Teoria completa Bianchini

Anno Accademico 2025-2026

1 Definizione di serie convergente divergente ed indeterminata

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice convergente se la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ammette limite finito, cioè $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ con $s \in \mathbb{R}$. In tal caso scriviamo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice divergente se la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ammette limite solo all'infinito, cioè $\lim_{n\to+\infty} s_n = \pm\infty$

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice indeterminata se la successione delle somme parziali $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ non ammette limite finito, cioè $\nexists \lim_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ (ad esempio $\frac{\infty}{\infty}, +\infty - \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{0}$...)

2 Definizione di successione convergente, divergente ed indeterminata

Una successione si dice convergente se: $\lim_{k\to+\infty} a_k = l \in \mathbb{R}$.
Una successione si dice divergente se: $\lim_{k\to+\infty} a_k = \pm\infty$
Una successione si dice indeterminata se: $\nexists \lim_{k\to+\infty} a_k$

3 Definizione d'integrale di Riemann

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, limitata.
f si dice integrabile secondo Riemann se l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidono. Il valore comune si chiama integrale di Riemann di f su $[a, b]$.

4 Dimostrazione del teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato

Presi in considerazioni i tre teoremi:

1. Teorema di Weierstrass $\to$ Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ ha un min e un max.
2. Teorema dei valori intermedi $\to$ Se una funzione è continua su $[a, b]$ e $f(a) < k < f(b)$ allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = k$
3. Teorema degli zeri $\to$ Se f continua su $[a, b]$ e $f(a) * f(b) < 0$, allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Quindi data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e f continua in $[a, b]$, la funzione assume tutti i valori compresi tra inf$f$ e sup$f$ e se 0 è un valore compreso allora il teorema è dimostrato.

5 Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Definizioni e teoremi principali. Trovare la soluzione generale dell'equazione: $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ dove $a(x)$ e $b(x)$ sono due funzioni continue assegnate

Un equazione differenziale è una funzione del tipo $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$
Dove:

- $y(x)$ è la funzione incognita
- $a(x),\ f(x)$ sono funzioni note e continue su $I \subset \mathbb{R}$
- Se $f(x) = 0$ l'eq. differenziale è detta OMOGENEA

Problema di Cauchy

Dato $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy consiste nel trovare $y(x)$ tale che: $\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = t(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, si risolve prima trovando $y(x)$ e poi ponendo $y(x_0) = y_0$.

Teorema di esistenza e unicità

Sia dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = t(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Allora $\exists! y(x)$ su tutto l'intervallo I che soddisfa il problema di Cauchy.

Trovare la soluzione generale dell'equazione: $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ dove $a(x)$ e $b(x)$ sono due funzioni continue assegnate:

1. Trovo una primitiva $A(x)$ di $a(x)$
2. Integro: $y(x) = e^{-A(x)} * \int e^{A(x)} * b(x)dx \ + ce^{-A(x)}$
3. Ricavo la funzione cercata $y(x)$.

6 Equazioni differenziali del secondo ordine. Definizioni e teoremi principali. Soluzioni linearmente indipendenti. Definizione

Un eq differenziale lineare del II ordine ha la forma: $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x)$
Dove:

- $y(x)$ è la funzione incognita
- $a(x), b(x), f(x)$ sono funzioni continue definite su $I \subset \mathbb{R}$
- Se $f(x) = 0$ l'eq differenziale si dice omogenea

Problema di Cauchy:

Dato $x_0 \in I$ e $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, devo trovare $y(x)$ tale che: $\begin{cases} y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{cases}$

Teorma di esistenza e unicità

Se $a(x), b(x), f(x)$ sono continue su I, allora $\forall x_0 \in I$ il problema di Cauchy ha un'unica soluzione $y(x)$ su tutto I.

