Manuale - Analisi 1
Ingegneria Informatica

29 settembre 2025

Indice

Parte I
Concetti di base

1 Derivate

1.1 Derivate fondamentali

1. $D[x^n] = nx^{n-1}$
2. $D[x] = 1$
3. $D[\frac{1}{x}] = -\frac{1}{x^2}$
4. $D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $D[a^x] = a^x * ln|a|$
6. $D[e^x] = e^x$
7. $D[log_a x] = \frac{1}{x * ln\, a}$
8. $D[ln\, x] = \frac{1}{x}$
9. $D[sin\, x] = cos\, x$
10. $D[cos\, x] = -sin\, x$
11. $D[tan\, x] = \frac{1}{cos^2 x}$
12. $D[cotan\, x] = -\frac{1}{sin^2 x}$
13. $D[arcsin\, x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $D[arccos\, x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $D[arctan\, x] = \frac{1}{1+x^2}$

1.2 Regole di derivazione

1. $D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
2. $D[k * f(x)] = k * f'(x)$
3. $D[f(x) * g(x)] = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
4. $D[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{f'(x)*g(x) - f(x)*g'(x)}{g(x)^2}$

2 Integrali

2.1 Indefiniti

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
2. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c$
5. $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + c$
6. $\int cos\, x\, dx = sin\, x + c$

7. $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -cot\, x + c$

8. $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tan\, x + c$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin\, x + c$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = arctan\, x + c$

11. $\int f(x)^\alpha * f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$

13. $\int e^{f(x)} * f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$

14. $\int a^{f(x)} * f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{ln\, a} + c$

15. $\int sin\, f(x) * f'(x)\, dx = -cos\, f(x) + c$

16. $\int cos\, f(x) * f'(x)\, dx = sin\, f(x) + c$

17. $\int \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)} dx = tan\, f(x) + c$

18. $\int \frac{f'(x)}{sin^2 f(x)} dx = -cot\, f(x) + c$

19. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = arcsin\, f(x) + c$

20. $\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = arctan\, f(x) + c$

21. $\int f(x) * g'(x)\, dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x) dx$

22. $\int \frac{f'(x)}{k^2+f(x)^2} dx = \frac{1}{k} arctan(\frac{f(x)}{k}) + c$

Pils

Durante lo svolgimento potrei trovarmi i seguenti casi che sono più complessi, riassunti in 3 macro-casi possono essere risolti in modo più semplice.
Caso:

- Grado D < Grado N: Uso la divisione.
- Denominatore: 1° Grado: $\frac{f'(x)}{f(x)}$
- Denominatore 2° Grado: Dopo aver calcolato il Δ ho i tre seguenti casi:
  - $\Delta = 0$:
    - $\int f'(x) * f(x)^\alpha dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
    - Divisione A/B
  - $\Delta < 0$:
    - $\int \frac{f'(x)}{k^2+f(x)^2} dx = \frac{1}{k} arctan(\frac{f(x)}{k}) + c$
    - $\int \frac{\text{numeratore}+a-a}{\text{denominatore}} dx$
  - $\Delta > 0$:
    - Divisione A/B
    - $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$

Parte II
Studio di Funzione

3 Studio di Funzione

3.1 Dominio, simmetrie e segno

Dominio

Per dominio si intende l'insieme dei valori di x per cui la funzione è definita.
Casi tipici:

- Frazioni $\rightarrow$ denominatore $\neq 0$.
- Radici pari $\rightarrow$ argomento ≥ 0.
- Logaritmi $\rightarrow$ argomento > 0.
- Funzioni goniometriche con $Df(x) \neq \mathbb{R}$ (Esclusi frazioni con seni e coseni ad es. tangente):
  - $f(x) = arcsin\, x \rightarrow Df(x) = [-1, 1]$
  - $f(x) = arccos\, x \rightarrow Df(x) = [-1, 1]$

Esempio: $f(x) = \frac{x-3}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & \text{se } x = 3 \\ f(x) > 0 & \text{se } x < -1 \text{o } x > 3 \\ f(x) < 0 & \text{se } -1 < x < 3 \end{cases}$

Simmetrie

- Parità:
  - $f(-x) = f(x) \rightarrow$Funzione pari (simmetria rispetto all'asse y)
  - $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Funzione dispari (simmetria rispetto all'origine)

Esempio: $f(x) = x^2 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 = x^2 \Rightarrow f$ pari.

