Analisi 1
Manuale di sopravvivenza
Ingegneria Informatica

14 gennaio 2026

Indice

Parte I
Concetti di base

1 Derivate

1.1 Derivate fondamentali

1. $D[x^n] = nx^{n-1}$
2. $D[x] = 1$
3. $D[\frac{1}{x}] = -\frac{1}{x^2}$
4. $D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $D[a^x] = a^x * ln|a|$
6. $D[e^x] = e^x$
7. $D[log_a x] = \frac{1}{x * ln\, a}$
8. $D[ln\, x] = \frac{1}{x}$
9. $D[sin\, x] = cos\, x$
10. $D[cos\, x] = -sin\, x$
11. $D[tan\, x] = \frac{1}{cos^2 x}$
12. $D[cotan\, x] = -\frac{1}{sin^2 x}$
13. $D[arcsin\, x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $D[arccos\, x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $D[arctan\, x] = \frac{1}{1+x^2}$

1.2 Regole di derivazione

1. $D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
2. $D[k * f(x)] = k * f'(x)$
3. $D[f(x) * g(x)] = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
4. $D[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{g(x)^2}$

2 Integrali

2.1 Indefiniti

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
2. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c$
5. $\int sin\, x\, dx = -cos\, x + c$
6. $\int cos\, x\, dx = sin\, x + c$
7. $\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -cot\, x + c$
8. $\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tan\, x + c$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin\, x + c,\ -arccos\, x + c$

10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctan\, x + c$

11. $\int f(x)^\alpha * f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

12. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$

13. $\int e^{f(x)} * f'(x)\, dx = e^{f(x)} + c$

14. $\int a^{f(x)} * f'(x)\, dx = \frac{a^{f(x)}}{ln\, a} + c$

15. $\int sin\, f(x) * f'(x)\, dx = -cos\, f(x) + c$

16. $\int cos\, f(x) * f'(x)\, dx = sin\, f(x) + c$

17. $\int \frac{f'(x)}{cos^2 f(x)} dx = tan\, f(x) + c$

18. $\int \frac{f'(x)}{sin^2 f(x)} dx = -cot\, f(x) + c$

19. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = arcsin\, f(x) + c,\ -arccos\, f(x) + c$

20. $\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = arctan\, f(x) + c$

21. $\int f(x) * g'(x)\, dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x) dx$

22. $\int \frac{f'(x)}{k^2+f(x)^2} dx = \frac{1}{k} arctan(\frac{f(x)}{k}) + c$

2.1.1 Pils

Durante lo svolgimento potrei trovarmi i seguenti casi che sono più complessi, riassunti in 3 macro-casi possono essere risolti in modo più semplice.
Caso:

- Grado D < Grado N: Uso la divisione.
- Denominatore: 1° Grado: $\frac{f'(x)}{f(x)}$
- Denominatore 2° Grado: Dopo aver calcolato il Δ ho i tre seguenti casi:
  - $\Delta = 0$:
    * $\int f'(x) * f(x)^\alpha dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
    * Divisione A/B
  - $\Delta < 0$:
    * $\int \frac{f'(x)}{k^2+f(x)^2} dx = \frac{1}{k} arctan(\frac{f(x)}{k}) + c$
    * $\int \frac{\text{numeratore}+a-a}{\text{denominatore}} dx$
  - $\Delta > 0$:
    * Divisione A/B
    * $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$

3 Limiti notevoli

Espressione in x	Espressione in $f(x)$	F. Indeterminata
$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{f(x)})^{fx} = e$	$[1^\infty]$
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = ln\, a$	$\lim_{x\to 0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)} = ln\, a$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{ln\, a}$	$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+f(x))}{f(x)} = \frac{1}{ln\, a}$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k$	$\lim_{x\to 0}\frac{(1+f(x))^k-1}{f(x)} = k$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{sin(f(x))}{f(x)} = 1$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(f(x))}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)}{x} = 1$	$\lim_{x\to 0}\frac{tan(f(x))}{f(x)} = 1$	$[\frac{0}{0}]$

LIMITE NOTEVOLE IMPORTANTE: $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{A}{x})^{Bx} = e^{AB}$

4 Proprietà dei Logaritmi e delle potenze

Logaritmi
$log_a(x*y) = log_a(x) + log_a(y)$
$log_a(\frac{x}{y}) = log_a(x) - log_a(y)$
$log_a(x^n) = n * log_a(x)$
$log_b x = \frac{log_a x}{log_a(b)}$
$log_a(b) = \frac{1}{log_b(a)}$

Potenze
$a^n * b^n = (a*b)^n$
$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$
$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
$(a^n)^p = a^{n^p} = a^{n*p}$
$a^0 = 1$

5 Fattoriali

5.0.1 Definizione base

Per $n \in \mathbb{N}$: $n! = n*(n-1)*(n-2)*...*2*1$
con $0! = 1$ (Per convenzione).