Soluzioni linearmente indipendenti:

Due funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti su un intervallo I se nessuna può essere scritta come combinazione lineare dell'altra: $\nexists c_1, c_2 \neq 0$ t.c. $c_1 * y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ (Possiamo dire che il Wronksiano di y_1 e y_2 è diverso da 0)

7 Dimostrare che $sin(x)$ e $cos(x)$ sono linearmente indipendenti

Consideriamo $f(x) = sinx$, $g(x) = cosx$, allora $f'(x) = cosx$, $g'(x) = -sinx$.
Calcolo il Wronksiano: $W(f,g) = \begin{vmatrix} sinx & cosx \\ cosx & -sinx \end{vmatrix} = -sin^2x - cos^2x = -(sin^2x + cos^2x) = -1 \neq 0$
Poichè il Wronksiano è diverso da 0 possiamo concludere che $f(x)$ e $g(x)$ sono linearmente indipendenti.

Si può osservare che $\frac{sinx}{cosx} = tanx$ dato che la funzione tangente non è costante $sinx$ e $cosx$ non sono multipli l'uno dell'altro e quindi non sono linearmente dipendenti.

8 Definire il Wronskiano tra due funzioni $y(x)$ e $z(x)$. Dimostrare che se il wronskiano è diverso da zero in un punto allora è diverso da zero in ogni punto dell'intervallo di definizione

Per due funzioni $y(x)$ e $z(x)$ di classe $\mathbb{C}^1$ su I (funzioni con derivata prima continua su I) soluzione dell'ODE, il Wronksiano si definisce come:

$$W(y,z)(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix} = y(x)z'(x) - z(x)y'(x)$$

Permette di definire se $y(x)$ e $g(x)$ sono linearmente indipendenti

Dimostrazione:
Pongo $W(x) = yz' - y'z$, derivo: $W' = y'z' + yz'' - y'z' - y''z = yz'' - y''z$
Dato che y e z risolvono l'ODE:
$y'' = -p(x)y' - q(x)y$
$z'' = -p(x)z' - q(x)z$
Sostituendo: $W' = y(-pz' - qz) - z(-py' - qy) = -pyz' - qyz + py'z + qyz = -p(yz' - y'z) = -pW$
Svolgo l'eq differenziale $W' + p(x)W = 0$, ottenendo $W = c * e^{-\int p(t)dt}$ dove $c = W(x_0)$
Allora: $W = W(x_0) * e^{-\int p(t)dt}$, dato che la funzione esponenziale è sempre strett. positiva, allora:
se $W(x_0) = 0 \Rightarrow W(x) = 0$
se $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow W(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

9 Definizione di sup e inf per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Dimostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ammette il sup

Considero l'insieme $I \subseteq \mathbb{R}, I \neq \emptyset$

- Se I è inferiormente limitato
  $i = \inf(I) \in \mathbb{R}$
  $i : \begin{cases} x \geq i \ \forall x \in I \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists x \in I : x < i + \epsilon \end{cases}$
- Se I è superiormente limitato
  $s = \sup(I) \in \mathbb{R}$
  $s : \begin{cases} x \leq s \ \forall x \in I \\ \forall \epsilon > 0 \ \exists x \in I : x > s - \epsilon \end{cases}$
- Se I è inferiormente illimitato
  $\inf(I) = -\infty$
  $\forall l \in \mathbb{R} \ \exists x \in I : x < l$
- Se I è superiormente illimitato
  $\sup(I) = +\infty$
  $\forall l \in \mathbb{R} \ \exists x \in I : x > l$

Dimostrazione estremo superiore:
Sia $I \subset \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato.
Consideriamo l'insieme dei maggioranti: $U = \{M \in \mathbb{R} : x < M \ \forall x \in I\}$
L'insieme U è quindi non vuoto e inferiormente limitato. Per l'assioma di completezza di $\mathbb{R}$ esiste $s = \inf(U)$.
Si verifica quindi che s è il minimo dei maggioranti di I e quindi $s = \sup(I)$.

10 Definizione di punto di accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Definizione di limite di una funzione per $x \to x_0$. Enunciare almeno un teorema significativo sui limiti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice x_0 pto di accumulazione per A se $\forall \epsilon > 0$ $((x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \cap A \backslash \{x_0\} \neq \emptyset)$, cioè ogni intorno di x_0 contiene almeno un punto di A distinto da x_0.

Definizione $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in D_f$, se $0 < |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - l| < \epsilon$.

Teorma unicità del limite:
Sia $f : I \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per I.
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = m$, allora $l = m$.
Quindi se una funzione ammette limite, questo è unico.

