

Esame di: **Controlli Automatici**

Consegna: **31 gennaio 2024**

Gruppo: **CA23-20**

Studenti: **Alessandro Ingrassia, 0742779** (corrispondente)

Gabriele Baiamonte, 0729987

Gianfranco Perna, 0731387

Marco Trupia, 0741736

Riccardo Rubino, 0730184

Salvatore Morello, 0736864

Simone Ribisi, 0731512

Risultato:

(a cura del docente)

Commenti generali alla soluzione *(a cura del docente):*

Tema Treno a levitazione elettromagnetica

Si vuole progettare la sospensione a levitazione elettromagnetica di un treno, nei cui binari è presente una sorgente di campo magnetico generata da un circuito formato da un'induttanza L , una resistenza non lineare $R(i)$ e da un generatore di tensione V . Nello specifico, $R(i)$ è una resistenza che varia in funzione della corrente e rappresenta il modello matematico di un transistor. La forza magnetica agisce sul treno contrastando la forza peso del treno e permettendo la levitazione.



Equazioni

$$m \ddot{y} + \gamma \dot{y}^2 + k \frac{i^2}{y^2} = mg \quad (1)$$

$$L \frac{di}{dt} + R(i) i = v \quad (2)$$

$$R(i) = \frac{e^i}{(1 + e^i)^2} \quad (3)$$

Tabella 1 - Variabili e altre funzioni

Variab.	Descrizione
y	Sollevamento del treno dai binari [m]
i	Corrente [A]
v	Tensione [V]
$R(i)$	Resistenza descritta tramite una funzione sigmoidea [Ω]

Tabella 2 - Parametri

Param.	Descrizione	Valore
m	Massa del treno [Kg]	1000
γ	Coefficiente di attrito viscoso [Kg/s]	50
k	Coefficiente di accoppiamento magnetico [N/m]	1000
L	Induttanza [H]	0.1

Tabella 3 - Condizioni di equilibrio e Requisiti

Equilibrio (H1)	\bar{i} e \bar{y} da determinare
Equilibrio (H2)	$\bar{x}_3 = 0$
Requisito (R1)	Inseguimento perfetto di un gradino e di una rampa, con tempo di risposta non superiore a 2.5s ed eventuali oscillazioni entro il 5% dal valore di regime.

1 Parte Simbolica

Si risponda ai seguenti quesiti in modo simbolico:

- (a) Usando le condizioni (H1) nella Tabella 3, trovare le configurazioni di equilibrio del sistema.

Soluzione:

Al fine di determinare le condizioni di equilibrio del sistema, cerco \bar{y} e \bar{i} .
 \bar{y} e \bar{i} sono delle costanti, dunque:

$$\begin{cases} \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \frac{di}{dt} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Imponendo tali condizioni nelle equazioni del sistema, otteniamo:

$$R(\bar{i})\bar{i} = \bar{v} \rightarrow \bar{i} = \frac{\bar{v}}{R(\bar{i})} \quad (5)$$

Troviamo un'equazione trascendentale, quindi imponiamo: $\bar{i} = 0.5A$

Invertendo l'equazione ricaviamo: $\bar{v} = 0.1175V$

$$k \frac{\bar{i}^2}{y^2} = mg \rightarrow \bar{y} = \sqrt{\frac{k}{mg} \frac{\bar{v}}{R(\bar{i})}} \quad (6)$$

$$\bar{y} = 0.1596m \quad (7)$$

Correzione (a cura del docente):

- (b) Assumendo piccoli spostamenti dello stato del sistema dagli equilibri trovati sopra, determinare il modello linearizzato per le variabili traslate.

Soluzione:

Prima di eseguire la linearizzazione ricavo la forma di stato imponendo le seguenti variabili di stato:

$$x_1 = y \quad (8)$$

$$x_2 = \dot{y} \quad (9)$$

$$x_3 = i \quad (10)$$

derivando quest'ultime otteniamo la forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = g - \frac{\gamma}{m}x_2^2 - \frac{k}{m}\frac{x_3^2}{x_1^2} \\ \dot{x}_3 = \dot{v} = \frac{1}{L}v - \frac{1}{L}\frac{e^{x_3}}{(1+e^{x_3})^2}x_3 \end{cases} \quad (11)$$

A questo punto possiamo ricavare le matrici A,B della forma di stato già linearizzata applicando il seguente metodo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (12)$$

con:

$$A = \frac{\delta f(x, u)}{\delta x} \quad (13)$$

e

$$B = \frac{\delta f(x, u)}{\delta u} \quad (14)$$

valutate opportunamente nei punti di equilibrio:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad (15)$$

otteniamo quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{k}{m}\frac{x_3^2}{x_1^3} & -2\frac{\gamma}{m}\bar{x}_2 & -\frac{k}{m}\frac{1}{x_1^2}2\bar{x}_3 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L}\frac{e^{\bar{x}_3} + e^{2\bar{x}_3} + \bar{x}_3 e^{\bar{x}_3} - \bar{x}_3 e^{2\bar{x}_3}}{(1+e^{\bar{x}_3})^3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Correzione (a cura del docente):

- (c) Indicando con x_0 il generico stato iniziale, determinare l'evoluzione libera del modello ed esprimerla come $M(A, x_0) m(t)$, con $m(t)$ il vettore dei modi.