5.0.2 Relazioni ricorsive

1. $(n+1)! = (n+1)*n!$
2. $n! = n*(n-1)!$
3. $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$

5.0.3 Fattoriale e coefficienti binomiali

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

5.0.4 Prodotti notevoli

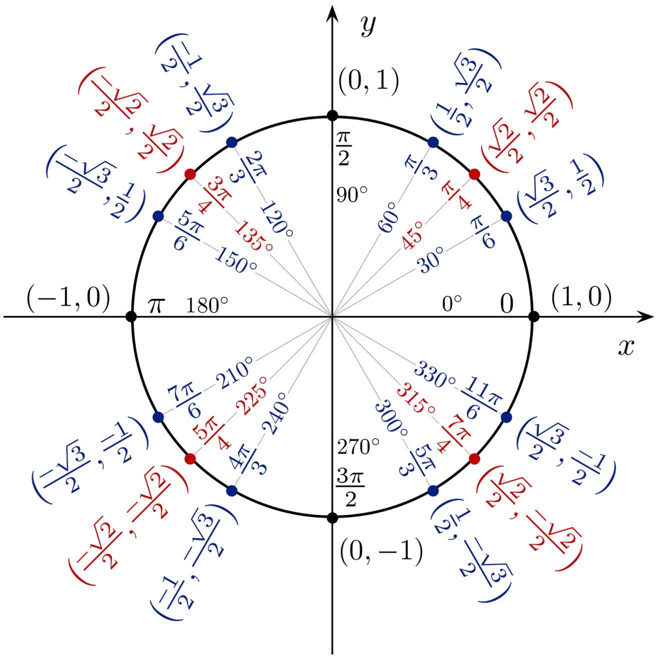
1. $\binom{(2n)!}{n!} = (n+1)*(n+2)*...*(2n)$
2. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$

5.0.5 Somma asintotica

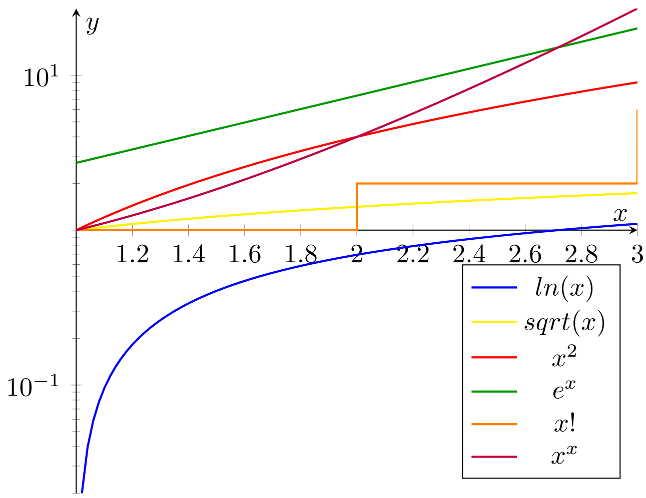
$n! \sim \sqrt{2\pi n} * (\frac{n}{e})^n$

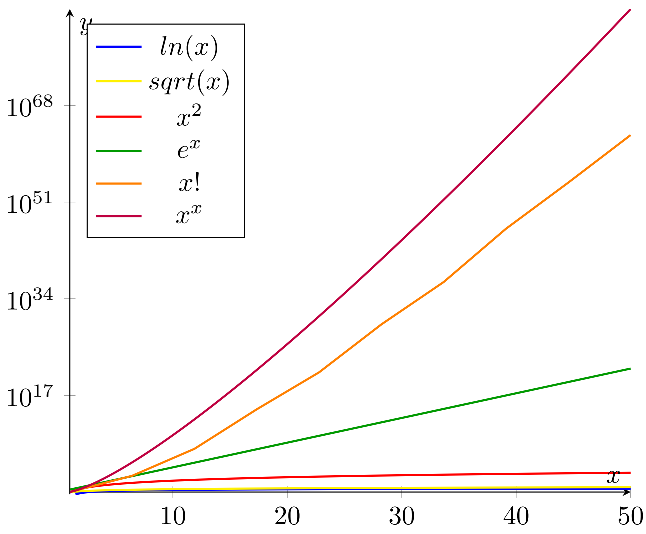
6 Circonferenza Goniometrica

Circonferenza di raggio unitario situato al centro di un piano cartesiano con centro nell'origine degli assi.



7 Ordini di infinito





NB. È corretto visualizzare $f(x) = x!$ a "gradini" dato che la funzione è definita solo per $x \in \mathbb{N}$