11 Dimostrare una forma (a piacere) del teorema di Hopital

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ f, g deriabili in I e $x_0 \in I$, siano $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, con $\lim_{x \to x_0} g'(x) \neq 0$. Supponiamo che esista $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, allora $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Dimostrazione:
Per il teorema di Cauchy, per ogni $x \neq x_0$ esiste c compreso tra x e x_0 tale che $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
Poiche $f(x_0) = g(x_0) = 0$, si ha che $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$
Facendo $x \to x_0$ segue che $c \to x_0$ quindi $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

12 Sviluppi di Taylor o Mac-Laurin per una funzione reale derivabile con continuità n volte. Scrivere le definizioni principali e dimostrare il teorema di Peano

Considero il caso particolare dello sviluppo di Taylor centrato in 0, detto sviluppo di Mac-Laurin.
Sia f derivabile e continua fino all'ordine n in un intorno di x_0.
Polinomio di Mac-Laurin: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$ per $x \to x_0$

Dimostrazione Teorema di Peano:
Definiamo la funzione $\phi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$
Per costruzione si ha: $\phi(0) = \phi'(0) = ... = \phi^n(0) = 0$
Poichè $\phi^{(n)}$ si annulla in 0, si ha $\lim_{x \to 0} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0$ e quindi $\phi(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$
Pertanto $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$.

13 Definizione di funzione continua e derivabile. Legame tra i due concetti

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$
f è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, se questo vale per ogni punto del dominio della funzione allora $f(x)$ è continua in D_f.
f è derivabile in x_0 se $\exists f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ si chiama derivata di f in x_0, se questo vale per tutti i punti del dominio di f si dice che f è derivabile in D_f.

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$, se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0.
Nota bene: Una funzione derivabile è anche continua, il viceversa non è garantito.

14 Teorema di Weierstrass per le funzioni continue. Enunciato ed applicazioni (dare controesempi togliendo le ipotesi del teorema)

Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, allora f ammette minimo e massimo.

Esempio di applicazione: Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato raggiunge sempre il suo valore massimo e minimo (Esistenza degli estremi globali)

Controesempi:

Intervallo non chiuso: $f(x) = x$, $D_f = (0,1)$, la funzione non ammette nè minimo nè massimo, gli estremi non sono compresi.

Intervallo non limitato: $f(x) = x$, $D_f = \mathbb{R}$, la funzione non ammette nè minimo nè massimo, intervallo non limitato.

Funzione non continua: $f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ $D_f = [0,1)$, estremi non garantiti, la funzione non è continua

15 Definizione di massimo e minimo relativo (o locale) e assoluto. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$:

x_0 è un max relativo se $\exists U_{x_0}$ tale che $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in U_{x_0}$

x_0 e un max assoluto se $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in I$

x_0 è un min relativo se $\exists U_{x_0}$ tale che $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in U_{x_0}$

x_0 e un min assoluto se $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in I$

Enunciato Teorema di Fermat:

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$ un punto interno ad I, se f è derivabile e x_0 è pto di max o min allora $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione Teorema di Fermat:
Supponiamo che x_0 sia punto di minimo locale. Allora esiste $\delta_1 > 0$ tale che $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \cap A$.
Siccome x_0 è interno, allora esiste $\delta_2 > 0$ tale che $(x_0 - \delta_2,\ x_0 + \delta_2) \subseteq A$.
Sia $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Consideriamo il rapporto incrementale (DERIVATA). Esso è ≥ 0 per ogni $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$ e quindi, per il teorema di permanenza del segno si ha $f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. D'altra parte il rapporto incrementale stesso è ≤ 0 per ogni $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ e quindi per il teorema di permanenza del segno si ha $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$.
Siccome f è derivabile in x_0 abbiamo che $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, combinando le 2 disuguaglianze precedenti concludiamo che $f'(x_0) = 0$.
(Il caso in cui x_0 sia punto di massimo locale si mostra analogamente)

16 Monotonia e derivata prima. Dimostrare il legame tra i due concetti

Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

- f crescente $\forall x \in (a,b) \Leftarrow f'(x) \geq 0$
- f decrescente $\forall x \in (a,b) \Leftarrow f'(x) \leq 0$
- $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$, f strettamente crescente
- $f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$, f strettamente decrescente

