Teoria Analisi 1

A. Languasco

February 18, 2025

Contents

1 Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)

Se una funzione è derivabile in un punto, allora il suo comportamento vicino a quel punto può essere descritto da una retta tangente (approssimazione lineare). Il termine $o(x - x_0)$ indica che il resto dell'approssimazione tende a zero più velocemente di $x - x_0$.

1.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R}, I$ intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I, f derivabile in x_0.
Allora: $\exists$ w: I $\to \mathbb{R}$ t.c. w è continua in x_0, w$(x_0) = 0$ e

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0)$$

dove: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la tangente
$w(x)(x - x_0)$ è l'errore causato da alcuni fattori, lo possiamo trascurare.

1.2 Dimostrazione

$$\text{Sia } w(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \text{ Se } x \neq x_0 \\ 0 \text{ Se } x = x_0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to x_0} w(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} [\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$
Sia $x \neq 0$: $w(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \Rightarrow (w(x) - f'(x_0))(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0) \ \forall x \in I \ x \neq x_0$$

Sia $x = x_0$: $f(x_0) \stackrel{?}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) + w(x_0)(x_0 - x_0)$ **Si!**

Pertanto la tesi è verificata $\forall x \in I$

2 Teorema dell'unicità del limite

2.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Se:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_1 \in \widetilde{\mathbb{R}}$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$

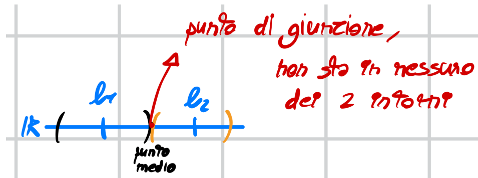
Allora: $\mathbf{l_1 = l_2}$

2.2 Dimostrazione

ip1) $\forall V l_1$ intorno di $l_1 \exists U x_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in \forall l_1$ per ogni $x \in (U x_0 \cap A) - \{0\}$

ip2) $\forall V l_2$ intorno di $l_2 \exists U' x_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in \forall l_2$ per ogni $x \in (U' x_0 \cap A) - \{0\}$

Per contraddizione: $l_1 \neq l_2$
Allora $\exists V l_1, V l_2$ intorni di l_1 e l_2 (rispettivamente) tali che: $V l_1 \cap V l_2 \neq \emptyset$
$W x_0 = U x_0 \cap U' x_0$ è un intorno di x_0



Sia $x \in (Wx_0 \cap A) - \{x_0\} \neq \emptyset$ (perché x_0 è di accumulazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in Vl_1 \text{ (Per definizione di limite 1)} \\ f(x) \in Vl_2 \text{ (Per definizione di limite 2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in Vl_1 \cap Vl_2 \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{l_1} = \mathbf{l_2}. \ \underline{\textbf{Contraddizione}}$$

3 Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)

3.1 Enunciato

$[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. f R-integrale su $[a,b]$.
$\exists x_1 \in [a,b]$ t.c. f sia continua in x_1.
Fissato $x_0 \in$[a,b] e presa $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, si ha che F è derivabile in x_1 e $F'(x_1) = f(x_1)$

3.2 Dimostrazione

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} - f(x_1) \right|, \quad x \neq x_1 \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{x_1}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x - x_1} - f(x_1) \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)dt - f(x_1)(x - x_1)}{x - x_1} \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_1}^{x} (f(t) - f(x_1))dt}{x - x_1} \right| \\
&\leq \frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^{x} |f(t) - f(x_1)| dt
\end{aligned}$$

