Teoria completa Bianchini

Anno Accademico 2025-2026

1 Definizione di serie convergente divergente ed indeterminata

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice convergente se la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ammette limite finito, cioè $\lim_{n \to +\infty} s_n = s$ con $s \in \mathbb{R}$. In tal caso scriviamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice divergente se la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ non ammette limite finito, cioè $\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice divergente se la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ non ammette limite finito, cioè $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$

2 Definizione di successione convergente, divergente ed indeterminata

Successione convergente

Una successione si dice convergente se: $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{N}$.
Una successione si dice divergente se: $\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$ oppure $\nexists \lim_{n \to +\infty} a_n$
Una successione si dice indeterminata se il limite presenta una forma indeterminata come: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; 0 * \infty; +\infty - \infty$.

3 Definizione d'integrale di Riemann

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,limitata.
f si dice integrabile secondo Riemann se l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidono. Il valore comune si chiama integrale di Riemann di f su $[a, b]$.

4 Dimostrazione del teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato

Presi in considerazioni i tre teoremi:

1. Teorema di Weierstrass $\to$ Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ ha un min e un max.
2. Teorema dei valori intermedi $\to$ Se una funzione è continua su $[a, b]$ e $f(a) < k < f(b)$ allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = k$
3. Teorema degli zeri $\to$ Se f continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e $f(a) * f(b) < 0$, allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.

Quindi data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e f continua in $[a, b]$, la funzione assume tutti i valori compresi tra $\inf f$ e $\sup f$ e se 0 è un valore compreso allora il teorema è dimostrato.

5 Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Definizioni e teoremi principali. Trovare la soluzione generale dell'equazione: $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ dove $a(x)$ e $b(x)$ sono due funzioni continue assegnate

Un equazione differenziale è una funzione del tipo $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$
Dove:

- $y(x)$ è la funzione incognita
- $a(x),\ f(x)$ sono funzioni note e continue su $I \subset \mathbb{R}$
- Se $f(x) = 0$ l'eq. differenziale è detta OMOGENEA

Problema di Cauchy

Dato $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy consiste nel trovare $y(x)$ tale che: $\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = t(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, si risolve prima trovando $y(x)$ e poi ponendo $y(x_0) = y_0$.

Teorema di esistenza e unicità

Sia dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = t(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Allora $\exists! y(x)$ su tutto l'intervallo I che soddisfa il problema di Cauchy.

Trovare la soluzione generale dell'equazione: $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ dove $a(x)$ e $b(x)$ sono due funzioni continue assegnate:

1. Trovo una primitiva $A(x)$ di $a(x)$
2. Integro: $y(x) = e^{-A(x)} * \int e^{A(x)} * f(x)dx \ + ce^{-A(x)}$
3. Ricavo la funzione cercata $y(x)$.

6 Equazioni differenziali del secondo ordine. Definizioni e teoremi principali. Soluzioni linearmente indipendenti. Definizione

Un eq differenziale lineare del II ordine ha la forma: $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$
Dove:

- $y(x)$ è la funzione incognita
- $a(x), b(x), f(x)$ sono funzioni continue definite su $I \subset \mathbb{R}$
- Se $f(x) = 0$ l'eq differenziale si dice omogenea

Problema di Cauchy:

Dato $x_0 \in I$ e $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$, devo trovare $y(x)$ tale che: $\begin{cases} y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$

Teorma di esistenza e unicità

Se $a(x), b(x), f(x)$ sono continue su I, allora $\forall x_0 \in I$ il problema di Cauchy ha un'unica soluzione $y(x)$ su tutto I.

Soluzioni linearmente indipendenti:

Due funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti su un intervallo I se nessuna può essere scritta come combinazione lineare dell'altra: $\nexists c_1, c_2 \neq 0$ t.c. $c_1 * y_1(x) + c_2y_2(x) = 0$ (Possiamo dire che il Wronksiano di y_1 e y_2 è diverso da 0)

7 Dimostrare che $sin(x)$ e $cos(x)$ sono linearmente indipendenti

Consideriamo $f(x) = sinx$, $g(x) = cosx$, allora $f'(x) = cosx$, $g'(x) = -sinx$.
Calcolo il Wronksiano: $W(f,g) = \begin{vmatrix} sinx & cosx \\ cosx & -sinx \end{vmatrix} = -sin^2x - cos^2x = -(sin^2x + cos^2x) = -1 \neq 0$
Poichè il Wronksiano è diverso da 0 possiamo concludere che $f(x)$ e $g(x)$ sono linearmente indipendenti.