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$, allora f è crescente su (a,b).
Dimostrazione:
Poichè f continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2), per il teorema di Lagrange, esiste $c \in (x_1, x_2)$ tale che: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$.
Poichè $f'(c) \geq 0$ e $x_2 - x_1 \geq 0$, segue $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ cioè $f(x_2) \geq f(x_1)$.
Quindi f è crescente in $[a,b]$

17 Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange (o del valor medio). Fornire applicazioni fisiche e matematiche

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), allora $\exists c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dimostrazione:

Considero la funzione: $g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x - a]$, continua e derivabile negli stessi intervalli di f.

Calcolo la derivata: $g'(x) = f'(x)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Da $g'(c) = 0$ segue $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Esempi di applicazione:

- Monotonia del segno
- Unicità degli zeri

18 Definizione di o-piccolo. Esempi ed applicazioni per trovare il carattere di una serie

Siano f, g funzioni definite in un intorno di x_0.
Si dice che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
«f è infinitesima di ordine superiore a rispetto a g»

Applicazione per le serie: Dal criterio del confronto, se $a_n = o(b_n)$ allora:
se $\sum b_n$ converge $\Rightarrow a_n$ converge
se $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow b_n$ diverge

19 Definizione di serie convergente e assolutamente convergente. Legame tra i due concetti con esempi

Una serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice convergente se la successione delle somme parziali ammette limite finito
Una serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se la serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge.
Esempio: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^n}$, applico il criterio dell'assoluta convergenza: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |-\frac{1}{2^n}|$, dove $\sum \frac{1}{2^n}$ è una serie geometrica convergente, allora $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^n}$ è assolutamente (semplicemente) convergente.

20 Definizione di derivata seconda e suo uso per trovare concavità e convessità di funzioni $\mathbb{C}^2$

Sia f una funzione derivabile in un intervallo I, se a sua volta f' è derivabile su I allora f è derivabile 2 volte e f'' si dice derivata seconda di f.

Concavità e convessità:
Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathbb{C}^2(I)$ allora:

- se $f''(x) > 0$ $\forall x \in I$ allora f è convessa in I
- se $f''(x) < 0$ $\forall x \in I$ allora f è concava in I
- se $f''(x_0) = 0$ allora x_0 è un punto di flesso

21 Massimi e minimi locali e derivata prima. Definizioni e legame per funzioni $\mathbb{C}^1$

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$
x_0 è max relativo se $\exists U_{x_0}$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in U \cap I$
x_0 e min relativo se $\exists U_{x_0}$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in U \cap I$

Massimi e minimi sono legati alla derivata grazie al teorema di Fermat, il quale afferma che se x_0 è un punto di min/max relativo allora $f'(x_0) = 0$.

22 Dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale

Enunciato: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a,b]$ e sia F una funzione tale che $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a,b]$ allora $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$.

Dimostrazione:
Sia $x \in (a,b)$. Considero il rapporto incrementale: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$.
Dato che f è continua, per il teorema della media integrale $\exists c_h \in [x, x+h] : \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c_h)h$.
Quindi $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_h)$, per $h \to 0$ si ha $c_h \to x$ e, per continuità di f, $\lim\limits_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$
Pertanto $F'(x) = f(x)$ e $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

23 Metodo di integrazione per parti e per sostituzione. Fare esempi significativi

Integrazione per sostituzione
Enunciato:
Sia $\int f(g(x))g'(x)dx$, pongo $t = g(x)$, $dt = g'(x)dx$.
Ottenendo $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$
Esempio:
$\int 2x cos(x^2)dx$, pongo $t = x^2$, $dt = 2xdx$.
Sostituisco: $\int cos(t)dt = sin(t) + c$, ottengo $sin(x^2) + c$

Integrazione per parti
Enunciato:
Se $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili, vale: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$
Esempio: $\int xe^x dx = \int x[e^x]'dx \Rightarrow xe^x - \int [x]'e^x dx \Rightarrow xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c$.