Ma f è continua in $x_1 \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon \; \forall t / 0 < |t - x_1| < \delta_\varepsilon \; t \in [a,b]$
Osservo che $t \in [x_1, x]$ (oppure $t \in [x, x_1]$, dipende come abbiamo disposto x e x_1)
Implica che $|t - x_1| \leq |x - x_1|$
Sia allora $x \in [a,b] / |x - x_1| < \delta_\varepsilon$. Con questo forziamo le due varibli a stare vicine fra loro
Quindi $|t - x_1| \leq |x - x_1| < \delta_\varepsilon$ e $|f(t) - f(x_1)| < \epsilon$
Allora $0 \leq \left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| < \frac{1}{|x-x_1|} \left| \int_{x_1}^{x} \epsilon dt \right| = \epsilon \frac{|x-x_1|}{|x-x_1|} = \epsilon$
Ossia: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| < \epsilon \; \forall x$ t.c. $0 < |x - x_1| < \delta_\varepsilon$, $x \in [a,b]$
Cioè:$\lim_{x_1} \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$ esiste e vale $f(x_1)$.

Quindi: $\mathbf{F'(x_1) = f(x_1)}$

4 Formula fondamentale del calcolo integrale

4.1 Enunciato

$f \in C^0[a,b]$ e sia $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in $[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

4.2 Dimostrazione

Sia $x \in [a,b]$ e $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Per il TFCI* è derivabile in $[a,b]$ e $F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b]$.
F, G sono primitive di f in un intervallo $[a,b] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}/G(x) = F(x) + c\ \forall x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\text{Osservo adesso che: } G(b) - G(a) &= F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) \\ &= \int_{x_0}^{b} f(t)dt - \int_{x_0}^{a} f(t)dt \\ &= \cancel{\int_{x_0}^{a} f(t)dt} + \int_{x_0}^{b} f(t)dt - \cancel{\int_{x_0}^{a} f(t)dt} = \int_{x_0}^{b} f(t)dt.\end{aligned}$$

*TFCI: Teorema Fondamentale Calcolo Integrale

<u>Osservazione:</u> $f \in C^0([a,b])$ e sia
$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ dove $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabili in $[a,b]$.
Si ha che $H(x)$ è derivabile perché $H(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ dove $F(u) = \int_{x_0}^{u} f(t)dt$ *(Composizione di f derivabili)*
Inoltre $H'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) = \underline{f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)\ \forall x \in [a,b]}$

5 Teorema del confronto I

5.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A
Allora:

a) Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$
Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$
con $\ell_1 < \ell_2$, allora:

$$\exists U_{x_0},\ \text{intervallo di } x_0,\ \text{tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

b) Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora:

$$\exists U_{x_0},\ \text{intervallo di } x_0,\ \text{tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

c) Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
Se $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, allora:

$$\exists U_{x_0},\ \text{intervallo di } x_0,\ \text{tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

5.2 Dimostrazione

a) $l_1 < l_2 (l_1, l_2 \in \mathbb{R})$. Fisso $\epsilon > 0$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U' x_0$ intervallo di x_0 tale che $\forall x \in (U' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$
$\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \Rightarrow \exists U'' x_0$ intorno di $x_0 / l_2 - \epsilon < g(x) < l_2 + \epsilon \ \forall x \in (U'' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Se $x \in (U' x_0 \cap U'' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ *idea: scelgo* $\epsilon > 0 / l_1 + \epsilon \leq l_2 - \epsilon$
Scelgo in quanto sopra $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$
Per $x \in (U' x_0 \cap U'' x_0 \ capA) \setminus \{x_0\}$ si ha allora

$$f(x) < l_1 + \epsilon = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

6 Teorema del confronto II

6.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $A \neq \emptyset$ $x \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Allora:

a) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
Se $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow l_1 \leq l_2$$

b) Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ e $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

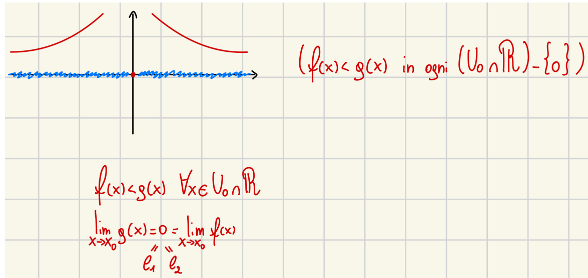
c) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

