Teoria Analisi 1

A. Languasco

February 9, 2025

Contents

1 Teorema del differenziale (Lagrange - Rolle generalizzato)

1.1 Enunciato

$f : I \subset \mathbb{R}, I$ intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I, f derivabile in x_0.
Allora: $\exists$ w: I $\to \mathbb{R}$ t.c. w è continua in x_0, w(x_0) = 0 e

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + w(x)(x - x_0)$$

dove: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è la tangente
$w(x)(x - x_0)$ è l'errore causato da alcuni fattori, lo possiamo trascurare.

2 Teorema dell'unicità del limite

2.1 Enunciato

$f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Se:

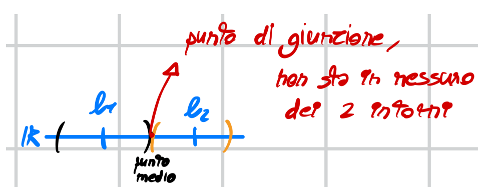
1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \widetilde{\mathbb{R}}$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$

Allora: $\mathbf{l_1 = l_2}$

2.2 Dimostrazione

ip1) $\forall V l_1$ intorno di $l_1 \exists U x_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in \forall l_1$ per ogni $x \in (U x_0 \cap A) - \{0\}$

ip2) $\forall V l_2$ intorno di $l_2 \exists U' x_0$ intorno di x_0 t.c. $f(x) \in \forall l_2$ per ogni $x \in (U' x_0 \cap A) - \{0\}$



Per contraddizione: $l_1 \neq l_2$
Allora $\exists V l_1, V l_2$ intorni di l_1 e l_2 (rispettivamente) tali che: $V l_1 \cup V l_2 \neq \emptyset$
$W x_0 = \cup U' x_0$ è un intorno di x_0
Sia $x \in (W x_0 \cup A) - \{x_0\} \neq \emptyset$ (perché x_0 è di accumulazione)

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) \in V l_1 \text{ (Per definizione di limite 1)} \\ f(x) \in V l_2 \text{ (Per definizione di limite 2)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) \in V l_1 \cap V l_2 \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{l_1 = l_2}. \ \underline{\textbf{Contraddizione}}$$

3 Teorema fondamentale del calcolo integrale (TFCI)

3.1 Enunciato

$[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a<b$. f R-integrale su $[a,b]$.
$\exists x_1 \in [a,b]$ t.c. f sia continua in x_1.
Fissato $x_0 \in$[a,b] e presa $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, si ha che F è derivabile in x_1 e $F'(x_1) = f(x_1)$

3.2 Dimostrazione

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right|, \quad x \neq x_1 \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x-x_1} - f(x_1) \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{x_1}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt}{x-x_1} - f(x_1) \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_1}^{x} f(t)dt - f(x_1)(x-x_1)}{x-x_1} \right| \\
&= \left| \frac{\int_{x_1}^{x} (f(t)-f(x_1))dt}{x-x_1} \right| \\
&\leq \frac{1}{x-x_1} \int_{x_1}^{x} |f(t)-f(x_1)|dt
\end{aligned}$$

Ma f è continua in $x_1 \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $|f(t)-f(x_1)| < \epsilon \ \forall t / 0 < |t-x_1| < \delta_\varepsilon \ t \in [a,b]$

Osservo che $t \in [x_1, x]$ (oppure $t \in [x, x_1]$, dipende come abbiamo disposto x e x_1)
Implica che $|t-x_1| \leq |x-x_1|$
Sia allora $x \in [a,b] / |x-x_1| < \delta_\varepsilon$. Con questo forziamo le due varibli a stare vicine fra loro
Quindi $|t-x_1| \leq |x-x_1| < \delta_\varepsilon$ e $|f(t)-f(x_1)| < \epsilon$
Allora $0 \leq \left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| < \frac{1}{|x-x_1|} \left| \int_{x_1}^{x} \epsilon dt \right| = \epsilon \frac{|x-x_1|}{|x-x_1|} = \epsilon$
Ossia: $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $\left| \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1} - f(x_1) \right| < \epsilon \ \forall x$ t.c. $0 < |x-x_1| < \delta_\varepsilon$, $x \in [a,b]$
Cioè:$\lim_{x_1} \frac{F(x)-F(x_1)}{x-x_1}$ esiste e vale $f(x_1)$.

