

# Teoria Analisi 1

A. Languasco

February 18, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)</b>	<b>4</b>
1.1	Enunciato . . . . .	4
<b>2</b>	<b>! Dimostrazione</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Teorema dell'unicità del limite</b>	<b>4</b>
3.1	Enunciato . . . . .	4
3.2	Dimostrazione . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)</b>	<b>5</b>
4.1	Enunciato . . . . .	5
4.2	Dimostrazione . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Formula fondamentale del calcolo integrale</b>	<b>6</b>
5.1	Enunciato . . . . .	6
5.2	Dimostrazione . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Teorema del confronto I</b>	<b>6</b>
6.1	Enunciato . . . . .	6
6.2	Dimostrazione . . . . .	7
<b>7</b>	<b>Teorema del confronto II</b>	<b>7</b>
7.1	Enunciato . . . . .	7
7.2	Osservazione . . . . .	7
<b>8</b>	<b>Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri</b>	<b>8</b>
8.1	Enunciato . . . . .	8
8.2	Dimostrazione . . . . .	8
<b>9</b>	<b>Teorema del valore medio integrale</b>	<b>9</b>
9.1	Enunciato . . . . .	9
9.2	Dimostrazione . . . . .	9
<b>10</b>	<b>Criterio integrale convergenza delle serie numeriche</b>	<b>9</b>
10.1	Enunciato . . . . .	9
<b>11</b>	<b>Teorema delle derivate successive</b>	<b>9</b>
11.1	Enunciato . . . . .	9
<b>12</b>	<b>Teorema di Rolle</b>	<b>10</b>
12.1	Enunciato . . . . .	10

<b>13 Teorema di Lagrange</b>	<b>10</b>
13.1 Enunciato . . . . .	10
13.2 Dimostrazione . . . . .	10
<b>14 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie</b>	<b>11</b>
14.1 Enunciato . . . . .	11
14.2 Dimostrazione . . . . .	11
<b>15 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli</b>	<b>11</b>
15.1 Enunciato . . . . .	11
15.2 Dimostrazione . . . . .	11
<b>16 Integrale di Riemann</b>	<b>12</b>
16.1 Integrali Definiti . . . . .	12
16.2 Estensione dell'integrale di Riemann . . . . .	12
16.2.1 Definizione . . . . .	12
16.3 Teorema Integrazione di Riemann per parti . . . . .	12
16.3.1 Dimostrazione . . . . .	12
<b>17 Teorema di Bolzano - Weierstrß</b>	<b>13</b>
17.1 Enunciato . . . . .	13
17.2 Esempio 1 . . . . .	13
17.3 Esempio 2 . . . . .	13
<b>18 Proprietà di Archimede</b>	<b>13</b>
18.1 Enunciato . . . . .	13
18.2 Dimostrazione . . . . .	13
<b>19 Teorema Bernoulli - de l'Hopital</b>	<b>14</b>
19.1 $\frac{0}{0}$ ; limiti al finito . . . . .	14
19.1.1 Errori comuni . . . . .	14
19.2 $\frac{0}{0}$ ; limiti all'infinito . . . . .	14
19.3 $\frac{\infty}{\infty}$ ; limiti al finito . . . . .	14
19.4 $\frac{\infty}{\infty}$ ; limiti all'infinito . . . . .	14
<b>20 Teorema Densità di <math>\mathbb{Q}</math> in <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>15</b>
20.1 Enunciato . . . . .	15
20.2 Dimostrazione . . . . .	15
<b>21 Definizione di Limite</b>	<b>15</b>
<b>22 Teorema formula di Taylor con resto di Peano</b>	<b>15</b>
22.1 Enunciato . . . . .	15
<b>23 Criterio di Von Leibniz (Serie segni alterni)</b>	<b>16</b>
23.1 Enunciato . . . . .	16
<b>24 Criterio della radice (CAUCHY)</b>	<b>16</b>
<b>25 Criterio del rapporto (D'Alembert)</b>	<b>16</b>
<b>26 Criterio integrale</b>	<b>16</b>
<b>27 Serie a termini di segno qualunque</b>	<b>16</b>

