Analisi 1
Teoria di sopravvivenza

4 dicembre 2025

Indice

0.1 (12) Enunciare il teorema della media integrale

Sia f continua in $[a, b]$. Esiste $c \in [a, b]$ tale che $\int_a^b f(x) = f(c)(b - a)$.

0.2 (8) Enunciare il criterio integrale per le serie numeriche

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente crescente e non negativa. Allora $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ converge se e solo se $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. Se inoltre, in caso di convergenza, si indica con $s = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} f(k)$ la somma della serie e con s_n la sua somma parziale n-esima, abbiamo che: $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq s - s_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$.

0.3 (8) Dimostra che f è strettamente crescente (decrescente)

Supponiamo che f sia strettamente crescente. Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$.
Se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ e se $x_1 > x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$. Pertanto in ogni caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$, ossia f è iniettiva. Sappiamo inoltre che $f^{-1} : \mathcal{F}(f)$, $y_1 < y_2$, e siano $x_1?f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Se si avesse che $x_1 > x_2$, allora, siccome f è strettamente crescente, otterremmo che $f(x_1) > f(x_2)$ cioè $f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$ da cui segue $y_1 > y_2$, in contraddizione con l'ipotesi. Quindi $x_1 \leq x_2$. Se $x_1 = x_2$, allora $y_1 = f(x_1) = f(x_2)$, in contraddizione con l'ipotesi. Segue che $x_1 < x_2$. Pertanto f^{-1} è strettamente crescente.
(Analogo per f decrescente)

0.4 Teorema del differenziale (Lagrange)

0.4.1 (7) Enunciato

Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno e f derivabile in x_0. Allora esiste una funzione $\omega : I \to \mathbb{R}$ tale che ω è continua in x_0 e $\omega(x_0) = 0$ per cui, per ogni $x \in I$, si ha $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)$.

0.4.2 (10) Dimostrazione

Definiamo $\omega(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ se $x \neq x_0$. Dato che f è derivabile in x_0 abbiamo che $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = 0$. Prolunghiamo allora la funzione $\omega(x)$ definendo $\omega(x) = 0$. Allora per ogni $x \in I$ abbiamo che $\omega(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ da cui segue la tesi.

0.5 Teorema di Lagrange ($\neq$Teorema differenziale)

0.5.1 Enunciato

Siano $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$ e f derivabile in (a, b). Allora $\exists \xi \in (a, b)$ tale che $f(b) - f(a) = f'(\xi) * (b - a)$.

0.5.2 Dimostrazione

Sia $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$. Si osservi che φ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) grazie ai teoremi di derivabilità e continuità di somma e rapporto. Inoltre $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Il teorema di Rolle implica che esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$. Osservando che $\varphi(\xi) = f'(\xi) * (b - a) - (f(b) - f(a))$ si ottiene la tesi.

0.6 (6) Enuncia la condizione necessaria di convergenza per le serie numeriche

Sia $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ una serie convergente. Allora $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$

0.7 Definizione di serie convergente divergente ed indeterminata

Se $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ diremo che la serie di termine generale a_k è convergente. Se $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = s \in \{-\infty, +\infty\}$ diremo che la serie di termine generale a_k è divergente. Se non esiste $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n$ diremo che la serie di termine generale a_k è indeterminata.

0.8 Definizione di successione convergente, divergente ed indeterminata

Sia a_n una successione.
Diremo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se e solo se $\forall \epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon > 0$ tale che $|a_n - l| < \epsilon \ \forall n > N_\epsilon$. In tal caso la successione è convergente a l.
Diremo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty(-\infty)$ se e solo se $\forall k \in \mathbb{R}$ esiste $N_k > 0$ tale che $a_n > k$ $(a_n < -k)$ $\forall n > N_k$. In tal caso la successione diverge positivamente (negativamente).
Nel caso non esista $\lim_{n \to +\infty} a_n$ la successione è indeterminata.