Si può osservare che $\frac{sinx}{cosx} = tanx$ dato che la funzione tangente non è costante $sinx$ e $cosx$ non sono multipli l'uno dell'altro e quindi non sono linearmente dipendenti.

8 Definire il Wronskiano tra due funzioni $y(x)$ e $z(x)$. Dimostrare che se il wronskiano è diverso da zero in un punto allora è diverso da zero in ogni punto dell'intervallo di definizione

Per due funzioni $y(x)$ e $z(x)$ di classe $\mathbb{C}^1$ su I (funzioni con derivata prima continua su I) soluzione dell'ODE, il Wronksiano si definisce come:

$$W(y,z)(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix} = y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$$

Permette di definire se $y(x)$ e $g(x)$ sono linearmente indipendenti

Dimostrazione:
Pongo $W(x) = yz' - y'z$, derivo: $W' = y'z' + yz'' - y'z' - y''z = yz'' - y''z$
Dato che y e z risolvono l'ODE:
$y'' = -p(x)y' - q(x)y$
$z'' = -p(x)z' - q(x)z$
Sostituendo: $W' = y(-pz' - qz) - z(-py' - qy) = -pyz' - qyz + py'z + qyz = -p(yz' - y'z) = -pW$
Svolgo l'eq differenziale $W' + p(x)W = 0$, ottenendo $W = c * e^{-\int p(t)dt}$ dove $c = W(x_0)$
Allora: $W = W(x_0) * e^{-\int p(t)dt}$, dato che la funzione esponenziale è sempre strett. positiva, allora:
se $W(x_0) = 0 \Rightarrow W(x) = 0$
se $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow W(x) \neq 0$

9 Definizione di sup e inf per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Dimostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ammette il sup

Considero l'insieme $I \subseteq \mathbb{R}, I \neq \emptyset$

- Se I è inferiormente limitato
  $i = \inf(I) \in \mathbb{R}$
  $i : \begin{cases} x \geq i \ \forall x \in I \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists x \in I : x < i + \epsilon \end{cases}$
- Se I è superiormente limitato
  $s = \sup(I) \in \mathbb{R}$
  $s : \begin{cases} x \leq s \ \forall x \in I \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists x \in I : x > s - \epsilon \end{cases}$
- Se I è inferiormente illimitato
  $\inf(I) = -\infty$
  $\forall l \in \mathbb{R} \ \exists x \in I : x < l$
- Se I è superiormente illimitato
  $\sup(I) = +\infty$
  $\forall l \in \mathbb{R} \ \exists x \in I : x > l$

Dimostrazione estremo superiore:
Sia $I \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato.
Consideriamo l'insieme dei maggioranti: $U = \{M \in \mathbb{R} : x < M \ \forall x \in I\}$
L'insieme U è quindi non vuoto e inferiormente limitato. Per l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$ esiste $s = \inf(U)$.
Si verifica quindi che s è il minimo dei maggioranti di I e quindi $s = \sup(I)$.

10 Definizione di punto di accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Definizione di limite di una funzione per $x \to x_0$. Enunciare almeno un teorema significativo sui limiti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice x_0 pto di accumulazione per A se $\forall \epsilon > 0$ $((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap A \backslash \{x_0\} \neq \emptyset)$, cioè ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A distinto da x_0.

Definizione $\underset{x \to x_0}{lim} f(x) = l$
$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in D_f$, se $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - l| < \epsilon$.

Teorma unicità del limite:
Sia $f : I \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per I.
Se $\underset{x \to x_0}{lim} f(x) = l$ e $\underset{x \to x_0}{lim} f(x) = m$, allora $l = m$.
Quindi se una funzione ammette limite, questo è unico.