Soluzione:

L'evoluzione libera è definita come:

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (18)$$

Dove A è la matrice ricavata al punto precedente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{k}{m} \frac{\overline{x_3^2}}{x_1^3} & -2 \frac{\gamma}{m} \overline{x_2} & -\frac{k}{m} \frac{1}{x_1^2} 2 \overline{x_3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} \frac{e^{\overline{x_3}} + e^{2\overline{x_3}} + \overline{x_3} e^{\overline{x_3}} - \overline{x_3} e^{2\overline{x_3}}}{(1+e^{\overline{x_3}})^3} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Procediamo calcolando gli autovalori di quest'ultima, per semplicità di calcolo applichiamo delle sostituzioni opportune:

$$\alpha = -\frac{1}{L} \frac{e^{\overline{x_3}} + e^{2\overline{x_3}} + \overline{x_3} e^{\overline{x_3}} - \overline{x_3} e^{2\overline{x_3}}}{(1+e^{\overline{x_3}})^3} \quad (20)$$

$$\beta = \frac{k}{m} \frac{\overline{x_3^2}}{x_1^3} \quad (21)$$

$$\mu = -2 \frac{\gamma}{m} \overline{x_2} \quad (22)$$

$$\sigma = -\frac{k}{m} \frac{1}{x_1^2} 2 \overline{x_3} \quad (23)$$

Le sostituzioni effettuate sono possibili perchè stiamo raggruppando costanti, la matrice A risultante sarà:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \beta & \mu & \sigma \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (24)$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di quest'ultima e poniamolo uguale a 0:

$$p = \det(A - \lambda I_3) = 0 \quad (25)$$

$$p = -(\lambda - \alpha)(\lambda^2 - \mu\lambda - \beta) = 0 \quad (26)$$

Gli autovalori corrispondenti sono:

$$\lambda_1 = \alpha \quad (27)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\mu - \sqrt{4\beta + \mu^2}) \quad (28)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}(\mu + \sqrt{4\beta + \mu^2}) \quad (29)$$

Ricordiamo che λ_2 e λ_3 derivano dalla soluzione dell'equazione $(\lambda^2 - \mu\lambda - \beta) = 0$ che ha $\delta \neq 0 \rightarrow \lambda_2 \neq \lambda_3$

Considerando che la matrice A è diagonalizzabile $\rightarrow x(t) = e^{At}x_0 = T e^{\gamma t} T^{-1} x_0$ dove

$$e^{\gamma t} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}(\mu - \sqrt{4\beta + \mu^2})t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}(\mu + \sqrt{4\beta + \mu^2})t} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Mentre la matrice T ha come colonne gli autovettori della matrice A che calcoliamo con la seguente formula:

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (31)$$

Dal calcolo di questi ultimi otteniamo:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sigma}{\alpha^2 - \alpha\mu - \beta} & -\frac{\sqrt{4\beta + \mu^2} + \mu}{2\beta} & \frac{\sqrt{4\beta + \mu^2} - \mu}{2\beta} \\ \frac{\alpha\sigma}{\alpha^2 - \alpha\mu - \beta} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

E la relativa inversa T^{-1} per semplificare i calcoli consideriamo le matrici:

$$T = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} \\ \hat{s}_{31} & \hat{s}_{32} & \hat{s}_{33} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Procediamo ora con il calcolo di $x(t)$

$$x(t) = Te^{\gamma t}T^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}(\mu - \sqrt{4\beta + \mu^2})t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}(\mu + \sqrt{4\beta + \mu^2})t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \hat{s}_{21} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} \\ \hat{s}_{31} & \hat{s}_{32} & \hat{s}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{bmatrix}$$

Il risultato di questo prodotto può essere fattorizzato nel seguente modo:

$$M(A, x_0)m(t) \quad (35)$$

Dove il vettore $m(t)$ chiamato vettore dei modi è il seguente:

$$\begin{bmatrix} e^{\alpha t} \\ e^{\frac{1}{2}(\mu - \sqrt{4\beta + \mu^2})t} \\ e^{\frac{1}{2}(\mu + \sqrt{4\beta + \mu^2})t} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Correzione (a cura del docente):

- (d) Usando anche l'ipotesi di equilibrio (H2), discutere l'andamento asintotico dei modi e la stabilità del sistema.

