

Teoria Analisi 1

A. Languasco

February 9, 2025

Contents

1	Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)	3
1.1	Enunciato	3
2	Teorema dell'unicità del limite	3
2.1	Enunciato	3
2.2	Dimostrazione	3
3	Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)	4
3.1	Enunciato	4
3.2	Dimostrazione	4
4	Formula fondamentale del calcolo integrale	5
4.1	Enunciato	5
4.2	Dimostrazione	5
5	Teorema del confronto I	5
5.1	Enunciato	5
5.2	Dimostrazione	6
6	Teorema del confronto II	6
6.1	Enunciato	6
6.2	Osservazione	6
7	Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri	7
7.1	Enunciato	7
7.2	Dimostrazione	7
8	Teorema del valore medio integrale	8
8.1	Enunciato	8
8.2	Dimostrazione	8
9	Criterio integrale convergenza delle serie numeriche	8
9.1	Enunciato	8
10	Teorema delle derivate successive	8
10.1	Enunciato	8
11	Teorema di Rolle	9
11.1	Enunciato	9

12 Teorema di Lagrange	9
12.1 Enunciato	9
13 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie	10
13.1 Enunciato	10
13.2 Dimostrazione	10
14 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli	10
14.1 Enunciato	10
14.2 Dimostrazione	10
15 Integrale di Riemann	11
15.1 Integrali Definiti	11
15.2 Estensione dell'integrale di Riemann	11
15.2.1 Definizione	11
15.3 Teorema Integrazione di Riemann per parti	11
15.3.1 Dimostrazione	11
16 Teorema di Bolzano - Weierstrß	12
16.1 Enunciato	12
16.2 Esempio 1	12
16.3 Esempio 2	12

1 Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)

1.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R}, I$ intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I , f derivabile in x_0 .

Allora: $\exists w : I \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. w è continua in x_0 , $w(x_0) = 0$ e

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0)$$

dove: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la tangente

$w(x)(x - x_0)$ è l'errore causato da alcuni fattori, lo possiamo trascurare.

2 Teorema dell'unicità del limite

2.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Se:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \widetilde{\mathbb{R}}$

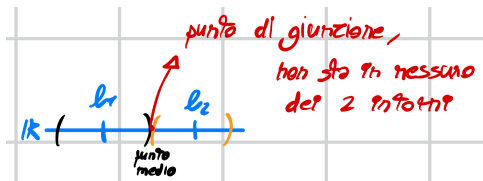
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$

Allora: $l_1 = l_2$

2.2 Dimostrazione

ip1) $\forall V_{l_1}$ intorno di $l_1 \exists U_{x_0}$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_{l_1}$ per ogni $x \in (U_{x_0} \cap A) - \{x_0\}$

ip2) $\forall V_{l_2}$ intorno di $l_2 \exists U'_{x_0}$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in V_{l_2}$ per ogni $x \in (U'_{x_0} \cap A) - \{x_0\}$



Per contraddizione: $l_1 \neq l_2$

Allora $\exists V_{l_1}, V_{l_2}$ intorni di l_1 e l_2 (rispettivamente) tali che: $V_{l_1} \cap V_{l_2} \neq \emptyset$

$W_{x_0} = U_{x_0} \cap U'_{x_0}$ è un intorno di x_0

Sia $x \in (W_{x_0} \cap A) - \{x_0\} \neq \emptyset$ (perché x_0 è di accumulazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in V_{l_1} & (\text{Per definizione di limite 1}) \\ f(x) \in V_{l_2} & (\text{Per definizione di limite 2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in V_{l_1} \cap V_{l_2} \neq \emptyset \Rightarrow l_1 = l_2. \text{ Contraddizione}$$

3 Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)

3.1 Enunciato

$[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. f R-integrale su $[a, b]$.

$\exists x_1 \in [a, b]$ t.c. f sia continua in x_1 .

