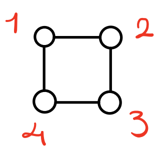
Homework 1 - Processi Stocastici

Moubane Abdelouahab - s305716, Racca Riccardo - s315163 e Vay Edoardo - s316737

Collaborazione con M. A. Longo S308756, F. Scaramozzino S312856 per punti dell'esercizio 1

(1) una DTMC con almeno 3 stati tale per cui tutte le righe della matrice di transizione abbiano almeno due elementi strettamente positivi e tale che ammetta una distribuzione stazionaria, ma non una distribuzione limite.

Per le catene periodiche non esiste distribuzione limite, perció é sufficiente costruire un grafo periodico che ammetta distr. stazionaria:
proviamo con un anello C-4



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

P é una matrice doppiamente stocastica
$\Rightarrow \exists$ distribuzione π stazionaria pari alla uniforme
$\Rightarrow \pi = [1/4 \dots 1/4]$

(2) un Processo di Poisson non omogeneo con intensità pari a $\lambda(x) = 2\sin x$. Per "esibire" il processo qui si intende spiegare come fare a costrurlo in maniera esplicita

$\lambda(x) = 2\,\mathrm{sen}(x)$ parametro di una poisson non omogeneo $M(t)$

$\Rightarrow M(t) - M(S) \sim$ poisson di media $\int_t^S \lambda(x)\,dx$

ma se $S = \pi$ e $t = 2\pi$

$\Rightarrow 2\int_\pi^{2\pi} \mathrm{sen}\,x\,dx = -2\cos(x)\Big|_\pi^{2\pi} = -4$ ma la media di ua poisson non puó essere negativa $\Rightarrow$ impossibile

(3) un Processo di Poisson non omogeneo con intensità pari a $\lambda(x) = 2\log(x+2)$. Per "esibire" il processo qui si intende spiegare come fare a costrurlo in maniera esplicita

Costruiamo un processo di Poisson non omogeneo tramite "Time Rescaling", quindi:

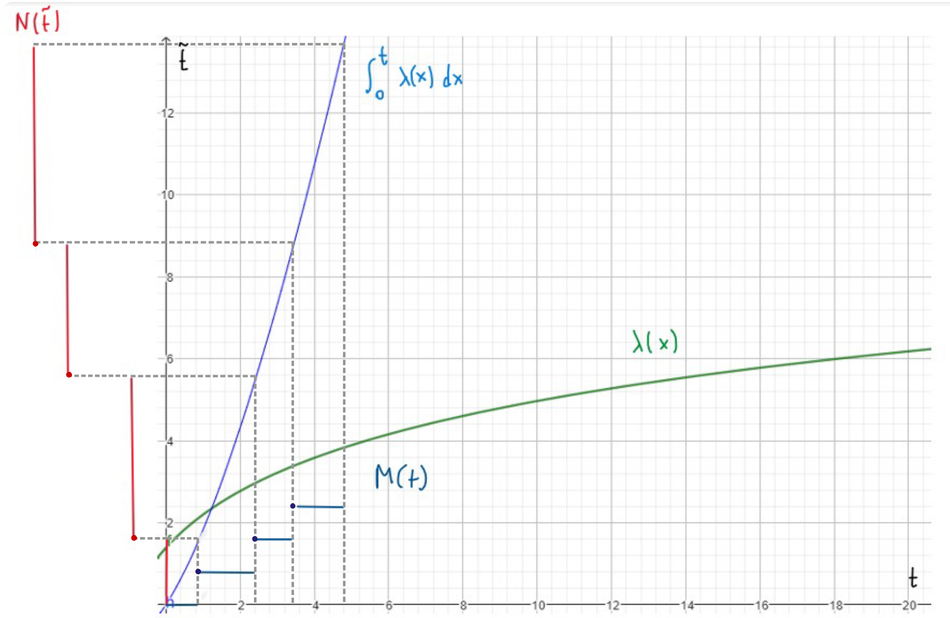
sia $N(t)$ un processo di Poisson con $\lambda = 1$