3.2 Punti di accumulazione, limiti e asintoti

Principalmente lo studio dei limiti è finalizzato alla determinazione dell'esistenza degli asintoti, questi possono essere:

- Asintoti Verticali $\rightarrow$ Quando il limite in un punto va a $\pm\infty$
- Asintoti Orizzontali $\rightarrow$ Quando $lim_{x\rightarrow\pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$
- Asintoti Obliqui

Per gli asintoti obliqui il procedimento è leggermente più lungo, innanzitutto ***la presenza di asintoti orizzontali preclude la presenza di asintoti obliqui*** quindi se sono presenti as. orizzontali ci si può fermare, in caso non siano presenti fare testo a quanto segue:
Un as. obliquo è una retta (Quindi forma $y = mx + q$), per trovarlo calcolo la pendenza "m" con: $m = lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ se questo limite esiste ed è finito allora possiamo calcolare "q" con: $q = lim_{x\rightarrow\pm\infty}(f(x) - mx)$ se anche questo limite esiste ed è finito allora l'asintoto obliquo esiste ed è proprio: $y = mx + q$.

NB. se $m = 0$ l'asintoto non è olbiquo ma orizzontale, se il grado del numeratore è maggiore di 1 grado rispetto al numeratore (ad es. $\frac{x^2}{x}$) è comune avere un as. obliquo, se invece il numeratore ha grado maggiore di 2 o più rispetto al numeratore probabilmente avremo un as. verticale.

3.3 Studio della continuità e derivabilità, monotònia

Continuità

Per definizione una funzione è continua in un dato punto x_0 se $lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Verifico punti critici del dominio di f e controllo se sono presenti discontinuità, queste possono essere:

- **Eliminabile:** limite esiste finito ma $f(x_0)$ non è definito o è diverso.
- **Di salto:** i due limiti laterali esistono ma sono diversi.
- **Infinita:** almeno un limite laterale tende a $\pm\infty$.

Esempio: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow D[f(x)] = \mathbb{R} \backslash \{1\}$ In $x = 1 \to$ discontinuità eliminabile.

Derivabilità

Per definizione una funzione è derivabile in un dato punto x_0 se $f(x_0) = lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Se f è derivabile allora è continua, ma non sempre vale il contrario.

Strategia operativa:

1. Controllo dove la funzione è sospetta (valori assoluti, radici, punti angolosi)
2. Verifico che il limite destro e sinistro su quel punto coincidano

Nel caso non dovessero coincidere vuol dire che ci troviamo di fronte ad un punto di non derivabilità, casi più comuni:

- **Angolo:** ad es.$f(x) = |x|$ funzione continua ma non derivabile, c'è un'improvviso cambio di pendenza, in $x_0 = 0^-$ $f'(x_0) = -1$, in $x = 0^+$ $f'(x_0) = +1$.
- **Cuspide:** ad es. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funzione continua ma non derivabile, in $x_0 = 0^-$ $f'(x_0) = -\infty$, in $x_0 = 0^+$ $f'(x_0) = +\infty$.
- **Tangente verticale:** ad es. $f(x) = \sqrt{x}$ non è richiesto che la funzione sia derivabile sia da destra che da sinistra, basta 1 delle due, basta che la funzione sia continua e che la derivata da destra o sinistra vada a $\pm\infty$.