11 Dimostrare una forma (a piacere) del teorema di Hopital

Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ deriabili con $\underset{x \to x_0}{lim} f(x) = \underset{x \to x_0}{lim} g(x) = 0$, con $\underset{x \to x_0}{lim} g'(x) \neq 0$. Supponiamo che esista $\underset{x \to x_0}{lim} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, allora $\underset{x \to x_0}{lim} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Dimostrazione:
Per il teorema di Cauchy, per ogni $x \neq x_0$ esiste c compreso tra x e x_0 tale che $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
Poiche $f(x_0) = g(x_0) = 0$, si ha che $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
Facendo $x \to x_0$ segue che $c \to x_0$ quindi $\underset{x \to x_0}{lim} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{c \to x_0}{lim} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

12 Sviluppi di Taylor o Mac-Laurin per una funzione reale derivabile con continuità n volte. Scrivere le definizioni principali e dimostrare il teorema di Peano

Considero il caso particolare dello sviluppo di Taylor centrato in 0, detto sviluppo di Mac-Laurin.
Sia f derivabile e continua fino all'ordine n in un intorno di x_0.
Polinomio di Mac-Laurin: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$ per $x \to x_0$

Dimostrazione Teorema di Peano:
Definiamo la funzione $\phi(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$
Per costruzione si ha: $\phi(0) = \phi'(0) = ... = \phi^n(0) = 0$
Poichè $\phi^{(n)}$ si annulla in 0, si ha $\underset{x \to 0}{lim} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0$ e quindi $\phi(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$
Pertanto $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$.

13 Definizione di funzione continua e derivabile. Legame tra i due concetti

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$
f è continua in x_0 se $\underset{x \to x_0}{lim} f(x) = f(x_0)$, se questo vale per ogni punto del dominio della funzione allora $f(x)$ è continua in D_f.
f è derivabile in x_0 se $\exists f'(x_0) = \underset{x \to x_0}{lim} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ si chiama derivata di f in x_0,se questo vale per tutti i punti del dominio di f si dice che f è derivabile in D_f.

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$, se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.
Nota bene: Una funzione derivabile è anche continua, il viceversa non è garantito.

14 Teorema di Weierstrass per le funzioni continue. Enunciato ed applicazioni (dare controesempi togliendo le ipotesi del teorema)

Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, allora f ammette minimo e massimo.

Esempio di applicazione: Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato raggiunge sempre il suo valore massimo e minimo (Esistenza degli estremi globali)

Controesempi:

Intervallo non chiuso: $f(x) = x$, $D_f = (0,1)$, la funzione non ammette nè minimo nè massimo, gli estremi non sono compresi.

Intervallo non limitato: $f(x) = x$, $D_f = \mathbb{R}$, la funzione non ammette nè minimo nè massimo, intervallo non limitato.

Funzione non continua: $f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ $D_f = [0,1)$, estremi non garantiti, la funzione non è continua

15 Definizione di massimo e minimo relativo (o locale) e assoluto. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$:

x_0 è un max relativo se $\exists U_{x_0}$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in U_{x_0}$

x_0 e un max assoluto se $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in I$

x_0 è un min relativo se $\exists U_{x_0}$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in U_{x_0}$

x_0 e un min assoluto se $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in I$

Enunciato Teorema di Fermat:

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto interno ad I, se f è derivabile e x_0 è pto di max o min allora $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione Teorema di Fermat:
Supponiamo che x_0 sia punto di minimo locale. Allora esiste $\delta_1 > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap A$.
Siccome x_0 è interno, allora esiste $\delta_2 > 0$ tale che $(x_0 - \delta_2,\, x_0 + \delta_2) \subseteq A$.
Sia $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Consideriamo il rapporto incrementale (DERIVATA). Esso è ≥ 0 per ogni $x \in (x_0,\, x_0 + \delta)$ e quindi, per il teorema di permanenza del segno si ha $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. D'altra parte il rapporto incrementale stesso è ≤ 0 per ogni $x \in (x_0 - \delta,\, x_0)$ e quindi per il teorema di permanenza del segno si ha $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.
Siccome f è derivabile in x_0 abbiamo che $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, combinando le 2 disuguaglianze precedenti concludiamo che $f'(x_0) = 0$.
(Il caso in cui x_0 sia punto di massimo locale si mostra analogamente)