Soluzione:

Ritorniamo ora alla forma senza sostituzioni:

$$\lambda_1 = -\frac{e^{\bar{x}_3}\bar{x}_3 - e^{2\bar{x}_3}\bar{x}_3 + e^{\bar{x}_3} + e^{2\bar{x}_3}}{L(1 + e^{\bar{x}_3})^3} \quad (37)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8kx_3^2}{mx_1^2} + \frac{4b^2\gamma}{m^2}} - \frac{2b\gamma}{m} \quad (38)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8kx_3^2}{mx_1^2} + \frac{4b^2\gamma}{m^2}} - \frac{2b\gamma}{m} \quad (39)$$

Facendo uso delle condizioni di equilibrio H2 otteniamo:

$$\lambda_1 = -\frac{2}{8L} = -\frac{1}{4L} \quad (40)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}\frac{2b\sqrt{\gamma}}{m} - \frac{2b\gamma}{m} \quad (41)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\frac{2b\sqrt{\gamma}}{m} - \frac{2b\gamma}{m} \quad (42)$$

Tutti e tre gli autovalori sono a parte reale negativa, in particolare si noti che nel terzo autovalore $\frac{1}{2}\frac{2b\sqrt{\gamma}}{m}$ sarà sicuramente minore di $\frac{2b\gamma}{m}$. Di conseguenza i modi saranno convergenti e il sistema viene definito asintoticamente stabile.

$$m(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(-\frac{1}{4L})t} \\ e^{(-\frac{1}{2}\frac{2b\sqrt{\gamma}}{m} - \frac{2b\gamma}{m})t} \\ e^{(\frac{1}{2}\frac{2b\sqrt{\gamma}}{m} - \frac{2b\gamma}{m})t} \end{bmatrix} \quad (43)$$

Correzione (a cura del docente):

- (e) Calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra la variazione dell'ingresso e la variazione dell'uscita e determinare, se possibile, le posizioni dei rispettivi poli ed eventuali zeri

Soluzione:

Ricaviamo la $G(s)$ sfruttando la seconda definizione operativa che si basa sul passaggio dalla forma di stato alla funzione di trasferimento, cioè dato un sistema Σ del tipo:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[x_1] \\ \mathcal{L}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n] \end{bmatrix} \quad (44)$$

Si applica la trasformata di Laplace al vettore di stato cioè al sistema dinamico

in forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

Svolgendo i vari calcoli si ottiene la $Y(s)$:

$$Y(s) = C(sI_n - A)^{-1}x_0 + (C(sI_n - A)^{-1}B + D)U(s) \quad (45)$$

Quindi isolando la $G(s)$, la relazione sarà:

$$G(s) = \frac{Y_{forzata}(s)}{U(s)} = (C(sI_n - A)^{-1}B + D) \quad (46)$$

Utilizzeremo quest'ultima formula con le matrici A e B del punto b, ci mancano quindi le matrici C e D che ricaviamo secondo il seguente metodo. Inoltre consideriamo come uscita la potenza $y = R(i)^2$, quest'ultima è da linearizzare, applichiamo quindi le seguenti formule:

$$C = \frac{\partial y(x, u)}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}, u=\tilde{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_q}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{x=\tilde{x}, u=\tilde{u}} \quad (47)$$

$$D = \frac{\partial y(x, u)}{\partial u} \Big|_{x=\tilde{x}, u=\tilde{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial u_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_q}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_q}{\partial u_p} \end{bmatrix} \Big|_{x=\tilde{x}, u=\tilde{u}} \quad (48)$$

e otteniamo :

$$C = (0, 0, 2R(\overline{x_3})\overline{x_3}) \quad (49)$$

$$D = (0) \quad (50)$$

A questo punto possiamo utilizzare la formula prima citata, ma facciamo svolgere i calcoli a Matlab con il seguente script da noi realizzato:

```
syms k m x_3 x_1 x_2 gamma L s alfa beta delta u;
A = [0, 1, 0;
      2*(k/m)*(x_3^2/x_1^3),
      -2*(gamma/m)*x_2,
      -2*(k/m)*(x_3/x_1^2);
      0,
      0,
      (-1/L)*(((exp(x_3)+exp(2*x_3))+
      x_3*exp(x_3)-x_3*exp(2*x_3))/((1+exp(x_3))^3)))] ;
B = [0;
      0;
      1/L];
C = [0,
```



```

0,
2*x_3*(exp(x_3))/((1+exp(x_3))^2)];
S = [s, 0, 0;
0, s, 0;
0, 0, s];

% Calcolo della f.d.t
result = C * inv(S - A) * B;

```

La $G(s)$ risultante è:

$$G(s) = \frac{2\bar{x}_3 e^{\bar{x}_3} (e^{\bar{x}_3} + 1)}{e^{2\bar{x}_3} + e^{\bar{x}_3} - \bar{x}_3 e^{2\bar{x}_3} + Ls + \bar{x}_3 e^{\bar{x}_3} + 3Ls e^{2\bar{x}_3} + Ls e^{3\bar{x}_3} + 3Ls e^{\bar{x}_3}} \quad (51)$$

Effettuiamo la seguente sostituzione per semplicità di calcolo:

$$c = e^{2\bar{x}_3} + e^{\bar{x}_3} - \bar{x}_3 e^{2\bar{x}_3} + \bar{x}_3 e^{\bar{x}_3} \quad (52)$$

