Teoria Analisi 1

February 7, 2025

Contents

1 Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato) - Solo enunciato

2.2em$f : I \subset \mathbb{R}, I$ intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I, f derivabile in x_0.
Allora: $\exists$ w: I $\rightarrow \mathbb{R}$ t.c. w è continua in x_0, w(x_0) = 0 e

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0)$$

dove: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la tangente
$w(x)(x - x_0)$ è l'errore causato da alcuni fattori, lo possiamo trascurare.

2 Teorema dell'unicità del limite

2.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Se:

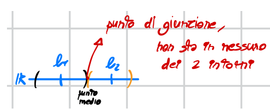
1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \widetilde{\mathbb{R}}$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$

Allora: $\mathbf{l_1 = l_2}$

2.2 Dimostrazione

ip1) $\forall V l_1$ intorno di $l_1 \exists U x_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in \forall l_1$ per ogni $x \in (U x_0 \bigcap A) - \{0\}$

ip2) $\forall V l_2$ intorno di $l_2 \exists U' x_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in \forall l_2$ per ogni $x \in (U' x_0 \bigcap A) - \{0\}$



Per contraddizione: $l_1 \neq l_2$
Allora $\exists V l_1, V l_2$ intorni di l_1 e l_2 (rispettivamente) tali che: $V l_1 \bigcup V l_2 \neq \emptyset$
$W x_0 = \bigcup U' x_0$ è un intorno di x_0
Sia $x \in (W x_0 \bigcup A) - \{x_0\} \neq \emptyset$ (perché x_0 è di accumulazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in V l_1 \text{ (Per definizione di limite 1)} \\ f(x) \in V l_2 \text{ (Per definizione di limite 2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in V l_1 \bigcap V l_2 \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{l_1 = l_2}. \ \underline{\textbf{Contraddizione}}$$

3 Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)

3.1 Enunciato

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. f R-integrale su $[a, b]$.
$\exists x_1 \in [a, b]$ t.c. f sia continua in x_1.
Fissato $x_0 \in$[a,b] e presa $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, si ha che F è derivabile in x_1 e $F'(x_1) = f(x_1)$

3.2 Dimostrazione

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right|, \quad x \neq x_1 \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x-x_1} - f(x_1) \right|
\end{aligned}
$$

Dim:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right|, \quad x \neq x_1 \\
&= \left| \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_1} f(t)dt}{x-x_1} - f(x_1) \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_1} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_1} f(t)dt}{x-x_1} - f(x_1) \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)dt - f(x_1)(x-x_1)}{x-x_1} \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_1}^{x} (f(t) - f(x_1))dt}{x-x_1} \right| \\
&\leq \frac{1}{x-x_1} \int_{x_1}^{x} |f(t)-f(x_1)|dt
\end{aligned}
$$

Dove abbiamo usato la **disuguaglianza integrale**.
Nota: Nel passaggio evidenziato in giallo, c è una costante.

Ma f è continua in $x_1 \iff$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \ |f(t)-f(x_1)| < \epsilon \ \forall t / 0 < |t-x_1| < \delta_\varepsilon \ t \in [a,b]$$

Osservo che $t \in [x_1, x]$ (oppure $t \in [x, x_1]$, dipende come abbiamo disposto x e x_1)
Implica che $|t-x_1| \leq |x-x_1|$
Sia allora $x \in [a,b] / |x-x_1| < \delta_\varepsilon$. Con questo forziamo le due varibli a stare vicine fra loro
Quindi $|t-x_1| \leq |x-x_1| < \delta_\varepsilon$ e $|f(t)-f(x_1)| < \epsilon$
Allora $0 \leq \left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| < \frac{1}{|x-x_1|} \left| \int_{x_1}^{x} \epsilon dt \right| = \epsilon \frac{|x-x_1|}{|x-x_1|} = \epsilon$
Ossia: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| < \epsilon \ \forall x$ t.c. $0 < |x-x_1| < \delta_\varepsilon$, $x \in [a,b]$
Cioè:$\lim_{x_1} \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$ esiste e vale $f(x_1)$.

$$\mathbf{Quindi:}\ \mathbf{F'(x_1) = f(x_1)}$$