

Teoria Analisi 1

A. Languasco

February 9, 2025

Contents

1	Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)	3
1.1	Enunciato	3
2	Teorema dell'unicità del limite	3
2.1	Enunciato	3
2.2	Dimostrazione	3
3	Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)	4
3.1	Enunciato	4
3.2	Dimostrazione	4
4	Formula fondamentale del calcolo integrale	5
4.1	Enunciato	5
4.2	Dimostrazione	5
5	Teorema del confronto I	5
5.1	Enunciato	5
5.2	Dimostrazione	6
6	Teorema del confronto II	6
6.1	Enunciato	6
6.2	Osservazione	6
7	Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri	7
7.1	Enunciato	7
7.2	Dimostrazione	7
8	Teorema del valore medio integrale	8
8.1	Enunciato	8
8.2	Dimostrazione	8
9	Criterio integrale convergenza delle serie numeriche	8
9.1	Enunciato	8
10	Teorema delle derivate successive	8
10.1	Enunciato	8
11	Teorema di Rolle	9
11.1	Enunciato	9

12 Teorema di Lagrange	9
12.1 Enunciato	9
13 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie	10
13.1 Enunciato	10
13.2 Dimostrazione	10
14 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli	10
14.1 Enunciato	10
14.2 Dimostrazione	10

1 Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)

1.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R}, I$ intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I , f derivabile in x_0 .

Allora: $\exists w : I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. w è continua in x_0 , $w(x_0) = 0$ e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0)$$

dove: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la tangente

$w(x)(x - x_0)$ è l'errore causato da alcuni fattori, lo possiamo trascurare.

2 Teorema dell'unicità del limite

2.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Se:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \widetilde{\mathbb{R}}$

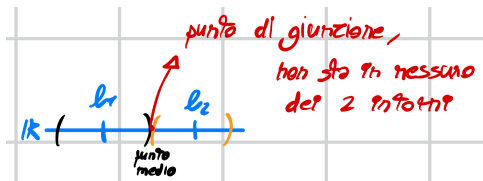
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$

Allora: $l_1 = l_2$

2.2 Dimostrazione

ip1) $\forall V_{l_1}$ intorno di $l_1 \exists U_{x_0}$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_{l_1}$ per ogni $x \in (U_{x_0} \cap A) - \{x_0\}$

ip2) $\forall V_{l_2}$ intorno di $l_2 \exists U'_{x_0}$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_{l_2}$ per ogni $x \in (U'_{x_0} \cap A) - \{x_0\}$



Per contraddizione: $l_1 \neq l_2$

Allora $\exists V_{l_1}, V_{l_2}$ intorni di l_1 e l_2 (rispettivamente) tali che: $V_{l_1} \cap V_{l_2} \neq \emptyset$

$W_{x_0} = U_{x_0} \cap U'_{x_0}$ è un intorno di x_0

Sia $x \in (W_{x_0} \cap A) - \{x_0\} \neq \emptyset$ (perché x_0 è di accumulazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in V_{l_1} & (\text{Per definizione di limite 1}) \\ f(x) \in V_{l_2} & (\text{Per definizione di limite 2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in V_{l_1} \cap V_{l_2} \neq \emptyset \Rightarrow l_1 = l_2. \text{ Contraddizione}$$

3 Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)

3.1 Enunciato

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. f R-integrale su $[a, b]$.

$\exists x_1 \in [a, b]$ t.c. f sia continua in x_1 .

Fissato $x_0 \in [a, b]$ e presa $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, si ha che F è derivabile in x_1 e $F'(x_1) = f(x_1)$

3.2 Dimostrazione

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right|, \quad x \neq x_1 \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt + \int_{x_1}^x f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_1}^x f(t)dt - f(x_1)(x - x_1)}{x - x_1} \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_1}^x (f(t) - f(x_1))dt}{x - x_1} \right| \\ &\leq \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x |f(t) - f(x_1)|dt \end{aligned}$$

Ma f è continua in $x_1 \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0$ t.c. $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon \forall t/0 < |t - x_1| < \delta_\epsilon \ t \in [a, b]$

Osservo che $t \in [x_1, x]$ (oppure $t \in [x, x_1]$, dipende come abbiamo disposto x e x_1)

Implica che $|t - x_1| \leq |x - x_1|$

Sia allora $x \in [a, b]/|x - x_1| < \delta_\epsilon$. Con questo forziamo le due variabili a stare vicine fra loro

Quindi $|t - x_1| \leq |x - x_1| < \delta_\epsilon$ e $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon$

Allora $0 \leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| < \frac{1}{|x - x_1|} \left| \int_{x_1}^x \epsilon dt \right| = \epsilon \frac{|x - x_1|}{|x - x_1|} = \epsilon$

Ossia: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0$ t.c. $\left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| < \epsilon \forall x$ t.c. $0 < |x - x_1| < \delta_\epsilon, x \in [a, b]$

Cioè: $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1}$ esiste e vale $f(x_1)$.