6.2 Osservazione

Cosa accade se si suppone $f(x) < g(x) \stackrel{?}{\Rightarrow} l_1 < l_2$

$$\textbf{NO:} \ f(x) = 0 \ \forall x \mathbb{R} \ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ x > 0 \\ 0 \ x = 0 \\ -\frac{1}{x} \ x < 0 \end{cases}$$



7 Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri

7.1 Enunciato

$f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A.
Inoltre

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$

$\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq h(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

7.2 Dimostrazione

Sia $\epsilon > 0$: $\exists U' x_0$, $U'' x_0$ intorni di $x_0 / \ |f(x) - l| < \epsilon \ \forall x \in (U' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$
$|g(x) - l| < \epsilon \ \forall x \in (U'' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Sia $W x_0 = U' x_0 \cap U'' x_0$ è un intorno di x_0.
Se $x \in W x_0 \cap A \setminus \{x_0\}$

$$\begin{aligned} l - \epsilon < f(x) & \ \overline{\text{definizione } \lim f \text{ (per ipotesi)}} \\ f(x) & \leq h(x) \leq g(x) \\ & \qquad\quad g(x) < l + \epsilon \end{aligned}$$

Quindi $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$ cioè $|h(x) - l| < \epsilon$
Ho fatto vedere che:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists W x_0 \text{ intorno di } x_0 / \ |h(x) - l| < \epsilon \text{ per } x \in W x_0 \cap A \setminus \{x_0\}$$

Che è esattamente la definizione di: $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

8 Teorema del valore medio integrale

8.1 Enunciato

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f, gR - integralein[a, b]$.
Sia $m = \inf f(x)/x \in [a, b]$, $(\in \mathbb{R})$
$M = \sup f(x)/x \in [a, b]$, $(\in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1)\ m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ 2)\ \exists \mu \in [m, M] / \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \\ 3)\ \text{Se } f \text{ continua in } [a, b], \text{ allora } \exists x_0 \in [a, b] / \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a). \end{cases}$$

8.2 Dimostrazione

1) $m \leq f(x) \leq M\ x \in [a, b]$
$P = a, b \Rightarrow D(P, f) = m(b-a) \in G$
$S'(P, f) = M(b-a) \in H$.
Allora: $m(b-a) \leq sup(G) = \int_a^b f(x)dx = inf(H) \leq M(b-a)$

2) Dal punto 1): $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$. Sia $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$,
allora $\mu \in [m, M]$ e ovviamenete, $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$

3) $f \in C^0[a, b]$: per il teorema dei valori intermedi $f([a, b])$ è intervallo; per il teorema di Weistrass f ha max e min **GLOBALE**
Quindi $f([a, b]) = [m, M]$
Per il punto 2), $\exists \mu \in [m, M] / \mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$;
ma $[m, M] = Im(f) \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = \mu$

9 Criterio integrale convergenza delle serie numeriche

9.1 Enunciato

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0\ \forall x \in [1, +\infty)$.
Sia f. debolmente crescente in $[+\infty)$.
Allora $(\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge $\iff \int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.)

10 Teorema delle derivate successive

10.1 Enunciato

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f \in C^{n-1}(I)$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I.
Suppongo che $\exists f^n(x_0)$ e che $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, 3, ..., n-1$.
$f^{(n)} > 0$ (< 0).