Ricaviamo il polo ponendo il denominatore uguale a 0:

$$Ls + 3Ls e^{2\bar{x}_3} + Ls e^{3\bar{x}_3} + 3Ls e^{\bar{x}_3} + c = 0 \quad (53)$$

$$s(L + 3Le^{2\bar{x}_3} + Le^{3\bar{x}_3} + 3Le^{\bar{x}_3}) = -c \quad (54)$$

$$s = \frac{-c}{L + 3Le^{2\bar{x}_3} + Le^{3\bar{x}_3} + 3Le^{\bar{x}_3}} \quad (55)$$

$$s = \frac{-(e^{2\bar{x}_3} + e^{\bar{x}_3} - \bar{x}_3 e^{2\bar{x}_3} + \bar{x}_3 e^{\bar{x}_3})}{L + 3Le^{2\bar{x}_3} + Le^{3\bar{x}_3} + 3Le^{\bar{x}_3}} \quad (56)$$

Correzione (a cura del docente):

- (f) Passando all'uso dei valori numerici indicati in Tabella 2, determinare valutare $G(s)$, discuterne la posizione e la molteplicità dei poli e degli eventuali zeri, e verificarne la stabilità.

Soluzione:

Utilizzando i seguenti valori ricavati:

$$\bar{i} = 0.5A = \bar{x}_3 \quad (57)$$

$$L = 0.1 \quad (58)$$

Posso adesso calcolare la $G(s)$:

$$G(s) = \frac{4.367}{3.85 + 1.85s} \quad (59)$$

s viene ricavata ponendo a 0 il denominatore:

$$3.85 + 1.85s = 0 \quad (60)$$

$$s = -2.1 \quad (61)$$

Si nota subito che il sistema è stabile in quanto il polo è a parte reale negativa

Correzione (*a cura del docente*):

2 Parte Numerica

Al fine di progettare il controllore, si suggerisce di procedere secondo la metodologia vista durante il corso come segue:

- (a) Tradurre i requisiti della Tabella 3 nelle corrispondenti specifiche statiche e dinamiche del sistema controllato, e indicare l'approssimazione $G_c(s)$ della f.d.t. del sistema complessivo risultante in anello chiuso.

Soluzione:

La funzione di trasferimento del sistema $G_c(s)$ in anello chiuso è:

$$G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (62)$$

Dato che il nostro sistema è un sistema del primo ordine. Possiamo scriverlo come segue:

$$G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \approx \frac{1}{1 + \tau s} \quad (63)$$

Si noti che:

$$\tau = \frac{1}{\omega_t} \quad (64)$$

$$\omega_t = \frac{3}{T_a} \quad (65)$$

$$T_a \leq 2.5s \quad (66)$$

Pertanto:

$$\omega_t = \frac{3}{T_a} \geq 1.2rad/s \quad (67)$$

Assumiamo che il controllore avrà una forma del tipo:

$$C(s) = \frac{K_C}{s^t} C_0(s) \text{ dove } |C_0(s)| \geq 1 \quad (68)$$

Descriviamo le specifiche:

1. Specifiche statiche: Inseguimento perfetto di rampa e gradino.

Per inseguire perfettamente una rampa, $C(s)$ deve necessariamente introdurre due poli in 0.

Si nota, inoltre, che se il sistema insegue la rampa, esso insegue implicitamente anche il gradino.

$$C(s) = \frac{k}{s^2} C_0(s), \quad k = 1 \quad (69)$$

2. Specifiche dinamiche: Tempo di risposta inferiore o uguale a 2.5s con oscillazioni entro il 5%.

La specifica sarà soddisfatta se, come evidenziato precedentemente

$$\omega_t = \frac{3}{T_a} \geq 1.2 \text{ rad/s} \quad (70)$$

Poichè, trattasi di un sistema del primo ordine, si avrà:

$$M_f = \frac{\pi}{2} \quad (71)$$

$$\phi_t = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \quad (72)$$

Correzione (a cura del docente):

- (b) Se la f.d.t. $G(s)$ del modello in anello aperto non è stabile, progettare un anello di retroazione interno, caratterizzato da un controllore $C_i(s)$ e da una f.d.t. risultante $G_i(s)$; in tal caso, nell'elaborato devono essere forniti (1) la descrizione della procedura seguita per ottenere $C_i(s)$, e (2) le espressioni di $C_i(s)$ e $G_i(s)$ con le posizioni e molteplicità dei rispettivi poli e degli eventuali zeri.

Soluzione:

Come abbiamo potuto osservare, non vi sono poli a parte reale positiva e pertanto la funzione di trasferimento è stabile.

Correzione (a cura del docente):

- (c) Se invece $G(s)$ è già stabile o se si è ottenuta una $G_i(s)$ stabile dal punto precedente, verificare il soddisfacimento o meno delle specifiche statiche e dinamiche; a tal fine, riportare $G(s)$ o $G_i(s)$ in forma di Bode, indicando il guadagno di Bode, le costanti di tempo di eventuali singolarità reali, e i coefficienti di smorzamento e le pulsazioni naturali di eventuali singolarità coniugate.