24 Definizione di integrale improprio. Criteri di integrabilità. Enunciare almeno un criterio e fare esempi

Un integrale si definsice improprio se almeno uno dei due casi è vero:

- l'intervallo è illimitato:
  $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, εεεεεcontinua
  $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$
  se il limite esiste finito, l'integrale converge, altrimenti diverge.
- la funzione è illimitata in uno o più punti
  $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ continua e limitata in a.
  Si definisce $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$ se il limite esiste finito.

Criterio confronto:
Siano f, g continue e $0 \le f(x) \le g(x)$ definitivamente.

- se $\int g(x)dx$ converge, allora converge anche $\int f(x)dx$.
- se $\int f(x)dx$ diverge, allora diverge anche $\int g(x)dx$.

Esempio:
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$, per $x \ge 1$ si ha che $\frac{1}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^2}$ converge per le serie armoniche, quindi l'integrale iniziale, converge.

25 Enunciare il teorema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine. Fare un esempio in cui manca un'ipotesi

Considero il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tale problema ammette un unica soluzione solo se f è continua nel suo dominio e lipschitziana per y.

Esempio in cui manca un ipotesi:
$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ la funzione è continua ma non lipschiz, ammette due soluzioni: $y(t) = 0$ e $y(t) = \frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}}$.

26 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Definizioni principali e discussione dei tre casi del discriminante

Una eq differenziale del II ordine si presenta come: $ay'' + by' + cy = f(x)$ con $a \neq 0$.
Dove $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $f(x) = 0$ si dice eq omogenea, altrimenti no.
La soluzione generale di questa equazione è data da: $y = y_o + y_p$ (omogenea + particolare).
La soluzione omogenea si ottiene risolvendo l'eq caratteristica: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ la quale può dare tre casi:

1. $\Delta > 0$: $y_o = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$
2. $\Delta = 0$: $y_o = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x}$
3. $\Delta < 0$: $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $y_o = e^{\alpha x}(c_1cos(\beta x) + c_2sin(\beta x))$

27 Definizione di funzione continua in $\mathbb{R}$. Usando l'$\epsilon - \delta$ dimostrare che se f è continua in x_0 allora $|f(x)|$ è continua in x_0

Una funzione ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) è detta continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_o)$, se questo vale $\forall x \in \mathbb{R}$ allora f è continua in tutto $\mathbb{R}$.
L'equivalente con la definizione di limite: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $0 < |x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Dimostrazione:
$||a| - |b|| \leq |a - b|\ \forall a, b \in \mathbb{R}$.
Applico $a = f(x)$, $b = f(x_0)$: $||f(x)| - |f(x_0)|) \leq |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
Quindi $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, per lo stesso δ si ha $|x - x_0| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - |f(x_0)|| < \epsilon$
E quindi $|f|$ continua in x_0.

28 Enunciare due criteri per la convergenza assoluta di una serie con esempi

Criterio dell'assoluta convergenza:
Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente.
Esempio:
$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n^2}$ converge assolutamente se converge $\sum_{n=1}^{+\infty} |-\frac{1}{n^2}|$ e quindi se converge $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ e dato che quest'ultima converge (p-serie), allora la serie di partenza converge assolutamente e semplicemente.

Criterio radice:
Siano $a_n > 0$ definitivamente e supponiamo che $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$.

- se $l < 1$ allora $\sum a_n$ converge assolutamente
- se $l > 1$ allora $\sum a_n$ diverge
- se $l = 1$ non posso concludere nulla sulla convergenza/divergenza

Esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n})^n$, con $a_n = (\frac{1}{n})^n$, a_n è definitivamente positivo e so che $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{|(\frac{1}{n})^n|} = 0 < 1$ allora posso concludere che $\sum a_n$ è definitivamente convergente

Criterio del confronto:
Sia $\sum a_n$ una serie tale che esiste una serie a termini positivi $\sum b_n$ con $|a_n| \leq b_n$ definitivamente, se $\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ converge assolutamente.
Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ è una serie tale che $\exists \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ convergente (p-serie), e dato che $\frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ definitivamente, allora possiamo dire che $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge assoltamente.