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } n \text{ è } \textbf{PARI}, \text{ si ha che } x_0 \text{ è punto di minimo (massmimo) locale forte.} \\ \text{se } n \text{ è } \textbf{DISPARI}, \text{ allora } x_0 \text{ nè pto di massimo nè pto di minimo locale.} \end{cases}$$

11 Teorema di Rolle

11.1 Enunciato

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$
f derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$
Allora $\exists \overline{x} \in [a, b]$
$x_1 = a$ e $x_2 = b$ (o viceversa): allora, dato che

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f(x) = f(a) \; \forall x \in [a, b]$$
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \; \forall x \in (a, b)$$

Se almeno uno tra x_1 e x_2 non è in un estremo di $[a, b]$
esempio sia $x_1 \in (a, b)$. Allora x_1 è interno ad $[a, b]$. Per le condizioni necessarie di estremalità si ha $f'(x_1) = 0$
Nel caso di $x_2 \in (a, b)$: si replichi lo stesso ragionamento.

12 Teorema di Lagrange

12.1 Enunciato

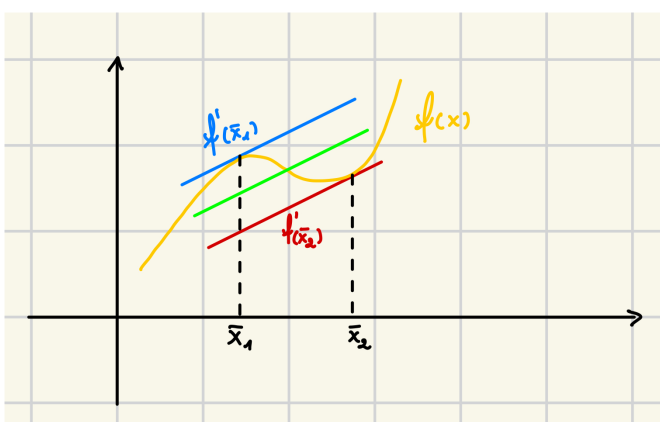
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$, f derivabile in (a, b).

$$\Rightarrow \exists \overline{x} \in (a, b) / f(b) - f(a) = f'(\overline{x})(b - a)$$

12.2 Dimostrazione

Sia $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$, f è continua in $[a, b]$;
φ è derivabile in (a, b), $\varphi(a) = 0 - 0 = 0$; $\varphi(b) = 0 - 0 = 0$.
Per il teorema di Rolle: $\exists \overline{x} \in (a, b)$ $\quad \varphi(\overline{x}) \to$ punto che azzera la derivata prima.
Ma $\varphi'(x) = (f'(x)(b - a)) - (f(b) - f(a)) \; \forall x \in (a, b)$

$$\Rightarrow 0 = \varphi'(\overline{x}) = f'(\overline{x})(b - a) - f(b) - f(a)$$
e quindi $0 = \varphi'(\overline{x})$ dato che il resto è nullo
da cui segue la tesi.



13 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie

13.1 Enunciato

$$\text{Se } \sum a_k \text{ converge, allora } \lim_{x\to+\infty} a_k = 0$$

13.2 Dimostrazione

Sia $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Per ipotesi $\exists A \in \mathbb{R} \lim_{n\to+\infty} An = A$.
Inoltre si ha che $A_n - A_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_n - \sum_{h=0}^{n-1} a_n = a_n$
Ma $\lim_{n\to+\infty}(A_n - A_{n-1}) = (\lim_{n\to+\infty} A_n) - (\lim_{n\to+\infty} A_{n-1}) = A - A = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

14 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli

14.1 Enunciato

$x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Allora $(1+x)^m \geq 1 + nx\ \forall n \in \mathbb{N}$

14.2 Dimostrazione

Passo base:
È vero che: $(1+x)^0 \leq 1 + 0 \cdot x?$, si $\Rightarrow$ passo base <u>verificato!</u>

Passo induttivo:
Ipotesi induttiva: $(1+x)^m \geq 1 + mx \quad$ con $m \in \mathbb{N}$
Tesi induttiva: $(1+x)^{m+1} \geq 1 + (m+1)x$