Soluzione:

Abbiamo:

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = K_0 \frac{\prod_j (s - z_j)}{s^h \prod_i (s - p_i)} \quad (73)$$

Nel nostro caso poichè abbiamo un singolo polo in -2.1:

$h = 0$ poichè non abbiamo poli in zero

$j = 0$ poichè non abbiamo zeri

$i = 1$ poichè abbiamo un solo polo

$$G(s) = \frac{4.367}{(3.85 + 1.85)s} \quad (74)$$

Con il seguente codice MatLab possiamo ricavare i valori z , p , k :

```
%calcolo f.d.t in forma di bode
num = [4.367];
den = [1.85 3.85];
G = tf(num, den) %fdt
[z, p, k] = zpndata(G) %vettore che prende i valori di z,
    p e k
G = zpkm(G) %fdt in forma zpk
```

dove $z=0$, $p=-2.1$, $k=2.36$ di conseguenza la forma di Bode sarà:

$$G(s) = \frac{2.36}{s + 2.1} \quad (75)$$

Le relative costanti di tempo:

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} = -\frac{1}{-2.1} = 0.47s \quad (76)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{|\tau_1|} = 2.1 \quad (77)$$

Correzione (a cura del docente):

- (d) Progettare un controllore $C(s) = \frac{K_c}{s^t} C_0(s)$ che soddisfi i requisiti della Tabella 3 e ottenga la $G_c(s)$ desiderata; nel documento devono essere riportati (1) la descrizione dettagliata della procedura seguita, (2) le funzioni $C(s)$ e $G_c(s)$, nonché i (3) diagrammi di Bode nelle varie fasi della progettazione (ad esempio, quelli che mostrano le risposte armoniche della catena diretta $C(j\omega) G(j\omega)$ o $C(j\omega) G_i(j\omega)$), e del modello controllato complessivo $G_c(j\omega)$.

Soluzione:

I diagrammi di Bode iniziali della nostra $G(s)$ sono mostrati in figura (1).

Il primo passo da intraprendere per avere un inseguimento perfetto di rampa e gradino è quello di inserire due poli in zero, di conseguenza risulta:

$$G(s) = \frac{K_c}{s^2} C_0(s) \quad (78)$$

Descrizione della procedura:

- Scegliamo un $K_c > 0$, ricavato con la seguente equazione:

$$-18 = 20 \log_{10}(K_c) \quad (79)$$

In questo modo K_c sarà uguale a 0.18 e avremo l'attraversamento a $0dB$ in 1.2.

- Inserimento di una coppia di zeri complessi coniugati una decade prima dell'attraversamento a $0dB$, questo per rendere il margine di fase all'incirca pari a $\frac{\pi}{2}$ in modo da correggere l'instabilità dovuta ai due poli in zero inseriti precedentemente.
- Regolare la posizione degli zeri e del valore K_c per assicurarci di avere una frequenza di taglio maggiore di quella precedentemente ricavata e al tempo stesso rispettare il margine di fase.

Funzione di trasferimento $C(s)$:

- Abbiamo esportato da SISOTOOL il controllore ed abbiamo ottenuto il valore numerico della $C(s)$:

$$C(s) = \frac{6.9157(s^2 + 1.359s + 0.8241)}{s^2} \quad (80)$$

Con i seguenti poli e zeri:

$$\begin{cases} K_c = 34.54 \\ p_{1,2} = 0 \\ z_1 = -0.6797 + 0.6018i \\ z_2 = -0.6797 - 0.6018i \end{cases} \quad (81)$$

In figura (2) si osservano i diagrammi di Bode della catena diretta $C(s)G(s)$ dopo la sintesi del controllore.

- La $G_c(s)$ che ricaviamo tramite:

$$G_c(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (82)$$

Abbiamo quindi ricavato il valore numerico di $G_c(s)$ tramite l'utilizzo di MatLab:

$$G_c(s) = \frac{16.325(s^2 + 1.359s + 0.8241)}{(s + 17.16)(s^2 + 1.248s + 0.7841)} \quad (83)$$

In figura (3) si osservano i diagrammi di Bode in anello chiuso $G_c(s)$.

Correzione (a cura del docente):

- (e) Realizzare una prima simulazione in Matlab/Simulink del sistema chiuso $G(s)$ in anello singolo con il controllore $C(s)$ o in doppio anello con i controllori $C_i(s)$ e $C(s)$; la simulazione deve mostrare il soddisfacimento dei requisiti della Tabella 3 rispetto ai segnali di riferimento o di disturbo indicati.

Soluzione:

Per prima cosa convertiamo la funzione di trasferimento del controllore in forma di stato attraverso la funzione `ss` di MatLab e passiamo le rispettive matrici nel blocco del controllore. Otteniamo lo schema di SIMULINK di figura (4).

Considerazioni:

- Il sistema va a regime entro 2.5s con oscillazioni che non superano il 5% come richiesto.
- Come mostrato nella figura (5) insegue perfettamente sia il gradino che la rampa.