<b>28 ! Criterio dell'ordine di infinitesimo (Integrali impropri)</b>	<b>16</b>
<b>29 Teorema dei valori intermedi</b>	<b>16</b>
29.1 Enunciato . . . . .	16
<b>30 Proprietà della parte intera</b>	<b>17</b>
30.1 Enunciato . . . . .	17
<b>31 Teorema "Ponte" o limiti mediante successioni</b>	<b>17</b>
31.1 Enunciato . . . . .	17
31.2 Dimostrazione . . . . .	17
<b>32 Teorema degli Zeri</b>	<b>17</b>
32.1 Enunciato . . . . .	17
32.2 Dimostrazione (metodo dicotomico) . . . . .	17
<b>33 Principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore</b>	<b>18</b>
33.1 Enunciato . . . . .	18
33.2 Dimostrazione (Traccia) . . . . .	18
<b>34 ! Condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni</b>	<b>18</b>

# 1 Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)

Se una funzione è derivabile in un punto, allora il suo comportamento vicino a quel punto può essere descritto da una retta tangente (approssimazione lineare). Il termine  $o(x - x_0)$  indica che il resto dell'approssimazione tende a zero più velocemente di  $x - x_0$ .

## 1.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R}, I$  intervallo,  $x_0 \in I$ ,  $x_0$  interno ad  $I$ ,  $f$  derivabile in  $x_0$ .

Allora:  $\exists w : I \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $w$  è continua in  $x_0$ ,  $w(x_0) = 0$  e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0)$$

dove:  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  è la tangente

$w(x)(x - x_0)$  è l'errore causato da alcuni fattori, lo possiamo trascurare.

## 2 ! Dimostrazione

## 3 Teorema dell'unicità del limite

### 3.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione per  $A$  Se:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \tilde{\mathbb{R}}$

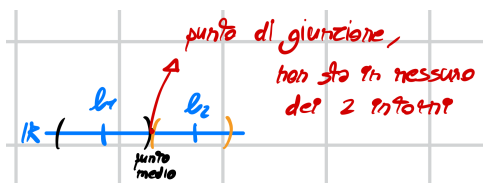
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$

Allora:  $l_1 = l_2$

### 3.2 Dimostrazione

ip1)  $\forall V l_1$  intorno di  $l_1 \exists U x_0$  intorno di  $x_0$  t.c.  $f(x) \in V l_1$  per ogni  $x \in (U x_0 \cap A) - \{0\}$

ip2)  $\forall V l_2$  intorno di  $l_2 \exists U' x_0$  intorno di  $x_0$  t.c.  $f(x) \in V l_2$  per ogni  $x \in (U' x_0 \cap A) - \{0\}$



Per contraddizione:  $l_1 \neq l_2$

Allora  $\exists V l_1, V l_2$  intorni di  $l_1$  e  $l_2$  (rispettivamente) tali che:  $V l_1 \cap V l_2 \neq \emptyset$

$W x_0 = U x_0 \cap U' x_0$  è un intorno di  $x_0$

Sia  $x \in (W x_0 \cap A) - \{x_0\} \neq \emptyset$  (perché  $x_0$  è di accumulazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in V l_1 & \text{(Per definizione di limite 1)} \\ f(x) \in V l_2 & \text{(Per definizione di limite 2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in V l_1 \cap V l_2 \neq \emptyset \Rightarrow l_1 = l_2. \text{ Contraddizione}$$

## 4 Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)

### 4.1 Enunciato

$[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ .  $f$  R-integrale su  $[a, b]$ .

$\exists x_1 \in [a, b]$  t.c.  $f$  sia continua in  $x_1$ .

Fissato  $x_0 \in [a, b]$  e presa  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ , si ha che  $F$  è derivabile in  $x_1$  e  $F'(x_1) = f(x_1)$

### 4.2 Dimostrazione

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right|, \quad x \neq x_1 \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt + \int_{x_1}^x f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_1}^x f(t)dt - f(x_1)(x - x_1)}{x - x_1} \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_1}^x (f(t) - f(x_1))dt}{x - x_1} \right| \\ &\leq \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x |f(t) - f(x_1)|dt \end{aligned}$$

Ma  $f$  è continua in  $x_1 \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0$  t.c.  $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon \forall t/0 < |t - x_1| < \delta_\epsilon \quad t \in [a, b]$

Osservo che  $t \in [x_1, x]$  (oppure  $t \in [x, x_1]$ , dipende come abbiamo disposto  $x$  e  $x_1$ )