Quindi: $F'(x_1) = f(x_1)$

4 Formula fondamentale del calcolo integrale

4.1 Enunciato

$f \in C^0[a, b]$ e sia $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di f in $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

4.2 Dimostrazione

Sia $x \in [a, b]$ e $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Per il TFCI* è derivabile in $[a, b]$ e $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$.
 F, G sono primitive di f in un intervallo $[a, b] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / G(x) = F(x) + c \forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \text{Osservo adesso che: } G(b) - G(a) &= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) \\ &= \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^a \cancel{f(t)dt} + \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a \cancel{f(t)dt} = \int_{x_0}^b f(t)dt. \end{aligned}$$

*TFCI: Teorema Fondamentale Calcolo Integrale

Osservazione: $f \in C^0([a, b])$ e sia

$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ dove $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $[a, b]$.

Si ha che $H(x)$ è derivabile perché $H(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ dove $F(u) = \int_{x_0}^u f(t)dt$ (*Composizione di f derivabili*)

Inoltre $H'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) = \underline{f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)} \forall x \in [a, b]$

5 Teorema del confronto I

5.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A

Allora:

- a) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$
con $\ell_1 < \ell_2$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

- b) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

- c) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

5.2 Dimostrazione

a) $l_1 < l_2 (l_1, l_2 \in \mathbb{R})$. Fisso $\epsilon > 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U'x_0$ intervallo di x_0 tale che $\forall x \in (U'x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \Rightarrow \exists U''x_0$ intorno di $x_0/l_2 - \epsilon < g(x) < l_2 + \epsilon \forall x \in (U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Se $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ *idea: scelgo $\epsilon > 0/l_1 + \epsilon \leq l_2 - \epsilon$*

Scelgo in quanto sopra $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$

Per $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ si ha allora

$$f(x) < l_1 + \epsilon = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

6 Teorema del confronto II

6.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $x \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Allora:

a) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

Se $\exists Ux_0$ intorno di $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow l_1 \leq l_2$$

b) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ e $\exists Ux_0$ intorno di $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

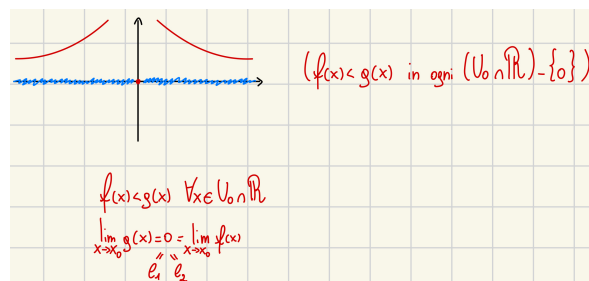
c) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e $\exists Ux_0$ intorno di $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

6.2 Osservazione

Cosa accade se si suppone $f(x) < g(x) \stackrel{?}{\Rightarrow} l_1 < l_2$

$$\mathbf{NO:} \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$



7 Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri



7.1 Enunciato

$f, g, h : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A .
Inoltre

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists U_{x_0} \text{ intorno di } x_0 / f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

7.2 Dimostrazione

Sia $\epsilon > 0$: $\exists U'_{x_0}$, U''_{x_0} intorno di x_0 / $|f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in (U'_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$
 $|g(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in (U''_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$

Sia $W_{x_0} = U'_{x_0} \cap U''_{x_0}$ è un intorno di x_0 .

Se $x \in W_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

$$\frac{l - \epsilon < f(x) \text{ definizione } \lim f \text{ (per ipotesi)}}{f(x) \leq h(x) \leq g(x)} \\ g(x) < l + \epsilon$$

Quindi $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$ cioè $|h(x) - l| < \epsilon$

Ho fatto vedere che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists W_{x_0} \text{ intorno di } x_0 / |h(x) - l| < \epsilon \text{ per } x \in W_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$$

Che è esattamente la definizione di: $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

8 Teorema del valore medio integrale

8.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g R -integrabile in $[a, b]$.

Sia $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, ($\in \mathbb{R}$)

$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, ($\in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ 2) \exists \mu \in [m, M] / \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \\ 3) \text{ Se } f \text{ continua in } [a, b], \text{ allora } \exists x_0 \in [a, b] / \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a). \end{cases}$$

8.2 Dimostrazione

1) $m \leq f(x) \leq M \quad x \in [a, b]$

$P = a, b \Rightarrow D(P, f) = m(b-a) \in G$

$S'(P, f) = M(b-a) \in H$.

