



Designing Master Surgery Schedules with downstream unit integration

Stochastic Programming approach

Business Analytics

Abdelouahab Moubane, Riccardo Racca, Edoardo Vay

November 28, 2024



**Politecnico
di Torino**



Table of Contents

1 Introduzione

- ▶ Introduzione
- ▶ Definizione notazione e formulazione base
- ▶ Formalizzazione Stocastica
- ▶ Approcci risolutivi
- ▶ Esperimenti computazionali



Introduzione

1 Introduzione

Questo paper si pone l'obiettivo di designare l'assegnazioni di sale operatorie alle varie specialità chirurgiche all'interno di un ospedale per la gestione dei pazienti. Si tratta di un problema di particolare importanza data la continua richiesta di accesso alle sale operatorie.



Table of Contents

2 Definizione notazione e formulazione base

- ▶ Introduzione
- ▶ Definizione notazione e formulazione base
- ▶ Formalizzazione Stocastica
- ▶ Approcci risolutivi
- ▶ Esperimenti computazionali



Definizioni e notazioni

2 Definizione notazione e formulazione base

$T = \{1, 2, \dots, t_{\max}\} \rightarrow$ l'insieme di giorni del master surgery schedule, ciclico in $|T|$;

$O \rightarrow$ l'insieme delle sale operatorie;

$W \rightarrow$ l'insieme dei turni in una giornata (di equa durata);

$B \rightarrow$ l'insieme dei blocchi $b \in B$, in cui ciascun blocco è una tripla (t, o, w) ;

$B(t) \rightarrow$ l'insieme dei blocchi di un giorno $t \in T$;

$S \rightarrow$ l'insieme delle specialità chirurgiche;

$d_s \rightarrow$ domanda in numero di blocchi richiesti per la specialità $s \in S$ durante il ciclo lungo t_{\max} giorni;

$a_{st} \rightarrow$ disponibilità del numero di blocchi per la specialità chirurgica $s \in S$ nel giorno $t \in T$;

$p_s \rightarrow$ benefit ottenuto dall'assegnazione di una specialità chirurgica $s \in S$ ad un blocco;

$x_{sb} \rightarrow$ variabile binaria tale che: $x_{sb} = 1$ se la specialità chirurgica $s \in S$ viene assegnata al blocco $b \in B$, $x_{sb} = 0$ altrimenti.



formulazione base

2 Definizione notazione e formulazione base

$$\text{Max} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} p_s x_{sb} \quad (1)$$

Subject to:

$$\sum_{s \in S} x_{sb} \leq 1 \quad \forall b \in B \quad (2)$$

$$\sum_{b \in B} x_{sb} \geq d_s \quad \forall s \in S \quad (3)$$

$$\sum_{b \in B(t)} x_{sb} \leq a_{st} \quad \forall s \in S, \forall t \in T \quad (4)$$

$$x_{sb} \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S \quad \forall b \in B \quad (5)$$



Table of Contents

3 Formalizzazione Stocastica

- ▶ Introduzione
- ▶ Definizione notazione e formulazione base
- ▶ Formalizzazione Stocastica**
- ▶ Approcci risolutivi
- ▶ Esperimenti computazionali



Introduzione

3 Formalizzazione Stocastica

Costruiamo il modello stocastico a due stadi considerando le downstream units, ossia l'insieme dei letti, da reparto o da terapia intensiva con cui gestire i pazienti post-operazione, dove la stocasticità nel modello è introdotta dall'incertezza del tipo e numero di letti che serviranno a pazienti di una certa specialità, oltre che alla loro durata di permanenza.

Suddividiamo i pazienti in elettivi, quelli che sono in lista per un intervento, e non-elettivi, quelli che necessitano di interventi improvvisi.



Introduzione

3 Formalizzazione Stocastica

Definiamo 3 percorsi ospedalieri in fase post-operatoria. Nel primo, il paziente va inizialmente in terapia intensiva e poi viene spostato in reparto. Nel secondo il paziente va direttamente in reparto. Nel terzo, il paziente rimane solo in terapia intensiva.



Definizione e notazione

3 Formalizzazione Stocastica

$L \rightarrow$ insieme del tipo di letti;

$C_l \rightarrow$ numero di letti disponibili per il tipo $l \in L$;

$\Theta \rightarrow$ numero massimo di giorni di degenza;

$U \rightarrow$ è un insieme di giorni di cardinalità $|U| = kt_{max}$;

$U_i \rightarrow$ i-esimo periodo di tempo lungo t_{max} , t.c.: $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$, $U_j \cap U_i = \emptyset \ \forall i \neq j$;



Definizione e notazione

3 Formalizzazione Stocastica

$r_{lts\theta} \rightarrow$ variabile aleatoria indicante il numero di letti richiesti del tipo $l \in L$ nel giorno $t \in T$ per la specialità $s \in S$ assegnati a pazienti operati θ giorni prima, con $\theta \in \{0, 1, \dots, \Theta\}$, da pazienti elettivi. Allo stesso modo definiamo $\bar{r}_{lt\theta}$ come la variabile aleatoria analoga alla precedente per i pazienti non-elettivi.