8 Sviluppi di Taylor con resto di Peano (MCLAURIN)

Funzione	Sviluppo in forma troncata	Sviluppo in forma compatta
$(1+u)^\alpha$	$1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}u^3+o(u^3)$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}u^k+o(u^n)$
e^u	$1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}+\frac{u^5}{120}+o(u^5)$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}+o(u^n)$
$sin\, u$	$u-\frac{u^3}{6}+\frac{u^5}{120}-\frac{u^7}{5040}+o(u^7)$	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(u^{2n+2})$
$cos\, u$	$1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}-\frac{u^6}{720}+\frac{u^8}{40320}+o(u^8)$	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{u^{2k}}{(2k)!}+o(u^{2n+1})$
$log(1+u)$	$u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^5}{5}+o(n^5)$	$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{u^k}{k}+o(u^n)$
$sinh\, u$	$u+\frac{u^3}{6}+\frac{u^5}{120}+\frac{u^7}{5040}+o(u^7)$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(u^{2n+2})$
$cosh\, u$	$1+\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24}+\frac{u^6}{720}+o(u^6)$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{u^{2k}}{(2k)!}+o(u^{2n+1})$
$tan\, u$	$u+\frac{u^3}{3}+\frac{2}{15}u^5+\frac{17}{315}u^7+\frac{62}{2835}u^9+o(u^{10})$	-
$tanh\, u$	$u-\frac{u^3}{3}+\frac{2}{15}u^5-\frac{17}{315}u^7+\frac{62}{2835}u^9+o(u^{10})$	-
$arctan\, u$	$u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^7}{7}+\frac{u^9}{9}+o(u^9)$	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{u^{2k+1}}{2k+1}+o(u^{2n+2})$
$arctanh\, u$	-	$\sum_{k=0}^{n}\frac{u^{2k+1}}{2k+1}+o(u^{2n+2})$

Parte II
Studio di Funzione

9 Studio di Funzione

9.1 Dominio, simmetrie e segno

9.1.1 Dominio

Per dominio si intende l'insieme dei valori di x per cui la funzione è definita.
Casi tipici:

- Frazioni $\rightarrow$ denominatore $\neq 0$.
- Radici pari $\rightarrow$ argomento ≥ 0.
- Logaritmi $\rightarrow$ argomento > 0.
- Funzioni goniometriche con $Df(x) \neq \mathbb{R}$ (Esclusi frazioni con seni e coseni ad es. tangente):
  - $f(x) = arcsin\, x \rightarrow Df(x) = [-1, 1]$
  - $f(x) = arccos\, x \rightarrow Df(x) = [-1, 1]$

Esempio: $f(x) = \frac{x-3}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & \text{se } x = 3 \\ f(x) > 0 & \text{se } x < -1 \text{o } x > 3 \\ f(x) < 0 & \text{se } -1 < x < 3 \end{cases}$

9.1.2 Simmetrie

- Parità:
  - $f(-x) = f(x) \rightarrow$Funzione pari (simmetria rispetto all'asse y)
  - $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Funzione dispari (simmetria rispetto all'origine)

Esempio: $f(x) = x^2 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 = x^2 \Rightarrow f$ pari.

9.2 Punti di accumulazione, limiti e asintoti

Principalmente lo studio dei limiti è finalizzato alla determinazione dell'esistenza degli asintoti, questi possono essere:

- Asintoti Verticali → Quando il limite in un punto va a $\pm\infty$
- Asintoti Orizzontali → Quando $lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$
- Asintoti Obliqui

Per gli asintoti obliqui il procedimento è leggermente più lungo, innanzitutto ***la presenza di asintoti orizzontali preclude la presenza di asintoti obliqui*** quindi se sono presenti as. orizzontali ci si può fermare, in caso non siano presenti fare testo a quanto segue:
Un as. obliquo è una retta (Quindi forma $y = mx + q$), per trovarlo calcolo la pendenza "m" con: $m = lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ se questo limite esiste ed è finito allora possiamo calcolare "q" con: $q = lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx)$ se anche questo limite esiste ed è finito allora l'asintoto obliquo esiste ed è proprio: $y = mx + q$.

NB. se $m = 0$ l'asintoto non è olbiquo ma orizzontale, se il grado del numeratore è maggiore di 1 grado rispetto al numeratore (ad es. $\frac{x^2}{x}$) è comune avere un as. obliquo, se invece il numeratore ha grado maggiore di 2 o più rispetto al numeratore probabilmente avremo un as. verticale.

9.3 Studio della continuità e derivabilità, monotònia

9.3.1 Continuità

Per definizione una funzione è continua in un dato punto x_0 se $lim_{x\to x_0^\pm} f(x) = l$ e $f(x_0) = l \in D_f$.
Verifico punti critici del dominio di f e controllo se sono presenti discontinuità, queste possono essere:

- **I specie, Di salto:** i due limiti laterali esistono ma sono diversi.
- **II specie, Infinita:** almeno un limite laterale tende a $\pm\infty$.
- **III specie, Eliminabile:** i limiti esistono ($\in \mathbb{R}$) e coincidono ma $f(x_0)$ non appartiene al dominio o ha valore diverso dai limiti, è possibile prolungare definendo $f(x_0) = l$ dove l è il risultato del limite

Esempio: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow D[f(x)] = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ In $x = 1 \to$ discontinuità eliminabile.

NB. "Eliminabile" e "di salto" sono di **1a Specie**, "Infinita" è di **2a specie**.

9.3.2 Derivabilità

Per definizione una funzione è derivabile in un dato punto x_0 se $f(x_0) = lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Se f è derivabile allora è continua, ma non sempre vale il contrario.