Se una funzione non è continua, automaticamente non è derivabile, ad esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x = 0$ non è derivabile per discontinuità.

Strategia operativa:

1. Controllo la continuità. Se non è continua $\to$ già classificata.
2. Se è continua:
   (a) Calcolo la derivata a destra e sinistra.
   (b) Confronto i valori:
      i. Diversi e finiti $\to$ **angolo**.
      ii. Entrambi infiniti con segni opposti $\to$ **cuspide**.
      iii. Entrambi con stesso segno $\to$ **tangente verticale**.

3.4 Derivata seconda e convessità

In questa fase andiamo a controllare se ci sono cambi di convessità e se sono presenti punti di flesso.
Strategia operativa:

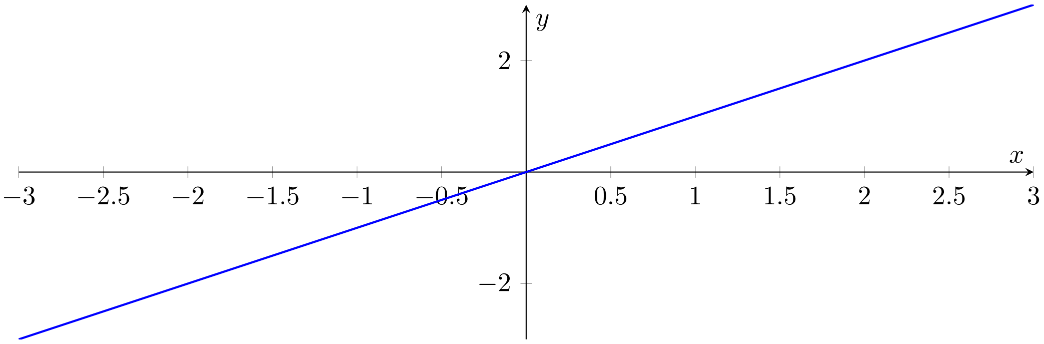
1. Calcolo la derivata seconda ($f''(x)$)
2. Trovo i punti candidati ad essere punti di flesso con $f''(x) = 0$
3. Verifico se in questi punti c'è un cambio di concavità (f passa da $f''(x) > 0$ a $f''(x) < 0$ o viceversa), se questo si verifica allora c'è un punto di flesso, altrimenti no.
4. Riassumo i vari risultati in uno studio del segno per completezza.

Esempio: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, risolvendo $f''(x) = 0$ si ottiene $x = 0$. Per $x < 0$ si ha $f''(x) < 0 \to$ concava, per $f''(x) > 0 \to$convessa. Dato che c'è stato un cambio di concavità in $x = 0$ allora in questo punto c'è un flesso.
Esempio: $f(x) = x^4$,$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, risolvendo $f''(x) = 0$ si ottiene $x = 0$. Però $f''(x)$ è sempre ≥ 0 quindi la curva è sempre convessa verso l'alto e quindi non essendoci nessun cambio di concavità in quel punto non c'è un flesso.