Conclusioni: Il controllore rispetta perfettamente le specifiche statiche e dinamiche richieste.

Correzione (a cura del docente):

- (f) Realizzare una seconda simulazione in Matlab/Simulink del modello del sistema non lineare, chiuso in anello singolo con il controllore $C(s)$ o in doppio anello con i controllori $C_i(s)$ e $C(s)$, operando le opportune traslazioni delle variabili in ingresso e in uscita dal sistema stesso; la simulazione deve mostrare il soddisfacimento dei requisiti della Tabella 3, anche se in modo approssimato, nei confronti dei soli segnali di riferimento.

Soluzione:

Per la simulazione del sistema non lineare, facciamo uso di un blocco MATLAB-Function così definito:

```
function [dState, dy] = sistema(du, z)

% Parametri
m = 1000;
gamma = 50;
k = 1000;
```

```

L = 0.1;
g = 9.81;
R = 0.23;

% Traslazione ingresso
u = du + 0.11;

% Stati
x1 = z(1);
x2 = z(2);
x3 = z(3);

% Dinamica
dx1 = x2;
dx2 = g - (gamma/m)*(x2^2) - (k/m)*((x3^2)/(x1^2));
dx3 = (1/L) * (u - x3 * exp(x3) / (1+exp(x3))^2 ) ;

dState = [dx1; dx2; dx3];

% Traslazione uscita
y = (exp(x3) / (1+exp(x3))^2 ) * x3^2;
y_segnata = 0.159637714203525;
dy = y - y_segnata;
end

```

1. **u** è uno scalare che rappresenta l'ingresso.
2. **z** è un vettore che rappresenta lo stato integrato.
3. **dState** è un vettore contenente le derivate dello stato.

Relativamente a questo punto del progetto, non siamo riusciti ad effettuare la simulazione su SIMULINK. Abbiamo provato a ricalcolare più volte i punti di equilibrio, come su suggerimento del Professore, ma abbiamo ottenuto sempre gli stessi risultati confermando come essi fossero giusti. Siamo così giunti alla conclusione, insieme al Professore, che la causa probabilmente sia dovuta all'alta non linearità del sistema. Alleghiamo di seguito l'errore riscontrato:

```

Error: An error occurred while running the simulation and
the simulation was terminated
Caused by:
Block 'simuli_mod_mod/MATLAB Function' outputs Inf for
element 2 of dState at time 0.524.
Suggested Actions:
    Suppress future instances of this diagnostic from
    this source.
Suggested Actions:
    Suppress future instances of this diagnostic from this
    source.

```


Correzione (*a cura del docente*):

Figure e diagrammi

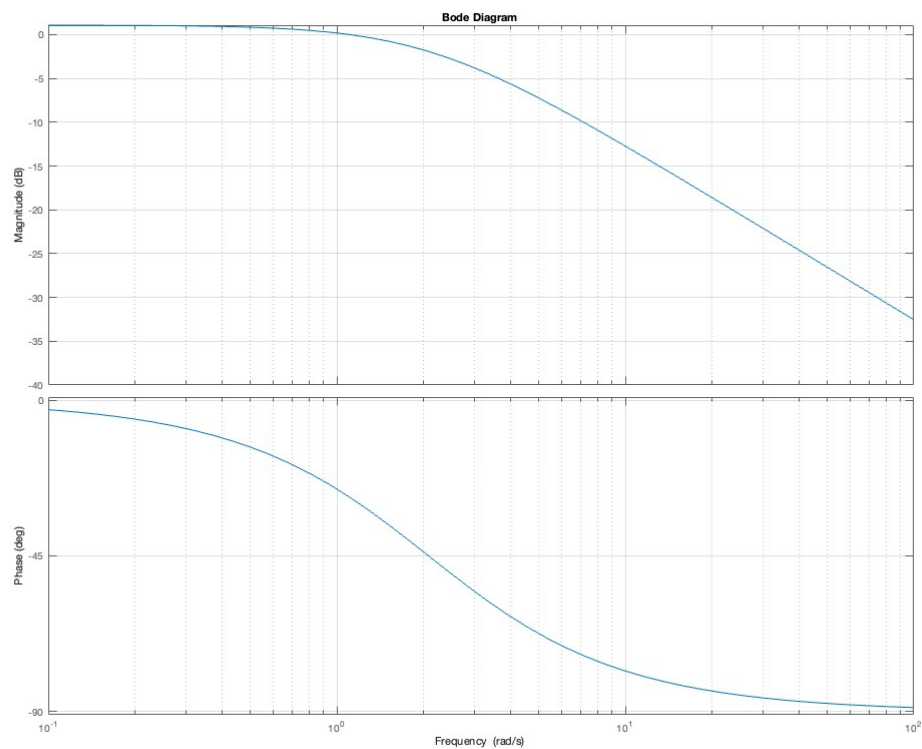


Figura 1: Diagrammi di Bode Catena Diretta $C(j\omega)G(j\omega)$ prima della sintesi del Controllore