Nei periodi U_i il numero di letti richiesti è descritto dalla variabile aleatoria $r_{lts\theta}^i$, ciascuna identicamente distribuita come $r_{lts\theta}$. Allo stesso modo definiamo $\bar{r}_{lt\theta}^i$ come la variabile aleatoria analoga alla precedente per i pazienti non-elettivi.

$B(u - \theta) \rightarrow$ insieme dei blocchi del giorno $(u - \theta) \bmod T$, con $u \in U$.



formulazione stocastica a due stadi

3 Formalizzazione Stocastica

$$\text{Max} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} p_s x_{sb} - \mathbf{E}[Q(x, r, \bar{r})] \quad (6)$$

Subject to: 2 - 5

Dove $Q(x, r, \bar{r})$ è il valore ottimale del problema di ottimizzazione del secondo stadio, illustrato nella pagina successiva.

Definiamo ora la variabile di secondo stadio, y_{lu} indicante il numero di letti del tipo $l \in L$ usati oltre la capacità disponibile C_l durante il giorno $u \in U$. Le variabili di secondo-stadio non rappresentano decisioni di ricorso vere e proprie, perché vengono semplicemente calcolate una volta che il master surgery schedule è fissato e le richieste letto realizzate.



formulazione stocastica a due stadi

3 Formalizzazione Stocastica

$$\text{Min} \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} \alpha \gamma_{lu} \quad (7)$$

Subject to:

$$\sum_{s \in S} \sum_{\theta=0}^{\Theta} \sum_{b \in B(u-\theta)} r_{lus\theta}^i x_{sb} + \sum_{\theta=0}^{\Theta} \bar{r}_{lu\theta}^i \leq C_l + \gamma_{lu}$$

$$\forall l \in L, \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall u \in U_i \quad (8)$$

$$0 \leq \gamma_{lu} \leq \gamma \quad \forall l \in L, \forall u \in U \quad (9)$$



Table of Contents

4 Approcci risolutivi

- ▶ Introduzione
- ▶ Definizione notazione e formulazione base
- ▶ Formalizzazione Stocastica
- ▶ Approcci risolutivi**
- ▶ Esperimenti computazionali



Symmetry-breaking constraint

4 Approcci risolutivi

Introduciamo un vincolo per restringere lo spazio delle configurazioni che hanno lo stesso livello di benefit e costo: in questo modo riduciamo il numero di soluzioni con lo stesso valore obiettivo.

$$x_{s_j b_i} \leq \sum_{s \in \{s_j, \dots, s_{|S|}\}} x_{s b_{i+1}} \quad (10)$$

$$\forall s_j \in \{s_1, s_2, \dots, s_{|S|}\}, \quad \forall b_i \in \{b_1^t, \dots, b_{|O||W|-1}^t\}$$



Scenarios and deterministic equivalent model

4 Approcci risolutivi

Per affrontare la risoluzione di questo problema, scriviamo l'equivalente deterministico realizzando le variabili casuali in scenari. Chiamiamo A l'insieme di tutti gli scenari e $r_{lus\theta}^{ia}$, $\bar{r}_{lu\theta}^{ia}$ le realizzazioni.

$$\text{Max} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} p_s x_{sb} - \sum_{a \in A} \pi_a \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} \alpha \gamma_{lu}^a \quad (11)$$

Subject to: 2 - 5, 10

$$\sum_{s \in S} \sum_{\theta=0}^{\Theta} \sum_{b \in B(u-\theta)} r_{lus\theta}^{ia} x_{sb} + \sum_{\theta=0}^{\Theta} \bar{r}_{lu\theta}^{ia} \leq C_l + \gamma_{lu}^a$$
$$\forall a \in A, \forall l \in L, \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall u \in U_i \quad (12)$$

$$0 \leq \gamma_{lu}^a \leq \gamma \quad \forall a \in A, \forall l \in L, \forall u \in U \quad (13)$$