Allora: $m(b-a) \leq \sup(G) = \int_a^b f(x)dx = \inf(H) \leq M(b-a)$

2) Dal punto 1): $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$. Sia $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$,

allora $\mu \in [m, M]$ e ovviamente, $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$

3) $f \in C^0[a, b]$: per il teorema dei valori intermedi $f([a, b])$ è intervallo; per il teorema di Weierstrass f ha max e min **GALE**

Quindi $f([a, b]) = [m, M]$

Per il punto 2), $\exists \mu \in [m, M] / \mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$;

ma $[m, M] = \text{Im}(f) \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = \mu$

9 Criterio integrale convergenza delle serie numeriche

9.1 Enunciato

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$.

Sia f debolmente crescente in $[+\infty)$.

Allora $(\sum_{k=1}^{\infty} f(k))$ converge $\iff \int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.)

10 Teorema delle derivate successive

10.1 Enunciato

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f \in C^{n-1}(I)$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I .

Suppongo che $\exists f^n(x_0)$ e che $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

$f^{(n)} > 0$ (< 0).

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } n \text{ è } \mathbf{PARI}, \text{ si ha che } x_0 \text{ è punto di minimo (massimo) locale forte.} \\ \text{se } n \text{ è } \mathbf{DISPARI}, \text{ allora } x_0 \text{ è pto di massimo è pto di minimo locale.} \end{cases}$$

11 Teorema di Rolle

11.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$

f derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$

Allora $\exists \bar{x} \in [a, b]$

$x_1 = a$ e $x_2 = b$ (o viceversa): allora, dato che

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a, b] \\ &\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

Se almeno uno tra x_1 e x_2 non è in un estremo di $[a, b]$

esempio sia $x_1 \in (a, b)$. Allora x_1 è interno ad $[a, b]$. Per le condizioni necessarie di estremalità si ha $f'(x_1) = 0$

Nel caso di $x_2 \in (a, b)$: si replichi lo stesso ragionamento.

12 Teorema di Lagrange

12.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$, f derivabile in (a, b) .

Allora $\exists \bar{x} \in (a, b) / f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b - a)$

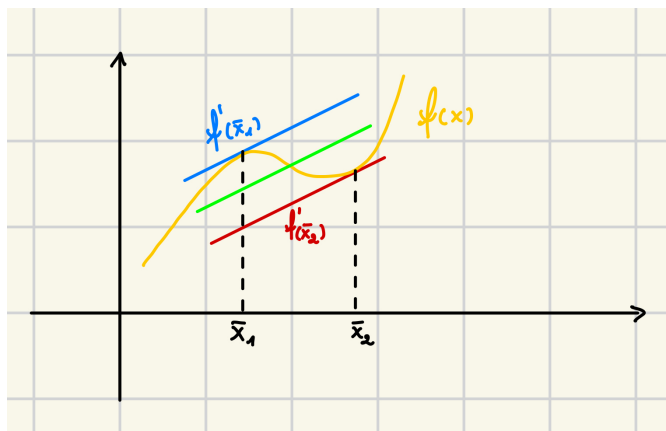
Sia $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$, f è continua in $[a, b]$;

φ è derivabile in (a, b) , $\varphi(a) = 0 - 0 = 0$; $\varphi(b) = 0 - 0 = 0$.

Per il teorema di Rolle: $\exists \bar{x} \in (a, b) \quad \varphi'(\bar{x}) \rightarrow$ punto che azzerava la derivata prima.

Ma $\varphi'(x) = (f'(x)(b - a)) - (f(b) - f(a)) \quad \forall x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \varphi'(\bar{x}) = f'(\bar{x})(b - a) - f(b) - f(a) \\ \text{e quindi } 0 &= \varphi'(\bar{x}) \text{ dato che il resto è nullo} \\ &\text{da cui segue la tesi.} \end{aligned}$$



13 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie

13.1 Enunciato

Se $\sum a_k$ converge, allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

13.2 Dimostrazione

Sia $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Per ipotesi $\exists A \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$.

Inoltre si ha che $A_n - A_{n-1} = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n$

Ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n - A_{n-1}) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n-1} \right) = A - A = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

14 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli

14.1 Enunciato

$x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Allora $(1+x)^m \geq 1+mx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

14.2 Dimostrazione

Passo base:

È vero che: $(1+x)^0 \leq 1+0 \cdot x$, si \Rightarrow passo base verificato!

Passo induttivo:

Ipotesi induttiva: $(1+x)^m \geq 1+mx$ con $m \in \mathbb{N}$

Tesi induttiva: $(1+x)^{m+1} \geq 1+(m+1)x$

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m \geq (1+mx)(1+x)$$

$$1+x+mx+mx^2 = x(1+m)+1+mx^2 = (m+1)x+1+mx^2 \geq (m+1)x+1 \quad \text{Posso anche ignorare } mx^2$$

perche è sempre positivo

Quindi il passo induttivo è verificato per il principio di induzione $\forall x > -1$