Strategia operativa:

1. Controllo dove la funzione è sospetta (valori assoluti, radici, punti angolosi)
2. Verifico che il limite destro e sinistro su quel punto coincidano

Nel caso non dovessero coincidere vuol dire che ci troviamo di fronte ad un punto di non derivabilità, casi più comuni:

- **Angolo:** ad es.$f(x) = |x|$ funzione continua ma non derivabile, c'è un'improvviso cambio di pendenza, in $x_0 = 0^-$ $f'(x_0) = -1$, in $x = 0^+$ $f'(x_0) = +1$.
- **Cuspide:** ad es. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funzione continua ma non derivabile, in $x_0 = 0^-$ $f'(x_0) = -\infty$, in $x_0 = 0^+$ $f'(x_0) = +\infty$.
- **Tangente verticale:** ad es. $f(x) = \sqrt{x}$ non è richiesto che la funzione sia derivabile sia da destra che da sinistra, basta 1 delle due, basta che la funzione sia continua e che la derivata da destra o sinistra vada a $\pm\infty$.

Se una funzione non è continua, automaticamente non è derivabile, ad esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ in $x = 0$ non è derivabile per discontinuità.

Strategia operativa:

1. Controllo la continuità. Se non è continua → già classificata.
2. Se è continua:

(a) Calcolo la derivata a destra e sinistra.
(b) Confronto i valori:
   i. Diversi e finiti $\rightarrow$ **angolo**.
   ii. Entrambi infiniti con segni opposti $\rightarrow$ **cuspide**.
   iii. Entrambi con stesso segno $\rightarrow$ **tangente verticale**.

9.4 Derivata seconda e convessità

In questa fase andiamo a controllare se ci sono cambi di convessità e se sono presenti punti di flesso.
Strategia operativa:

1. Calcolo la derivata seconda ($f''(x)$)
2. Trovo i punti candidati ad essere punti di flesso con $f''(x) = 0$
3. Verifico se in questi punti c'è un cambio di concavità (f passa da $f''(x) > 0$ a $f''(x) < 0$ o viceversa), se questo si verifica allora c'è un punto di flesso, altrimenti no.
4. Riassumo i vari risultati in uno studio del segno per completezza.

Esempio: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, risolvendo $f''(x) = 0$ si ottiene $x = 0$. Per $x < 0$ si ha $f''(x) < 0 \rightarrow$ concava, per $f''(x) > 0 \rightarrow$convessa. Dato che c'è stato un cambio di concavità in $x = 0$ allora in questo punto c'è un flesso.
Esempio: $f(x) = x^4$,$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, risolvendo $f''(x) = 0$ si ottiene $x = 0$. Però $f''(x)$ è sempre ≥ 0 quindi la curva è sempre convessa verso l'alto e quindi non essendoci nessun cambio di concavità in quel punto non c'è un flesso.

Parte III
Studio della convergenza

9.5 Condizione necessaria di convergenza

Affinche una serie converga è necessario che il *termine generale a_n sia infinitesimo* (Ovvero $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$)

NB. *Non è necessario svolgere questo l'imite durante la risoluzione, ma sicuramente è comodo da fare.*
NB. *Se il risultato del limite è 0 la serie può divergere o convergere il fatto che il risultato sia 0 è necessario solo per la divergenza ma non sufficiente.*

9.6 Serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ con } q \in \mathbb{R} \text{ è detta serie geometrica.}$$

$$s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } 1 \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{convergente (con somma} \frac{1}{1-q}) & \text{se } |q| < 1 \\ \text{divergente} & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

ESEMPIO: $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ converge (essendo $\frac{1}{2} < 1$ dove $\frac{1}{2} = q$) e la somma è: $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie numeriche convergenti e sia $k \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} Ka_n = K \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

NB. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, anche $\sum_{n=0}^{\infty} Ka_n$ converge (stessa cosa per la divergenza)

9.7 Serie armoniche

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$

9.7.1 Serie armoniche generalizzate

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (log\, n)^\beta} \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \textbf{ oppure } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha < 1 \textbf{ oppure } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$

9.8 Serie di Mengoli (Serie telescopica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ è detta serie di Mengoli}$$

$s_n = 1 \cancel{-\frac{1}{2}} \cancel{+\frac{1}{2}} \cancel{-\frac{1}{3}} \cancel{+\frac{1}{3}} \cancel{-\frac{1}{4}} + ... + \cancel{\frac{1}{n-1}} \cancel{-\frac{1}{n}} \cancel{+\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \lim\limits_{n \to +\infty} [1 - \frac{1}{n+1}] = 1 \Rightarrow$ La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge e la somma è 1.

NB. Trovare negli esercizi la serie telescopica è piuttosto raro.