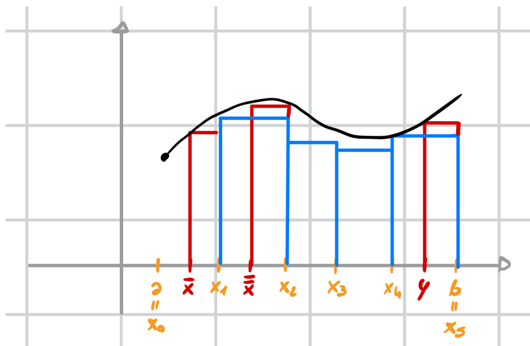
$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m \geq (1+mx)(1+x)$
$1 + x + mx + mx^2 = x(1+m) + 1 + mx^2 = (m+1)x + 1 + mx^2 \geq (m+1)x + 1 \quad$ Posso anche ingnorare mx^2 perche è sempre positivo

Quindi il passo induttivo è verificato per il principio di induzione $\forall x > -1$

15 Integrale di Riemann

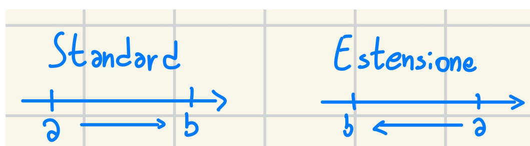
15.1 Integrali Definiti

Vogliamo dare un significato al concetto (per $f(x) \geq 0$) di "area sottesa al grafico di f".



15.2 Estensione dell'integrale di Riemann

A casi cui $a \geq b$.



15.2.1 Definizione

f Riemann-integrale in $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Definiamo } \int_a^b f(x)dx = 0 \text{ e } \int_b^a f(x)dx = -\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx}$$

15.3 Teorema Integrazione di Riemann per parti

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f, g \in C^1([a, b])$

$$\text{Allora: } \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

$f(b)g(b) - f(a)g(a) = f(x)g(x)|_a^b$

15.3.1 Dimostrazione

$f'g$ e fg' sono continue in $[a, b]$ e quindi sono R-int$^{\text{le}}$ in $[a, b]$.
Inoltre $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$
Ma $f \cdot g$ è primitiva di $(fg)'$ e quindi

$$\int_a^b (fg)'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \text{ la tesi segue}$$

16 Teorema di Bolzano - Weierstrß

16.1 Enunciato

Sia a_n una successione LIMITATA (Quindi superiormente e inferiormente limitata).
Allora $\exists\{a_{n_k}\}$ successione di a_n t.c.

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = l \in \mathbb{R}$$

16.2 Esempio 1

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ se } n \text{ pari} \\ n \text{ se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Sup$\{a_n\} = +\infty \Rightarrow$ non posso applicare il teorema di Bolzano-Weistraß.

16.3 Esempio 2

$$a_n = (-1)^n \Rightarrow |a_n| \leq \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Per il teorema di Bolzano-Weistraß $\exists a_{n_k}$ sottosuccessione di a_n t.c. $\exists \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} \in \mathbb{R}$

17 Proprietà di Archimede

17.1 Enunciato

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}/n < x$$

"Esiste sempre un numero intero più grande di qualsiasi numero reale".

17.2 Dimostrazione

Sia $x > 0 \to A := \{n \in \mathbb{N}/n \leq x\} \subseteq \mathbb{N}$
Tesi: $\iff A \neq \mathbb{N}$

Suppongo che $A = \mathbb{N} \neq \emptyset$
Sia $B := \{y \in \mathbb{R}/y \geq n\ \forall n \in \mathbb{N}\}$
dal fatto che $A = \mathbb{N}$ segue che $x \in B \Rightarrow B \neq \emptyset$
Notiamo che $\forall y \in B$ si ha che $y \geq n\ \forall n \in A(= \mathbb{N})$. Quindi A e B sono separati per l'assioma di separazione
$\exists \alpha \in \mathbb{R}/n \leq \alpha \leq y\ \forall n \in A\ \forall y \in B\ (A = \mathbb{N})$