Implica che  $|t - x_1| \leq |x - x_1|$

Sia allora  $x \in [a, b]/|x - x_1| < \delta_\epsilon$ . Con questo forziamo le due variabili a stare vicine fra loro

Quindi  $|t - x_1| \leq |x - x_1| < \delta_\epsilon$  e  $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon$

Allora  $0 \leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| < \frac{1}{|x - x_1|} \left| \int_{x_1}^x \epsilon dt \right| = \epsilon \frac{|x - x_1|}{|x - x_1|} = \epsilon$

Ossia:  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0$  t.c.  $\left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| < \epsilon \forall x$  t.c.  $0 < |x - x_1| < \delta_\epsilon, x \in [a, b]$

Cioè:  $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1}$  esiste e vale  $f(x_1)$ .

**Quindi:  $F'(x_1) = f(x_1)$**

## 5 Formula fondamentale del calcolo integrale

### 5.1 Enunciato

$f \in C^0[a, b]$  e sia  $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva di  $f$  in  $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

### 5.2 Dimostrazione

Sia  $x \in [a, b]$  e  $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ . Per il TFCI\* è derivabile in  $[a, b]$  e  $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$ .  
 $F, G$  sono primitive di  $f$  in un intervallo  $[a, b] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / G(x) = F(x) + c \forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \text{Osservo adesso che: } G(b) - G(a) &= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) \\ &= \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^a \cancel{f(t)dt} + \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a \cancel{f(t)dt} = \int_{x_0}^b f(t)dt. \end{aligned}$$

\*TFCI: Teorema Fondamentale Calcolo Integrale

**Osservazione:**  $f \in C^0([a, b])$  e sia

$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$  dove  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili in  $[a, b]$ .

Si ha che  $H(x)$  è derivabile perché  $H(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$  dove  $F(u) = \int_{x_0}^u f(t)dt$  (*Composizione di  $f$  derivabili*)

Inoltre  $H'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) = \underline{f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)} \forall x \in [a, b]$

## 6 Teorema del confronto I

### 6.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione per  $A$

Allora:

- a) Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$   
Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$   
con  $\ell_1 < \ell_2$ , allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

- b) Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$   
Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

- c) Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$   
Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ , allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

## 6.2 Dimostrazione

a)  $l_1 < l_2 (l_1, l_2 \in \mathbb{R})$ . Fisso  $\epsilon > 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U'x_0$  intervallo di  $x_0$  tale che  $\forall x \in (U'x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \Rightarrow \exists U''x_0$  intorno di  $x_0/l_2 - \epsilon < g(x) < l_2 + \epsilon \forall x \in (U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Se  $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$  *idea: scelgo  $\epsilon > 0/l_1 + \epsilon \leq l_2 - \epsilon$*

Scelgo in quanto sopra  $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$

Per  $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$  si ha allora

$$f(x) < l_1 + \epsilon = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

## 7 Teorema del confronto II

### 7.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $A \neq \emptyset$   $x \in \tilde{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione per  $A$  Allora:

a) Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$

Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

Se  $\exists Ux_0$  intorno di  $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow l_1 \leq l_2$$

b) Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$  e  $\exists Ux_0$  intorno di  $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

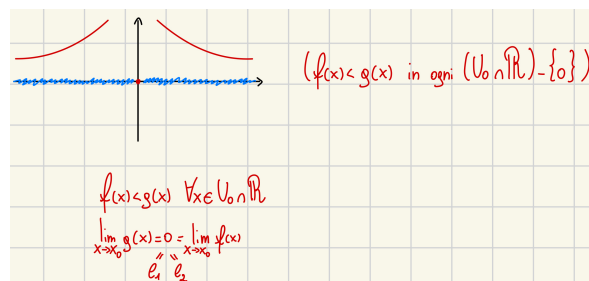
c) Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  e  $\exists Ux_0$  intorno di  $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

### 7.2 Osservazione

Cosa accade se si suppone  $f(x) < g(x) \stackrel{?}{\Rightarrow} l_1 < l_2$

$$\mathbf{NO:} \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$



## 8 Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri



### 8.1 Enunciato

$f, g, h : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$  punto di accumulazione per  $A$ .  
Inoltre

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists U_{x_0} \text{ intorno di } x_0 / f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

### 8.2 Dimostrazione

Sia  $\epsilon > 0$ :  $\exists U'_{x_0}$ ,  $U''_{x_0}$  intorno di  $x_0$  /  $|f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in (U'_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$   
 $|g(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in (U''_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$

Sia  $W_{x_0} = U'_{x_0} \cap U''_{x_0}$  è un intorno di  $x_0$ .