29 Dimostrare che se f è dispari e continua in 0 allora $f(0) = 0$. Verificare se è vero per funzioni pari e portare controesempi se falso

Dalla definizione di funzione dispari si ha che: $f(-x) = -f(x)$, imponendo $x = 0$ si ha che $f(-0) = -f(0)$ e quindi $2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

Se facciamo il ragionamento analogo con una funzione pari che per definizione è $f(-x) = f(x)$ si ottiene che con $x = 0$ $f(-0) = f(0) \Rightarrow f(0) = f(0) \Rightarrow 0 = 0$.
Ma questa non è una condizione sufficiente, infatti:
$f(x) = 3$ funzione pari che non passa mai per $x = 0$
$f(x) = x^2 + 1$ funzione pari ma che non passa mai per $x = 0$

30 Dimostrare il teorema sui limiti di una funzione composta

Teorema: Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$
2. $\lim\limits_{y \to l} f(y) = L$
3. $g(x) \in B$ per $x \to x_0$

Allora vale: $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = L$.

Dimostrazione:
Dato $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ si ha che $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0$, $|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - l| < \epsilon$ e da $\lim\limits_{y \to l} f(y) = L$ si ha che $\exists \delta_2 > 0$, $|y - l| < \delta_2 \Rightarrow |f(y) - L| < \epsilon$ per cui si ottiene che $\forall \epsilon > 0$ $|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(g(x)) - L| < \epsilon$ che significa proprio: $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = L$.

31 Dimostrare il teorema della media integrale per una funzione continua

Teorema: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, allora $\exists c \in (a, b) : \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

Dimostrazione:
Dato che f è continua in un insieme limitato ammette minimo e massimo (Weierstrass) e quindi $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$.
E quindi $m \leq f(x) \leq M$, integriamo tutti tre i membri: $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$
Dato che la funzione assume tutti i valori intermedi tra a e b (Valori Intermedi) allora $\exists c \in (a, b) : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$
Possiamo riscriverlo come $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

32 Definizione di sottosuccessione. Dimostrare che ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ammette una sottosuccessione convergente

Definizione: Sia a_n una successione reale, si dice sottosuccessione di a_n ogni successione del tipo a_{n_k} dove n_k è una successione strettamente crescente con $k \in \mathbb{N}$

Teorema: Sia a_n una successione limitata in $\mathbb{R}$, allora esiste almeno una sottosuccessione a_{n_k} con $k \in \mathbb{N}$ tale che a_{n_k} sia convergente.
Dimostrazione: Sia a_n una successione limitata.
Caso 1: Se a_n ammette successione monotona, allora per definizione le successioni monotone limitate convergono quindi lo fa anche la sottosuccessione
Caso 2: Se a_n non è monotona, per il teorema di Bolzano-Weierstrass da ogni successione reale si può estrarre una sottosuccessione monotona, la quale per definizione converge.

In ogni caso una successione a_n ammette una sottosuccessione convergente.

33 Dimostrare il teorema ponte in $\mathbb{R}$

Enunciato:

Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione per I

Il limite per funzioni è equivalente al limite lungo tutte le successioni he convergono a x_0.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall (x_n) \subset I,\, x_n \to x_0,\, x_n \neq x_0 \Rightarrow f(x_n) \to L$

Dimostrazione:

Pongo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

Sia $(x_n) \subset I$ una successione tale che: $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$

Dato che $x_n \to x_0$ $\exists N$ tale che per $n \geq N$ sia $|x_n - x_0| < \delta$

Di conseguenza si ha $|f(x_n) - L| < \epsilon$ per $n \geq N \Rightarrow f(x_n) \to L$.

34 Dare almeno un esempio di applicazione del teorema ponte in $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x}$, sia $x_n \subset \mathbb{R}$ con $x_n \to 0$ e $x_n \neq 0$

Allora $f(x_n) = \frac{sinx_n}{x_n}$

Dalle proprietà dei limiti per successioni $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx_n}{x_n} = 1$, tutte le successioni ci danno limite $= 1$, perciò possiamo concludere che: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx_n}{x_n} = 1$.

35 Dimostrare il teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$

Enunciato: Ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ ammette una sottosuccessione convergente.