9.9 Criteri con condizioni sufficienti per la convergenza

Serie a termini non negativi $\begin{cases} \text{criterio del rapporto} \\ \text{criterio della radice} \\ \text{criterio del confronto} \\ \text{criterio del confronto asintotico} \end{cases}$

Serie a termini di segno variabile $\begin{cases} \text{criterio dell'assoluta convergenza} \\ \text{criterio di Leibniz} \end{cases}$

9.9.1 Criterio del rapporto (D'Alembert)

Sia $a_n > 0$ definitivamente e supponiamo che $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ (Essendo $a_n > 0$ allora $l \in [0, +\infty)$ oppure $l = +\infty$)

- Se $l < 1$ allora $\sum a_n$ converge
- Se $l > 1$ allora $\sum a_n$ diverge
- se $l = 1$ tutto è possibile (bisogna cambiare criterio)

Esempio: Studio il carattere della serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2015}}{3^n}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{(n+1)^{2015}}{3^{n+1}}}{\frac{n^{2015}}{3^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^{2015}}{3 * \cancel{3^n}} * \frac{\cancel{3^n}}{n^{2015}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{3} * \frac{(n+1)^{2015}}{n^{2015}} = \frac{1}{3} < 1 \text{ quindi la serie converge.}$$

9.9.2 Criterio della radice (CAUCHY)

Siano $a_n \geq 0$ definitivamente e supponiamo che $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

- Se $l < 1$ allora $\sum a_n$ converge
- Se $l > 1$ allora $\sum a_n$ diverge
- se $l = 1$ tutto è possibile (bisogna cambiare criterio)

Esempio: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(log\, n)^{\frac{n}{2}}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(log\, n)^{\frac{n}{2}}}} = \lim\limits_{n \to +\infty} [(log\, n)^{-\frac{n}{2}}]^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n \to +\infty} (log\, n)^{-\frac{1}{2}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{log\, n}} = 0 < 1 \Rightarrow$ La serie converge.

9.9.3 Criterio del confronto

Supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora valgono le seguenti implicazioni:

- $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge.
- $\sum a_n$ diverge a $+\infty \Rightarrow \sum b_n$ diverge a $+\infty$.

NB. Le implicazioni inverse in generale non valgono.
Esempio: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{cos\, n}{n})^2 \Rightarrow 0 \leq (\frac{cos\, n}{n})^2 \leq \frac{1}{n^2}\ \forall n \geq 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, dunque il criterio del confronto ci assicura che $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{cos\, n}{n})^2$ converge.

9.9.4 Criterio del confronto asintotico

Date 2 successioni a_n e b_n a termini definitivamente positivi se $a_n \sim b_n$ (ovvero se $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$), allora le corrispondenti serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere.
Esempio: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n + cos\, n}{n^3 - 3n} \sim \frac{1}{n^2} \to$ converge a 0.

9.9.5 Criterio dell'assoluta convergenza

Una serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **assolutamente convergente** se la serie dei moduli ad essa associata $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è **convergente**.
Come studiare il carattere della serie associata?

- Studio il carattere di $|a_n|$ essendo questa per forza ora una serie a termini positivi uso i criteri delle serie a termini non negativi.
  - Se la serie dei moduli ($|a_n|$) **converge**, allora la serie di partenza **convergerà assolutamente**.
  - Se la serie dei moduli ($|a_n|$) diverge (positivamente dato che è per forza a termini positivi), allora la serie di partenza ($\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$) non convergerà assolutamente, **converge o diverge semplicemente.**
    NB. Per capire se converge o diverge semplicemente va trovato un nuovo modo nonostante il criterio usato dentro all'assoluta convergenza abbia dato la divergenza come soluzione. (**Fai il limite della condizione necessaria di convergenza**)

9.9.6 Criterio di Leibniz

Sia $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ una serie di segno variabile, con $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Se valgolo le seguenti ipotesi:

1. Esiste il limite: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$
2. a_n sia definitivamente decrescente, quindi basta verificare che: $a_n \geq a_{n+1}$.

Se entrambe valgono allora, il criterio di Leibniz stabilisce che la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Nel caso in cui uno dei due punti non fosse verificato:

- Se non vale la **condizione 1** allora la serie **diverge**.
- Se vale la condizione 1 ma non vale la condizione 2, allora il criterio di **Leibniz non si può applicare**, bisogna cambiare criterio.

10 Convergenza degli Integrali

10.0.1 Integrali impropri

Tipo integrale	Forma	Converge se	Diverge se	
Vicino a 0	$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,dx$	$p < 1$	$p \geq 1$	
	$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha(\lvert logx \rvert)^\beta}\,dx$	$\alpha < 1, \forall\beta$ oppure $\alpha = 1,\, \beta > 1$	$\alpha > 1$	*
Vicino a $+\infty$	$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$	$p > 1$	$p \leq 1$	
	$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(logx)^\beta}\,dx$	$\alpha > 1, \forall\beta$ oppure $\alpha = 1,\, \beta > 1$	$\alpha < 1$ oppure $\alpha = 1,\, \beta \leq 1$	
Vicino a ∞	$\int_a^{+\infty} \frac{C}{e^{kx}}$	$k > 0$	$k \leq 0$	C è una costante

*

- se la potenza $x^{-\alpha}$ è "troppo aggressiva" ($\alpha > 1$) nessun log ti salva.
- se $\alpha < 1$ seo già al sicuro, il log non importa.
- Se sei nel caso critico $\alpha = 1$, allora il log decide: serve $\beta > 1$.