Se  $x \in W_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$

$$\frac{l - \epsilon < f(x) \text{ definizione } \lim f \text{ (per ipotesi)}}{f(x) \leq h(x) \leq g(x)} \\ g(x) < l + \epsilon$$

Quindi  $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$  cioè  $|h(x) - l| < \epsilon$

Ho fatto vedere che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists W_{x_0} \text{ intorno di } x_0 / |h(x) - l| < \epsilon \text{ per } x \in W_{x_0} \cap A \setminus \{x_0\}$$

Che è esattamente la definizione di:  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$



## 9 Teorema del valore medio integrale

### 9.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$   $R$ -integrabile in  $[a, b]$ .

Sia  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ , ( $\in \mathbb{R}$ )

$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ , ( $\in \mathbb{R}$ )

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ 2) \exists \mu \in [m, M] / \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \\ 3) \text{ Se } f \text{ continua in } [a, b], \text{ allora } \exists x_0 \in [a, b] / \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a). \end{cases}$$

### 9.2 Dimostrazione

1)  $m \leq f(x) \leq M \quad x \in [a, b]$

$P = a, b \Rightarrow D(P, f) = m(b-a) \in G$

$S'(P, f) = M(b-a) \in H$ .

Allora:  $m(b-a) \leq \sup(G) = \int_a^b f(x)dx = \inf(H) \leq M(b-a)$

2) Dal punto 1):  $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$ . Sia  $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ ,

allora  $\mu \in [m, M]$  e ovviamente,  $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$

3)  $f \in C^0[a, b]$ : per il teorema dei valori intermedi  $f([a, b])$  è intervallo; per il teorema di Weistrass  $f$  ha max e min **GALE**

Quindi  $f([a, b]) = [m, M]$

Per il punto 2),  $\exists \mu \in [m, M] / \mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$ ;

ma  $[m, M] = Im(f) \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = \mu$

## 10 Criterio integrale convergenza delle serie numeriche

### 10.1 Enunciato

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$ .

Sia  $f$ . debolmente crescente in  $[+\infty)$ .

Allora  $(\sum_{k=1}^{\infty} f(k))$  converge  $\iff \int_1^{+\infty} f(x)dx$  converge.)

## 11 Teorema delle derivate successive

### 11.1 Enunciato

Sia  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ,  $f \in C^{n-1}(I)$ ,  $I$  intervallo,  $x_0 \in I$ ,  $x_0$  interno ad  $I$ .

Suppongo che  $\exists f^{(k)}(x_0) = 0$  per  $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ .

$f^{(n)} > 0$  ( $< 0$ ).

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } n \text{ è } \mathbf{PARI}, \text{ si ha che } x_0 \text{ è punto di minimo (massimo) locale forte.} \\ \text{se } n \text{ è } \mathbf{DISPARI}, \text{ allora } x_0 \text{ è pto di massimo (minimo) locale.} \end{cases}$$

## 12 Teorema di Rolle

### 12.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua in  $[a, b]$

$f$  derivabile in  $(a, b)$  e  $f(a) = f(b)$

Allora  $\exists \bar{x} \in [a, b]$

$x_1 = a$  e  $x_2 = b$  (o viceversa): allora, dato che

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a, b] \\ &\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

Se almeno uno tra  $x_1$  e  $x_2$  non è in un estremo di  $[a, b]$

esempio sia  $x_1 \in (a, b)$ . Allora  $x_1$  è interno ad  $[a, b]$ . Per le condizioni necessarie di estremalità si ha  $f'(x_1) = 0$

Nel caso di  $x_2 \in (a, b)$ : si replichi lo stesso ragionamento.