Quindi è anche vero che $\mathbb{N} \ni n+1 \leq \alpha \leq y \Rightarrow n \leq \alpha - 1\ \forall n \in A \Rightarrow \alpha - 1 \in B$
Ma α è elemento separatore di A e B: $(n \leq)\alpha \leq y\ \forall y \in B\ \forall n \in A$

Quindi $\alpha \leq \alpha - 1 \Rightarrow 1 \leq 0 \to$ **Contraddizione**

Abbiamo provato l'applicazione contronominale; quindi il teorema è dimostrato.
$A = \mathbb{N}$ FALSO $\Rightarrow a \subsetneq \mathbb{N}$

18 Teorema Bernoulli - de l'Hopital

18.1 $\frac{0}{0}$; limiti al finito

$a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, f, g derivabili in (a, b)
$\underline{g'(x) \neq 0}$ $\forall x \in (a, b)$. Siano $\lim\limits_{x \to a^+} g(x)$ e sia $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

<u>Nota</u> vale anche per: $x \to b^-$, $Df = Dg = (a, b) \setminus \{x_0\}$

18.1.1 Errori comuni

1) <u>**Errore:**</u> uguagliare $\frac{f(x)}{g(x)}$ con $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ <u>senza aver verificato che l'ultimo limite esista.</u>
2) Non si può usare il teorema di Bernoulli - de l'Hopital per studiare $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

18.2 $\frac{0}{0}$; limiti all'infinito

Sia $a \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, +\infty)^* \to \mathbb{R}$, f, g derivabili in $(a, +\infty)^*$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, +\infty)^*$
**$(a, +\infty)$ al contrario vale anche: $(-\infty, a)$.*
Inoltre $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

18.3 $\frac{\infty}{\infty}$; limiti al finito

$a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$, f, g derivabili in (a, b)
$g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Inoltre
$\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty^*$; $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.
**$+\infty$ al contrario vale anche: $-\infty$*

$$\Rightarrow \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

18.4 $\frac{\infty}{\infty}$; limiti al'infinito

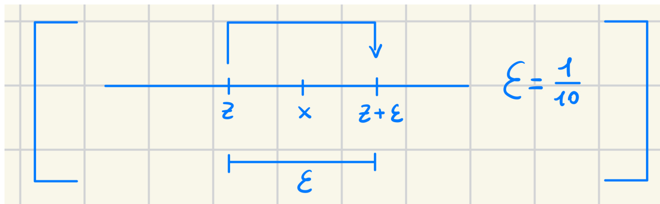
Sia $a \in \mathbb{R}$, $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$, f, g derivabili in $(a, +\infty)$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, +\infty)$.
Inoltre $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty^*$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \widetilde{\mathbb{R}}$.
**$+\infty$ al contrario vale anche: $-\infty$*

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

19 Teorema Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

19.1 Enunciato

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\forall \epsilon > 0$, $\exists z \in \mathbb{Q}/z \leq x < z + \epsilon$



19.2 Dimostrazione

$x \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} > 0$
Uso la Proprietà di Archimede: $\exists q \in \mathbb{N}/q > \frac{1}{\epsilon} > 0$
Considero $qx \in \mathbb{R}$
Per le prorietà delle parti intrere $\exists p \in \mathbb{Z}/p \leq qz < p + 1$
Divido per $q > 0 \Rightarrow \frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$ con $\frac{p+1}{q} = \frac{p}{q} + \frac{1}{p}$
Ma $q > \frac{1}{\epsilon} = \epsilon q > 1 \Rightarrow \epsilon < \frac{1}{q}$

$$\text{Segue che } \frac{p}{q} \leq x < \frac{p}{q} + \epsilon$$

20 Definizione di Limite

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Sia $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per A.
Diremo che f ammette limite $l \in \widetilde{\mathbb{R}}$ per x che tende a x_0 [scriviamo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$] se e solo se per ogni intorno Vl di l esiste un intorno Ux_0, intorno di x_0, tale che $f(x) \in Vl$ per ogni $x \in (Ux_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$.