Parte IV
Equazioni Differenziali

L'ordine di un'equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione che compare (esempio: $f'''(x) + 3f'(x) = 9x$ è di ordine 3)
Esempio:
$f'(x) = x \Rightarrow y' = x \rightarrow$ equazione di 1° ordine.

Le equazioni di **1° Ordine** possono essere:

1. Equazioni differenziali **"Elementari"** (e **Problemi di Cauchy**)
2. Equazioni differenziali a **variabili separabili**
3. Equazioni differenziali **lineari**

11 Equazioni di 1° Grado

11.1 Equazioni differenziali "ELEMENTARI" e "PROBLEMI DI CAUCHY"

11.1.1 Tipologia 1

$y' = f(x)$
Basta integrare: $y = \int f(x)dx = F(x) + c$

Esempio:
$y' = 3e^{2x} \Rightarrow y = \int 3e^{2x}dx = 3\int e^{2x}dx = \frac{3}{2}e^{2x} + c$

11.1.2 Tipologia 2

$y'' = f(x)$
Basta integrare 2 volte:
$y' = \int f(x)dx = F(x) + c_1$
$y = \int y'dx = \int [F(x) + c_1 x]dx = \int F(x) + c_1 x + c_2$

Esempio:
$y'' = 2 - cosx$
$y' = \int (2 - cosx)dx = 2x - sinx + c_1$

$y = \int (2x - sinx + c_1)dx = x^2 + cosx + c_1x + c_2$
$y(x) = x^2 + cosx + c_1 + c_2$ (soluzione generale)

11.1.3 Problema di CAUCHY

$$\begin{cases} \text{Equazione differenziale} \\ \text{Condizion iniziali (tante quanti i parametri da determinare)} \end{cases}$$

Esempio 1:

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} & y = \int(-e^{-x})dx = e^{-x} + c \\ y(0) = 3 & 3 = e^{-0} + c \Rightarrow c = 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{-x} + 2$$

Esempio 2:

$$\begin{cases} y' = x & y' = \int xdx = \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow y = \int(\frac{x^2}{2} + c_1)dx = \frac{x^3}{6} + c_1x + c_2 \\ y(0) = 1 & 1 = \frac{0^3}{6} + c_1 * 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1 \\ y'(0) = 4 & 4 = \frac{0^2}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{6} + x + 4$$

11.2 Equazioni differenziali "A variabili separabili"

Sono equazioni che si possono ricondurre alla forma: $y' = f(x) * g(y)$, ad esempio: $y' = lnx$ oppure $y' = e^x y\, lny$

Strategia risolutiva:

1. Separo le variabili x e y
2. Integro ciascun membro alla variabile da cui dipende
3. Ricavo $y(x)$

Esempio 1:

$$y' = y^2\, lnx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2\, lnx \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = lnx\, dx \quad \begin{matrix} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int lnx\, dx \\ \Rightarrow -\frac{1}{y} = x\, lnx - x + c \end{matrix} \quad \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{x\, lnx - x + c}$$ (va bene anche $y(x) = 0$)

Esempio 2:

$$\begin{cases} y' = sinx\, e^y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = sinx\, e^y \Rightarrow \int e^{-y}dy = \int sinx\, dx \Rightarrow e^{-y} = cosx + c \Rightarrow y(x) = -ln(cosx + c) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow -ln(cos(\frac{\pi}{2}) + c) = 1 \Rightarrow ln(c) = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow y(x) = -ln(cosx + \frac{1}{e})$$

NB. $y' = f(x) * g(y)$ se $\exists \bar{y} \in \mathbb{R}/g(\bar{y}) = 0 \Rightarrow y(x) = \bar{y}$ è una soluzione dell'equazione differenziale. (Conviene prima cercare questo tipo di soluzione e poi proseguire con il procedimento standard)

11.3 Equazioni lineari del "1° Ordine"

solitamente si presentano nelle forme:
$$y'(x) = a(x)y(x) + f(x)$$
$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

Esempi:

- $y' = xy + 2x$
- $y' + \frac{y}{x} = 4x^2$

Pre check:

- Se $a(x) = 0$ è elementare
- Se $f(x) = 0$ (omogenea) diventa a variabili separabili

Se non è nessuno dei due casi descritti procedo con un nuovo sistema:

1. Sposto a sinistra dell'uguale tutti gli elementi che hanno la "y", lascio a destra quelli che hanno solamente la "x"
2. Calcolo la primitiva (integrale) di $a(x)$ ($A(x) = \int a(x)dx$)

3. Applico la formula: $y(x) = e^{-A(x)} * \int f(x) * e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)}$, spesso torna utile risolvere l'integrale per parti i con la sostituzione dell'esponente della "e"

Esempio 1:
$y'(x) = -xy(x) = 2x$

1. Sposto i termini: $y' + xy = 2x$
2. Calcolo la primitiva: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$
3. Applico la formula: $y = e^{-\frac{x^2}{2}} * \int 2x * e^{\frac{x^2}{2}}dx + ce^{-\frac{x^2}{2}}$
4. Risolvo e scrivo il risultato come: $y(x) = 2 + \frac{c}{e^{\frac{x^2}{2}}}$