16 Monotonia e derivata prima. Dimostrare il legame tra i due concetti

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

- f crescente $\forall x \in (a,b) \Leftarrow f'(x) \geq 0$
- f decrescente $\forall x \in (a,b) \Leftarrow f'(x) \leq 0$
- $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, f strettamente crescente
- $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a,b)$, f strettamente decrescente

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$, allora f è crescente su (a,b).
Dimostrazione:
Poichè f continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2), per il teorema di Lagrange, esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.
Poichè $f'(c) \geq 0$ e $x_2 - x_1 \geq 0$, segue $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ cioè $f(x_2) \geq f(x_1)$.
Quindi f è crescente in $[a,b]$

17 Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange (o del valor medio). Fornire applicazioni fisiche e matematiche

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), allora $\exists c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dimostrazione:

Considero la funzione: $g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x - a]$, continua e derivabile negli stessi intervalli di f.

Calcolo la derivata: $g'(x) = f'(x)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Da $g'(c) = 0$ segue $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Esempi di applicazione:

- Monotonia del segno
- Unicità degli zeri

18 Definizione di o-piccolo. Esempi ed applicazioni per trovare il carattere di una serie

Siano f, g funzioni definite in un intorno di x_0.
Si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
«f è infinitesima di ordine superiore a rispetto a g»

Applicazione per le serie: Dal criterio del confronto, se $a_n = o(b_n)$ allora:
se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow a_n$ converge
se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow b_n$ diverge

19 Definizione di serie convergente e assolutamente convergente. Legame tra i due concetti con esempi

Una serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice convergente se $\exists l \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$.
Una serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge.
Esempio: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^n}$, applico il criterio dell'assoluta convergenza: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |-\frac{1}{2^n}|$, dove $\sum \frac{1}{2^n}$ è una serie geometrica convergente, allora $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^n}$ è assolutamente (semplicemente) convergente.

20 Definizione di derivata seconda e suo uso per trovare concavità e convessità di funzioni $\mathbb{C}^2$

Sia f una funzione derivabile in un intervallo I, se a sua volta f' è derivabile su I allora f è derivabile 2 volte e f'' si dice derivata seconda di f.

Concavità e convessità:
Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathbb{C}^2(I)$ allora:

- se $f''(x) > 0 \ \forall x \in I$ allora f è convessa in I
- se $f''(x) < 0 \ \forall x \in I$ allora f è concava in I
- se $f''(x_0) = 0$ allora x_0 è un punto di flesso

21 Massimi e minimi locali e derivata prima. Definizioni e legame per funzioni $\mathbb{C}^1$

22 Dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale

23 Metodo di integrazione per parti e per sostituzione. Fare esempi significativi

24 Definizione di integrale improprio. Criteri di integrabilità. Enunciare almeno un criterio e fare esempi

25 Enunciare il teorema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine. Fare un esempio in cui manca un'ipotesi

26 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Definizioni principali e discussione dei tre casi del discriminante

27 Definizione di funzione continua in $\mathbb{R}$. Usando l'$\epsilon - \delta$ dimostrare che se f è continua in x_0 allora $|f(x)|$ è continua in x_0

28 Enunciare due criteri per la convergenza assoluta di una serie con esempi

29 Dimostrare che se f è dispari e continua in 0 allora $f(0) = 0$. Verificare se è vero per funzioni pari e portare controesempi se falso

30 Dimostrare il teorema sui limiti di una funzione composta

31 Dimostrare il teorema della media integrale per una funzione continua

32 Definizione di sottosuccessione. Dimostrare che ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ammette una sottosuccessione convergente

33 Dimostrare il teorema ponte in $\mathbb{R}$

34 Dare almeno un esempio di applicazione del teorema ponte in $\mathbb{R}$

35 Dimostrare il teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$

36 Dimostrare il teorema di unicità del limite in $\mathbb{R}$

37 Definizione di funzione invertibile. Collegamento tra monotonia e invertibilità. Esempi

38 Dimostrare che ogni successione monotona e limitata ammette limite

39 Dimostrare che prodotto di funzione infinitesima per funzione definitivamente limitata è infinitesimo

40 Enunciare il principio d'induzione e dare esempi di applicazione

41 Mostrare il legame tra convergenza assoluta di una serie e integrale improprio

42 Definizione di punto di flesso e collegamento con la derivata seconda per