Sia $\lambda(x) = 2\log(x+2)$ che verifica $\lambda(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$ allora:

$$M(t) = N(\tilde{t}) \quad \text{con} \quad \tilde{t} = \int_0^t 2\log(x+2)\,dx \qquad \text{processo di Poisson}$$

$$\tilde{t}(t) = 2 \qquad \begin{array}{cc} \log(x+2) & 1 \\ \frac{1}{x+2} & x \end{array} \qquad 2\left(\log(x+2)x \Big|_0^t - \int_0^t \frac{x}{x+2}\,dx \right) = 2\left(\log(t+2)t - \int_0^t \frac{x}{x+2}\,dt \right)$$

$$= 2\left(\log(t+2)t - t + 2\int_0^t \frac{1}{x+2}\,dx \right) = 2\log(t+2)t - 2t + 4\log(t+2) - 4\log(2)$$



— $N(\tilde{t})$ la traiettoria di un processo di Poisson omogeneo di $\lambda = 1$

(4) una DTMC per cui esistono esattamente tre distribuzioni stazionarie

per assurdo, ipotizziamo una DTMC con π_1, π_2, π_3 distr. stazionarie distinte

(*) $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in (0,1)$ e t.c. $\alpha+\beta+\gamma = 1 \mid \alpha\pi_1 + \beta\pi_2 + \gamma\pi_3 = \pi_4$ con $\pi_1 \neq \pi_4$, $\pi_2 \neq \pi_4$, $\pi_3 \neq \pi_4$

$\Rightarrow \quad \pi_4 P = (\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 + \gamma\pi_3)P = \alpha\pi_1 P + \beta\pi_2 P + \gamma\pi_3 P = \alpha\pi_1 + \beta\pi_2 + \gamma\pi_3 = \pi_4$

$\Rightarrow \pi_4$ è una mis. stazionaria diversa

$$\sum_i^n \pi_{4_i} = \sum_i^n (\alpha\pi_{1i} + \beta\pi_{2_i} + \gamma\pi_{3_i}) = \alpha\sum\pi_{1_i} + \beta\sum\pi_{2_i} + \gamma\sum\pi_{3_i} = \alpha+\beta+\gamma = 1$$

$\Rightarrow \pi_4$ è una distribuzione stazionaria $\Rightarrow$ assurdo che π_1, π_2, π_3 siano le uniche distribuzioni

(*) π_4 esiste perché appartenente allo sp. convesso generato da π_1, π_2, π_3 che sono distinti $\Rightarrow \neq \emptyset$

Caso infinito

$$(\pi_4 P)_j = (\alpha\pi_1 + \beta\pi_2 + \gamma\pi_3)\, P_{\bullet,j} = \sum_i^\infty (\alpha\pi_{1i} + \beta\pi_{2i} + \gamma\pi_{3i})\, P_{ij} = \alpha\sum_i^\infty \pi_{1i} P_{ij} + \beta \ldots + \gamma \ldots$$

ma $\sum_i^\infty \pi_{k_i} P_{ij} = \pi_{k_j} \leq 1 < \infty \quad k = 1,2,3$

$\Rightarrow (\pi_4 P)_j = \alpha\pi_{1j} + \beta\pi_{2_j} + \gamma\pi_{3_j} = \pi_{4_j} \quad \Rightarrow \pi_4$ stazionaria assurdo

(5) una DTMC per cui esistono infinite distribuzioni stazionarie, ma nessuna distribuzione limite

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ che sono 2 nodi isolati $\Rightarrow$ esistono infinite π distribuzioni stazionarie composte come combinazioni convesse di π_1 e π_2

dove $\pi_1 = [1,0]'$ e $\pi_2 = [0,1]'$ e $\pi = \alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2$ con $\alpha \in [0,1]$

- La distribuzione limite non esiste, infatti $\lim_{n\to\infty} P^n = P = I$ quindi $\pi(0) P^n = \pi(0)$ sempre dipendente dalla distribuzione di partenza

2. Esercizio

Let $(X_n)_{n\geq 0}$ be a Markov chain on state space S. Prove the following:

- Any communication class E for the chain is maximal in the sense that if $E \subset F$ for a communication class F, then $E = F$.
- If E_1, E_2 are two communication classes for the chain and $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, then $E1 = E2$.