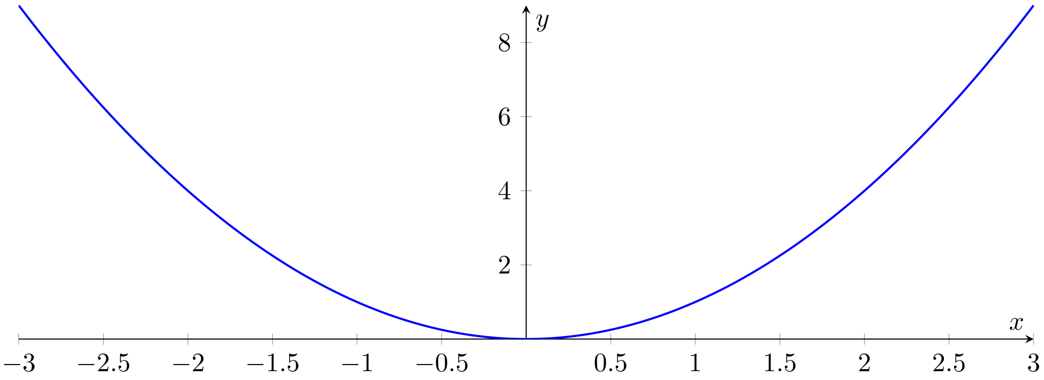
3.5 Grafico qualitativo di $f(x)$

Alla fine dei calcoli svolti fino ad ora dovrebbe esser possibile tracciare un grafico qualitativo della funzione, di seguito si trovano le funzioni fondamentali.

