

Teoria Analisi 1

February 7, 2025

Contents

1	Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato) - Solo enunciato	2
2	Teorema dell'unicità del limite	2
2.1	Enunciato	2
2.2	Dimostrazione	2
3	Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)	2
3.1	Enunciato	2
3.2	Dimostrazione	3

1 Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato) - Solo enunciato

2.2em $f : I \subset \mathbb{R}, I$ intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I , f derivabile in x_0 .

Allora: $\exists w : I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. w è continua in x_0 , $w(x_0) = 0$ e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0)$$

dove: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la tangente

$w(x)(x - x_0)$ è l'errore causato da alcuni fattori, lo possiamo trascurare.

2 Teorema dell'unicità del limite

2.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Se:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$

2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

Allora: $l_1 = l_2$

2.2 Dimostrazione

ip1) $\forall V_{l_1}$ intorno di $l_1 \exists U_{x_0}$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_{l_1}$ per ogni $x \in (U_{x_0} \cap A) - \{x_0\}$

ip2) $\forall V_{l_2}$ intorno di $l_2 \exists U'_{x_0}$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_{l_2}$ per ogni $x \in (U'_{x_0} \cap A) - \{x_0\}$



Per contraddizione: $l_1 \neq l_2$

Allora $\exists V_{l_1}, V_{l_2}$ intorni di l_1 e l_2 (rispettivamente) tali che: $V_{l_1} \cap V_{l_2} \neq \emptyset$

$W_{x_0} = \bigcup U'_{x_0}$ è un intorno di x_0

Sia $x \in (W_{x_0} \cap A) - \{x_0\} \neq \emptyset$ (perché x_0 è di accumulazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in V_{l_1} & (\text{Per definizione di limite 1}) \\ f(x) \in V_{l_2} & (\text{Per definizione di limite 2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in V_{l_1} \cap V_{l_2} \neq \emptyset \Rightarrow l_1 = l_2. \text{ Contraddizione}$$

3 Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)

3.1 Enunciato

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. f R-integrale su $[a, b]$.

$\exists x_1 \in [a, b]$ t.c. f sia continua in x_1 .

Fissato $x_0 \in [a, b]$ e presa $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, si ha che F è derivabile in x_1 e $F'(x_1) = f(x_1)$

3.2 Dimostrazione

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right|, \quad x \neq x_1 \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \end{aligned}$$