Quindi: $\mathbf{F'(x_1) = f(x_1)}$

4 Formula fondamentale del calcolo integrale

4.1 Enunciato

$f \in C^0[a,b]$ e sia $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f in $[a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

4.2 Dimostrazione

Sia $x \in [a,b]$ e $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$. Per il TFCI* è derivabile in $[a,b]$ e $F'(x) = f(x) \forall x \in [a,b]$.
F, G sono primitive di f in un intervallo $[a,b] \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}/G(x) = F(x) + c \ \forall x \in [a,b]$

$$\text{Osservo adesso che: } G(b) - G(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$$
$$= \int_{x_0}^b f(t)dt - \int_{x_0}^a f(t)dt$$
$$= \cancel{\int_{x_0}^a f(t)dt} + \int_{x_0}^b f(t)dt - \cancel{\int_{x_0}^a f(t)dt} = \int_{x_0}^b f(t)dt.$$

*TFCI: Teorema Fondamentale Calcolo Integrale

<u>Osservazione:</u> $f \in C^0([a,b])$ e sia
$H(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ dove $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabili in $[a,b]$.
Si ha che $H(x)$ è derivabile perché $H(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$ dove $F(u) = \int_{x_0}^u f(t)dt$ *(Composizione di f derivabili)*
Inoltre $H'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x) = \underline{f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x) \ \forall x \in [a,b]}$

5 Teorema del confronto I

5.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A
Allora:

a) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$
con $\ell_1 < \ell_2$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

b) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

c) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, allora:

$$\exists U_{x_0}, \text{ intervallo di } x_0, \text{ tale che } f(x) < g(x) \quad \forall x \in (U_{x_0} \cap A) \setminus \{x_0\}$$

5.2 Dimostrazione

a) $l_1 < l_2 (l_1, l_2 \in \mathbb{R})$. Fisso $\epsilon > 0$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \Rightarrow \exists U' x_0$ intervallo di x_0 tale che $\forall x \in (U' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$
$\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \Rightarrow \exists U'' x_0$ intorno di $x_0 / l_2 - \epsilon < g(x) < l_2 + \epsilon \ \forall x \in (U'' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

Se $x \in (U' x_0 \cap U'' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$ *idea: scelgo* $\epsilon > 0 / l_1 + \epsilon \leq l_2 - \epsilon$
Scelgo in quanto sopra $\epsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$
Per $x \in (U' x_0 \cap U'' x_0 \ capA) \setminus \{x_0\}$ si ha allora

$$f(x) < l_1 + \epsilon = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{2} = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

6 Teorema del confronto II

6.1 Enunciato

$f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ A \neq \emptyset \ x \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A Allora:

a) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$
Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$
Se $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow l_1 \leq l_2$$

b) Se $\lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ e $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

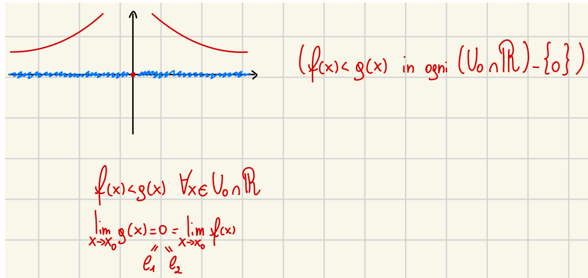
c) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq g(x) \ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

6.2 Osservazione

Cosa accade se si suppone $f(x) < g(x) \overset{?}{\Rightarrow} l_1 < l_2$

$$\textbf{NO: } f(x) = 0 \ \forall x \mathbb{R} \ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ x > 0 \\ 0 \ x = 0 \\ -\frac{1}{x} \ x < 0 \end{cases}$$



7 Teorema del confronto III - delle 3 funzioni - Carabinieri

7.1 Enunciato

$f, g, h : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $x_0 \in \widetilde{\mathbb{R}}$ punto di accumulazione per A.
Inoltre

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$$

$\exists U x_0$ intorno di $x_0 / f(x) \leq h(x) \leq g(x)\ \forall x \in (U x_0 \cap A) \setminus \{x_0\}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

7.2 Dimostrazione

Sia $\epsilon > 0$: $\exists U' x_0$, $U'' x_0$ intorni di $x_0 / \begin{array}{l} |f(x) - l| < \epsilon\ \forall x \in (U' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\} \\ |g(x) - l| < \epsilon\ \forall x \in (U'' x_0 \cap A) \setminus \{x_0\} \end{array}$