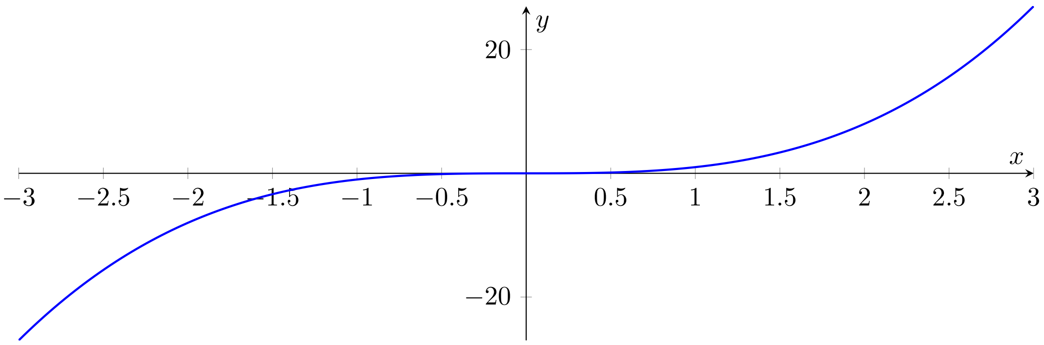
$f(x) = x$



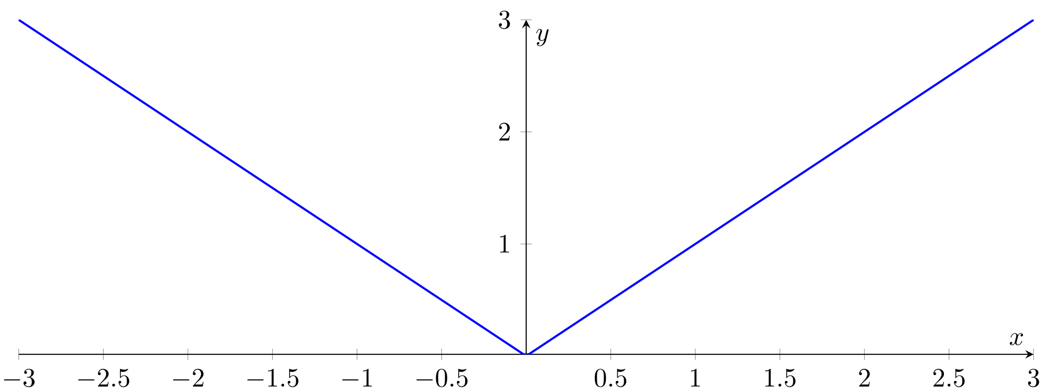
$f(x) = x^2$



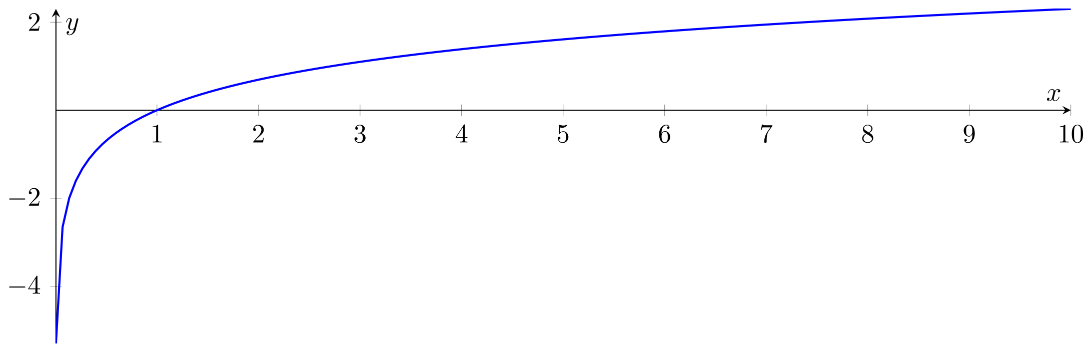
$f(x) = x^3$



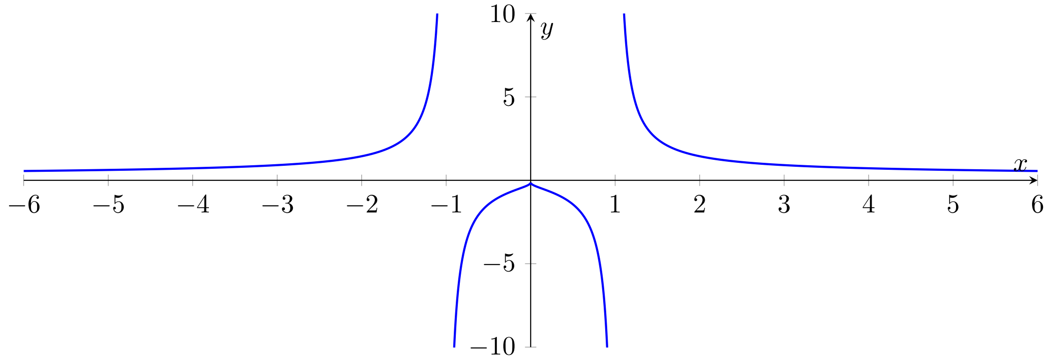
$f(x) = |x|$



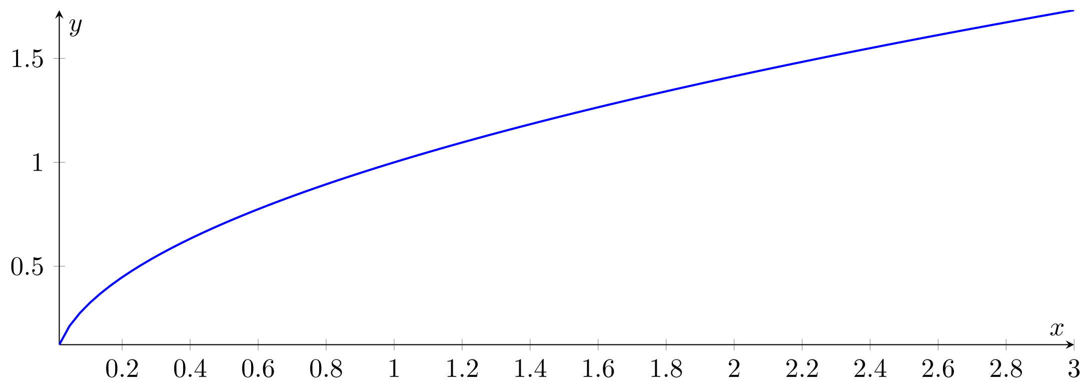
$f(x) = ln\, x$



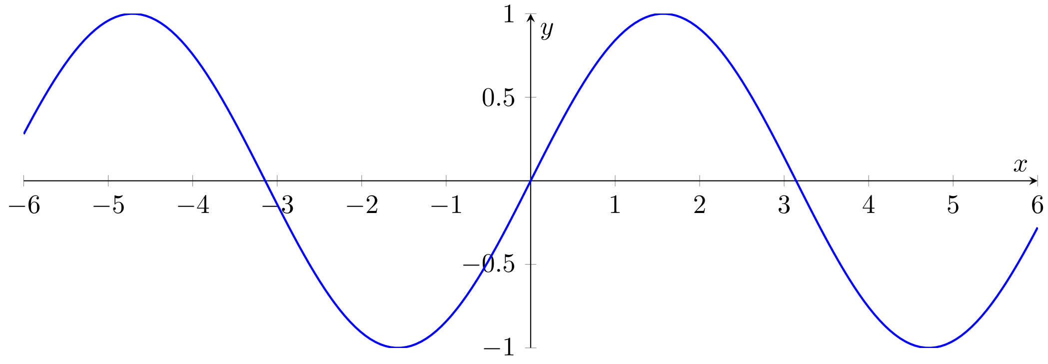
$f(x) = \frac{1}{ln|x|}$



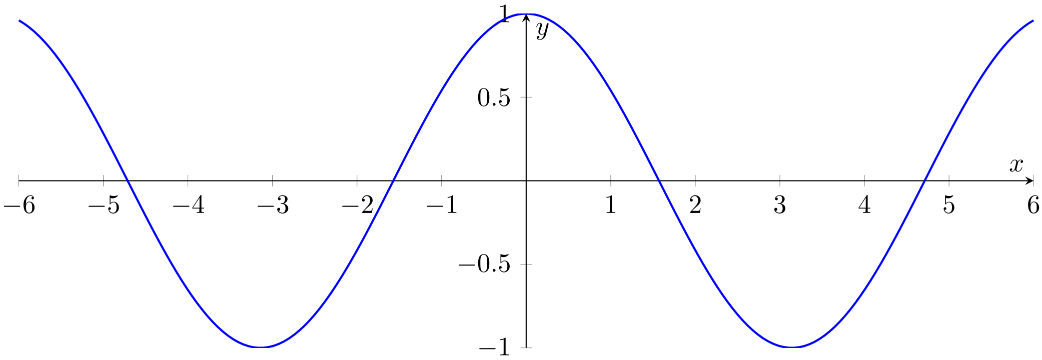
