Teoria Analisi 1

A. Languasco

February 19, 2025

Contents

1 Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)

Se una funzione è derivabile in un punto, allora il suo comportamento vicino a quel punto può essere descritto da una retta tangente (approssimazione lineare). Il termine $o(x - x_0)$ indica che il resto dell'approssimazione tende a zero più velocemente di $x - x_0$.

1.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R}, I$ intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I, f derivabile in x_0.
Allora: $\exists$ w: I $\to \mathbb{R}$ t.c. w è continua in x_0, w$(x_0) = 0$ e

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0)$$

dove: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la tangente
$w(x)(x - x_0)$ è l'errore causato da alcuni fattori, lo possiamo trascurare.

1.2 Dimostrazione

$$\text{Sia } w(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \text{ Se } x \neq x_0 \\ 0 \text{ Se } x = x_0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to x_0} w(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} [\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$
Sia $x \neq 0$: $w(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \Rightarrow (w(x) - f'(x_0))(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0) \ \forall x \in I \ x \neq x_0$$

Sia $x = x_0$: $f(x_0) \stackrel{?}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) + w(x_0)(x_0 - x_0)$ **Si!**

Pertanto la tesi è verificata $\forall x \in I$

2 Teorema dell'unicità del limite

2.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Se:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in \widetilde{\mathbb{R}}$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$

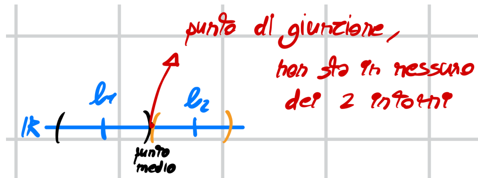
Allora: $\mathbf{l_1 = l_2}$

2.2 Dimostrazione

ip1) $\forall Vl_1$ intorno di $l_1 \exists Ux_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in \forall l_1$ per ogni $x \in (Ux_0 \cap A) - \{0\}$

ip2) $\forall Vl_2$ intorno di $l_2 \exists U'x_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in \forall l_2$ per ogni $x \in (U'x_0 \cap A) - \{0\}$

Per contraddizione: $l_1 \neq l_2$
Allora $\exists Vl_1, Vl_2$ intorni di l_1 e l_2 (rispettivamente) tali che: $Vl_1 \cap Vl_2 \neq \emptyset$
$Wx_0 = Ux_0 \cap U'x_0$ è un intorno di x_0



Sia $x \in (Wx_0 \cap A) - \{x_0\} \neq \emptyset$ (perché x_0 è di accumulazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in Vl_1 \text{ (Per definizione di limite 1)} \\ f(x) \in Vl_2 \text{ (Per definizione di limite 2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in Vl_1 \cap Vl_2 \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{l_1} = \mathbf{l_2}.\ \underline{\textbf{Contraddizione}}$$

3 Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)

3.1 Enunciato

$[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. f R-integrale su $[a,b]$.
$\exists x_1 \in [a,b]$ t.c. f sia continua in x_1.
Fissato $x_0 \in$[a,b] e presa $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, si ha che F è derivabile in x_1 e $F'(x_1) = f(x_1)$

3.2 Dimostrazione

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right|, \quad x \neq x_1 \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{x_1}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)dt - f(x_1)(x - x_1)}{x - x_1} \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_1}^{x} (f(t) - f(x_1))dt}{x - x_1} \right| \\
&\leq \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^{x} |f(t) - f(x_1)| dt
\end{aligned}$$

Ma f è continua in $x_1 \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon \ \forall t / 0 < |t - x_1| < \delta_\varepsilon \ t \in [a,b]$

Osservo che $t \in [x_1, x]$ (oppure $t \in [x, x_1]$, dipende come abbiamo disposto x e x_1)
Implica che $|t - x_1| \leq |x - x_1|$
Sia allora $x \in [a,b] / |x - x_1| < \delta_\varepsilon$. Con questo forziamo le due varibli a stare vicine fra loro
Quindi $|t - x_1| \leq |x - x_1| < \delta_\varepsilon$ e $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon$
Allora $0 \leq \left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| < \frac{1}{|x-x_1|} \left| \int_{x_1}^{x} \epsilon dt \right| = \epsilon \frac{|x-x_1|}{|x-x_1|} = \epsilon$
Ossia: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| < \epsilon \ \forall x$ t.c. $0 < |x - x_1| < \delta_\varepsilon$, $x \in [a,b]$
Cioè:$\lim_{x_1} \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$ esiste e vale $f(x_1)$.