Benders decomposition: Problema Master

4 Approcci risolutivi

$$\text{Max} \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} p_s x_{sb} - \sum_{a \in A''} \pi'_a \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} \alpha \gamma_{lu}^a - \sum_{a \in A' \setminus A''} \pi'_a z_a \quad (14)$$

subject to: 2 - 5, 10

$$\sum_{s \in S} \sum_{\theta=0}^{\Theta} \sum_{b \in B(u-\theta)} r_{lus\theta}^{ia} x_{sb} + \sum_{\theta=0}^{\Theta} \bar{r}_{lu\theta}^{ia} \leq c_l + \gamma_{lu}^a \quad (15)$$

$$\forall a \in A'', \forall l \in L, \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall u \in U_i$$

$$0 \leq \gamma_{lu}^a \leq \gamma \quad \forall a \in A'', \forall l \in L, \forall u \in U \quad (16)$$

$$\text{Benders optimality cuts, Benders feasibility cuts} \quad (17)$$



Benders Decomposition: Sottoproblemi

4 Approcci risolutivi

Per ciascuno scenario $a \in A' \setminus A''$:

$$z_a^* = \text{Min} \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} \alpha \gamma_{lu}^a \quad (18)$$

subject to:

$$\gamma_{lu}^a \geq \sum_{s \in S} \sum_{\theta=0}^{\Theta} \sum_{b \in B(u-\theta)} r_{lus\theta}^{ia} x_{sb} + \sum_{\theta=0}^{\Theta} \bar{r}_{lu\theta}^{ia} - C_l \quad (19)$$

$$\forall l \in L, \forall i \in \{1, \dots, k\}, \forall u \in U_i$$

$$-\gamma_{lu}^a \geq -\gamma \quad \forall l \in L, \forall u \in U \quad (20)$$

$$\gamma_{lu}^a \geq 0 \quad \forall l \in L, \forall u \in U \quad (21)$$



Duale del Sottoproblema

4 Approcci risolutivi

$$z_a^* = \text{Max} \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} \left(\sum_{s \in S} \sum_{\theta=0}^{\Theta} \sum_{b \in B(u-\theta)} r_{lus\theta}^{ia} x_{sb} + \sum_{\theta=0}^{\Theta} \bar{r}_{lu\theta}^{ia} - c_l \right) \mu_{lu}^a - \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} \gamma \nu_{lu}^a \quad (22)$$

subject to:

$$\mu_{lu}^a - \nu_{lu}^a \leq \alpha \quad \forall l \in L, \forall u \in U \quad (23)$$

$$\mu_{lu}^a \geq 0 \quad \forall l \in L, \forall u \in U \quad (24)$$

$$\nu_{lu}^a \geq 0 \quad \forall l \in L, \forall u \in U \quad (25)$$



Tagli di ottimalità e ammissibilità

4 Approcci risolutivi

$$z_a \geq \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} \left(\sum_{s \in S} \sum_{\theta=0}^{\Theta} \sum_{b \in B(u-\theta)} r_{lus\theta}^{ia} x_{sb} + \sum_{\theta=0}^{\Theta} \bar{r}_{lu\theta}^{ia} - C_l \right) \mu_{lu}^{ap} - \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} \gamma \nu_{lu}^{ap} \quad (26)$$

$$\forall a \in A' \setminus A'', \quad \forall l \in L, \quad \forall u \in U$$

$$0 \geq \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} \left(\sum_{s \in S} \sum_{\theta=0}^{\Theta} \sum_{b \in B(u-\theta)} r_{lus\theta}^{ia} x_{sb} + \sum_{\theta=0}^{\Theta} \bar{r}_{lu\theta}^{ia} - C_l \right) \mu_{lu}^{ar} - \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} \gamma \nu_{lu}^{ar} \quad (27)$$

$$\forall a \in A' \setminus A'', \quad \forall l \in L, \quad \forall u \in U$$

Con ν_{lu}^{ar} , μ_{lu}^{ar} qualunque raggio estremo e ν_{lu}^{ap} , μ_{lu}^{ap} un qualsiasi punto estremo duale.



Framework Algoritmico

4 Approcci risolutivi

Per risolvere il problema ora è sufficiente risolvere il problema Master senza tagli di Benders e aggiungerli dinamicamente resolvendo i sottoproblemi associati a x_{sb}^* e z_a^* in modo iterativo. Si può notare come in realtà si possano trovare i raggi estremi e i punti estremi senza bisogno di un solver.

Per semplicità indichiamo con:

$$\rho_{lu}^a = \sum_{s \in S} \sum_{\theta=0}^{\Theta} \sum_{b \in B(u-\theta)} r_{lus\theta}^{ia} x_{sb} + \sum_{\theta=0}^{\Theta} \bar{r}_{lu\theta}^{ia} - C_l \quad (28)$$

il coefficiente di μ_{lu}^a



Table of Contents

5 Esperimenti computazionali

- ▶ Introduzione
- ▶ Definizione notazione e formulazione base
- ▶ Formalizzazione Stocastica
- ▶ Approcci risolutivi
- ▶ **Esperimenti computazionali**



Generazione istanze

5 Esperimenti computazionali

L'approccio verrà testato su un totale di 9 istanze divise in 3 piccole, 3 medie e 3 grandi:

- piccola \rightarrow 5 sale operatorie, 2 turni e $|S| \in \{5, 7, 9\}$
- media \rightarrow 10 sale operatorie, 2 turni e $|S| \in \{7, 9, 11\}$
- grande \rightarrow 15 sale operatorie, 2 turni e $|S| \in \{9, 11, 13\}$.