Fissato $x_0 \in [a, b]$ e presa $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, si ha che F è derivabile in x_1 e $F'(x_1) = f(x_1)$

3.2 Dimostrazione

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right|, \quad x \neq x_1 \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_0}^x f(t)dt + \int_{x_1}^x f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_1}^x f(t)dt - f(x_1)(x - x_1)}{x - x_1} \right| \\ &= \left| \frac{\int_{x_1}^x (f(t) - f(x_1))dt}{x - x_1} \right| \\ &\leq \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^x |f(t) - f(x_1)|dt \end{aligned}$$

Ma f è continua in $x_1 \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0$ t.c. $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon \forall t/0 < |t - x_1| < \delta_\epsilon \quad t \in [a, b]$

Osservo che $t \in [x_1, x]$ (oppure $t \in [x, x_1]$, dipende come abbiamo disposto x e x_1)

Implica che $|t - x_1| \leq |x - x_1|$

Sia allora $x \in [a, b]/|x - x_1| < \delta_\epsilon$. Con questo forziamo le due variabili a stare vicine fra loro

Quindi $|t - x_1| \leq |x - x_1| < \delta_\epsilon$ e $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon$

Allora $0 \leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| < \frac{1}{|x - x_1|} \left| \int_{x_1}^x \epsilon dt \right| = \epsilon \frac{|x - x_1|}{|x - x_1|} = \epsilon$

Ossia: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0$ t.c. $\left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right| < \epsilon \forall x$ t.c. $0 < |x - x_1| < \delta_\epsilon, x \in [a, b]$

Cioè: $\lim_{x \rightarrow x_1} \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1}$ esiste e vale $f(x_1)$.

Quindi: $F'(x_1) = f(x_1)$

4 Formula fondamentale del calcolo integrale

4.1 Enunciato

$f \in C^0[a, b]$ e sia $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di f in $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

4.2 Dimostrazione

Sia $x \in [a, b]$ e $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Per il TFCI* è derivabile in $[a, b]$ e $F'(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$.
 F, G sono primitive di f in un intervallo $[a, b] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} / G(x) = F(x) + c \forall x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \text{Osservo adesso che: } G(b) - G(a) &= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) \\ &= \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a f(t)dt \\ &= \int_{x_0}^a \cancel{f(t)dt} + \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a \cancel{f(t)dt} = \int_{x_0}^b f(t)dt. \end{aligned}$$

*TFCI: Teorema Fondamentale Calcolo Integrale

Osservazione: $f \in C^0([a, b])$ e sia

$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ dove $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $[a, b]$.

Si ha che $H(x)$ è derivabile perché $H(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ dove $F(u) = \int_{x_0}^u f(t)dt$ (*Composizione di f derivabili*)

Inoltre $H'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) = \underline{f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)} \forall x \in [a, b]$

5 Teorema del confronto I

5.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A

Allora:

- a) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$
con $\ell_1 < \ell_2$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

- b) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

- c) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

5.2 Dimostrazione

a) $l_1 < l_2 (l_1, l_2 \in \mathbb{R})$. Fisso $\epsilon > 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U'x_0$ intervallo di x_0 tale che $\forall x \in (U'x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \Rightarrow \exists U''x_0$ intorno di $x_0/l_2 - \epsilon < g(x) < l_2 + \epsilon \forall x \in (U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Se $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ *idea: scelgo $\epsilon > 0/l_1 + \epsilon \leq l_2 - \epsilon$*

Scelgo in quanto sopra $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$

Per $x \in (U'x_0 \cap U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ si ha allora

$$f(x) < l_1 + \epsilon = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

6 Teorema del confronto II

6.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $x \in \tilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Allora:

a) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$

Se $\exists Ux_0$ intorno di $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow l_1 \leq l_2$$

b) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ e $\exists Ux_0$ intorno di $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

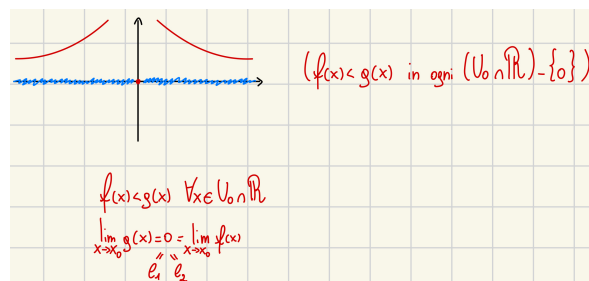
c) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ e $\exists Ux_0$ intorno di $x_0/f(x) \leq g(x) \forall x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

6.2 Osservazione

Cosa accade se si suppone $f(x) < g(x) \stackrel{?}{\Rightarrow} l_1 < l_2$

$$\mathbf{NO:} \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$



7 Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri



7.1 Enunciato

$f, g, h : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A .
Inoltre

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists U_{x_0} \text{ intorno di } x_0 / f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

7.2 Dimostrazione

Sia $\epsilon > 0$: $\exists U'x_0, U''x_0$ intorno di x_0 / $|f(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in (U'x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$
 $|g(x) - l| < \epsilon \quad \forall x \in (U''x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Sia $Wx_0 = U'x_0 \cap U''x_0$ è un intorno di x_0 .