Dimostrazione:

Per definizione dato che a_n è limitata $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \sup(a_n) = l \in \mathbb{R}$.

Esiste quindi $a_{n_k} \to l$ dove a_{n_k} è sottosuccessione convergente di a_n.

36 Dimostrare il teorema di unicità del limite in $\mathbb{R}$

Enunciato: Sia $f : I \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per I, se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = m$ allora $l = m$.

Dimostrazione:

Dalla scrittura $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = m$ segue che $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - l) = 0$ e che $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - m) = 0$.

Sappiamo a priori essere sempre vero che: $(f(x)-l)-(f(x)-m) = (f(x)-l)-(f(x)-m)$ e quindi che $(f(x)-l)-(f(x)-m) = -l + m$

Per $x \to x_0$ però otteniamo che $0 - 0 = m - l$ per cui $l = m$.

37 Definizione di funzione invertibile. Collegamento tra monotonia e invertibilità. Esempi

Una funzione $f : A \to B$ è definibile invertibile solo se $\forall y \in B$ corrisponde solo un $x \in A$ tale che $f(x) = y$, in questo caso di dice che f è una funzione invertibile e la sua inversa si indica con $f^{-1} : B \to A$.

(Quindi f è invertibile solo se è biettiva)

Se una funzione reale è strettamente monotona in tutto il suo dominio allora è invertibile.

Esempi:

$f(x) = x + 1$, monotona crescente, invertibile.

$f(x) = -x + 1$, monotona decrescente, invertibile

$f(x) = x^2$, non biettiva, non monotona, quindi sicuramente non invertibile.

38 Dimostrare che ogni successione monotona e limitata ammette limite

Sia a_n una successione monotona crescente limitata superiormente.

Allora $\exists l = \sup(\{a_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Per definizione $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $l - \epsilon < a_N \leq l \; \forall \epsilon > 0$ e dato che $n \geq N$ allora $a_n \geq a_N$ da cui: $l - \epsilon < a_N \leq a_n \leq l < l + \epsilon$ da cui si ricava che $l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$ che è proprio la definizione di limite.

39 Dimostrare che prodotto di funzione infinitesima per funzione definitivamente limitata è infinitesimo

Enunciato:
Siano $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tali che per $x \to x_0$:

- $f(x)$ sia infintesima, ovvero $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$
- $g(x)$ sia definitivamente limitata cioè: $\exists M > 0$, $\exists \delta_0 > 0$ tali che $|g(x)| \leq M$ per $|x - x_0| < \delta_0$

Allora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) * g(x) = 0$.

Dimostrazione:
Sia $f(x)$ infinitesima per $x \to x_0$ quindi $f(x) \to 0$.
Sia $g(x)$ definitivamente limitata: $\exists M > 0$ tale che $g(x) \leq M$ per $x \to x_0$.
Allora $|f(x) * g(x)| = |f(x)| * |g(x)| \leq M * |f(x)|$
Dato che $f(x) \to 0$, allora $M * |f(x)| \to 0$.
Per il teorema del confronto segue che: $f(x) * g(x) = 0$.

40 Enunciare il principio d'induzione e dare esempi di applicazione

Sia $P(n)$ una proposizione dipendente da $n \in \mathbb{N}$, se valgono:

1. Caso base: $P(1)$ è vera
2. Passo induttivo: $P(n+1)$ è vera

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

Esempio:
Devo dimostrare che: $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
1. Caso base ($n = 1$):
$P(1) = \frac{1(1+1)}{2} = 1$
2. Passo induttivo ($n = n + 1$)
$P(n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

Quindi $\frac{n(n+1)}{2}$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

41 Discutere il problema di Cauchy per un'equazione differenziale del I ordine a variabili separabili

Problema di Cauchy: $\begin{cases} y'(x) = f(x) * y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (I ordine, variabili separabili e lineare)

1. Risolvo l'eq differenziale come: $\frac{dx}{dy} = f(x) * y(x) \Rightarrow \int \frac{1}{y(x)} dy = \int f(x)dx + c \Rightarrow log(y(x)) = \int f(x)dx + c \Rightarrow y(x) = ce^{\int f(x)dx}$
2. Sostituendo nel sistema originale quanto trovato e imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ trovo il valore (unico) di c.