Assumiamo che il ciclo del master surgery schedule U_i sia di una settimana.

Definiamo il livello di attività λ_s di una determinata specialità s , come la misura che indica intuitivamente quanto la specialità s è bisognosa di un letto, dopo un'operazione. Inoltre si definisce la percentuale $\psi_s = \frac{\lambda_s}{\sum_{s' \in S} \lambda_{s'}}$. Sulla base di questi due valori λ_s e ψ_s , generiamo

le restanti caratteristiche di ciascuna specialità.



Generazione scenari

5 Esperimenti computazionali

1. Si genera una lista di pazienti elettivi per ogni periodo U_i e per ogni specialità chirurgica s da $Poisson(\frac{9\bar{\lambda}_s+10}{100})$ troncata ad un massimo di $\lceil \frac{1+\lambda_s}{5} \rceil$, dove $\bar{\lambda}_s$ è una perturbazione di λ_s con un valore casuale in $[-0.5, 0.5]$.
2. Per ogni paziente della lista, si genera un path usando la distribuzione associata che dipende da $\bar{\lambda}_s$.
3. Per ogni paziente si genera la durata di permanenza nel ICU e/o nel reparto, da una Geometrica troncata.

Per ridurre il costo computazionale e l'uso di memoria, per ogni specialità la lista dei pazienti elettivi di ogni periodo U_i è unica. In altre parole, verranno generate solo k liste per ogni specialità nel ciclo grande U .



Analisi della stabilità nel campione

5 Esperimenti computazionali

Per analizzare la stabilità nel campione, consideriamo l'istanza piccola e fissiamo i parametri del modello stocastico α e γ . Consideriamo $|A''| = 3$ e valori diversi per il numero di scenari $|A'| \in \{253, 503, 1003, 2003\}$ e per il numero di settimane $k \in \{260, 520, 1040\}$.

Aumentare $|A'|$ e k ci permette di aggiungere delle nuove casistiche. Nel primo caso aumentiamo gli scenari e si approssima meglio lo stimatore del valore atteso della penalità nel problema master, invece nel secondo caso si complica il sottoproblema aumentandone la dimensione.



BoxPlot

5 Esperimenti computazionali

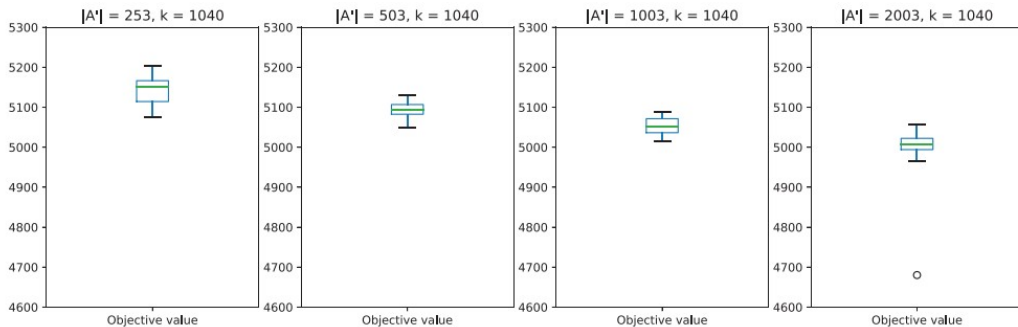


Figure: Risultati stabilità



Analisi della trattabilità computazionale

5 Esperimenti computazionali

Ora osserviamo alcuni risultati computazionali che ci permettono di valutare la trattabilità dell'approccio usato.

Average results across 5 runs for medium instances.

k	$ S $	253 scenarios		503 scenarios		753 scenarios		1003 scenarios	
		Time (s)	Gap (%)	Time (s)	Gap (%)	Time (s)	Gap (%)	Time (s)	Gap (%)
260	7	1349	0.00	3033	0.01	2742	0.01	3373	0.03
	9	1412	0.02	1867	0.02	2367	0.01	2349	0.00
	11	3600	0.19	3600	1.40	3600	3.27	3600	5.88*
520	7	2954	0.09	3522	0.37	3600	0.46	3600	1.54
	9	3180	0.06	3600	0.12	3600	0.12	3600	0.23
	11	3600	1.97	3600	–	3600	–	3600	–
1040	7	3600	4.48	3600	10.45	3600	4.30	3600	7.76
	9	3600	1.79*	3600	4.60*	3600	4.30*	3600	5.56*
	11	3600	–	3600	–	3600	–	3600	–

*At least one run did not find any solution within the time limit.

Figure: Trattabilità computazionale



Designing Master Surgery Schedules with downstream unit integration