Se $x \in Wx_0 \cap A \setminus \{x_0\}$

$$\frac{l - \epsilon < f(x) \text{ definizione } \lim f \text{ (per ipotesi)}}{f(x) \leq h(x) \leq g(x)} \\ g(x) < l + \epsilon$$

Quindi $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$ cioè $|h(x) - l| < \epsilon$

Ho fatto vedere che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists Wx_0 \text{ intorno di } x_0 / |h(x) - l| < \epsilon \text{ per } x \in Wx_0 \cap A \setminus \{x_0\}$$

Che è esattamente la definizione di: $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

8 Teorema del valore medio integrale

8.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f, g R -integrabile in $[a, b]$.

Sia $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$, ($\in \mathbb{R}$)

$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, ($\in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} 1) m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ 2) \exists \mu \in [m, M] / \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \\ 3) \text{ Se } f \text{ continua in } [a, b], \text{ allora } \exists x_0 \in [a, b] / \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a). \end{cases}$$

8.2 Dimostrazione

1) $m \leq f(x) \leq M \quad x \in [a, b]$

$P = a, b \Rightarrow D(P, f) = m(b-a) \in G$

$S'(P, f) = M(b-a) \in H$.

Allora: $m(b-a) \leq \sup(G) = \int_a^b f(x)dx = \inf(H) \leq M(b-a)$

2) Dal punto 1): $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$. Sia $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$,

allora $\mu \in [m, M]$ e ovviamente, $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$

3) $f \in C^0[a, b]$: per il teorema dei valori intermedi $f([a, b])$ è intervallo; per il teorema di Weistrass f ha max e min **GALE**

Quindi $f([a, b]) = [m, M]$

Per il punto 2), $\exists \mu \in [m, M] / \mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$;

ma $[m, M] = Im(f) \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = \mu$

9 Criterio integrale convergenza delle serie numeriche

9.1 Enunciato

$f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$.

Sia f . debolmente crescente in $[+\infty)$.

Allora $(\sum_{k=1}^{\infty} f(k))$ converge $\iff \int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.)

10 Teorema delle derivate successive

10.1 Enunciato

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f \in C^{n-1}(I)$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I .

Suppongo che $\exists f^n(x_0)$ e che $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

$f^{(n)} > 0$ (< 0).

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } n \text{ è } \mathbf{PARI}, \text{ si ha che } x_0 \text{ è punto di minimo (massimo) locale forte.} \\ \text{se } n \text{ è } \mathbf{DISPARI}, \text{ allora } x_0 \text{ è pto di massimo nè pto di minimo locale.} \end{cases}$$

11 Teorema di Rolle

11.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$

f derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$

Allora $\exists \bar{x} \in [a, b]$

$x_1 = a$ e $x_2 = b$ (o viceversa): allora, dato che

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a, b] \\ &\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \end{aligned}$$

Se almeno uno tra x_1 e x_2 non è in un estremo di $[a, b]$

esempio sia $x_1 \in (a, b)$. Allora x_1 è interno ad $[a, b]$. Per le condizioni necessarie di estremalità si ha $f'(x_1) = 0$

Nel caso di $x_2 \in (a, b)$: si replichi lo stesso ragionamento.

12 Teorema di Lagrange

12.1 Enunciato

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$, f derivabile in (a, b) .

Allora $\exists \bar{x} \in (a, b) / f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b - a)$

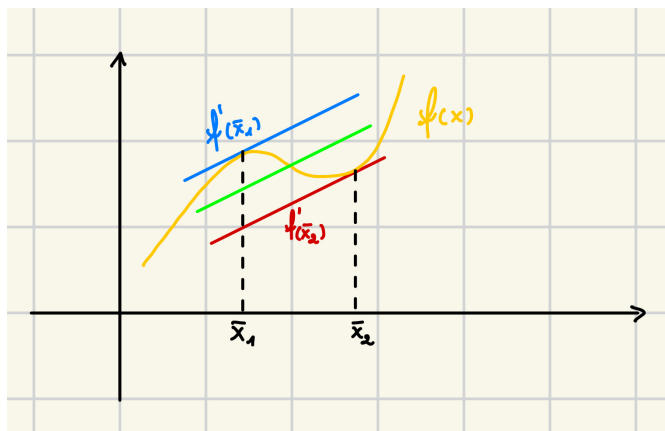
Sia $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$, φ è continua in $[a, b]$;

φ è derivabile in (a, b) , $\varphi(a) = 0 - 0 = 0$; $\varphi(b) = 0 - 0 = 0$.