## 13 Teorema di Lagrange

### 13.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  continua in  $[a, b]$ ,  $f$  derivabile in  $(a, b)$ .

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a, b) / f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b - a)$$

### 13.2 Dimostrazione

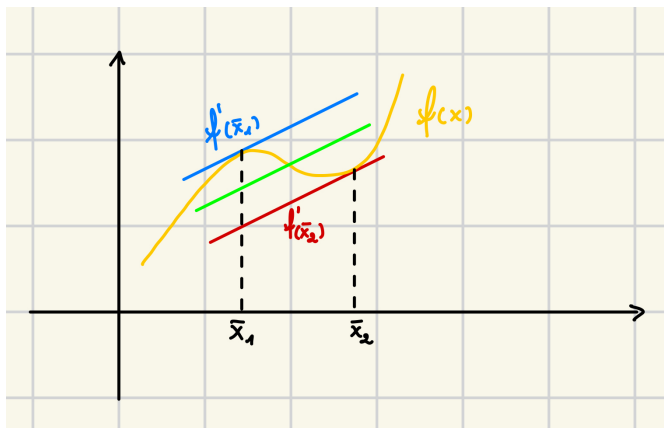
Sia  $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$ ,  $f$  è continua in  $[a, b]$ ;

$\varphi$  è derivabile in  $(a, b)$ ,  $\varphi(a) = 0 - 0 = 0$ ;  $\varphi(b) = 0 - 0 = 0$ .

Per il teorema di Rolle:  $\exists \bar{x} \in (a, b)$   $\varphi'(\bar{x}) \rightarrow$  punto che azzerava la derivata prima.

Ma  $\varphi'(x) = (f'(x)(b - a)) - (f(b) - f(a)) \quad \forall x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \varphi'(\bar{x}) = f'(\bar{x})(b - a) - f(b) + f(a) \\ \text{e quindi } 0 &= \varphi'(\bar{x}) \text{ dato che il resto è nullo} \\ &\text{da cui segue la tesi.} \end{aligned}$$



## 14 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie

### 14.1 Enunciato

Se  $\sum a_k$  converge, allora  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

### 14.2 Dimostrazione

Sia  $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Per ipotesi  $\exists A \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$ .

Inoltre si ha che  $A_n - A_{n-1} = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n$

Ma  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n - A_{n-1}) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) - \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n-1} \right) = A - A = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

## 15 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli

### 15.1 Enunciato

$x \in \mathbb{R}$ ,  $x > -1$ . Allora  $(1+x)^m \geq 1+mx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

### 15.2 Dimostrazione

**Passo base:**

È vero che:  $(1+x)^0 \leq 1+0 \cdot x$ ?, si  $\Rightarrow$  passo base verificato!

**Passo induttivo:**

Ipotesi induttiva:  $(1+x)^m \geq 1+mx$  con  $m \in \mathbb{N}$

Tesi induttiva:  $(1+x)^{m+1} \geq 1+(m+1)x$

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m \geq (1+mx)(1+x)$$

$$1+x+mx+mx^2 = x(1+m)+1+mx^2 = (m+1)x+1+mx^2 \geq (m+1)x+1 \quad \text{Posso anche ignorare } mx^2$$

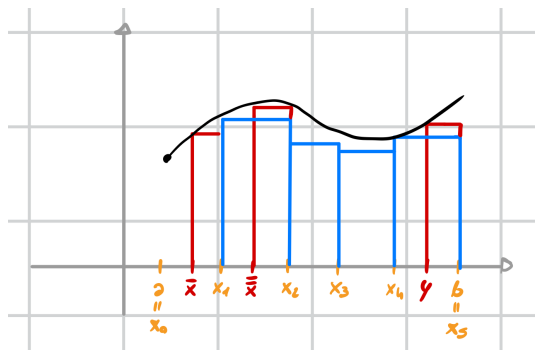
perche è sempre positivo

**Quindi il passo induttivo è verificato per il principio di induzione  $\forall x > -1$**

## 16 Integrale di Riemann

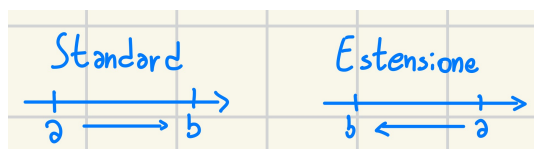
### 16.1 Integrali Definiti

Vogliamo dare un significato al concetto (per  $f(x) \geq 0$ ) di "area sottesa al grafico di  $f$ ".



### 16.2 Estensione dell'integrale di Riemann

A casi cui  $a \geq b$ .