42 Mostrare il legame tra convergenza assoluta di una serie e integrale improprio

Criterio integrale:
Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ continua e decrescente
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge $\iff$ $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge

Convergenza assoluta:
Sia $\sum a_n$ una serie a termini di segno variabile, se $\exists f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ continua e decrescente tale che $|a_n| = f(n)$, allora
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge $\iff \int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge

43 Definizione di punto di flesso e collegamento con la derivata seconda per funzioni $\mathbb{C}^2$

Definizione pto di flesso:
Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$
x_0 è detto punto di flesso se $f(x)$ cambia la sua concavita in x_0.

Collegamento con derivata seconda:
$f''(x) > 0$ allora $f(x)$ è convessa
$f''(x) < 0$ allora $f(x)$ è concava
se $f''(x_0) = 0$ e $f''(x)$ cambia il suo segno in x_0 allora questo punto di dice: «di flesso»

44 Definizione di insieme compatto (sequenziale) in $\mathbb{R}$. Esempio di insieme limitato non compatto con spiegazione dell'ipotesi mancante

Definizione:
Un insieme $K \subset \mathbb{R}$ si dice compatto se è chiuso, limitato e ogni successione $a_n \subset K$ ammette una sottosuccessione convergente il cui limite appartiene a K.

Esempio insieme non compatto:
$K = (0, 1)$, K è limitato ma non è chiuso, quindi non è compatto
$a_n = \frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ ma dato che $0 \notin (0, 1)$ possiamo definire K non compatto.

45 È vero che ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ è convergente? Dimostrare o dare controesempi e formulare l'affermazione corretta

No, non tutte le successioni limitate sono convergenti.

Formulazione corretta: È vero che ogni successione limitata ammette almeno una sottosuccessione convergente.

Controesempio:
$a_n = (-1)^n$, è limitata in $-1 \leq a_n \leq 1$ ma non è convergente.

46 Definizione di retta tangente al grafico di una funzione derivabile. Esempio di funzione continua in un punto che non ammette retta tangente

Sia f derivabile in x_0, la retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$ è la retta di equazione $y = f(x_0) + f(x_0)(x - x_0)$, questa retta chiaramente esiste solo se esiste la derivata di f nel punto x_0.

Funzione con pto di non derivabilità:
Sono 3 i casi in cui una funzione continua non ammette la derivata in un punto x_0:

1. Punto angoloso: i limiti delle derivate destra e sinistra ammettono limite finito uguale ma con segno opposto
2. Punto cuspidale: i limiti delle derivate destra e sinistra hanno valore infinito con segno opposto
3. Derivata infinita: i limiti delle deriate destra e sinistra hanno valore infinito coincidente

Esempio:

$f(x) = |x|$ con $x_0 = 0$, riscrivo la funzione come: $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, calcolando le derivate destra e sinistra: $\lim\limits_{x \to x_0^-} [-x]' = -1$, e $\lim\limits_{x \to x_0^+} [x]' = 1$ notiamo che hanno lo stesso valore ma con segno opposto, concludiamo allora che in $x_0 = 0$ su $f(x) = |x|$ è presente un punto angoloso.

47 Sia D aperto in $\mathbb{R}$ e $x_0 \in D$. Se f è derivabile in $D \setminus \{x_0\}$ e $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ non esiste, possiamo concludere che f'(x_0) non esiste? Giustificare

NB. Il fatto che la domanda dica che f è derivabile in tutti i punti di D tranne x_0 ($D \setminus \{x_0\}$) non vuol dire che effettivamente in x_0 non lo sia, ma che è provato che f è derivabile $\forall x \in D \setminus \{x_0\}$, bisogna verificare se effettivamente f è o non è derivabile in x_0.

Risposta: Non possiamo concludere che $f'(x_0)$ non esiste dal momento che esiste il teorema opposto ma questo non ha il viceversa:

Se $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l \Rightarrow f'(x_0)$ esiste e vale priorio l. Ma se il limite non esiste non possiamo concludere nulla su $f'(x_0)$

«La derivata in un punto dipende solo dal comportamenteo della funzione in quel punto, non dal limite della derivate attorno»