$f(x) = \sqrt{x}$



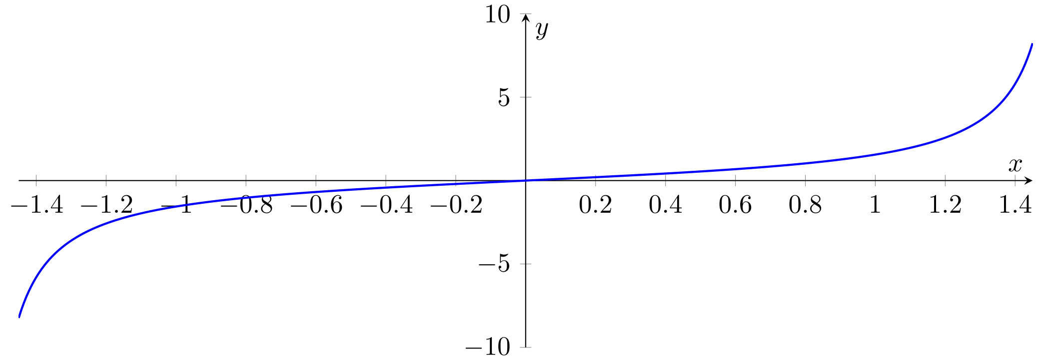
$f(x) = sin\, x$



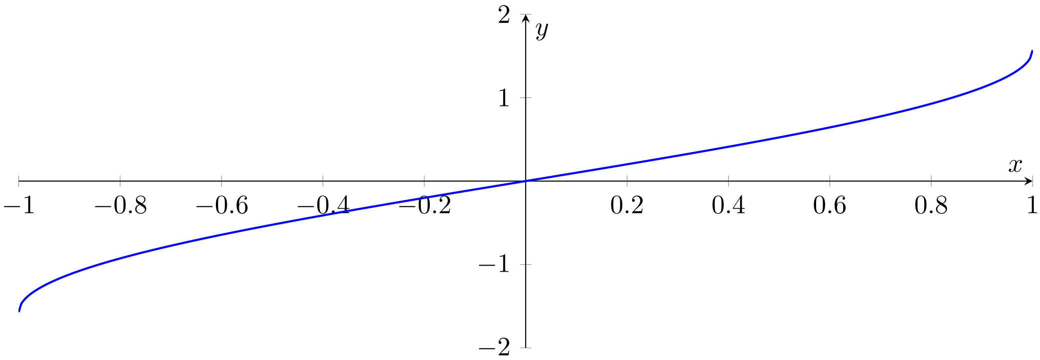
$f(x) = cos\, x$



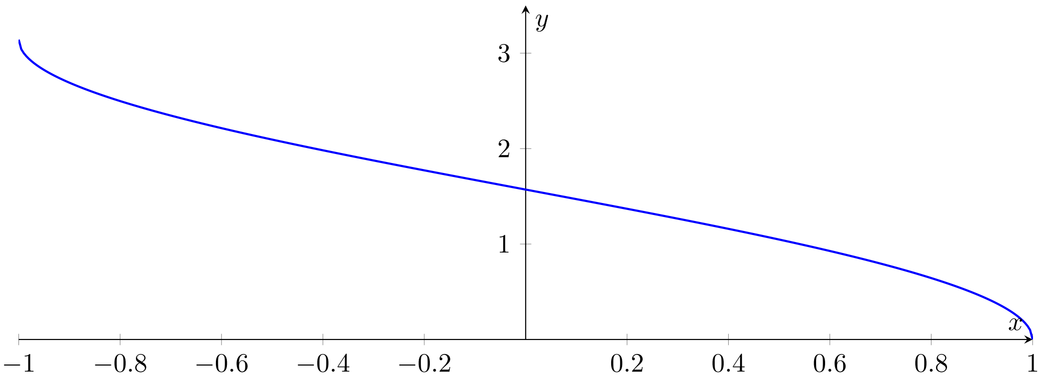
$f(x) = tan\, x$



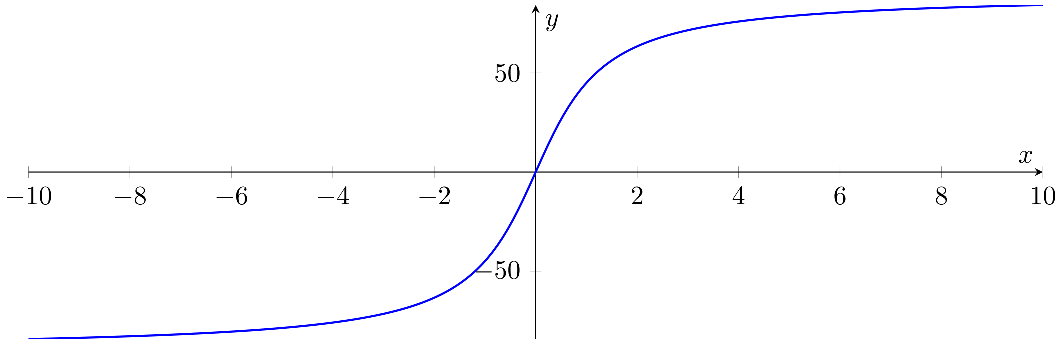
$f(x) = arcsin\, x$



$f(x) = arccos\, x$



$f(x) = arctan\, x$



Parte III
Studio della convergenza

3.6 Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ con } q \in \mathbb{R} \text{ è detta serie geometrica.}$$

$$s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } 1 \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{convergente (con somma} \frac{1}{1-q}\text{)} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{divergente} & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

ESEMPIO: $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ converge (essendo $\frac{1}{2} < 1$ dove $\frac{1}{2} = q$) e la somma è: $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie numeriche convergenti e sia $k \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} Ka_n = K \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

NB. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} Ka_n$ converge (stessa cosa per la divergenza)

3.7 Condizione necessaria di convergenza

Affinche una serie converga è necessario che il *termine generale a_n sia infinitesimo* (Ovvero $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$)

3.8 Criteri con condizioni sufficienti per la convergenza

$$\text{Serie a termini non negativi} \begin{cases} \text{criterio del rapporto} \\ \text{criterio della radice} \\ \text{criterio del confronto} \\ \text{criterio del confronto asintotico} \end{cases}$$

$$\text{Serie a termini di segno variabile} \begin{cases} \text{Criterio dell'assoluta convergenza} \\ \text{criterio di Leibniz} \end{cases}$$

3.9 Serie di Mengoli (Serie telescopica)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \text{ è detta serie di Mengoli}$$

$s_n = 1 \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{+\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{3}} \cancel{+\frac{1}{3}} \cancel{-\frac{1}{4}} + ... + \cancel{\frac{1}{n-1}} \cancel{-\frac{1}{n}} \cancel{+\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty}[1-\frac{1}{n+1}] = 1 \Rightarrow$ La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ converge e la somma è 1.

NB. Trovare negli esercizi la serie telescopica è piuttosto raro.

3.10 Criteri di convergenza

Criterio del rapporto

Sia $a_n > 0$ definitivamente e supponiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ (Essendo $a_n > 0$ allora $l \in [0, +\infty)$ oppure $l = +\infty$)

- Se $l < 1$ allora $\sum a_n$ converge
- Se $l > 1$ allora $\sum a_n$ diverge
- se $l = 1$ tutto è possibile (bisogna cambiare criterio)

Esempio: Studio il carattere della serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^{2015}}{3^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^{2015}}{3^{n+1}}}{\frac{n^{2015}}{3^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{2015}}{3*\cancel{3^n}} * \frac{\cancel{3^n}}{n^{2015}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{3}*\frac{(n+1)^{2015}}{n^{2015}} = \frac{1}{3} < 1$ quindi la serie converge.

Criterio della radice (CAUCHY)

Siano $a_n \geq 0$ definitivamente e supponiamo che $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$

- Se $l < 1$ allora $\sum a_n$ converge
- Se $l > 1$ allora $\sum a_n$ diverge
- se $l = 1$ tutto è possibile (bisogna cambiare criterio)

Esempio: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}} = \lim\limits_{n\to+\infty}[(\log n)^{-\frac{n}{2}}]^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}(\log n)^{-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\log n}} = 0 < 1 \Rightarrow$ La serie converge.

Criterio del confronto

Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora valgono le seguenti implicazioni:

- $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
- $\sum a_n$ diverge a $+\infty \Rightarrow \sum b_n$ diverge a $+\infty$.

NB. Le implicazioni inverse in generale non valgono.

Serie armoniche generalizzate:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}\begin{cases}\text{converge} & \text{se } \alpha > 1\\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1\end{cases}$
- $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha(\log n)^\beta}\begin{cases}\text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \text{ oppure } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1\\ \text{diverge} & \text{se } \alpha < 1 \text{ oppure } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1\end{cases}$

Esempio: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos n}{n})^2 \Rightarrow 0 \leq (\frac{\cos n}{n})^2 \leq \frac{1}{n^2}\ \forall n \geq 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, dunque il criterio del confronto ci assicura che $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{\cos n}{n})^2$ converge.

Criterio del confronto asintotico

Date 2 successioni a_n e b_n a termini definitivamente positivi se $a_n \sim b_n$ (ovvero se $\underset{n \to +\infty}{lim} \frac{a_n}{b_n} = 1$), allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.
Esempio: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n + cos\, n}{n^3 - 3n} \sim \frac{1}{n^2} \to$ converge a 0.