esercizio 3. Si consideri una rete stradale con due nodi $\mathcal{V} = \{o, d\}$ e due link paralleli $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$, entrambi con nodo coda o e nodo testa d. Il link i-esimo, per $i = 1, 2$, ha una funzione di ritardo $\tau_i(x)$ pedaggio $\omega_i \in [0, 1]$, così che il costo percepito dall'utente su tale link è $\omega_i + \tau_i(f_i)$, dove $f_i \geq 0$ è il flusso sul link e_i. Si assuma che

$$\tau_1(x) = 0\,, \qquad \tau_2(x) = \frac{3}{2}x\,,$$

e si consideri un flusso unitario $(f_1, f_2) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{E}}$, $f_1 + f_2 = 1$.

(a) Si determini il flusso di equilibrio di Wardrop $(f_1^{(\omega)}, f_2^{(\omega)})$ come funzione del vettore dei pedaggio $\omega = (\omega_1, \omega_2)$.

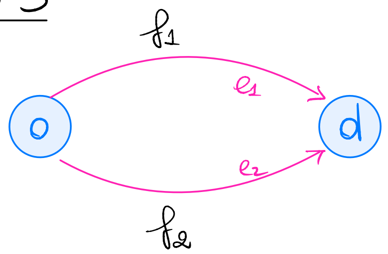
Si consideri ora un gioco a due giocatori con insieme delle azioni $\mathcal{A} = [0, 1]$ in cui i giocatori sono i gestori dei due link, e l'azione e la funzione di utilità del giocatore i-esimo sono rispettivamente il pedaggio ω_i e l'incasso al corrispondente equilibrio di Wardrop:

$$u_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i f_i^{(\omega)}\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

(b) Si determinino le funzioni *best response* $\mathcal{B}_1(\omega_2)$ e $\mathcal{B}_2(\omega_1)$;

(c) Si determini l'equilibrio di Nash del gioco.

ESERCIZIO 3



$\tau_i(x)$ funzione di ritardo di e_i
$\omega_i \in [0,1]$ pedaggio

$\omega_i + \tau_i(f_i)$ costo percepito dall'utente su e_i

$f_i \geq 0$ flusso sul link e_i

Si assume $\tau_1(x) = 0$ e $\tau_2(x) = \frac{3}{2} x$ e $(f_1, f_2) \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{E}}$, $f_1 + f_2 = 1$

a) Flusso all'equilibrio di Wardrop $(f_1^{(\omega)}, f_2^{(\omega)})$ come funzione del vettore dei pedaggi $\omega = (\omega_1, \omega_2)$

$$\begin{cases} f_i \geq 0 & i = 1,2 \\ f_1 + f_2 = 1 \\ \omega_1 = \omega_2 + \frac{3}{2} f_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} f_i \geq 0 & i = 1,2 \\ f_2 = \frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_2) \\ f_1 = 1 - \frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_2) \end{cases}$$

allora
$$\begin{cases} \text{Se } \omega_1 \leq \omega_2 & f_1 = 1, \quad f_2 = 0 \\ \text{Se } \omega_1 > \omega_2 & f_1 = 1 - \frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_2), \quad f_2 = \frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_2) \end{cases}$$

b) Gioco a due giocatori con $\mathcal{A} = [0,1]$
Azione del giocatore i-esimo ω_i
Utilità del giocatore i-esimo: incasso al corrispondente equilibrio di Wardrop:

$$u_i(\omega_1, \omega_2) = \omega_i f_i^{(\omega)}, \qquad i = 1,2$$

Funzioni di best response:

$$B_1(\omega_2) \longrightarrow u_1 = \omega_1 - \frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_2)\,\omega_1$$

$$u_1 = -\frac{2}{3}\omega_1^2 + \omega_1\left(\frac{2}{3}\omega_2 + 1\right),$$ la massimizziamo rispetto all'azione ω_1

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial \omega_1} = -\frac{4}{3}\omega_1 + \frac{2}{3}\omega_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{3}{4}$$

con $\omega_i \in [0,1]$ $i = 1,2$

Allora:
$$B_1(\omega_2) = \begin{cases} \omega_1 = 1 & \text{se } \omega_2 > \frac{1}{2} \\ \omega_1 = \frac{1}{2}\omega_2 + \frac{3}{4} & \text{se } \omega_2 \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Mentre $B_2(\omega_1) \longrightarrow u_2 = \omega_2 \left(\frac{2}{3}(\omega_1 - \omega_2) \right)$

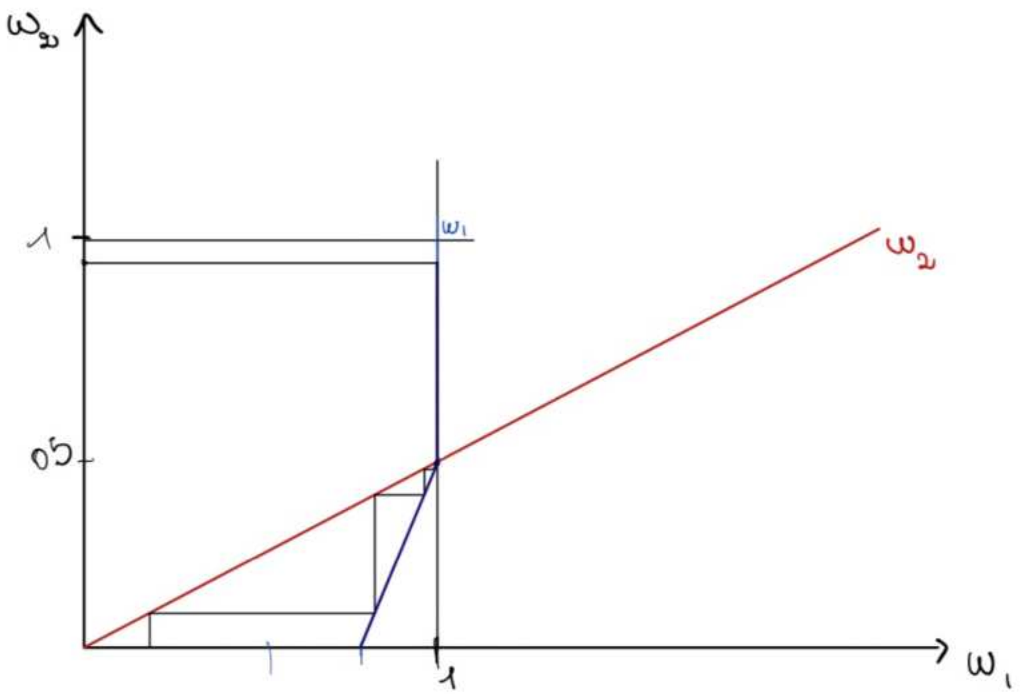
$$= \frac{2}{3}\omega_1\omega_2 - \frac{2}{3}\omega_2^2$$

$$\frac{\partial u_2(x)}{\partial \omega_2} = \frac{2}{3}\omega_1 - \frac{4}{3}\omega_2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \left(\frac{2}{3}\omega_1\right)\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\omega_1$$

Allora $B_2(\omega_1) = \frac{1}{2}\omega_1$

c) L'equilibrio di Nash è dato da $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = \frac{1}{2}$ perchè in questa configurazione entrambi i giocatori giocano la loro best response $\Rightarrow X^* = (\omega_1 = 1, \omega_2 = \frac{1}{2})$

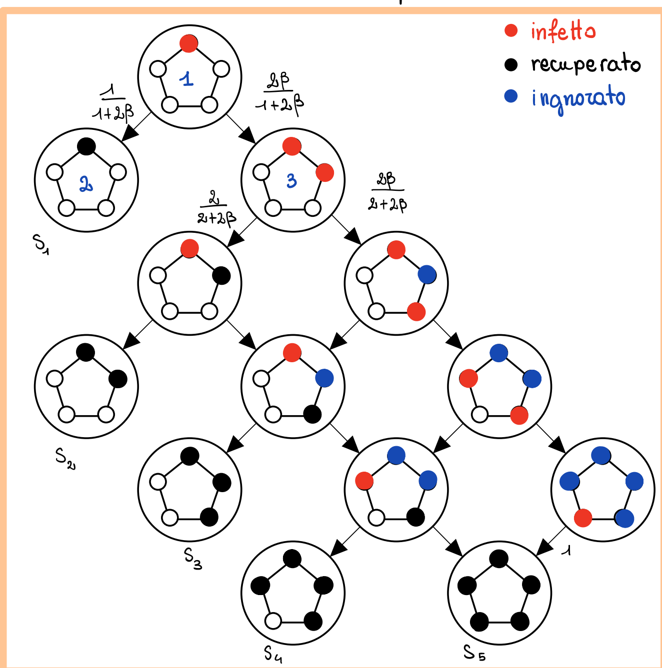


Esercizio 4. Si consideri un modello SIR su un anello con n nodi, dove al tempo $t = 0$ un solo nodo è infetto e tutti gli altri sono suscettibili. Si identifichino gli stati assorbenti che possono essere raggiunti e si calcolino le probabilità di ingresso in ciascuno stato assorbente.

Esercizio 4)

Nel modello SIR gli stati assorbenti sono tutti quelli in cui non sono presenti nodi infetti; essendo che il grafo è un anello allora gli unici stati assorbenti sono quelli in cui i nodi recuperati sono tutti adiacenti.

Per studiare la situazione abbiamo costruito un grafo di transizione con i seguenti rate:
- guarigione $= 1$
- infezione $= \beta$



In questo grafo ogni transizione verso destra rappresenta una infezione, mentre una transizione a sinistra indica una guarigione di un nodo della frontiera.

Tutte le probabilità di transizione verso destra sono uguali a $\frac{\beta}{1+\beta}$ metre verso sinistra sono uguali a $\frac{1}{1+\beta}$ eccetto per le transizioni dal primo nodo:

- infatti dal $P_{1,2} = \frac{1}{1+2\beta}$ essendo una gara esponenziale tra una guarigione e 2 archi con rate β; quindi $P_{1,3} = \frac{2\beta}{1+2\beta}$

Per tutti gli altri nodi invece siamo solo interessati a cosa accade alla frontiera, senza interessarci a cosa accade ai nodi interni dato che non influiscono lo stato assorbente in cui finiremo.

Chiamiamo ora $S_1, S_2, \dots S_n$ gli stati assorbenti con n nodi recuperati:

- $\mathbb{P}(S_1) = \frac{1}{1+2\beta}$ indipendentemente dal numero di nodi
- $\forall S_i \quad i = 2 : n-1 \quad \mathbb{P}(S_i) = \frac{2\beta}{1+2\beta} \left((i-1) \cdot \frac{\beta^{i-2}}{(1+\beta)^{i-2}} \cdot \frac{1}{(1+\beta)^2} \right)$

prob. di arrivare al nodo 3

\# di percorsi per arrivare allo stato

probabilità di fare $(i-2)$ infezioni

probabilità di 2 guarigioni alla frontiera

- $\mathbb{P}(S_n) = 1 - \sum_i^{n-1} \mathbb{P}(S_i)$