0.9 Definizione d'integrale di Riemann

Una funzione limitata $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann se: $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. In questo caso il valore comune si chiama integrale di Riemann di f e si indica con $\int_a^b f(x)dx$.

0.10 Enuncia il teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato

Sia $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua in $[a,b]$ e sia $f(a) * f(b) < 0$. Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che $f(\xi) = 0$.

0.11 Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Definizioni e teoremi principali. Trovare la soluzione generale dell'equazione: $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ dove $a(x)$ e $b(x)$ sono due funzioni continue assegnate

0.11.1 Definizione

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e poi $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni conitnue su I. Diremo equazione differenziale del 1° ordine a coefficienti continui il problema $y'(x) = a(x) * y(x) + b(x)$.

0.11.2 Teorema (soluzione generale)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e poi $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su I. Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ in I. Allora tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale sono date da $y(x) = a^{A(x)} \int e^{-A(x)} * b(x)dx$.

0.12 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I e $a, b \in \mathbb{R}$. Diremo equazione differenziale del secondo ordine a coefficienenete costante il problema $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \ \forall x \in I$

0.13 Definizione di sup e inf per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Dimostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ammette il sup.

0.13.1 Definizione

Sia $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora
Se A è inferiormente limitato, chiameremo estremo inferiore di A, inf A, il massimo di m_A.
Se A è superiormente limitato, chiameremo estremo superiore di A, sup A, il minimo di M_A.
Se A non è superiormente (inferiormente) limitato, scriveremo sup $A = +\infty$ $(\inf A = -\infty)$.

0.13.2 Dimostrazione (superiormente limitato)

Sia $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora se A è superiormente limitato, allora M_A ammette minimo.
Sappiamo che per ogni $a \in A$ e per ogni $y \in M_A \neq \emptyset$ segue che $a \leq y$. L'assioma di separazione implica che esiste $b \in \mathbb{R}$ per cui $a \leq b \leq y$ per ogni $a \in A$ e per ogni $y \in M_A$. Pertanto $b \in M_A$ e inoltre $b = \min M_A$.

0.14 Definizione di punto di accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Definizione di limite di una funzione per $x \to x_0$, dove x_0, è un punto di accumulazione per il dominio della funzione. Dimostrare almeno un teorema significativo sui limiti.

0.14.1 Definizione punto accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremo che x_0 è pto di accumulazione per A se e solo se $\forall \delta > 0$ si ha $D^0(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$

0.14.2 (18) Definizione di limite

Scrivere $\lim_{x \to -1} f(x) = 5$ significa che $\forall \epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $\forall x \in D_f$, se $0 < |x+1| < \delta$, allora $|f(x) - 5| < \epsilon$.

0.14.3 Dimostrazione (Teorema permanenza del segno)

Sia $l = +\infty$. Per la definizione del teorema della permanenza del segno sappiamo che per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste U_{x_0}, intorno di x_0, tale che $f(x) > k$ per ogni $x \in (U_{x_0} \cap A) \backslash \{x_0\}$. Pertanto è sufficiente scegliere $k > 0$ per ottenere la tesi

0.15 Formula di Taylor derivabile n volte

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, sia derivabile $n-1$ volte in I e tali funzioni derivate siano continue in I. Sia inoltre $x_0 \in I$, x_0 interno ed $\exists f^{(n)}(x_0)$.

Allora $\exists w : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che w continua in x_0, $w(x_0) = 0$ ed inoltre $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + w(x)(x - x_0)^n$ $\forall x \in I$.

0.16 Definizione f continua

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Diremo che f è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

0.17 Definizione f derivabile

Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo e $x_0 \in I$, x_0 interno a I. Diremo che f è derivabile in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$. In tal caso chiameremo derivata prima di f in x_0 il valore l di tale limite che indicheremo anche con la notazione $f'(x_0)$. Diremo inolter che f è derivabile in un insieme $J \subseteq I$ se e solo se f è derivabile in x_0, per ogni $x_0 \in J$.

0.18 Teorema di Weierstrass per le funzioni continue

Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e f sia continua in $[a, b]$. Allora f ammette estremi globali.