#### 16.2.1 Definizione

$f$  Riemann-integrale in  $[a, b]$ ,  $a < b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Definiamo } \int_a^b f(x)dx = 0 \text{ e } \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

### 16.3 Teorema Integrazione di Riemann per parti

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g \in C^1([a, b])$

$$\text{Allora: } \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = f(x)g(x)|_a^b$$

#### 16.3.1 Dimostrazione

$f'g$  e  $fg'$  sono continue in  $[a, b]$  e quindi sono R-int<sup>le</sup> in  $[a, b]$ .

Inoltre  $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Ma  $f \cdot g$  è primitiva di  $(fg)'$  e quindi

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \text{ la tesi segue}$$

## 17 Teorema di Bolzano - Weierstrß

### 17.1 Enunciato

Sia  $a_n$  una successione LIMITATA (Quindi superiormente e inferiormente limitata). Allora  $\exists \{a_{n_k}\}$  successione di  $a_n$  t.c.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = l \in \mathbb{R}$$

### 17.2 Esempio 1

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$\sup\{a_n\} = +\infty \Rightarrow$  non posso applicare il teorema di Bolzano-Weierstrß.

### 17.3 Esempio 2

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow |a_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrß  $\exists a_{n_k}$  sottosuccessione di  $a_n$  t.c.  $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \in \mathbb{R}$

## 18 Proprietà di Archimede

### 18.1 Enunciato

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} / n < x$$

"Esiste sempre un numero intero più grande di qualsiasi numero reale".

### 18.2 Dimostrazione

Sia  $x > 0 \rightarrow A := \{n \in \mathbb{N} / n \leq x\} \subseteq \mathbb{N}$

Tesi:  $\iff A \neq \mathbb{N}$

Suppongo che  $A = \mathbb{N} \neq \emptyset$

Sia  $B := \{y \in \mathbb{R} / y \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

dal fatto che  $A = \mathbb{N}$  segue che  $x \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$

Notiamo che  $\forall y \in B$  si ha che  $y \geq n \quad \forall n \in A (= \mathbb{N})$ . Quindi  $A$  e  $B$  sono separati per l'assioma di separazione  $\exists \alpha \in \mathbb{R} / n \leq \alpha \leq y \quad \forall n \in A \quad \forall y \in B \quad (A = \mathbb{N})$

Quindi è anche vero che  $\mathbb{N} \ni n + 1 \leq \alpha \leq y \Rightarrow n \leq \alpha - 1 \quad \forall n \in A \Rightarrow \alpha - 1 \in B$

Ma  $\alpha$  è elemento separatore di  $A$  e  $B$ :  $(n \leq) \alpha \leq y \quad \forall y \in B \quad \forall n \in A$

Quindi  $\alpha \leq \alpha - 1 \Rightarrow 1 \leq 0 \rightarrow$  **Contraddizione**

Abbiamo provato l'applicazione contronominale; quindi il teorema è dimostrato.

$A = \mathbb{N}$  FALSO  $\Rightarrow a \not\subseteq \mathbb{N}$

## 19 Teorema Bernoulli - de l'Hopital

### 19.1 $\frac{0}{0}$ ; limiti al finito

$a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  derivabili in  $(a, b)$   
 $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ . Siano  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$  e sia  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ .

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Nota vale anche per:  $x \rightarrow b^-$ ,  $Df = Dg = (a, b) \setminus \{x_0\}$

#### 19.1.1 Errori comuni

- 1) **Errore:** uguagliare  $\frac{f(x)}{g(x)}$  con  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  senza aver verificato che l'ultimo limite esista.
- 2) Non si può usare il teorema di Bernoulli - de l'Hopital per studiare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

### 19.2 $\frac{0}{0}$ ; limiti all'infinito

Sia  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f, g : (a, +\infty)^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  derivabili in  $(a, +\infty)^*$  e  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, +\infty)^*$   
 *$^*(a, +\infty)$  al contrario vale anche:  $(-\infty, a)$ .*

Inoltre  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ .

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

### 19.3 $\frac{\infty}{\infty}$ ; limiti al finito

$a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  derivabili in  $(a, b)$   
 $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ . Inoltre

$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty^*$ ;  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ .  
 *$^*+\infty$  al contrario vale anche:  $-\infty$*

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

### 19.4 $\frac{\infty}{\infty}$ ; limiti all'infinito

Sia  $a \in \mathbb{R}$ ,  $f, g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  derivabili in  $(a, +\infty)$  e  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, +\infty)$ .

Inoltre  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty^*$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ .

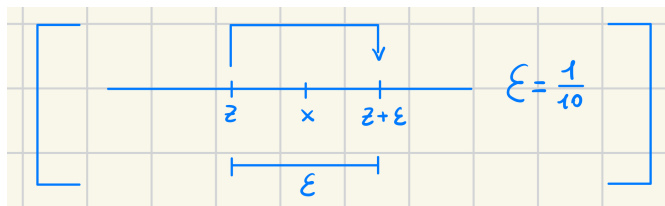
*$^*+\infty$  al contrario vale anche:  $-\infty$*

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

## 20 Teorema Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

### 20.1 Enunciato

Per ogni  $x \in \mathbb{R}$  e  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists z \in \mathbb{Q} / z \leq x < z + \epsilon$



### 20.2 Dimostrazione

$x \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} > 0$

Uso la Proprietà di Archimede:  $\exists q \in \mathbb{N} / q > \frac{1}{\epsilon} > 0$

Considero  $qx \in \mathbb{R}$

Per le proprietà delle parti intere  $\exists p \in \mathbb{Z} / p \leq qx < p + 1$

Divido per  $q > 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$  con  $\frac{p+1}{q} = \frac{p}{q} + \frac{1}{q}$

Ma  $q > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \epsilon q > 1 \Rightarrow \epsilon < \frac{1}{q}$

Segue che  $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p}{q} + \epsilon$

## 21 Definizione di Limite

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ . Sia  $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$  un punto di accumulazione per  $A$ .

Diremo che  $f$  ammette limite  $l \in \mathbb{R}$  per  $x$  che tende a  $x_0$  [scriviamo  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ] se e solo se per ogni intorno  $Vl$  di  $l$  esiste un intorno  $Ux_0$ , intorno di  $x_0$ , tale che  $f(x) \in Vl$  per ogni  $x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ .

**N.B.** Se  $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ , l'ultima parte sopra è da leggere come:  $(Ux_0 \cap A)$ , senza togliere  $x_0$ .

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon / |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in A, f(x) \in Vl$$

$0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon$ : Vuol dire prendere i valori del disco di raggio  $\delta_\epsilon$  e togliere il punto centrale in  $x_0$  (quindi togliere  $x_0$ ), si dice in questo caso: "disco bucato".

## 22 Teorema formula di Taylor con resto di Peano

### 22.1 Enunciato

Sia  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ,  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervallo, sia derivabile  $n - 1$  volte in  $I$  e tali funzioni derivate siano continue in  $i$ .

Sia inoltre  $x_0 \in I$ ,  $x_0$  interno ed  $\exists f^{(n)}(x_0)$

Allora  $\exists w : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  t.c.  $w$  continua in  $x_0$ ,  $w(x_0) = 0$  ed inoltre

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + w(x)(x - x_0)^n \quad \forall x \in I$$

Dove:  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \rightarrow$  è la formula di Taylor.  
 $w(x)(x - x_0)^n \rightarrow$  è il resto di Peano.

## 23 Criterio di Von Leibniz (Serie segni alterni)

### 23.1 Enunciato

Sia  $a_k \neq 0, a_{k+1} \neq a_k$  e  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$ .

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \text{ converge}$$

## 24 Criterio della radice (CAUCHY)

$a_k \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}$ . Se  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l < 1$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE}$$

N.B. se  $l = 1$  non si può concludere.

## 25 Criterio del rapporto (D'Alembert)

$a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall k \in \mathbb{N}$ . Se  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l < 1$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE}$$

N.B. se  $l = 1$  non si può concludere.

## 26 Criterio integrale

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \geq 0, \forall x \in [1, +\infty)$ .

Sia  $f$ . debolmente crescente in  $[1, +\infty)$ .

$$\Rightarrow \left( \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \right)$$

## 27 Serie a termini di segno qualunque

Sia  $a_n \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$  una successione.

Diremo che  $\sum \frac{(-1)^k}{k}$  è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE  $\iff \sum |a_k| \text{ converge}$ .

