Teoria Analisi 1

A. Languasco

February 8, 2025

Contents

1 Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)

1.1 Enunciato

2.2em$f : I \subset \mathbb{R}, I$ intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I, f derivabile in x_0.
Allora: $\exists$ w: I $\rightarrow \mathbb{R}$ t.c. w è continua in x_0, w(x_0) = 0 e

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0)$$

dove: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la tangente
$w(x)(x - x_0)$ è l'errore causato da alcuni fattori, <u>lo possiamo trascurare.</u>

2 Teorema dell'unicità del limite

2.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Se:

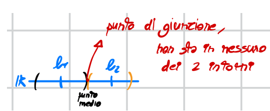
1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \widetilde{\mathbb{R}}$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$

Allora: $\mathbf{l_1 = l_2}$

2.2 Dimostrazione

ip1) $\forall V l_1$ intorno di $l_1 \exists U x_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in \forall l_1$ per ogni $x \in (U x_0 \bigcap A) - \{0\}$

ip2) $\forall V l_2$ intorno di $l_2 \exists U' x_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in \forall l_2$ per ogni $x \in (U' x_0 \bigcap A) - \{0\}$



Per contraddizione: $l_1 \neq l_2$
Allora $\exists V l_1, V l_2$ intorni di l_1 e l_2 (rispettivamente) tali che: $V l_1 \bigcup V l_2 \neq \emptyset$
$W x_0 = \bigcup U' x_0$ è un intorno di x_0
Sia $x \in (W x_0 \bigcup A) - \{x_0\} \neq \emptyset$ (perché x_0 è di accumulazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in V l_1 \text{ (Per definizione di limite 1)} \\ f(x) \in V l_2 \text{ (Per definizione di limite 2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in V l_1 \bigcap V l_2 \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{l_1 = l_2}. \ \underline{\textbf{Contraddizione}}$$

3 Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)

3.1 Enunciato

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. f R-integrale su $[a, b]$.
$\exists x_1 \in [a, b]$ t.c. f sia continua in x_1.
Fissato $x_0 \in$[a,b] e presa $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, si ha che F è derivabile in x_1 e $F'(x_1) = f(x_1)$

3.2 Dimostrazione

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1)\right|, \quad x \neq x_1 \\
&= \left|\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x-x_1} - f(x_1)\right| \\
&= \left|\frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{x_1}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x-x_1} - f(x_1)\right| \\
&= \left|\frac{\int_{x_1}^{x} f(t)dt - f(x_1)(x-x_1)}{x-x_1}\right| \\
&= \left|\frac{\int_{x_1}^{x} (f(t)-f(x_1))dt}{x-x_1}\right| \\
&\leq \frac{1}{x-x_1}\int_{x_1}^{x} |f(t)-f(x_1)|dt
\end{aligned}$$

Ma f è continua in $x_1 \iff$

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |f(t)-f(x_1)| < \epsilon\ \forall t / 0 < |t-x_1| < \delta_\varepsilon\ t \in [a,b]$$

Osservo che $t \in [x_1, x]$ (oppure $t \in [x, x_1]$, dipende come abbiamo disposto x e x_1)
Implica che $|t-x_1| \leq |x-x_1|$
Sia allora $x \in [a,b] / |x-x_1| < \delta_\varepsilon$. <u>Con questo forziamo le due varibli a stare vicine fra loro</u>
Quindi $|t-x_1| \leq |x-x_1| < \delta_\varepsilon$ e $|f(t)-f(x_1)| < \epsilon$
Allora $0 \leq \left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1)\right| < \frac{1}{|x-x_1|}\left|\int_{x_1}^{x} \epsilon dt\right| = \epsilon\frac{|x-x_1|}{|x-x_1|} = \epsilon$
Ossia: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\left|\frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1)\right| < \epsilon\ \forall x$ t.c. $0 < |x-x_1| < \delta_\varepsilon,\ x \in [a,b]$
Cioè:$\lim_{x_1} \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$ esiste e vale $f(x_1)$.