Osservazione 1: Se $a(x)$ e $f(x)$ sono funzioni continue in un certo intervallo I, allora $y(x) = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)}$ è la soluzione generale $\forall x \in I$
Osservazione 2: La costante arbitraria $c \in \mathbb{R}$ può essere determinata se viene fornita una condizione iniziale del tipo: $y(x_0) = y_0$ con $x_0 \in I \Rightarrow \begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

12 Equazioni di 2° Grado

Si presentano nella forma $y''(x) + y'(x) + y(x) = f(x)$, possono avere $f(x) = 0$, in questo caso sono dette omogenee.
NB. Lineari si intende che la $y(x)$ e le sue derivate non sono moltiplicate e divise tra loro, NON sono nemmeno moltiplicate per altri reali.

12.1 Omogenee

Si presentano nella forma $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$. con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
NB. Possono mancare termini, non può mai mancare $y''(x)$, altrimenti sarebbe di 1° Grado).

Soluzione generale: $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$
Per risolvere l'equazione caratteristica devo risolvere in $\mathbb{C}$: $az^2 + bz + z = 0$.

- 2 soluzioni reali distinte ($\Delta > 0$): $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$
- 2 soluzioni reali coincidenti ($\Delta = 0$): $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow y(x) = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}$
- 2 soluzioni complesse ($\Delta < 0$): $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y(x) = c_1e^{\alpha x}cos(\beta x) + c_2e^{\alpha x}sin(\beta x)$

Esempio 1:
$y'' - 5y' + 4y = 0$
Eq. caratteristica: $z^2 - 5z + 4 = 0$, $\Delta = 9 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \{1, 4\}$
Soluzione generale: $y(x) = c_1e^{4x} + c_2e^x$

Esempio 2:
$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$
Eq. caratteristica: $z^2 + 2x + 2 = 0$, $\Delta = -4 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \{-1 + i, -1 - i\}$, con $\alpha = -1, \beta = 1$
Soluzione generale: $y = c_1e^{-x}cos(x) + c_2e^{-x}sin(x)$

Dobbiamo ora risolvere il problema di Cauchy:
$y' = [c_1e^{-x}cosx]' + [c_2e^{-x}sinx]' = -c_1e^{-x}cosx - c_1e^{x}sinx - c_2e^{-x}sinx + c_2e^{-x}cosx = c_1(-e^{-x}cosx - e^{x}sinx) + c_2(-e^{-x}sinx + e^{-x}cosx)$
$y(0) = 1 \iff c_1e^{-0}cos(0) + c_2e^{-0}sin(0) = 1 \iff c_1 = 1$
$y'(0) = 1 \iff c_1(-e^{-0}cos(0) - e^{0}sin(0)) + c_2(-e^{-0}sin(0) + e^{-0}cos(0)) = 1 \iff c_1(-1) + c_2(1) = 1 \iff c_2 = 2$
Soluzione particolare: $y = e^{-x}cosx + 2e^{-x}sinx = e^{-x}(cosx + 2sinx)$

12.2 Variazione delle costanti

Forma: $y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$
Processo risolutivo:

1. Determino la soluzione generale dell'equazione omogenea associata:
   $y_o(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$

2. Trovo una soluzione particolare della forma:
   $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$
   Per trovare $c_1(x)$ e $c_2(x)$ risolvo: $\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$

3. Calcolo la soluzione generale sommando $y_0(x)$ e $y_p(x) \Rightarrow \boldsymbol{y(x) = y_o(x) + y_p(x)}$

Esempio:
$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^4}$

1. $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1$
   $y_o(x) = c_1e^x + c_2xe^x$

2. $\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)[e^x + xe^x] = \frac{e^x}{x^4} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1'(x) = -\frac{1}{x^3} \\ c_2'(x) = \frac{1}{x^4} \end{cases}$
   Per trovare $c_1(x)$ e $c_2(x)$ calcolo le primitive di $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$:
   $c_1(x) = \int c_1'(x)dx = -\int \frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2x^2}$
   $c_2(x) = \int c_2'(x)dx = \int \frac{1}{x^4}dx = \frac{1}{3x^3}$
   NB. Non servono i "$+c$" in quanto ci interessa una soluzione particolare.

   Soluzione particolare: $y_p(x) = \frac{1}{2x^2}e^x - \frac{1}{3x^3}xe^x = \frac{e^x}{6x^2}$

3. $\boldsymbol{y(x)} = y_o(x) + y_p(x) = \boldsymbol{c_1e^x + c_2xe^x + \frac{e^x}{6x^2}} \rightarrow$ E' la soluzione generale.

Parte V
Teoria di Sopravvivenza

(18) Usando la definizione di limite fornire il significato della scrittura: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

Significa che $\forall \epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $\forall x \in D_f$, se $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - l| < \epsilon$.

(13) Enunciare TFCI

Se $f(x)$ è continua su $[a, b]$ e F è una funzione tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

(12) Enunciare il teorema della media integrale

Sia f continua in $[a, b]$. Esiste $c \in [a, b]$ tale che $\int_a^b f(x) = f(c)(b - a)$.