Quindi: $\mathbf{F'(x_1) = f(x_1)}$

4 Formula fondamentale del calcolo integrale

4.1 Enunciato

$f \in C^0[a,b]$ e sia $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in $[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

4.2 Dimostrazione

Sia $x \in [a,b]$ e $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Per il TFCI* è derivabile in $[a,b]$ e $F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b]$.
F, G sono primitive di f in un intervallo $[a,b] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}/G(x) = F(x) + c\ \forall x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} \text{Osservo adesso che: } G(b) - G(a) &= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) \\ &= \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a f(t)dt \\ &= \cancel{\int_{x_0}^a f(t)dt} + \int_{x_0}^b f(t)dt - \cancel{\int_{x_0}^a f(t)dt} = \int_{x_0}^b f(t)dt. \end{aligned}$$

*TFCI: Teorema Fondamentale Calcolo Integrale

<u>Osservazione:</u> $f \in C^0([a,b])$ e sia
$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ dove $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabili in $[a,b]$.
Si ha che $H(x)$ è derivabile perché $H(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ dove $F(u) = \int_{x_0}^u f(t)dt$ *(Composizione di f derivabili)*
Inoltre $H'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) = \underline{f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)\ \forall x \in [a,b]}$

5 Teorema del confronto I

5.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A
Allora:

a) Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$
   Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$
   con $\ell_1 < \ell_2$, allora:

$$\exists U_{x_0},\ \text{intervallo di } x_0,\ \text{tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

b) Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
   Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora:

$$\exists U_{x_0},\ \text{intervallo di } x_0,\ \text{tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

c) Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
   Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, allora:

$$\exists U_{x_0},\ \text{intervallo di } x_0,\ \text{tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

5.2 Dimostrazione

a) $l_1 < l_2 (l_1, l_2 \in \mathbb{R})$. Fisso $\epsilon > 0$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U'x_0$ intervallo di x_0 tale che $\forall x \in (U'x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$
$\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \Rightarrow \exists U''x_0$ intorno di $x_0 / l_2 - \epsilon < g(x) < l_2 + \epsilon \ \forall x \in (U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Se $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ *idea: scelgo* $\epsilon > 0 / l_1 + \epsilon \leq l_2 - \epsilon$
Scelgo in quanto sopra $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$
Per $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \ capA) \setminus \{x_0\}$ si ha allora

$$f(x) < l_1 + \epsilon = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

6 Teorema del confronto II

6.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $x \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Allora:

a) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
Se $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow l_1 \leq l_2$$

b) Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ e $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

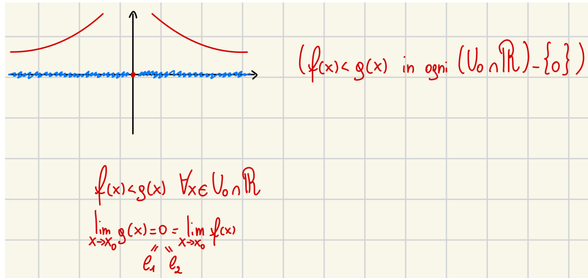
c) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

6.2 Osservazione

Cosa accade se si suppone $f(x) < g(x) \overset{?}{\Rightarrow} l_1 < l_2$

$$\textbf{NO: } f(x) = 0 \ \forall x \mathbb{R} \ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ x > 0 \\ 0 \ x = 0 \\ -\frac{1}{x} \ x < 0 \end{cases}$$