$$\textbf{Quindi: } \mathbf{F'(x_1) = f(x_1)}$$

4 Formula fondamentale del calcolo integrale

4.1 Enunciato

$f \in C^0[a,b]$ e sia $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in $[a,b]$

$$\text{Allora } \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

4.2 Dimostrazione

Sia $x \in [a,b]$ e $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Per il TFCI* è derivabile in $[a,b]$ e $F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b]$.
F, G sono primitive di f in un intervallo $[a,b] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / G(x) = F(x) + c\ \forall x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}
\text{Osservo adesso che: } G(b) - G(a) &= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) \\
&= \int_{x_0}^{b} f(t)dt - \int_{x_0}^{a} f(t)dt \\
&= \cancel{\int_{x_0}^{a} f(t)dt} + \int_{x_0}^{b} f(t)dt - \cancel{\int_{x_0}^{a} f(t)dt} = \int_{x_0}^{b} f(t)dt.
\end{aligned}$$

*TFCI: Teorema Fondamentale Calcolo Integrale

Osservazione: $f \in C^0([a,b])$ e sia
$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ dove $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabili in $[a,b]$.
Si ha che $H(x)$ è derivabile perché $H(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ dove $F(u) = \int_{x_0}^{u} f(t)dt$ *(Composizione di f derivabili)*
Inoltre $H'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) = \underline{f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)\ \forall x \in [a,b]}$

5 Teorema del confronto I

5.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A
Allora:

a) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$
Se $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$
con $\ell_1 < \ell_2$, allora:

$$\exists U_{x_0},\ \text{intervallo di } x_0,\ \text{tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

b) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$
Se $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora:

$$\exists U_{x_0},\ \text{intervallo di } x_0,\ \text{tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

c) Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
Se $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, allora:

$$\exists U_{x_0},\ \text{intervallo di } x_0,\ \text{tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

5.2 Dimostrazione

a) $l_1 < l_2 (l_1, l_2 \in \mathbb{R})$. Fisso $\epsilon > 0$
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U'x_0$ intervallo di x_0 tale che $\forall x \in (U'x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$
$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l_2 \Rightarrow \exists U''x_0$ intorno di $x_0 / l_2 - \epsilon < g(x) < l_2 + \epsilon\ \forall x \in (U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Se $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ *idea: scelgo* $\epsilon > 0 / l_1 + \epsilon \leq l_2 - \epsilon$
Scelgo in quanto sopra $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$
Per $x \in (U'x_0 \cap U''x_0\ capA) \setminus \{x_0\}$ si ha allora

$$f(x) < l_1 + \epsilon = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

6 teorema del confronto II

6.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $x \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Allora:

a) Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
   Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
   Se $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow l_1 \leq l_2$$

b) Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ e $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

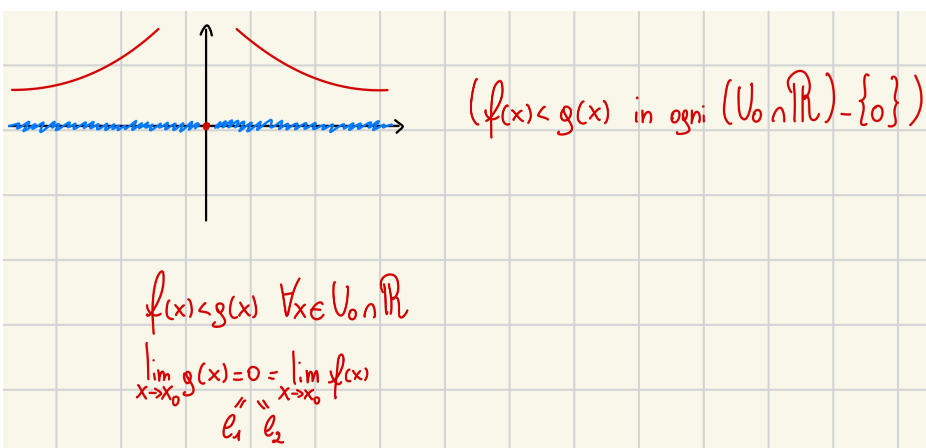
c) Se $\lim_l imits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

6.2 Osservazione

Cosa accade se si suppone $f(x) < g(x) \overset{?}{\Rightarrow} l_1 < l_2$

$$\textbf{NO:}\ f(x) = 0\ \forall x \mathbb{R}\ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\ x > 0 \\ 0\ x = 0 \\ -\frac{1}{x}\ x < 0 \end{cases}$$



7 Teorema del confronto dei limiti

8 Teorema media integrale

9 Condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni

10 Criterio integrale convergenza delle serie numeriche

10.1 Enunciato

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [1, +\infty$.
Sia f. debolmente crescente in $[+\infty)$.
Allora ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge $\iff$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.)