0.19 Enuncia il teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$

Sia a_n una successione limitata. Allora esiste una sottosuccessione a_{n_k} di a_n tale che a_{n_k}è convergente.

0.20 Definizione di massimo e minimo relativo (o locale) e assoluto

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo (massimo) locale per f in A se e solo se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) \geq (\leq) f(x_0)$ per ogni $x \in U \cap A$. In tal caso il valore $f(x_0)$ viene detto mimino (massimo) locale per f in A. Inoltre diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo (massimo) globale per f in A se e solo se $f(x) \geq (\leq) f(x_0)$ per ogni $x \in A$. In tal caso il valore $f(x_0)$ viene detto mimino (massimo) globale per f in A.

0.21 Enunciato teorema di Fermat (condizione necessaria del 1° ordine per estremi interni)

Se una funzione f ha un punto di massimo (minimo) locale in x_0 e f è derivabile in x_0 allora la derivata in quel punto è nulla. $(f'(x_0) = 0)$.

0.22 Monotonia (+ legame con derivata prima)

0.22.1 Enunciato

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e $I \subseteq A$ un intervallo.

1. Diremo che f è strettamente (debolmente) crescente in I se e solo se $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, si ha che $f(x_1) < (\leq) f(x_2)$.
2. Diremo che f è strettamente (debolmente) decrescente in I se e solo se $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, si ha che $f(x_1) > (\geq) f(x_2)$.
3. Diremo che f è debolmente monotona in I se e solo se f è debolmente crescente o debolmente descrescente in I.
4. Diremo che f è strettamente monotona in I se e solo se f è strettamente crescente o strettamente descrescente in I.

0.22.2 Legame con derivata prima

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile.

- Se $f'(x) > 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente.
- Se $f'(x) < 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è strettamente decrescente.
- Se $f'(x) \geq 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è crescente.
- Se $f'(x) \leq 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è decrescente.
- Se $f'(x) = 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è costante.

0.23 Definizione di o-piccolo

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ e un punto di accumulazione per A. Diremo che f è o-piccolo di g per $x \to x_0$, e lo scriveremo come $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, se esiste una funzione $\omega : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitesima in x_0 e esiste un intorno U_{x_0} di x_0 per cui $f(x) = \omega(x)g(x)$ per $x \in (U_{x_0} \cap A) \backslash \{x_0\}$.

0.24 Definizione derivata seconda (+convessità)

La derivata seconda di f in x_0 è definita come: $f''(x_0) = \underset{h \to 0}{lim} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}$ se questo limite esiste.
Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in I (intervallo). Allora f è convessa (concava) in I se e solo se $f''(x) \geq (\leq) 0$ $\forall x \in I$.

0.25 (13) Enunciare TFCI

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$ e F è una funzione tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$, allora $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

0.26 Dimostrare che se f è una funzione dispari e continua in 0 allora $f(0) = 0$.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione dispari e sia $0 \in A$. Per definizione di funzione dispari: $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.
Poiché $-0 = 0$, otteniamo: $f(0) = -f(0)$ Sommiamo $f(0)$ ad entrambi i membri: $f(0) + f(0) = 0$ e quindi: $2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

0.27 Definizione di sottosuccessione.

Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, una successione. Diremo che la successione b_k, $k \in \mathbb{N}$, data dalla composizione della funzione strettamente crescente $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \to \varphi(k)$, con la successione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$ è una sottosuccessione di a_n.

0.28 Enunciare il teorema Ponte in $\mathbb{R}$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A. Allora $\underset{x \to x_0}{lim} f(x) = l \in \tilde{\mathbb{R}}$ se e solo se per ogni successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq (A \backslash \{x_0\})$ si ha che $\underset{n \to +\infty}{lim} x_n = x_0$ e $\underset{n \to +\infty}{lim} f(x_n) = l$.

0.29 Definizione di funzione invertibile

Una funzione $f : A \to B$ è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva (biettiva).