7 Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri

7.1 Enunciato

$f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A.
Inoltre

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$$

$\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

7.2 Dimostrazione

Sia $\epsilon > 0$: $\exists U' x_0$, $U'' x_0$ intorni di $x_0 / \; |f(x) - l| < \epsilon \; \forall x \in (U' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$
$|g(x) - l| < \epsilon \; \forall x \in (U'' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Sia $W x_0 = U' x_0 \cap U'' x_0$ è un intorno di x_0.
Se $x \in W x_0 \cap A \setminus \{x_0\}$

$$\begin{aligned} l - \epsilon < f(x) &\; \underline{\text{definizione} \lim f \text{ (per ipotesi)}} \\ f(x) &\leq h(x) \leq g(x) \\ &\qquad\quad g(x) < l + \epsilon \end{aligned}$$

Quindi $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$ cioè $|h(x) - l| < \epsilon$
Ho fatto vedere che:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists W x_0 \text{ intorno di } x_0 / \; |h(x) - l| < \epsilon \text{ per } x \in W x_0 \cap A \setminus \{x_0\}$$

Che è esattamente la definizione di: $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

8 Teorema del valore medio integrale

8.1 Enunciato

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f, gR - integralein[a, b]$.
Sia $m = \inf f(x)/x \in [a, b]$, $(\in \mathbb{R})$
$M = \sup f(x)/x \in [a, b]$, $(\in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1)\ m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ 2)\ \exists \mu \in [m, M] / \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \\ 3)\ \text{Se } f \text{ continua in } [a,b], \text{ allora } \exists x_0 \in [a,b] / \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a). \end{cases}$$

8.2 Dimostrazione

1) $m \leq f(x) \leq M\ x \in [a, b]$
$P = a, b \Rightarrow D(P, f) = m(b-a) \in G$
$S'(P, f) = M(b-a) \in H$.
Allora: $m(b-a) \leq sup(G) = \int_a^b f(x)dx = inf(H) \leq M(b-a)$

2) Dal punto 1): $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$. Sia $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$,
allora $\mu \in [m, M]$ e ovviamenete, $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$

3) $f \in C^0[a, b]$: per il teorema dei valori intermedi $f([a, b])$ è intervallo; per il teorema di Weistrass f ha max e min **GLOBALE**
Quindi $f([a, b]) = [m, M]$
Per il punto 2), $\exists \mu \in [m, M] / \mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$;
ma $[m, M] = Im(f) \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = \mu$

9 Criterio integrale convergenza delle serie numeriche

9.1 Enunciato

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0\ \forall x \in [1, +\infty)$.
Sia f. debolmente crescente in $[+\infty)$.
Allora ($\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge $\iff$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.)

10 Teorema delle derivate successive

10.1 Enunciato

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f \in C^{n-1}(I)$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I.
Suppongo che $\exists f^n(x_0)$ e che $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, 3, ..., n-1$.
$f^{(n)} > 0$ (< 0).

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } n \text{ è } \textbf{PARI}, \text{ si ha che } x_0 \text{ è punto di minimo (massmimo) locale forte.} \\ \text{se } n \text{ è } \textbf{DISPARI}, \text{ allora } x_0 \text{ nè pto di massimo nè pto di minimo locale.} \end{cases}$$

11 Teorema di Rolle

11.1 Enunciato

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$
f derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$
Allora $\exists \overline{x} \in [a, b]$
$x_1 = a$ e $x_2 = b$ (o viceversa): allora, dato che

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) \Rightarrow f(x) = f(a)\ \forall x \in [a, b] \\ \Rightarrow f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

Se almeno uno tra x_1 e x_2 non è in un estremo di $[a, b]$
esempio sia $x_1 \in (a, b)$. Allora x_1 è interno ad $[a, b]$. Per le condizioni necessarie di estremalità si ha $f'(x_1) = 0$
Nel caso di $x_2 \in (a, b)$: si replichi lo stesso ragionamento.

12 Teorema di Lagrange

12.1 Enunciato

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$, f derivabile in (a, b).

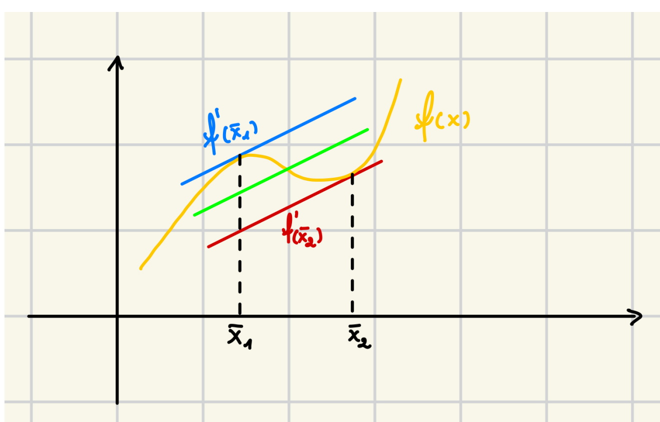
$$\Rightarrow \exists \overline{x} \in (a, b) / f(b) - f(a) = f'(\overline{x})(b - a)$$

12.2 Dimostrazione

Sia $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$, f è continua in $[a, b]$;
φ è derivabile in (a, b), $\varphi(a) = 0 - 0 = 0$; $\varphi(b) = 0 - 0 = 0$.
Per il teorema di Rolle: $\exists \overline{x} \in (a, b)$ $\quad \varphi(\overline{x}) \to$ punto che azzera la derivata prima.
Ma $\varphi'(x) = (f'(x)(b - a)) - (f(b) - f(a))\ \forall x \in (a, b)$

$$\Rightarrow 0 = \varphi'(\overline{x}) = f'(\overline{x})(b - a) - f(b) - f(a)$$

e quindi $0 = \varphi'(\overline{x})$ dato che il resto è nullo
da cui segue la tesi.



13 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie

13.1 Enunciato

$$\text{Se } \sum a_k \text{ converge, allora } \lim_{x \to +\infty} a_k = 0$$

13.2 Dimostrazione

Sia $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Per ipotesi $\exists A \in \mathbb{R} \lim_{n \to +\infty} An = A$.
Inoltre si ha che $A_n - A_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_n - \sum_{h=0}^{n-1} a_n = a_n$
Ma $\lim_{n \to +\infty}(A_n - A_{n-1}) = (\lim_{n \to +\infty} A_n) - (\lim_{n \to +\infty} A_{n-1}) = A - A = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

14 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli

14.1 Enunciato

$x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Allora $(1+x)^m \geq 1 + nx$ $\forall n \in \mathbb{N}$

14.2 Dimostrazione

Passo base:
È vero che: $(1+x)^0 \leq 1 + 0 \cdot x$?, si $\Rightarrow$ passo base verificato!

Passo induttivo:
Ipotesi induttiva: $(1+x)^m \geq 1 + mx$ con $m \in \mathbb{N}$
Tesi induttiva: $(1+x)^{m+1} \geq 1 + (m+1)x$

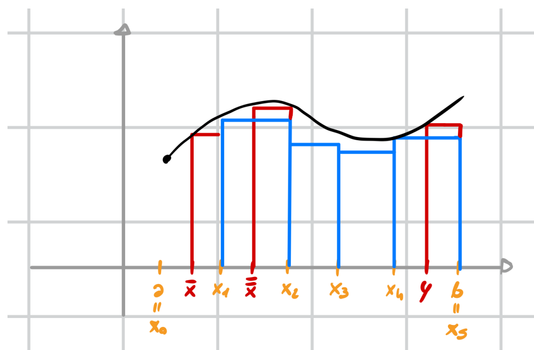
$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m \geq (1+mx)(1+x)$
$1 + x + mx + mx^2 = x(1+m) + 1 + mx^2 = (m+1)x + 1 + mx^2 \geq (m+1)x + 1$ Posso anche ingnorare mx^2 perche è sempre positivo

Quindi il passo induttivo è verificato per il principio di induzione $\forall x > -1$

15 Integrale di Riemann

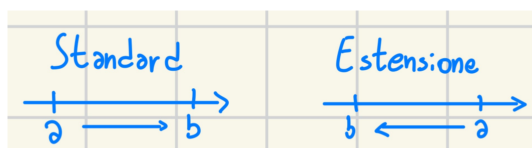
15.1 Integrali Definiti

Vogliamo dare un significato al concetto (per $f(x) \geq 0$) di "area sottesa al grafico di f".



15.2 Estensione dell'integrale di Riemann

A casi cui $a \geq b$.