11 Teorema del valore medio integale

12 Teorema delle 3 funzioni (Carabinieri)

12.1 Enunciato

$f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A.
Inoltre

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists U x_0 \text{ intorno di } x_0 / f(x) \leq h(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

12.2 Dimostrazione

Sia $\epsilon > 0$: $\exists U'x_0, U''x_0$ intorni di $x_0 / \, |f(x) - l| < \epsilon \ \forall x \in (U'x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$
$|g(x) - l| < \epsilon \ \forall x \in (U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Sia $Wx_0 = U'x_0 \cap U''x_0$ è un intorno di x_0.
Se $x \in Wx_0 \cap A \setminus \{x_0\}$

$$\begin{aligned} l - \epsilon < f(x) & \ \underline{\text{definizione} \lim f \text{ (per ipotesi)}} \\ f(x) & \leq h(x) \leq g(x) \\ & \qquad\qquad g(x) < l + \epsilon \end{aligned}$$

Quindi $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$ cioè $|h(x) - l| < \epsilon$
Ho fatto vedere che:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists Wx_0 \text{ intorno di } x_0 / \, |h(x) - l| < \epsilon \text{ per } x \in Wx_0 \cap A \setminus \{x_0\}$$

Che è esattamente la definizione di: $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

13 Condizione estremalità locale con le derivate successive

14 Teorema di Rolle

14.1 Enunciato

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$
f derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$
Allora $\exists \overline{x} \in [a, b]$
$\underline{x_1 = a \text{ e } x_2 = b \text{ (o viceversa)}}$: allora, dato che

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) & \Rightarrow f(x) = f(a) \ \forall x \in [a, b] \\ & \Rightarrow f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

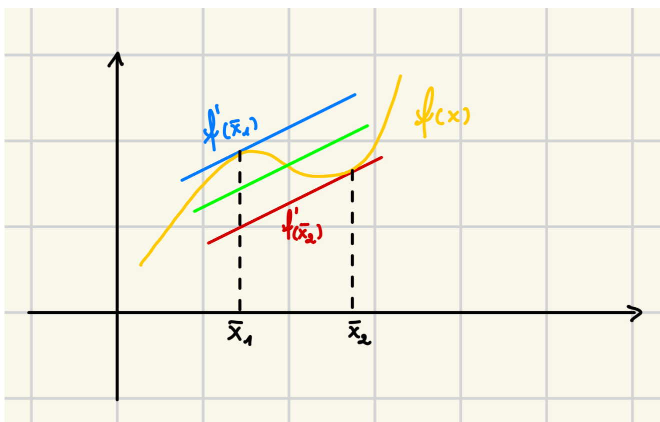
Se almeno uno tra x_1 e x_2 non è in un estremo di $[a, b]$
esempio sia $x_1 \in (a, b)$. Allora x_1 è interno ad $[a, b]$. Per le condizioni necessarie di estremalità si ha $f'(x_1) = 0$
Nel caso di $x_2 \in (a, b)$: si replichi lo stesso ragionamento.

15 Teorema di Lagrange

15.1 Enunciato

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$, f derivabile in (a, b).
Allora $\exists \overline{x} \in (a, b) / f(b) - f(a) = f'(\overline{x})(b - a)$
Sia $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$, f è continua in $[a, b]$;
φ è derivabile in (a, b), $\varphi(a) = 0 - 0 = 0$; $\varphi(b) = 0 - 0 = 0$.
Per il teorema di Rolle: $\exists \overline{x} \in (a, b)$ $\quad \varphi(\overline{x}) \to$ punto che azzera la derivata prima.
Ma $\varphi'(x) = (f'(x)(b - a)) - (f(b) - f(a)) \ \forall x \in (a, b)$

$$\Rightarrow 0 = \varphi'(\overline{x}) = f'(\overline{x})(b - a) - f(b) - f(a)$$
e quindi $0 = \varphi'(\overline{x})$ dato che il resto è nullo
da cui segue la tesi.



f'(x̄₁)
f(x)
f'(x̄₂)
x̄₁
x̄₂