N.B. Se $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$, l'ultima parte sopra è da leggere come: $(Ux_0 \cap A)$, senza togliere x_0.

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon / |f(x) - l| < \epsilon \; \forall x \in A, \; f(x) \in Vl$$

$0 < |x - x_o| < \delta_\varepsilon$: Vuol dire prendere i valori del disco di raggio δ_ε e togliere il punto centrale in x_0 (quindi togliere x_0), si dice in questo caso: "disco bucato".

21 Teorema formula di Taylor con resto di Peano

21.1 Enunciato

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, sia derivabile $n-1$ volte in I e tali funzioni derivate siano continue in i.
Sia inoltre $x_0 \in I$, x_0 interno ed $\exists f^{(n)}(x_0)$
Allora $\exists w : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. w continua in x_0, $w(x_0) = 0$ ed inoltre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + w(x)(x - x_0)^n \quad \forall x \in I$$

Dove: $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \quad \to \quad$ è la formula di Taylor.
$w(x)(x - x_0)^n \quad \to \quad$ è il resto di Peano.

22 Criterio di Von Leibniz (Serie segni alterni)

22.1 Enunciato

Sia $a_k \neq 0, a_{k+1} \neq a_k$ e $\lim_{x \to +\infty} a_k = 0$.

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k \text{ converge}$$

23 Criterio della radice (CAUCHY)

$a_k \in \mathbb{R}\ \forall k \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l < 1$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE}$$

N.B. se $l = 1$ non si può concludere.

24 Criterio del rapporto (D'Alembert)

$a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Se $\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_k+1}{a_k} \right| = l < 1$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE}$$

N.B. se $l = 1$ non si può concludere.

25 Criterio integrale

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, +\infty)$.
Sia f. debolmente crescente in $[1, +\infty)$.

$$\Rightarrow (\sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge})$$

26 Serie a termini di segno qualunque

Sia $a_n \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ una successione.
Diremo che $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE $\iff$ $\sum |a_k| converge.$

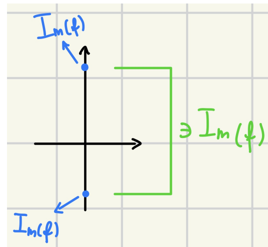
27 ! Criterio dell'ordine di infinitesimo (Integrali impropri)

28 Teorema dei valori intermedi

28.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua in I.

$$\Rightarrow Im(f) \text{ è un intervallo.}$$



29 Proprietà della parte intera

29.1 Enunciato

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!\ n \in \mathbb{Z}$ t.c. $n \leq x < n+1$
N.B. n è detto parte intera di $x \to n = \lfloor x \rfloor$

30 Teorema "Ponte" o limiti mediante successioni

30.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ di accumulazione per A.

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l (\in \widetilde{\mathbb{R}}) \iff \forall \text{successione } a_n \in A \setminus \{x_0\} / \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0, \text{ si ha che } \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$$

30.2 Dimostrazione

"$\Rightarrow$" segue dal teorema di sostituzione dei limiti
"$\Leftarrow$" va dimostrato direttamente.

31 Teorema degli Zeri

31.1 Enunciato

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f continua su $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$.

$$\Rightarrow \exists \overline{x} \in (a,b) / f(\overline{x}) = 0$$

31.2 Dimostrazione (metodo dicotomico)

Suppongo $f(a) < 0 < f(b)$
Sia $c = \frac{a+b}{2}$. Calcolo $f(c)$:

1) Se $f(c) = 0 \Rightarrow$ la tesi è vera con $\overline{x} = c$

2) Se $f(c) < 0 \Rightarrow$ pongo $a_1 = c$, $b_1 = b$ e ho $f(a_1) < 0 < f(b_1)$

3) Se $f(c) > 0 \Rightarrow$ pongo $a_1 = a$, $b_1 = c$ e ho $f(a_1) < 0 < f(b_1)$

Nei casi 2) e 3): possiamo ripetere il procedimento su $[a_1, b_1]$:
Calcolo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$; Valuto $f(c_1)$

1) Se $f(c_1) = 0 \Rightarrow$ la tesi è vera con $\overline{x} = c_1$

2) e 3) come sopra.