## 28 ! Criterio dell'ordine di infinitesimo (Integrali impropri)

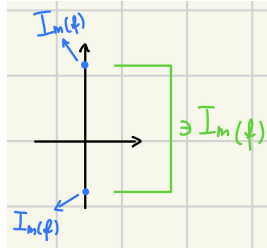
## 29 Teorema dei valori intermedi

### 29.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, I$  intervallo,  $f$  continua in  $I$ .

$$\Rightarrow Im(f) \text{ è un intervallo.}$$





## 30 Proprietà della parte intera

### 30.1 Enunciato

$\forall x \in \mathbb{R} \exists! n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } n \leq x < n + 1$

**N.B.**  $n$  è detto parte intera di  $x \rightarrow n = \lfloor x \rfloor$

## 31 Teorema "Ponte" o limiti mediante successioni

### 31.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$  di accumulazione per  $A$ .

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l (\in \widetilde{\mathbb{R}}) \iff \forall \text{ successione } a_n \in A \setminus \{x_0\} / \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0, \text{ si ha che } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$$

### 31.2 Dimostrazione

" $\Rightarrow$ " segue dal teorema di sostituzione dei limiti

" $\Leftarrow$ " va dimostrato direttamente.

## 32 Teorema degli Zeri

### 32.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f$  continua su  $[a, b]$  e  $f(a)f(b) < 0$ .

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a, b) / f(\bar{x}) = 0$$

### 32.2 Dimostrazione (metodo dicotomico)

Suppongo  $f(a) < 0 < f(b)$

Sia  $c = \frac{a+b}{2}$ . Calcolo  $f(c)$ :

- 1) Se  $f(c) = 0 \Rightarrow$  la tesi è vera con  $\bar{x} = c$
- 2) Se  $f(c) < 0 \Rightarrow$  pongo  $a_1 = c, b_1 = b$  e ho  $f(a_1) < 0 < f(b_1)$
- 3) Se  $f(c) > 0 \Rightarrow$  pongo  $a_1 = a, b_1 = c$  e ho  $f(a_1) < 0 < f(b_1)$

Nei casi 2) e 3): possiamo ripetere il procedimento su  $[a_1, b_1]$ :

Calcolo  $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ ; Valuto  $f(c_1)$

- 1) Se  $f(c_1) = 0 \Rightarrow$  la tesi è vera con  $\bar{x} = c_1$

2) e 3) come sopra.

Procedo in tal modo, per induzione, definendo  $a_n, b_n, a \leq a_n < b_n \leq b$  e  $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ .

Osservo che  $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}; b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{4} \dots = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, n \geq 1$

Inoltre per costruzione,  $a_n < a_{n+1}$  (deb. crescente)  $b_{n+1} \leq b_n$  (deb. crescente).

Per il teorema sui limiti delle funzione monotone:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in [a, b] (a_n \leq a_n \leq b)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = m \in [a, b] (a \leq b_n \leq b)$$

$$\text{D'altra parte, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

$$\text{Ma } \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = m - l \Rightarrow l = m.$$

Ricordiamo ora che  $f(a_n) < 0 < f(b_n)$  e quindi che:  $f(a_n) < f(l) < f(b_n)$

D'altra parte per il teorema del confronto, da  $f(a_n) < 0$  segue  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(l) \leq 0$

Infine, per il teorema del confronto, da  $f(b_n) > 0$  segue  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(l) \geq 0$ .

Pertanto  $0 \leq f(l) \leq 0 \Rightarrow f(l) = 0$  e la tesi segue ( $\bar{x} = l$ )

### 33 Principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore

#### 33.1 Enunciato

$f, g, f_1, g_1$ , sono infinite per  $x \rightarrow x_0$ .

$f_1$  è infinito di ordine inferiore a  $f$ ,

$g_1$  è infinito di ordine inferiore a  $g$  per  $x \rightarrow x_0$ .

$$\Rightarrow \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} \text{ esiste} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ esiste} \right) \text{ ed in tal caso sono uguali fra loro.}$$

#### 33.2 Dimostrazione (Traccia)

$$\frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \frac{f(x)(1 + \frac{f_1(x)}{f(x)})}{g(x)(g(x) + \frac{g_1(x)}{g(x)})}$$

### 34 ! Condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni