

Teoria Analisi 1

A. Languasco

February 18, 2025

Contents

1	Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)	4
1.1	Enunciato	4
1.2	Dimostrazione	4
2	Teorema dell'unicità del limite	4
2.1	Enunciato	4
2.2	Dimostrazione	4
3	Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)	6
3.1	Enunciato	6
3.2	Dimostrazione	6
4	Formula fondamentale del calcolo integrale	7
4.1	Enunciato	7
4.2	Dimostrazione	7
5	Teorema del confronto I	7
5.1	Enunciato	7
5.2	Dimostrazione	8
6	Teorema del confronto II	8
6.1	Enunciato	8
6.2	Osservazione	8
7	Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri	9
7.1	Enunciato	9
7.2	Dimostrazione	9
8	Teorema del valore medio integrale	10
8.1	Enunciato	10
8.2	Dimostrazione	10
9	Criterio integrale convergenza delle serie numeriche	10
9.1	Enunciato	10
10	Teorema delle derivate successive	10
10.1	Enunciato	10
11	Teorema di Rolle	11
11.1	Enunciato	11

12 Teorema di Lagrange	11
12.1 Enunciato	11
12.2 Dimostrazione	11
13 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie	12
13.1 Enunciato	12
13.2 Dimostrazione	12
14 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli	12
14.1 Enunciato	12
14.2 Dimostrazione	12
15 Integrale di Riemann	13
15.1 Integrali Definiti	13
15.2 Estensione dell'integrale di Riemann	13
15.2.1 Definizione	13
15.3 Teorema Integrazione di Riemann per parti	13
15.3.1 Dimostrazione	13
16 Teorema di Bolzano - Weierstrß	14
16.1 Enunciato	14
16.2 Esempio 1	14
16.3 Esempio 2	14
17 Proprietà di Archimede	14
17.1 Enunciato	14
17.2 Dimostrazione	14
18 Teorema Bernoulli - de l'Hopital	15
18.1 $\frac{0}{0}$; limiti al finito	15
18.1.1 Errori comuni	15
18.2 $\frac{0}{0}$; limiti all'infinito	15
18.3 $\frac{\infty}{\infty}$; limiti al finito	15
18.4 $\frac{\infty}{\infty}$; limiti all'infinito	15
19 Teorema Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}	16
19.1 Enunciato	16
19.2 Dimostrazione	16
20 Definizione di Limite	16
21 Teorema formula di Taylor con resto di Peano	16
21.1 Enunciato	16
22 Criterio di Von Leibniz (Serie segni alterni)	17
22.1 Enunciato	17
23 Criterio della radice (CAUCHY)	17
24 Criterio del rapporto (D'Alembert)	17
25 Criterio integrale	17
26 Serie a termini di segno qualunque	17

27 ! Criterio dell'ordine di infinitesimo (Integrali impropri)	17
28 Teorema dei valori intermedi	17
28.1 Enunciato	17
29 Proprietà della parte intera	18
29.1 Enunciato	18
30 Teorema "Ponte" o limiti mediante successioni	18
30.1 Enunciato	18
30.2 Dimostrazione	18
31 Teorema degli Zeri	18
31.1 Enunciato	18
31.2 Dimostrazione (metodo dicotomico)	18
32 Principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore	19
32.1 Enunciato	19
32.2 Dimostrazione (Traccia)	19
33 Condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni	19
33.1 Enunciato	19
33.2 Dimostrazione	20
34 Classificazione delle discontinuità	20
34.1 Discontinuità eliminabile	20

1 Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)

Se una funzione è derivabile in un punto, allora il suo comportamento vicino a quel punto può essere descritto da una retta tangente (approssimazione lineare). Il termine $o(x - x_0)$ indica che il resto dell'approssimazione tende a zero più velocemente di $x - x_0$.

1.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R}, I$ intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I , f derivabile in x_0 .

Allora: $\exists w : I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. w è continua in x_0 , $w(x_0) = 0$ e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0)$$

dove: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la tangente

$w(x)(x - x_0)$ è l'errore causato da alcuni fattori, lo possiamo trascurare.

1.2 Dimostrazione

$$\text{Sia } w(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{Se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{Se } x = x_0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

$$\text{Sia } x \neq x_0: w(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Rightarrow (w(x) - f'(x_0))(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0) \quad \forall x \in I, x \neq x_0$$

$$\text{Sia } x = x_0: f(x_0) \stackrel{?}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) + w(x_0)(x_0 - x_0) \quad \underline{\text{Si!}}$$

Pertanto la tesi è verificata $\forall x \in I$

2 Teorema dell'unicità del limite

2.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Se:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \tilde{\mathbb{R}}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$$

Allora: $l_1 = l_2$

2.2 Dimostrazione

ip1) $\forall V_{l_1}$ intorno di $l_1 \exists U_{x_0}$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_{l_1}$ per ogni $x \in (U_{x_0} \cap A) - \{x_0\}$

ip2) $\forall V_{l_2}$ intorno di $l_2 \exists U'_{x_0}$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_{l_2}$ per ogni $x \in (U'_{x_0} \cap A) - \{x_0\}$

Per contraddizione: $l_1 \neq l_2$

Allora $\exists V_{l_1}, V_{l_2}$ intorni di l_1 e l_2 (rispettivamente) tali che: $V_{l_1} \cap V_{l_2} \neq \emptyset$

$W_{x_0} = U_{x_0} \cap U'_{x_0}$ è un intorno di x_0



Sia $x \in (Wx_0 \cap A) - \{x_0\} \neq \emptyset$ (perché x_0 è di accumulazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in V_{l_1} & (\text{Per definizione di limite 1}) \\ f(x) \in V_{l_2} & (\text{Per definizione di limite 2}) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(x) \in V_{l_1} \cap V_{l_2} \neq \emptyset \Rightarrow l_1 = l_2$. **Contraddizione**

3 Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)

3.1 Enunciato

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. f R-integrale su $[a, b]$.

$\exists x_1 \in [a, b]$ t.c. f sia continua in x_1 .

Fissato $x_0 \in [a, b]$ e presa $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, si ha che F è derivabile in x_1 e $F'(x_1) = f(x_1)$

3.2 Dimostrazione

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right|, \quad x \neq x_1 \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt + \int_{x_1}^x f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_1}^x f(t)dt - f(x_1)(x - x_1)}{x - x_1} \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_1}^x (f(t) - f(x_1))dt}{x - x_1} \right| \\ &\leq \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x |f(t) - f(x_1)|dt \end{aligned}$$

Ma f è continua in $x_1 \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0$ t.c. $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon \forall t/0 < |t - x_1| < \delta_\epsilon \quad t \in [a, b]$

Osservo che $t \in [x_1, x]$ (oppure $t \in [x, x_1]$, dipende come abbiamo disposto x e x_1)

Implica che $|t - x_1| \leq |x - x_1|$

Sia allora $x \in [a, b]/|x - x_1| < \delta_\epsilon$. Con questo forziamo le due variabili a stare vicine fra loro

Quindi $|t - x_1| \leq |x - x_1| < \delta_\epsilon$ e $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon$

Allora $0 \leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| < \frac{1}{|x - x_1|} \left| \int_{x_1}^x \epsilon dt \right| = \epsilon \frac{|x - x_1|}{|x - x_1|} = \epsilon$

Ossia: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0$ t.c. $\left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| < \epsilon \forall x$ t.c. $0 < |x - x_1| < \delta_\epsilon, x \in [a, b]$

Cioè: $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1}$ esiste e vale $f(x_1)$.

Quindi: $F'(x_1) = f(x_1)$

4 Formula fondamentale del calcolo integrale

4.1 Enunciato

$f \in C^0[a, b]$ e sia $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di f in $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

4.2 Dimostrazione

Sia $x \in [a, b]$ e $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Per il TFCI* è derivabile in $[a, b]$ e $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$.
 F, G sono primitive di f in un intervallo $[a, b] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / G(x) = F(x) + c \forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \text{Osservo adesso che: } G(b) - G(a) &= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) \\ &= \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^a \cancel{f(t)dt} + \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a \cancel{f(t)dt} = \int_{x_0}^b f(t)dt. \end{aligned}$$

*TFCI: Teorema Fondamentale Calcolo Integrale

Osservazione: $f \in C^0([a, b])$ e sia

$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ dove $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $[a, b]$.

Si ha che $H(x)$ è derivabile perché $H(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ dove $F(u) = \int_{x_0}^u f(t)dt$ (*Composizione di f derivabili*)

Inoltre $H'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) = \underline{f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)} \forall x \in [a, b]$

5 Teorema del confronto I

5.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A

Allora:

- a) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$
con $\ell_1 < \ell_2$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

- b) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

- c) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

5.2 Dimostrazione

a) $l_1 < l_2 (l_1, l_2 \in \mathbb{R})$. Fisso $\epsilon > 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U'x_0$ intervallo di x_0 tale che $\forall x \in (U'x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \Rightarrow \exists U''x_0$ intorno di $x_0/l_2 - \epsilon < g(x) < l_2 + \epsilon \forall x \in (U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Se $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ *idea: scelgo $\epsilon > 0/l_1 + \epsilon \leq l_2 - \epsilon$*

Scelgo in quanto sopra $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$

Per $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ si ha allora

$$f(x) < l_1 + \epsilon = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

6 Teorema del confronto II

6.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $x \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Allora:

a) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

Se $\exists Ux_0$ intorno di $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow l_1 \leq l_2$$

b) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ e $\exists Ux_0$ intorno di $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

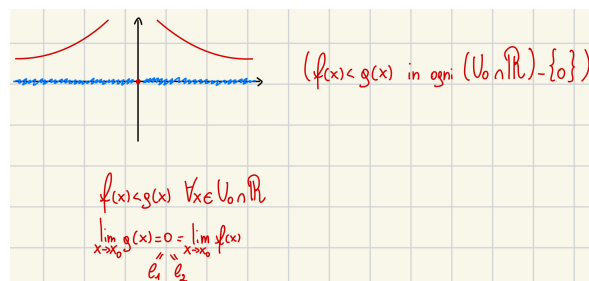
c) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e $\exists Ux_0$ intorno di $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

6.2 Osservazione

Cosa accade se si suppone $f(x) < g(x) \stackrel{?}{\Rightarrow} l_1 < l_2$

$$\mathbf{NO:} \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$



7 Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri



7.1 Enunciato

$f, g, h : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A .
Inoltre

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists U_{x_0} \text{ intorno di } x_0 / f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

7.2 Dimostrazione

Sia $\epsilon > 0$: $\exists U'x_0, U''x_0$ intorno di x_0 / $|f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in (U'x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$
 $|g(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in (U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Sia $Wx_0 = U'x_0 \cap U''x_0$ è un intorno di x_0 .

Se $x \in Wx_0 \cap A \setminus \{x_0\}$

$$\frac{l - \epsilon < f(x) \text{ definizione } \lim f \text{ (per ipotesi)}}{f(x) \leq h(x) \leq g(x)} \\ g(x) < l + \epsilon$$

Quindi $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$ cioè $|h(x) - l| < \epsilon$

Ho fatto vedere che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists Wx_0 \text{ intorno di } x_0 / |h(x) - l| < \epsilon \text{ per } x \in Wx_0 \cap A \setminus \{x_0\}$$

Che è esattamente la definizione di: $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

8 Teorema del valore medio integrale

8.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g R -integrabile in $[a, b]$.

Sia $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, ($\in \mathbb{R}$)

$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, ($\in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ 2) \exists \mu \in [m, M] / \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \\ 3) \text{ Se } f \text{ continua in } [a, b], \text{ allora } \exists x_0 \in [a, b] / \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a). \end{cases}$$

8.2 Dimostrazione

1) $m \leq f(x) \leq M \quad x \in [a, b]$

$P = a, b \Rightarrow D(P, f) = m(b-a) \in G$

$S'(P, f) = M(b-a) \in H$.

Allora: $m(b-a) \leq \sup(G) = \int_a^b f(x)dx = \inf(H) \leq M(b-a)$

2) Dal punto 1): $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$. Sia $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$,

allora $\mu \in [m, M]$ e ovviamente, $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$

3) $f \in C^0[a, b]$: per il teorema dei valori intermedi $f([a, b])$ è intervallo; per il teorema di Weistrass f ha max e min **GALE**

Quindi $f([a, b]) = [m, M]$

Per il punto 2), $\exists \mu \in [m, M] / \mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$;

ma $[m, M] = Im(f) \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = \mu$

9 Criterio integrale convergenza delle serie numeriche

9.1 Enunciato

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$.

Sia f . debolmente crescente in $[+\infty)$.

Allora $(\sum_{k=1}^{\infty} f(k))$ converge $\iff \int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.)

10 Teorema delle derivate successive

10.1 Enunciato

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f \in C^{n-1}(I)$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I .

Suppongo che $\exists f^n(x_0)$ e che $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

$f^{(n)} > 0$ (< 0).

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } n \text{ è } \mathbf{PARI}, \text{ si ha che } x_0 \text{ è punto di minimo (massimo) locale forte.} \\ \text{se } n \text{ è } \mathbf{DISPARI}, \text{ allora } x_0 \text{ è pto di massimo (minimo) locale.} \end{cases}$$

11 Teorema di Rolle

11.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$

f derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$

Allora $\exists \bar{x} \in [a, b]$

$x_1 = a$ e $x_2 = b$ (o viceversa): allora, dato che

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a, b] \\ &\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

Se almeno uno tra x_1 e x_2 non è in un estremo di $[a, b]$

esempio sia $x_1 \in (a, b)$. Allora x_1 è interno ad $[a, b]$. Per le condizioni necessarie di estremalità si ha $f'(x_1) = 0$

Nel caso di $x_2 \in (a, b)$: si replichi lo stesso ragionamento.

12 Teorema di Lagrange

12.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$, f derivabile in (a, b) .

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a, b) / f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b - a)$$

12.2 Dimostrazione

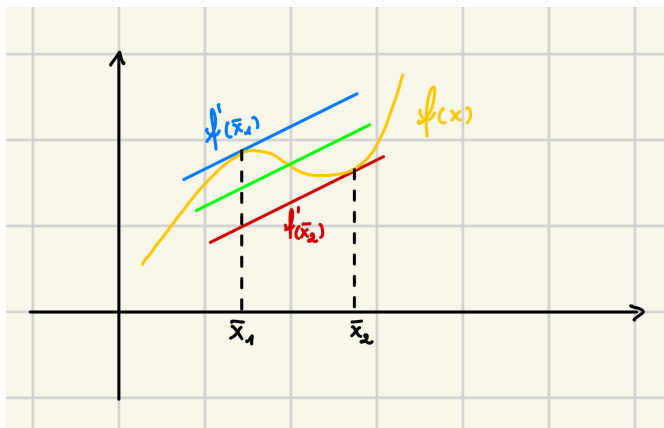
Sia $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$, f è continua in $[a, b]$;

φ è derivabile in (a, b) , $\varphi(a) = 0 - 0 = 0$; $\varphi(b) = 0 - 0 = 0$.

Per il teorema di Rolle: $\exists \bar{x} \in (a, b)$ $\varphi'(\bar{x}) \rightarrow$ punto che azzerava la derivata prima.

Ma $\varphi'(x) = (f'(x)(b - a)) - (f(b) - f(a)) \quad \forall x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \varphi'(\bar{x}) = f'(\bar{x})(b - a) - f(b) + f(a) \\ \text{e quindi } 0 &= \varphi'(\bar{x}) \text{ dato che il resto è nullo} \\ &\text{da cui segue la tesi.} \end{aligned}$$



13 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie

13.1 Enunciato

Se $\sum a_k$ converge, allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

13.2 Dimostrazione

Sia $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Per ipotesi $\exists A \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$.

Inoltre si ha che $A_n - A_{n-1} = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n$

Ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n - A_{n-1}) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n-1} \right) = A - A = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

14 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli

14.1 Enunciato

$x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Allora $(1+x)^m \geq 1+mx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

14.2 Dimostrazione

Passo base:

È vero che: $(1+x)^0 \leq 1+0 \cdot x$?, si \Rightarrow passo base verificato!

Passo induttivo:

Ipotesi induttiva: $(1+x)^m \geq 1+mx$ con $m \in \mathbb{N}$

Tesi induttiva: $(1+x)^{m+1} \geq 1+(m+1)x$

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m \geq (1+mx)(1+x)$$

$$1+x+mx+mx^2 = x(1+m)+1+mx^2 = (m+1)x+1+mx^2 \geq (m+1)x+1 \quad \text{Posso anche ignorare } mx^2$$

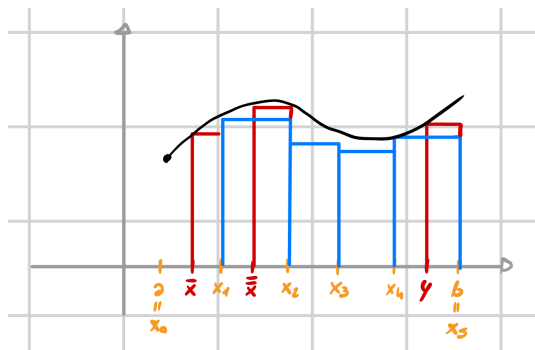
perche è sempre positivo

Quindi il passo induttivo è verificato per il principio di induzione $\forall x > -1$

15 Integrale di Riemann

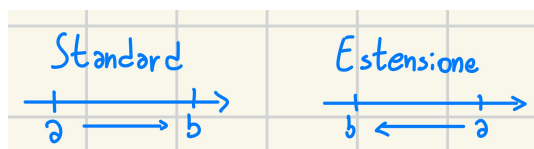
15.1 Integrali Definiti

Vogliamo dare un significato al concetto (per $f(x) \geq 0$) di "area sottesa al grafico di f ".



15.2 Estensione dell'integrale di Riemann

A casi cui $a \geq b$.



15.2.1 Definizione

f Riemann-integrale in $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Definiamo } \int_a^b f(x)dx = 0 \text{ e } \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

15.3 Teorema Integrazione di Riemann per parti

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in C^1([a, b])$

$$\text{Allora: } \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = f(x)g(x)|_a^b$$

15.3.1 Dimostrazione

$f'g$ e fg' sono continue in $[a, b]$ e quindi sono R-int^{le} in $[a, b]$.

Inoltre $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Ma $f \cdot g$ è primitiva di $(fg)'$ e quindi

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \text{ la tesi segue}$$

16 Teorema di Bolzano - Weierstrß

16.1 Enunciato

Sia a_n una successione LIMITATA (Quindi superiormente e inferiormente limitata). Allora $\exists \{a_{n_k}\}$ successione di a_n t.c.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = l \in \mathbb{R}$$

16.2 Esempio 1

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$\sup\{a_n\} = +\infty \Rightarrow$ non posso applicare il teorema di Bolzano-Weierstrß.

16.3 Esempio 2

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow |a_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrß $\exists a_{n_k}$ sottosuccessione di a_n t.c. $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \in \mathbb{R}$

17 Proprietà di Archimede

17.1 Enunciato

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} / n < x$$

"Esiste sempre un numero intero più grande di qualsiasi numero reale".

17.2 Dimostrazione

Sia $x > 0 \rightarrow A := \{n \in \mathbb{N} / n \leq x\} \subseteq \mathbb{N}$

Tesi: $\iff A \neq \mathbb{N}$

Suppongo che $A = \mathbb{N} \neq \emptyset$

Sia $B := \{y \in \mathbb{R} / y \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

dal fatto che $A = \mathbb{N}$ segue che $x \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$

Notiamo che $\forall y \in B$ si ha che $y \geq n \quad \forall n \in A (= \mathbb{N})$. Quindi A e B sono separati per l'assioma di separazione $\exists \alpha \in \mathbb{R} / n \leq \alpha \leq y \quad \forall n \in A \quad \forall y \in B \quad (A = \mathbb{N})$

Quindi è anche vero che $\mathbb{N} \ni n + 1 \leq \alpha \leq y \Rightarrow n \leq \alpha - 1 \quad \forall n \in A \Rightarrow \alpha - 1 \in B$

Ma α è elemento separatore di A e B : $(n \leq) \alpha \leq y \quad \forall y \in B \quad \forall n \in A$

Quindi $\alpha \leq \alpha - 1 \Rightarrow 1 \leq 0 \rightarrow$ **Contraddizione**

Abbiamo provato l'applicazione contronominale; quindi il teorema è dimostrato.

$A = \mathbb{N}$ FALSO $\Rightarrow a \not\subseteq \mathbb{N}$

18 Teorema Bernoulli - de l'Hopital

18.1 $\frac{0}{0}$; limiti al finito

$a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f, g derivabili in (a, b)
 $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Siano $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$ e sia $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Nota vale anche per: $x \rightarrow b^-$, $Df = Dg = (a, b) \setminus \{x_0\}$

18.1.1 Errori comuni

- 1) **Errore:** uguagliare $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ senza aver verificato che l'ultimo limite esista.
- 2) Non si può usare il teorema di Bernoulli - de l'Hopital per studiare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

18.2 $\frac{0}{0}$; limiti all'infinito

Sia $a \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, +\infty)^* \rightarrow \mathbb{R}$, f, g derivabili in $(a, +\infty)^*$ e $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, +\infty)^*$
 $^(a, +\infty)$ al contrario vale anche: $(-\infty, a)$.*

Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

18.3 $\frac{\infty}{\infty}$; limiti al finito

$a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, f, g derivabili in (a, b)
 $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Inoltre

$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty^*$; $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.
 $^+\infty$ al contrario vale anche: $-\infty$*

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

18.4 $\frac{\infty}{\infty}$; limiti all'infinito

Sia $a \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, f, g derivabili in $(a, +\infty)$ e $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, +\infty)$.

Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty^*$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

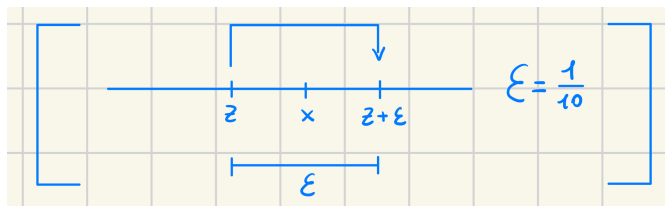
$^+\infty$ al contrario vale anche: $-\infty$*

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

19 Teorema Densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}

19.1 Enunciato

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\forall \epsilon > 0$, $\exists z \in \mathbb{Q} / z \leq x < z + \epsilon$



19.2 Dimostrazione

$x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} > 0$

Uso la Proprietà di Archimede: $\exists q \in \mathbb{N} / q > \frac{1}{\epsilon} > 0$

Considero $qx \in \mathbb{R}$

Per le proprietà delle parti intere $\exists p \in \mathbb{Z} / p \leq qx < p + 1$

Divido per $q > 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$ con $\frac{p+1}{q} = \frac{p}{q} + \frac{1}{q}$

Ma $q > \frac{1}{\epsilon} = \epsilon q > 1 \Rightarrow \epsilon < \frac{1}{q}$

Segue che $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p}{q} + \epsilon$

20 Definizione di Limite

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sia $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A .

Diremo che f ammette limite $l \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0 [scriviamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$] se e solo se per ogni intorno Vl di l esiste un intorno Ux_0 , intorno di x_0 , tale che $f(x) \in Vl$ per ogni $x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$.

N.B. Se $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$, l'ultima parte sopra è da leggere come: $(Ux_0 \cap A)$, senza togliere x_0 .

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\epsilon / |f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in A, f(x) \in Vl$$

$0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon$: Vuol dire prendere i valori del disco di raggio δ_ϵ e togliere il punto centrale in x_0 (quindi togliere x_0), si dice in questo caso: "disco bucato".

21 Teorema formula di Taylor con resto di Peano

21.1 Enunciato

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, sia derivabile $n - 1$ volte in I e tali funzioni derivate siano continue in i .

Sia inoltre $x_0 \in I$, x_0 interno ed $\exists f^{(n)}(x_0)$

Allora $\exists w : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. w continua in x_0 , $w(x_0) = 0$ ed inoltre

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + w(x)(x - x_0)^n \quad \forall x \in I$$

Dove: $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \rightarrow$ è la formula di Taylor.
 $w(x)(x - x_0)^n \rightarrow$ è il resto di Peano.

22 Criterio di Von Leibniz (Serie segni alterni)

22.1 Enunciato

Sia $a_k \neq 0, a_{k+1} \neq a_k$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \text{ converge}$$

23 Criterio della radice (CAUCHY)

$a_k \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l < 1$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE}$$

N.B. se $l = 1$ non si può concludere.

24 Criterio del rapporto (D'Alembert)

$a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall k \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = l < 1$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE}$$

N.B. se $l = 1$ non si può concludere.

25 Criterio integrale

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \geq 0, \forall x \in [1, +\infty)$.

Sia f . debolmente crescente in $[1, +\infty)$.

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \right)$$

26 Serie a termini di segno qualunque

Sia $a_n \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$ una successione.

Diremo che $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE $\iff \sum |a_k| \text{ converge}$.

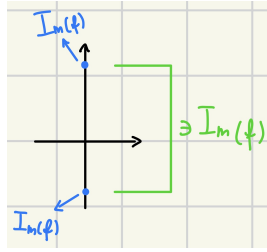
27 ! Criterio dell'ordine di infinitesimo (Integrali impropri)

28 Teorema dei valori intermedi

28.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, I$ intervallo, f continua in I .

$$\Rightarrow Im(f) \text{ è un intervallo.}$$



29 Proprietà della parte intera

29.1 Enunciato

$\forall x \in \mathbb{R} \exists! n \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } n \leq x < n + 1$

N.B. n è detto parte intera di $x \rightarrow n = \lfloor x \rfloor$

30 Teorema "Ponte" o limiti mediante successioni

30.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A .

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l (\in \widetilde{\mathbb{R}}) \iff \forall \text{ successione } a_n \in A \setminus \{x_0\} / \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x_0, \text{ si ha che } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$$

30.2 Dimostrazione

" \Rightarrow " segue dal teorema di sostituzione dei limiti

" \Leftarrow " va dimostrato direttamente.

31 Teorema degli Zeri

31.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua su $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$.

$$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (a, b) / f(\bar{x}) = 0$$

31.2 Dimostrazione (metodo dicotomico)

Suppongo $f(a) < 0 < f(b)$

Sia $c = \frac{a+b}{2}$. Calcolo $f(c)$:

- 1) Se $f(c) = 0 \Rightarrow$ la tesi è vera con $\bar{x} = c$
- 2) Se $f(c) < 0 \Rightarrow$ pongo $a_1 = c$, $b_1 = b$ e ho $f(a_1) < 0 < f(b_1)$
- 3) Se $f(c) > 0 \Rightarrow$ pongo $a_1 = a$, $b_1 = c$ e ho $f(a_1) < 0 < f(b_1)$

Nei casi 2) e 3): possiamo ripetere il procedimento su $[a_1, b_1]$:

Calcolo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$; Valuto $f(c_1)$

- 1) Se $f(c_1) = 0 \Rightarrow$ la tesi è vera con $\bar{x} = c_1$

2) e 3) come sopra.

Procedo in tal modo, per induzione, definendo $a_n, b_n, a \leq a_n < b_n \leq b$ e $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

Osservo che $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$; $b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{b-a}{4} \dots = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, n \geq 1$

Inoltre per costruzione, $a_n < a_{n+1}$ (deb. crescente) $b_{n+1} \leq b_n$ (deb. crescente).

Per il teorema sui limiti delle funzione monotone:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in [a, b] (a_n \leq a_n \leq b)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = m \in [a, b] (a \leq b_n \leq b)$$

$$\text{D'altra parte, } \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

$$\text{Ma } \lim_{n \rightarrow +\infty} (b_n - a_n) = m - l \Rightarrow l = m.$$

Ricordiamo ora che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ e quindi che: $f(a_n) < f(l) < f(b_n)$

D'altra parte per il teorema del confronto, da $f(a_n) < 0$ segue $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(l) \leq 0$

Infine, per il teorema del confronto, da $f(b_n) > 0$ segue $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(l) \geq 0$.

Pertanto $0 \leq f(l) \leq 0 \Rightarrow f(l) = 0$ e la tesi segue ($\bar{x} = l$)

32 Principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore

32.1 Enunciato

f, g, f_1, g_1 , sono infinite per $x \rightarrow x_0$.

f_1 è infinito di ordine inferiore a f ,

g_1 è infinito di ordine inferiore a g per $x \rightarrow x_0$.

$$\Rightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} \text{ esiste} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ esiste} \right) \text{ ed in tal caso sono uguali fra loro.}$$

32.2 Dimostrazione (Traccia)

$$\frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \frac{f(x)(1 + \frac{f_1(x)}{f(x)})}{g(x)(g(x) + \frac{g_1(x)}{g(x)})}$$

33 Condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni

33.1 Enunciato

Se

1) $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

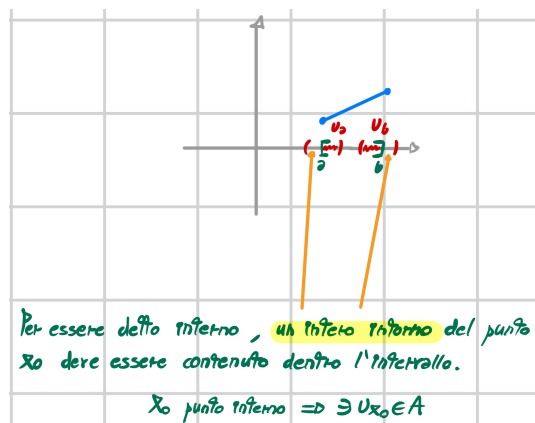
2) $x_0 \in A$, x_0 interno ad A

3) x_0 punto di minimo (massimo) locale

4) f derivabile in x_0

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Una retta è sempre derivabile.



33.2 Dimostrazione

Sia x_0 un punto di minimo locale $\Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ t.c. $f(x_0) \leq f(x) \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap A$.

So che x_0 è interno ad A ; quindi $\exists \delta_2 > 0 / (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \subset A$.

Sia $\delta^* = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. *(il minimo fra i 2)

Considero $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ e $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

Sia $x \in (x_0 - \delta, x_0)$; ho che $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

$$\Rightarrow 0 \geq f'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

34 Classificazione delle discontinuità

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per A .

34.1 Discontinuità eliminabile

Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

$l_1 = l_2$, Ma $f(x_0) \neq l$, diremo che x_0 è punto di **discontinuità eliminabile** di f