15.2.1 Definizione

f Riemann-integrale in $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Definiamo } \int_a^b f(x)dx = 0 \text{ e } \int_b^a f(x)dx = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx}$$

15.3 Teorema Integrazione di Riemann per parti

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^1([a, b])$

$$\text{Allora: } \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$f(b)g(b) - f(a)g(a) = f(x)g(x)|_a^b$

15.3.1 Dimostrazione

$f'g$ e fg' sono continue in $[a, b]$ e quindi sono R-int$^{\text{le}}$ in $[a, b]$.
Inoltre $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$
Ma $f \cdot g$ è primitiva di $(fg)'$ e quindi

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \text{ la tesi segue}$$

16 Teorema di Bolzano - Weierstrß

16.1 Enunciato

Sia a_n una successione LIMITATA (Quindi superiormente e inferiormente limitata).
Allora $\exists\{a_{n_k}\}$ successione di a_n t.c.

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = l \in \mathbb{R}$$

16.2 Esempio 1

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ pari} \\ n \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Sup$\{a_n\} = +\infty \Rightarrow$ non posso applicare il teorema di Bolzano-Weistraß.

16.3 Esempio 2

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow |a_n| \leq \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Per il teorema di Bolzano-Weistraß $\exists a_{n_k}$ sottosuccessione di a_n t.c. $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} \in \mathbb{R}$

17 Proprietà di Archimede

17.1 Enunciato

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}/n < x$$

"Esiste sempre un numero intero più grande di qualsiasi numero reale".

17.2 Dimostrazione

Sia $x > 0 \rightarrow A := \{n \in \mathbb{N}/n \leq x\} \subseteq \mathbb{N}$
Tesi: $\iff A \neq \mathbb{N}$

Suppongo che $A = \mathbb{N} \neq \emptyset$
Sia $B := \{y \in \mathbb{R}/y \geq n\ \forall n \in \mathbb{N}\}$
dal fatto che $A = \mathbb{N}$ segue che $x \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$
Notiamo che $\forall y \in B$ si ha che $y \geq n\ \forall n \in A(= \mathbb{N})$. Quindi A e B sono separati per l'assioma di separazione $\exists \alpha \in \mathbb{R}/n \leq \alpha \leq y\ \forall n \in A\ \forall y \in B\ (A = \mathbb{N})$

Quindi è anche vero che $\mathbb{N} \ni n + 1 \leq \alpha \leq y \Rightarrow n \leq \alpha - 1\ \forall n \in A \Rightarrow \alpha - 1 \in B$
Ma α è elemento separatore di A e B: $(n \leq)\alpha \leq y\ \forall y \in B\ \forall n \in A$

Quindi $\alpha \leq \alpha - 1 \Rightarrow 1 \leq 0 \rightarrow$ **Contraddizione**

Abbiamo provato l'applicazione contronominale; quindi il teorema è dimostrato.
$A = \mathbb{N}$ FALSO $\Rightarrow a \subsetneq \mathbb{N}$

18 Teorema Bernoulli - de l'Hopital

18.1 $\frac{0}{0}$; limiti al finito

$a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, f, g derivabili in (a, b)
$\underline{g'(x) \neq 0}$ $\forall x \in (a, b)$. Siano $\lim\limits_{x \to a^+} g(x)$ e sia $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Nota vale anche per: $x \to b^-$, $Df = Dg = (a, b) \setminus \{x_0\}$

18.1.1 Errori comuni

1) **Errore:** uguagliare $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ senza aver verificato che l'ultimo limite esista.
2) Non si può usare il teorema di Bernoulli - de l'Hopital per studiare $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

18.2 $\frac{0}{0}$; limiti all'infinito

Sia $a \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, +\infty)$*$\to \mathbb{R}$, f, g derivabili in $(a, +\infty)$* e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, +\infty)$*
**$(a, +\infty)$ al contrario vale anche: $(-\infty, a)$.*
Inoltre $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

18.3 $\frac{\infty}{\infty}$; limiti al finito

$a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, f, g derivabili in (a, b)
$g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Inoltre
$\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty$*; $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.
**$+\infty$ al contrario vale anche: $-\infty$*