(10) Dimostra la condizione necessaria del 1° ordine per punti estremali interni

Supponiamo che x_0 sia punto di minimo locale. Allora esiste $\delta_1 > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap A$.
Siccome x_0 è interno, allora esiste $\delta_2 > 0$ tale che $(x_0 - \delta_2,\, x_0 + \delta_2) \subseteq A$.
Sia $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Consideriamo il rapporto incrementale (DERIVATA). Esso è ≥ 0 per ogni $x \in (x_0,\, x_0 + \delta)$ e quindi, per il teorema di permanenza del segno si ha $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$. D'altra parte il rapporto incrementale stesso è ≤ 0 per ogni $x \in (x_0 - \delta,\, x_0)$ e quindi per il teorema di permanenza del segno si ha $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.
Siccome f è derivabile in x_0 abbiamo che $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, combinando le 2 disuguaglianze precedenti concludiamo che $f'(x_0) = 0$.
(Il caso in cui x_0 sia punto di massimo locale si mostra analogamente)

(10) Dimostrare il teorema del differenziale (Lagrange)

Definiamo $\omega(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$ se $x \neq x_0$. Dato che f è derivabile in x_0 abbiamo che $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$. Prolunghiamo allora la funzione $\omega(x)$ definendo $\omega(x) = 0$. Allora per ogni $x \in I$ abbiamo che $\omega(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ da cui segue la tesi.

(8) Enunciare il criterio integrale per le serie numeriche

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente crescente e non negativa. Allora $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ converge se e solo se $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. Se inoltre, in caso di convergenza, si indica con $s = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ la somma della serie e con s_n la sua somma parziale n-esima, abbiamo che: $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq s - s_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$.

(8) Dimostra che f è strettamente crescente (decrescente)

Supponiamo che f sia strettamente crescente. Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$.
Se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ e se $x_1 > x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$. Pertanto in ogni caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$, ossia f è iniettiva.
Sappiamo inoltre che $f^{-1} : \mathcal{F}(f)$, $y_1 < y_2$, e siano $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Se si avesse che $x_1 > x_2$, allora, siccome f è strettamente crescente, otterremmo che $f(x_1) > f(x_2)$ cioè $f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$ da cui segue $y_1 > y_2$, in contraddizione con l'ipotesi. Quindi $x_1 \leq x_2$. Se $x_1 = x_2$, allora $y_1 = f(x_1) = f(x_2)$, in contraddizione con l'ipotesi. Segue che $x_1 < x_2$.
Pertanto f^{-1} è strettamente crescente.
(Analogo per f decrescente)

(7) Enuncia il teorema del differenziale (Lagrange)

Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno e f derivabile in x_0. Allora esiste una funzione $\omega : I \to \mathbb{R}$ tale che ω è continua in x_0 e $\omega(x_0) = 0$ per cui, per ogni $x \in I$, si ha $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)$.

(6) Enuncia la condizione necessaria di convergenza per le serie numeriche

Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ una serie convergente. Allora $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

(5) Enuncia il teorema di Bolzano - Weierstrass

Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, una successione limitata. Allora $\exists a_{n_k}$ una sottosuccessione di a_n tale che a_{n_k}è convergente.

(4) Enuncia il teorema del confronto (3 carabinieri)

Siano $f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$, pto di accumulazione di A, tali che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ definitivamente per $x \to x_0$.
Se esistono e sono uguali $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l \in \tilde{\mathbb{R}}$, allora esiste anche $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

(4) Enunciare criterio di Leibniz della serie a segni alterni

Sia $a_k \geq 0$, $a_{k+1} \leq a_k$ e $\lim_{x\to+\infty} a_k = 0$. Allora $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge.

(4) Enunciare criterio della radice per la convergenza della serie

Sia $a_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
Se $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l < 1$ allora $\sum a_k$ è assolutamente convergente.
Se $l = 1$ non posso concludere una convergenza o divergenza.
Se $l > 1$ allora $\sum a_k$ è divergente.

(4) Enuncia il teorema dei valori intermedi

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua in I, allora $Im_{(f)}$ è intervallo

(4) Si definisca la definizione di (un integrale) convergente

Un integrale improprio si dice convergente quando il limite che lo definisce esiste ed è finito. In caso contrario si dice divergente.
Esempio: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ si dice convergente se esiste finito il limte $\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$. Se il limite non esiste o non è finito, l'integrale si dice divergente.

(4) Dimostrare che se f è derivabile nel dominio e la derivata è negativa allora f è strettamente decrescente

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile e $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$.
Prendo $x_1 < x_2$ in (a, b). Poiché f è continua su $[x_1, x_2]$ e derivabile su (x_1, x_2), per il teorema di Lagrange esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.
Per ipotesi $f'(c) < 0$ e siccome $x_2 - x_1 > 0$, segue $f(x_2) - f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.
Quindi f è strettamente descrescente su (a, b).

Enuncia il teorema di Lagrange (o del valor medio)

Siano $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$ e f derivabile in (a, b). Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.