- E classe di comunicazione $E := \{i \in S : i \leftrightarrow j \ \forall j \in E$

$E \subset F$ classe di comunicazione

prendo $i \in F \setminus E \Rightarrow i \notin E$; $j \in E \Rightarrow j \in F \Rightarrow i \leftrightarrow j \Rightarrow i \in E$ assurdo $\Rightarrow F \setminus E = \emptyset$

$\Rightarrow F = E$

- E_1, E_2 classi comunicazione con $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$

chiamiamo $A = E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)$; $B = (E_1 \cap E_2)$; $C = E_2 \setminus (E_1 \cap E_2)$

insiemi disgiunti per costruzione

· siano: $i \in A$, $j \in B$, $k \in C$ $\Rightarrow i \not\leftrightarrow k$ poiché appartengono ad insiemi disgiunti

ma $i \leftrightarrow j$ dato che $i, j \in E_1$ e $j \leftrightarrow k$ dato che $j, k \in E_2$

$\Rightarrow i \leftrightarrow k$ ma questo é assurdo dato che $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \vee C = \emptyset$

· supponiamo $A = \emptyset \Rightarrow E_1 \subset E_2$ ma per il punto precedente, E_1 é massimale $\Rightarrow E_1 = E_2$

allo stesso modo se supponiamo $C = \emptyset \Rightarrow E_2 = E_1$

3. Esercizio

Mary is in prison and has 3 dollars; she can get out on bail if he has 8 dollars. A guard agrees to make a series of bets with her. If Mary bets A dollars, she wins A dollars with probability 0.4 and loses A dollars with probability 0.6. Find the probability that she wins 8 dollars before losing all of his money if

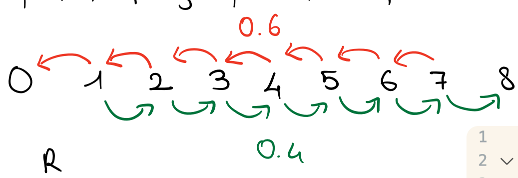
(1) she bets 1 dollar each time (timid strategy).

(2) she bets, each time, as much as possible but not more than necessary to bring his fortune up to 8 dollars (bold strategy).

Which strategy gives Mary the better chance of getting out of jail?

- $X_0 = 3 \quad X_1 = \{4, 2\} \quad X_2 = \{5, 3, 1\} \quad X_3 = \{6, 4, 2, 0\} \dots$

$\mathbb{P}$(visitare 8 per primo)



2 sink

1)

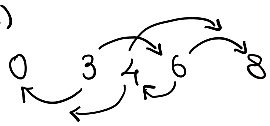
		T							R	
		1	2	3	4	5	6	7	8	0
T	1	0	0.4	0	0	0	0	0	0	0.6
	2	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0	0
	3	0	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0
	4	0	0	0.6	0	0.4	0	0	0	0
	5	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0	0
	6	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0	0
	7	0	0	0	0	0	0.6	0	0.4	0
R	8								1	0
	0								0	1

$$F = (I - P_{TT})^{-1} P_{TR}$$

$$F(3,8) = 0.0963$$

```python
import numpy as np
PTT = np.array([
    [0, 0.4, 0 , 0, 0, 0, 0],
    [0.6, 0, 0.4, 0, 0, 0, 0],
    [0, 0.6, 0, 0.4, 0, 0, 0],
    [0, 0, 0.6, 0, 0.4, 0, 0],
    [0, 0, 0, 0.6, 0, 0.4, 0],
    [0, 0, 0, 0, 0.6, 0, 0.4],
    [0, 0, 0, 0, 0, 0.6, 0]
])
PTR = np.array([
    [0, 0.6],
    [0, 0],
    [0, 0],
    [0, 0],
    [0, 0],
    [0, 0],
    [0.4, 0]
])
n = len(PTT[0])
inverse = np.linalg.inv(np.eye(n) - PTT)
F = np.matmul(inverse, PTR)
```

2)



$\Rightarrow$

		T			R	
		3	4	6	8	0
T	3	0	0	0.4	0	0.6
	4	0	0	0	0.4	0.6
	6	0	0.6	0	0.4	0
R	8				1	0
	0				0	1

$$F = (I - P_{TT})^{-1} P_{TR}$$

$\Rightarrow F(3,8) = 0.256$ maggiore

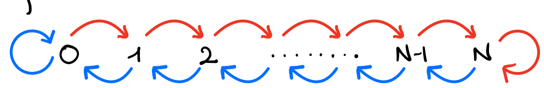
Si conclude che la seconda strategia ha probabilità più elevate di successo

4. Esercizio

Consider a DTMC with state space $S = 0, \ldots, N$ and transition probabilities $p(i, i+1) = p$, $p(i, i-1) = q$, for $1 \le i \le N-1$, where $p+q = 1$, $0 < p < 1$; assume $p(0,0) = p(N, N-1) = q$ and $p(0,1) = p(N,N) = p$
.

(1) Draw the graph (= transition diagram).
(2) Is the Markov chain irreducible?
(3) Is it aperiodic?
(4) What is the period of the chain?
(5) Find the stationary distribution

$S = \{0, \ldots, N\}$



$\bullet = q$, $\bullet = p$ $\}$ con $p+q=1$

2) la catena è irriducibile perché tutti gli stati comunicano tra loro
3) è aperiodica poiché sono presenti self-loop
4) il periodo è 1 dato lo stato 0 ha periodo 1 ed appartiene alla stessa classe di comunicazione di tutti i nodi
5) il grafo è fortemente connesso ed aperiodico $\Rightarrow \exists\, \pi$ distribuzione stazionaria

· Sappiamo anche che il processo è di Nascita e Morte $\Rightarrow \pi$ gode del bilancio dettagliato e quindi: $\pi(i-1) \cdot p = \pi(i) \cdot q$

$\Rightarrow \quad \pi(i) = \frac{p}{q}\pi(i-1) \qquad$ ma $\Rightarrow \pi(i) = \frac{p^2}{q^2}\pi(i-2) \quad \Rightarrow \pi(i) = \frac{p^i}{q^i}\pi(0)$

ma π è distr. di prob $\Rightarrow \sum_{i=0}^{N} \pi(i) = 1$

$\Rightarrow 1 = \sum_{i=0}^{N} \frac{p^i}{q^i}\pi(0) \quad \Rightarrow \quad \pi(0) = \frac{1}{M} \quad$ dove $M = \sum_{i=0}^{N} \frac{p^i}{q^i}$

simmetricamente otteniamo $\pi(N) = \frac{1}{k} \quad$ dove $k = \sum_{i=0}^{N} \frac{q^i}{p^i}$

$\Bigg\} \quad \frac{p^N}{q^N}\pi(0) = \pi(N)$

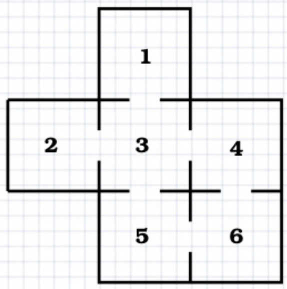
Quindi nel caso di $p > q \Rightarrow \pi(N) > \pi(0)$ e non solo,
essendo $\pi(i) = p^i/q^i\, \pi(0) \Rightarrow \pi(N) > \pi(N-1) > \ldots > \pi(1) > \pi(0)$

· Analogamente accade se $q < p$ nel verso opposto

· Se $p = q$ il grafo è bilanciato $\Rightarrow \pi$ dovrebbe essere uniforme
infatti $\pi(0) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N} 1} = \frac{1}{N+1}$ e $\pi(i) = \pi(0) \; \forall i$

5. Esercizio

A rabbit runs through the maze shown below. At each step it leaves the room it is in by choosing at random one of the doors out of the room.

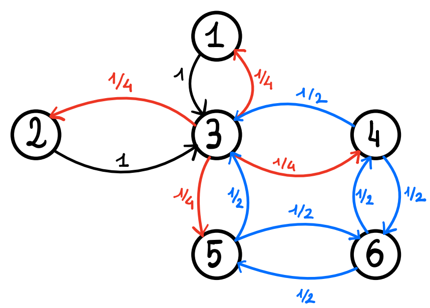


(1) Give the transition matrix P for this Markov chain.
(2) Show that it is irreducible but not aperiodic.
(3) Find the stationary distribution
(4) Now suppose that a carrot is placed on a deadly trap in Room 5. The rabbit starts in Room 1. Find the expected number of steps before reaching Room 5 for the first time, starting in Room 1.
(5) Find the expected time to return to room 1.