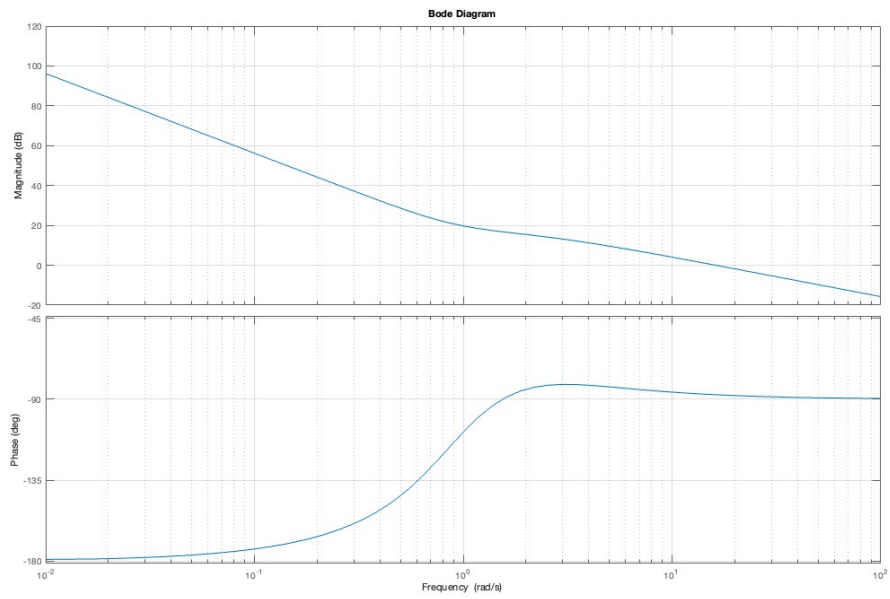


Figura 2: Diagrammi di Bode Catena Diretta $C(j\omega)G(j\omega)$ dopo la sintesi del Controllore