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

18.4 $\frac{\infty}{\infty}$; limiti al'infinito

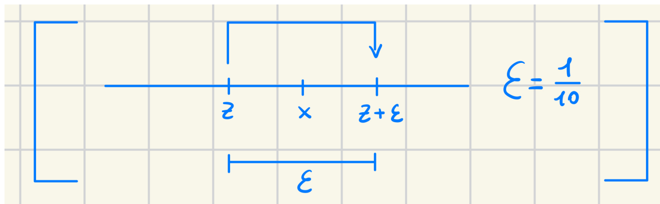
Sia $a \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, f, g derivabili in $(a, +\infty)$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, +\infty)$.
Inoltre $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$*; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.
**$+\infty$ al contrario vale anche: $-\infty$*

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

19 Teorema Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

19.1 Enunciato

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\forall \epsilon > 0$, $\exists z \in \mathbb{Q} / z \leq x < z + \epsilon$



19.2 Dimostrazione

$x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} > 0$
Uso la Proprietà di Archimede: $\exists q \in \mathbb{N} / q > \frac{1}{\epsilon} > 0$
Considero $qx \in \mathbb{R}$
Per le prorietà delle parti intrere $\exists p \in \mathbb{Z} / p \leq qz < p + 1$
Divido per $q > 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$ con $\frac{p+1}{q} = \frac{p}{q} + \frac{1}{p}$
Ma $q > \frac{1}{\epsilon} = \epsilon q > 1 \Rightarrow \epsilon < \frac{1}{q}$

$$\text{Segue che } \frac{p}{q} \leq x < \frac{p}{q} + \epsilon$$

20 Definizione di Limite

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sia $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A.
Diremo che f ammette limite $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_0 [scriviamo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$] se e solo se per ogni intorno Vl di l esiste un intorno Ux_0, intorno di x_0, tale che $f(x) \in Vl$ per ogni $x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$.

N.B. Se $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$, l'ultima parte sopra è da leggere come: $(Ux_0 \cap A)$, senza togliere x_0.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon / |f(x) - l| < \epsilon \ \forall x \in A,\ f(x) \in Vl$$

$0 < |x - x_o| < \delta_\varepsilon$: Vuol dire prendere i valori del disco di raggio δ_ε e togliere il punto centrale in x_0 (quindi togliere x_0), si dice in questo caso: "disco bucato".

21 Teorema formula di Taylor con resto di Peano

21.1 Enunciato

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, sia derivabile $n - 1$ volte in I e tali funzioni derivate siano continue in i.
Sia inoltre $x_0 \in I$, x_0 interno ed $\exists f^{(n)}(x_0)$
Allora $\exists w : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. w continua in x_0, $w(x_0) = 0$ ed inoltre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + w(x)(x - x_0)^n \quad \forall x \in I$$

Dove: $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \to \quad$ è la formula di Taylor.
$w(x)(x - x_0)^n \quad \to \quad$ è il resto di Peano.

22 Criterio di Von Leibniz (Serie segni alterni)

22.1 Enunciato

Sia $a_k \neq 0, a_{k+1} \neq a_k$ e $\lim_{x\to+\infty} a_k = 0$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k \text{ converge}$$

23 Criterio della radice (CAUCHY)

$a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l < 1$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE}$$

N.B. se $l = 1$ non si può concludere.

24 Criterio del rapporto (D'Alembert)

$a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = l < 1$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE}$$

N.B. se $l = 1$ non si può concludere.

25 Criterio integrale

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, +\infty)$.
Sia f. debolmente crescente in $[1, +\infty)$.

$$\Rightarrow (\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \text{ converge } \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge})$$

26 Serie a termini di segno qualunque

Sia $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ una successione.
Diremo che $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE $\iff \sum |a_k|\, converge.$

27 Criterio asintotico in (a,b]

27.1 Enunciato

f, g: $(a, b] \to (0, +\infty)$, f, g R-integrali in $[x, b]$ $\forall x > a$.
Siano f, g INFINITE per $t \to a^+$.
Allora:

1) Se $\lim_{t\to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow (\int_a^b f(t)dt$ **CONVERGE** $\iff \int_a^b g(t)dt$ **CONVERGE**)

2) Se $\lim_{t \to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = 0 \Rightarrow$ $\int_a^b g(t)dt$ **CONVERGE** $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ **CONVERGE**
e $\int_a^b f(t)dt$ **DIVERGE** $\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ **DIVERGE**

3) Se $\lim_{t \to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = +\infty \Rightarrow$ $\int_a^b f(t)dt$ **CONVERGE** $\Rightarrow \int_a^b g(t)dt$ **CONVERGE**
e $\int_a^b g(t)dt$ **DIVERGE** $\Rightarrow \int_a^b f(t)dt$ **DIVERGE**

27.2 Dimostrazione

Le ipotesi significano che:

1) f, g hanno lo stesso ordine di infinito.

2) f ha ordine di infinito inferiore a g.

3) f ha ordine di infinito superiore a g.

Basta scrivere la corrispondente Definizione di limite per ottenere delle disuguaglianze su cui usare il criterio del confronto.

28 Criterio asintotico in [a, $+\infty$)

28.1 Enunciato

$f, g : [a. + \infty) \to (0, +\infty)$, f, g R-integrali in $[a, x]$ $\forall x > a$.
f, g infinitesime per $t \to +\infty$.
Allora:

1) Se $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$ ($\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **CONVERGE** $\iff$ $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ **CONVERGE**)

2) Se $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0 \Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ **CONVERGE** $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt$ **CONVERGE**
e $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **DIVERGE** $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)dt$ **DIVERGE**

3) Se $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = +\infty \Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ **CONVERGE** $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)dt$ **CONVERGE**
e $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ **DIVERGE** $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt$ **DIVERGE**

28.2 Dimostrazione

Basta scrivere la corrispondente Definizione di limite per ottenere delle disuguaglianze su cui usare il Criterio del confronto.

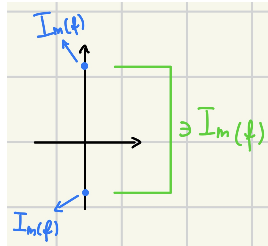
Anche in questo caso dobbiamo capire il comportamento di funzioni prive di ordine di infinitesimo a $+\infty$.

29 Teorema dei valori intermedi

29.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua in I.

$$\Rightarrow Im(f) \text{ è un intervallo.}$$



30 Proprietà della parte intera

30.1 Enunciato

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!\ n \in \mathbb{Z}$ t.c. $n \leq x < n+1$
N.B. n è detto parte intera di $x \to n = \lfloor x \rfloor$

31 Teorema "Ponte" o limiti mediante successioni

31.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A.

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l (\in \widetilde{\mathbb{R}}) \iff \forall \text{successione } a_n \in A \setminus \{x_0\} / \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0, \text{ si ha che } \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$$

31.2 Dimostrazione

"$\Rightarrow$" segue dal teorema di sostituzione dei limiti
"$\Leftarrow$" va dimostrato direttamente.

32 Teorema degli Zeri

32.1 Enunciato

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$.

$$\Rightarrow \exists \overline{x} \in (a,b) / f(\overline{x}) = 0$$

32.2 Dimostrazione (metodo dicotomico)

Suppongo $f(a) < 0 < f(b)$
Sia $c = \frac{a+b}{2}$. Calcolo $f(c)$:

1) Se $f(c) = 0 \Rightarrow$ la tesi è vera con $\overline{x} = c$
2) Se $f(c) < 0 \Rightarrow$ pongo $a_1 = c$, $b_1 = b$ e ho $f(a_1) < 0 < f(b_1)$
3) Se $f(c) > 0 \Rightarrow$ pongo $a_1 = a$, $b_1 = c$ e ho $f(a_1) < 0 < f(b_1)$

Nei casi 2) e 3): possiamo ripetere il procedimento su $[a_1, b_1]$:
Calcolo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$; Valuto $f(c_1)$

1) Se $f(c_1) = 0 \Rightarrow$ la tesi è vera con $\overline{x} = c_1$

2) e 3) come sopra.

Procedo in tal modo, per induzione, definendo a_n, b_n, $a \leq a_n < b_n \leq b$ e $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.
Osservo che $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}; b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{4} ... = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, n \geq 1$
Inoltre per costruzione, $a_n < a_n + 1$(deb. crescente) $b_{n+1} \leq b_n$(deb. crescente).
Per il teorema sui limiti delle funzione monotone:
$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in [a,b](a_n \leq a_n \leq b)$
$\lim_{n\to+\infty} b_n = m \in [a,b](a \leq b_n \leq b)$
D'altra parte, $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$
Ma $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = m - l \Rightarrow l = m$.
Ricordiamo ora che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ e quindi che: $f(a_n) < f(l) < f(b_n)$

D'altra parte per il teorema del confronto, da $f(a_n) < 0$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(l) \leq 0$
Infine, per il teorema del confronto, da $f(b_n) > 0$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(l) \geq 0$.
Pertanto $0 \leq f(l) \leq 0 \Rightarrow f(l) = 0$ e la tesi segue $(\overline{x} = l)$

33 Principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore

33.1 Enunciato

f, g, f_1, g_1, sono infinite per $x \to x_0$.
f_1 è infinito di ordine inferiore a f,
g_1 è infinito di ordine inferiore a g per $x \to x_0$.

$$\Rightarrow (\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} \text{esiste} \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{esiste) ed in tal caso sono uguali fra loro.}$$

33.2 Dimostrazione (Traccia)

$$\frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \frac{f(x)(1 + \frac{f_1(x)}{f(x)})}{g(x)(g(x) + \frac{g_1(x)}{g(x)})}$$

34 Condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni

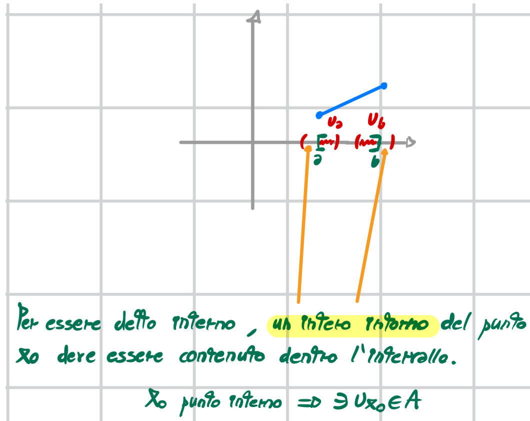
34.1 Enunciato

Se

1) $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
2) $x_0 \in A$, x_0 interno ad A
3) x_0 punto di minimo (massimo) locale
4) f derivabile in x_0

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Una retta è sempre derivabile.



34.2 Dimostrazione

Sia x_0 un punto di minimo locale $\Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ t.c. $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap A$.
So che x_0 è interno ad A; quindi $\exists \delta_2 > 0/(x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \subset A$.
Sia $\delta* = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$.   *(il minimo fra i 2)
Considero $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ e $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$
Sia $x \in (x_0 - \delta, x_0)$; ho che $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$

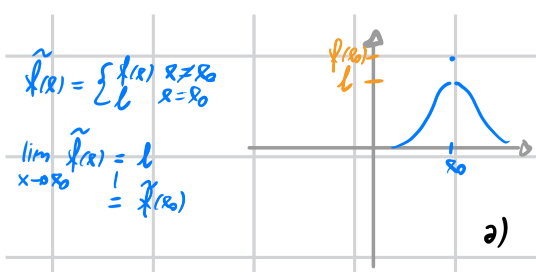
$$\Rightarrow 0 \geq f(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

35 Classificazione delle discontinuità

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per A.

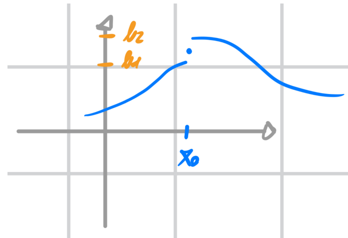
35.1 Discontinuità eliminabile

Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} = l_2 \in \mathbb{R}$
$l_1 = l_2$, Ma $f(x_0) \neq l$, diremo che x_0 è punto di **discontinuità eliminabile** di f



35.2 Seconda Specie

Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_1 \neq l_2$, diciamo che x_0 è discontinuità di **Prima Specie**



35.3 Seconda Specie

In ogni altro possibile caso in cui f è discontinua in x_0, è detto di **Seconda Specie**.