Procedo in tal modo, per induzione, definendo a_n, b_n, $a \leq a_n < b_n \leq b$ e $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.
Osservo che $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}; b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{4} ... = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, n \geq 1$
Inoltre per costruzione, $a_n < a_n + 1$(deb. crescente) $b_{n+1} \leq b_n$(deb. crescente).
Per il teorema sui limiti delle funzione monotone:
$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in [a,b](a_n \leq a_n \leq b)$
$\lim_{n\to+\infty} b_n = m \in [a,b](a \leq b_n \leq b)$
D'altra parte, $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$
Ma $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = m - l \Rightarrow l = m$.
Ricordiamo ora che $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ e quindi che: $f(a_n) < f(l) < f(b_n)$

D'altra parte per il teorema del confronto, da $f(a_n) < 0$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(l) \leq 0$
Infine, per il teorema del confronto, da $f(b_n) > 0$ segue $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(l) \geq 0$.
Pertanto $0 \leq f(l) \leq 0 \Rightarrow f(l) = 0$ e la tesi segue $(\overline{x} = l)$

32 Principio di sostituzione degli infiniti di ordine inferiore

32.1 Enunciato

f, g, f_1, g_1, sono infinite per $x \to x_0$.
f_1 è infinito di ordine inferiore a f,
g_1 è infinito di ordine inferiore a g per $x \to x_0$.

$$\Rightarrow (\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} \text{esiste} \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{esiste) ed in tal caso sono uguali fra loro.}$$

32.2 Dimostrazione (Traccia)

$$\frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \frac{f(x)(1+\frac{f_1(x)}{f(x)})}{g(x)(g(x)+\frac{g_1(x)}{g(x)})}$$

33 Condizione necessaria del primo ordine per punti estremali interni

33.1 Enunciato

Se

1) $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

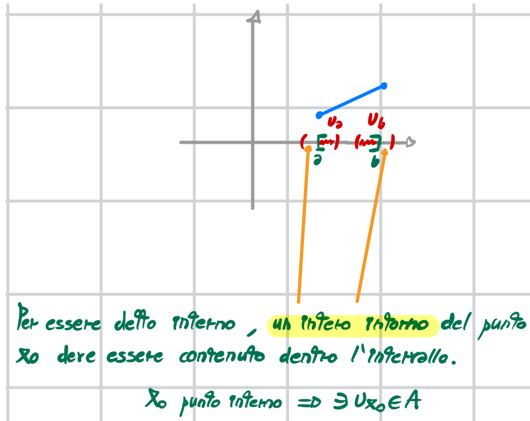
2) $x_0 \in A$, x_0 interno ad A

3) x_0 punto di minimo (massimo) locale

4) f derivabile in x_0

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Una retta è sempre derivabile.



33.2 Dimostrazione

Sia x_0 un punto di minimo locale $\Rightarrow \exists \delta_1 > 0$ t.c. $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap A$.
So che x_0 è interno ad A; quindi $\exists \delta_2 > 0 / (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \subset A$.
Sia $\delta* = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. *(il minimo fra i 2)
Considero $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ e $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$
Sia $x \in (x_0 - \delta, x_0)$; ho che $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

$$\Rightarrow 0 \geq f(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

34 Classificazione delle discontinuità

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per A.

34.1 Discontinuità eliminabile

Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} = l_2 \in \mathbb{R}$
$l_1 = l_2$, Ma $f(x_0) \neq l$, diremo che x_0 è punto di **discontinuità eliminabile** di f