Fine dello svolgimento

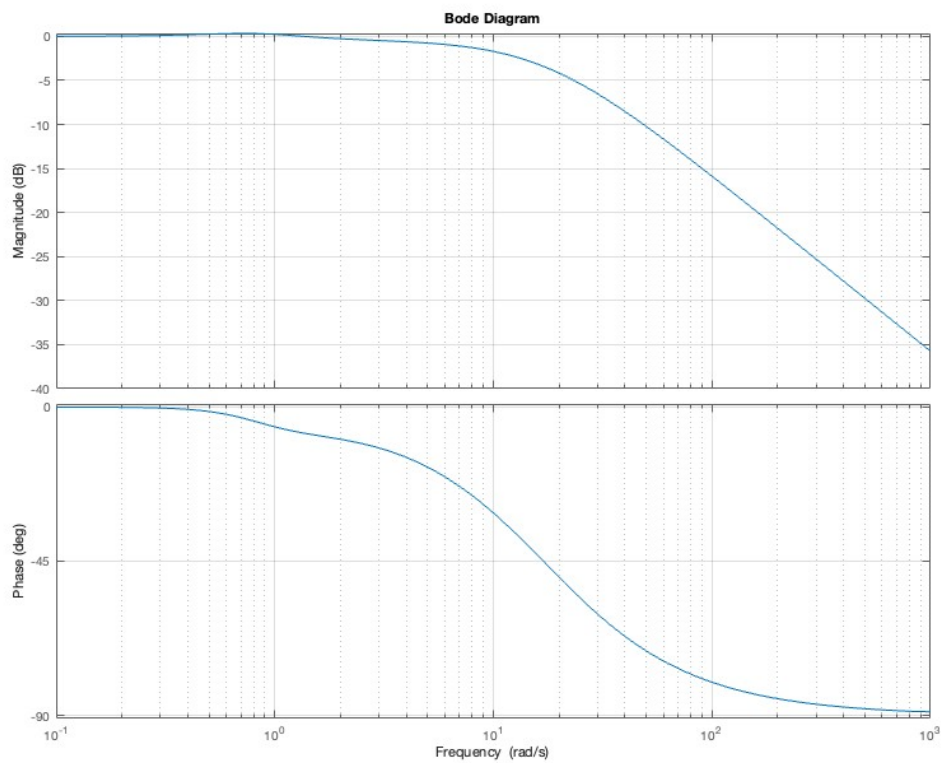


Figura 3: Diagrammi di Bode Anello Chiuso $G_c(j\omega)$

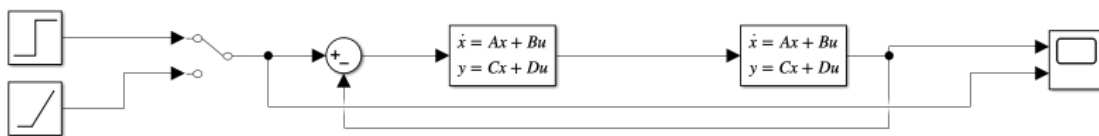


Figura 4: Simulazione in ambiente SIMULINK

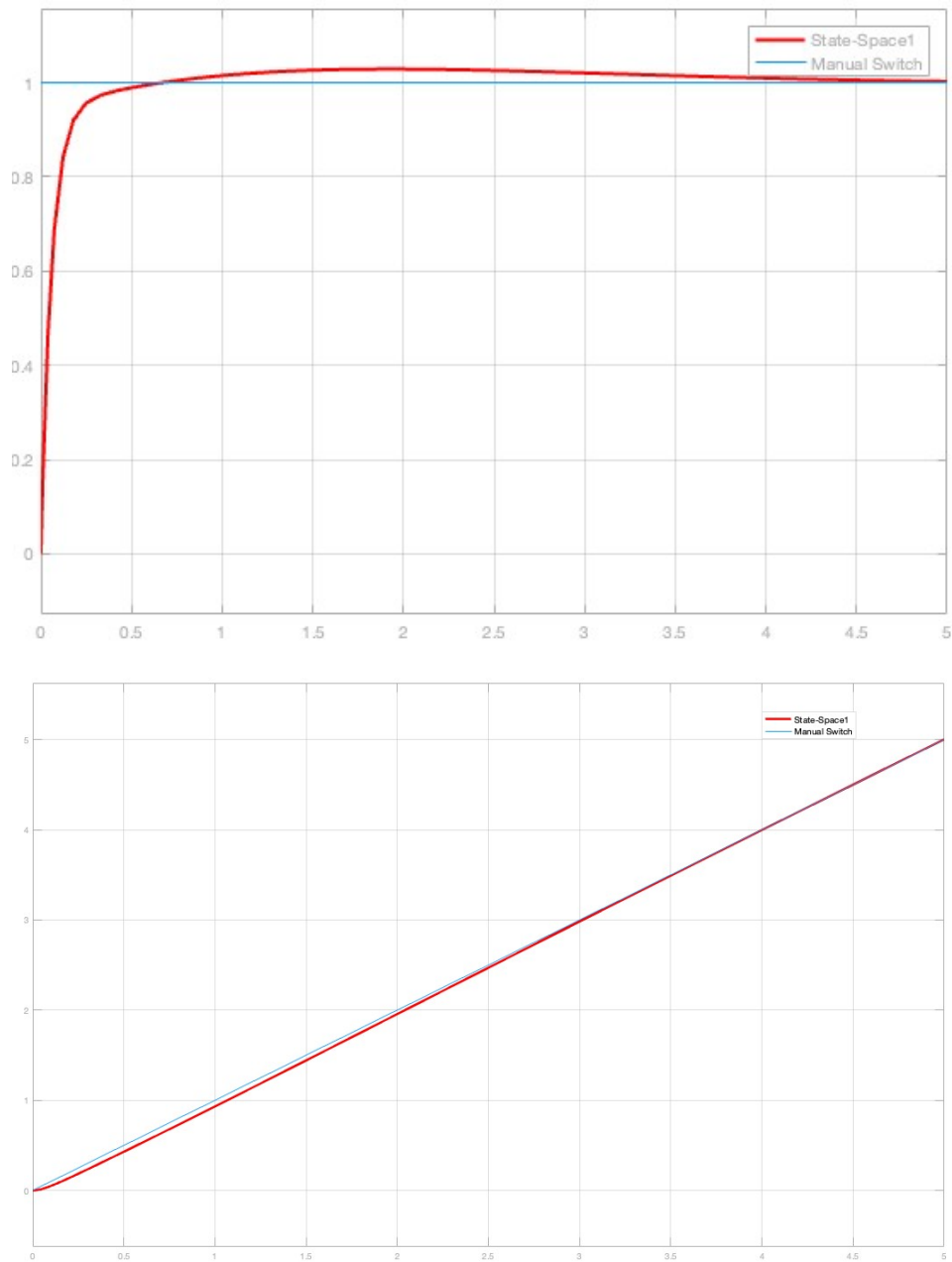


Figura 5: Uscite

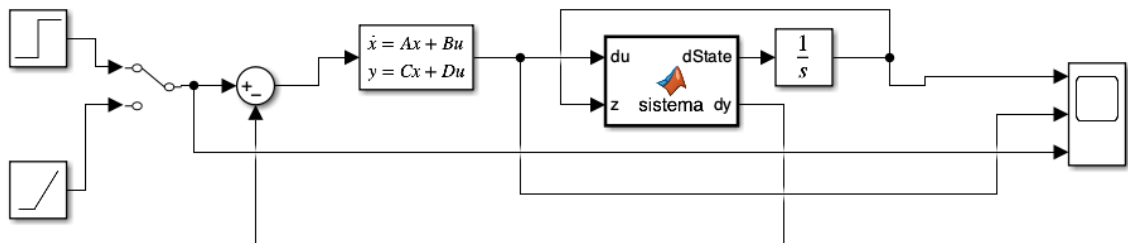


Figura 6: Simulazione in ambiente SIMULINK del modello non lineare