Per il teorema di Rolle: $\exists \bar{x} \in (a, b) \quad \varphi'(\bar{x}) \rightarrow$ punto che azzerava la derivata prima.

Ma $\varphi'(x) = (f'(x)(b - a)) - (f(b) - f(a)) \quad \forall x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \varphi'(\bar{x}) = f'(\bar{x})(b - a) - f(b) - f(a) \\ \text{e quindi } 0 &= \varphi'(\bar{x}) \text{ dato che il resto è nullo} \\ &\text{da cui segue la tesi.} \end{aligned}$$



13 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie

13.1 Enunciato

Se $\sum a_k$ converge, allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

13.2 Dimostrazione

Sia $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Per ipotesi $\exists A \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A$.

Inoltre si ha che $A_n - A_{n-1} = \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n$

Ma $\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n - A_{n-1}) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) - \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n-1} \right) = A - A = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

14 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli

14.1 Enunciato

$x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Allora $(1+x)^m \geq 1+mx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

14.2 Dimostrazione

Passo base:

È vero che: $(1+x)^0 \leq 1+0 \cdot x$, si \Rightarrow passo base verificato!

Passo induttivo:

Ipotesi induttiva: $(1+x)^m \geq 1+mx$ con $m \in \mathbb{N}$

Tesi induttiva: $(1+x)^{m+1} \geq 1+(m+1)x$

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m \geq (1+mx)(1+x)$$

$$1+x+mx+mx^2 = x(1+m)+1+mx^2 = (m+1)x+1+mx^2 \geq (m+1)x+1 \quad \text{Posso anche ignorare } mx^2$$

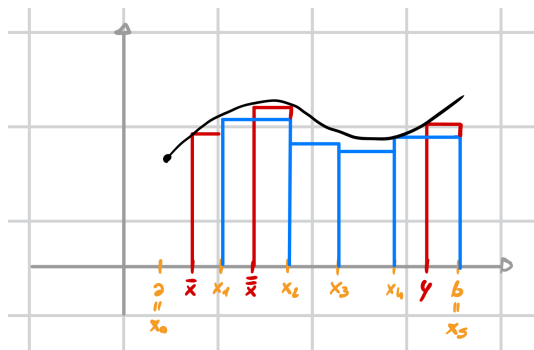
perche è sempre positivo

Quindi il passo induttivo è verificato per il principio di induzione $\forall x > -1$

15 Integrale di Riemann

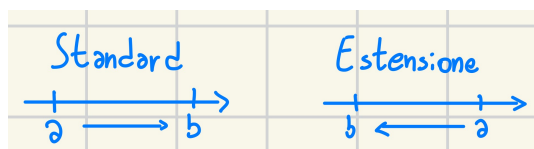
15.1 Integrali Definiti

Vogliamo dare un significato al concetto (per $f(x) \geq 0$) di "area sottesa al grafico di f ".



15.2 Estensione dell'integrale di Riemann

A casi cui $a \geq b$.



15.2.1 Definizione

f Riemann-integrale in $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Definiamo } \int_a^b f(x)dx = 0 \text{ e } \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

15.3 Teorema Integrazione di Riemann per parti

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in C^1([a, b])$

$$\text{Allora: } \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = f(x)g(x)|_a^b$$

15.3.1 Dimostrazione

$f'g$ e fg' sono continue in $[a, b]$ e quindi sono R-int^{le} in $[a, b]$.

Inoltre $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Ma f^*g è primitiva di $(fg)'$ e quindi

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \text{ la tesi segue}$$

16 Teorema di Bolzano - Weierstrß

16.1 Enunciato

Sia a_n una successione LIMITATA (Quindi superiormente e inferiormente limitata). Allora $\exists \{a_{n_k}\}$ successione di a_n t.c.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = l \in \mathbb{R}$$

16.2 Esempio 1

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$\text{Sup}\{a_n\} = +\infty \Rightarrow$ non posso applicare il teorema di Bolzano-Weierstrß.

16.3 Esempio 2

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow |a_n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrß $\exists a_{n_k}$ sottosuccessione di a_n t.c. $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} \in \mathbb{R}$