1)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & \;\;2 & \;\;3 & \;\;4 & \;\;5 & \;\;6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = P \end{array}$$

2) · la catena è periodica, infatti per ogni nodo i ogni walk da i a i ha lunghezza multipla di 2
· la catena è irriducibile perché tutti i nodi appartengono alla stessa classe di comunicazione

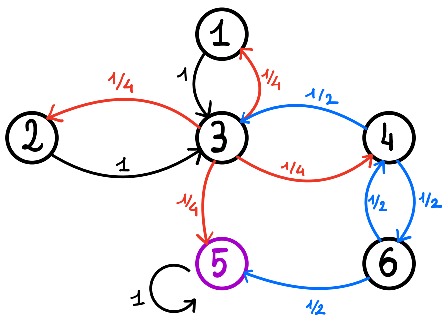


3) si tratta di risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} \pi_3 \cdot \frac{1}{4} = \pi_1 \\ \pi_3 \frac{1}{4} = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4 + \frac{1}{2}\pi_6 = \pi_3 \\ \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_6 = \pi_4 \\ \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{2}\pi_6 = \pi_5 \\ \frac{1}{2}\pi_4 + \frac{1}{2}\pi_5 = \pi_6 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \pi_1 = \pi_2 \\ \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 \\ \pi_3 = 4\pi_1 \\ \sum_{i}^{6} \pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi = [1/12, 1/12, 4/12, 1/6, 1/6, 1/6]$$

4)



$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & & & T & & & R \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
T & 3 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\
 & 4 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\
\hline
R & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$m(x) = \left((I - P_{TT})^{-1} \cdot e \right)_x$$

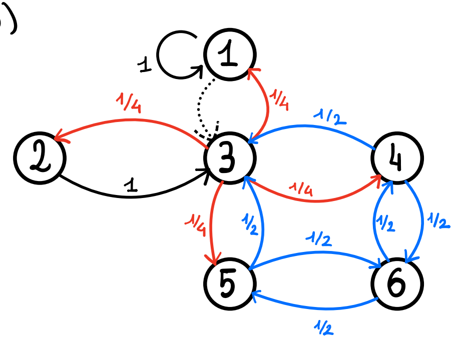
con $e = [1, \dots, 1]^T$

$m = [7, 7, 6, 6, 4]^T$

$m(1) = 7$

quindi il numero atteso di passi partendo da 1 a 5 è pari a 7

5)



$$
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & & & T & & & R \\
 & & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\
\hline
 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 3 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\
T & 4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\
 & 5 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\
 & 6 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
\hline
R & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

$m = [12, 11, 14, 14, 15]^T$

L'attesa del tempo di primo ritorno al nodo 1: $\mathbb{E}_1[T_1] = 1 + p(1,3)\,\mathbb{E}_3[T_1]$

$\mathbb{E}_3[T_1]$ lo abbiamo calcolato rendendo lo stato 1 assorbente ed è pari a 11.

Quindi il numero atteso di passi è pari a $11 + 1 = 12$

6. Esercizio

On his shelf, Mike keeps N books, labelled $1, 2, ..., N$. Mike picks a book j with probability $1/N$. Then Mike places it on the left of all others on the shelf. Mike repeats the process, independently. Construct a Markov chain which takes values in the set of all $N!$ permutations of the books.

(1) Discuss the state space of the Markov chain. Think how many elements it has and how they can be represented.

(2) Show that the chain is irreducible and aperiodic and find its stationary distribution.

Hint: You can guess the stationary distribution before computing it.

1) lo spazio degli stati ha $N!$ elementi caratterizzati dalle diverse permutazioni dei libri; ogni stato ha un self-loop e $N-1$ archi uscenti e $N-1$ archi entranti

2) ogni stato ha periodo 1 dato che hanno tutti un self-loop, quindi la catena è aperiodica; in più esiste sempre un path da uno stato ad un altro: infatti preso un qualsiasi nodo di arrivo j possiamo arrivarci da un qualunque altro stato i in N passi nel seguente modo: per ogni passo k scegliamo di spostare il libro che, nello stato j, è in posizione $N-k$

Essendo il grafo regolare e fortemente connesso, π esiste ed è pari alla uniforme

$$\pi(i) = \frac{1}{N!}$$

Qui di seguito riportiamo un esempio del grafo con $N=3$