Sia $W x_0 = U' x_0 \cap U'' x_0$ è un intorno di x_0.
Se $x \in W x_0 \cap A \setminus \{x_0\}$

$$\begin{array}{rl} l - \epsilon < f(x) & \underline{\text{definizione } \lim f \text{ (per ipotesi)}} \\ f(x) & \leq h(x) \leq g(x) \\ & \qquad\quad g(x) < l + \epsilon \end{array}$$

Quindi $l - \epsilon < h(x) < l + \epsilon$ cioè $|h(x) - l| < \epsilon$
Ho fatto vedere che:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists W x_0 \text{ intorno di } x_0 / |h(x) - l| < \epsilon \text{ per } x \in W x_0 \cap A \setminus \{x_0\}$$

Che è esattamente la definizione di: $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$

8 Teorema del valore medio integrale

8.1 Enunciato

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f, gR - integralein[a, b]$.
Sia $m = \inf f(x)/x \in [a, b]$, $(\in \mathbb{R})$
$M = \sup f(x)/x \in [a, b]$, $(\in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1)\ m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\ 2)\ \exists \mu \in [m, M] / \int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) \\ 3)\ \text{Se } f \text{ continua in } [a,b], \text{ allora } \exists x_0 \in [a,b] / \int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a). \end{cases}$$

8.2 Dimostrazione

1) $m \leq f(x) \leq M \ x \in [a, b]$
$P = a, b \Rightarrow D(P, f) = m(b - a) \in G$
$S'(P, f) = M(b - a) \in H$.
Allora: $m(b - a) \leq sup(G) = \int_a^b f(x)dx = inf(H) \leq M(b - a)$

2) Dal punto 1): $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$. Sia $\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$,
allora $\mu \in [m, M]$ e ovviamenete, $\int_a^b f(x)dx = \mu(b - a)$

3) $f \in C^0[a, b]$: per il teorema dei valori intermedi $f([a, b])$ è intervallo; per il teorema di Weistrass f ha max e min **GLOBALE**
Quindi $f([a, b]) = [m, M]$
Per il punto 2), $\exists \mu \in [m, M]/\mu(b - a) = \int_a^b f(x)dx$;
ma $[m, M] = Im(f) \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b]/f(x_0) = \mu$

9 Criterio integrale convergenza delle serie numeriche

9.1 Enunciato

$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [1, +\infty)$.
Sia f. debolmente crescente in $[+\infty)$.
Allora ($\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge $\iff \int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.)

10 Teorema delle derivate successive

10.1 Enunciato

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f \in C^{n-1}(I)$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno ad I.
Suppongo che $\exists f^n(x_0)$ e che $f^{(k)}(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, 3, ..., n - 1$.
$f^{(n)} > 0$ (< 0).

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } n \text{ è } \textbf{PARI}, \text{ si ha che } x_0 \text{ è punto di minimo (massmimo) locale forte.} \\ \text{se } n \text{ è } \textbf{DISPARI}, \text{ allora } x_0 \text{nè pto di massimo nè pto di minimo locale.} \end{cases}$$

11 Teorema di Rolle

11.1 Enunciato

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$
f derivabile in (a, b) e $f(a) = f(b)$
Allora $\exists \overline{x} \in [a, b]$
$x_1 = a$ e $x_2 = b$ (o viceversa): allora, dato che

$$f(a) = f(b) \Rightarrow f(x) = f(a)\ \forall x \in [a, b]$$
$$\Rightarrow f'(x) = 0\ \forall x \in (a, b)$$

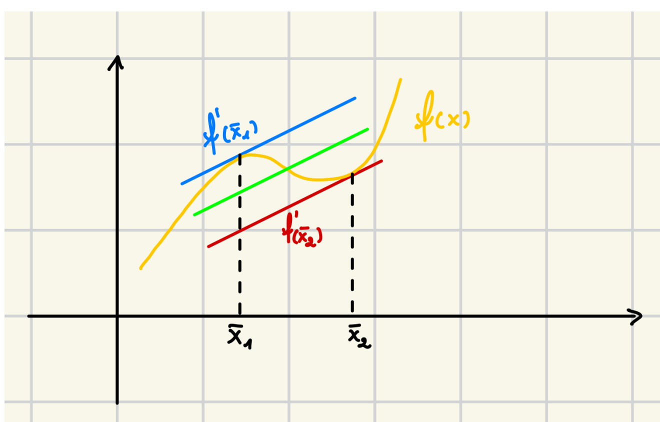
Se almeno uno tra x_1 e x_2 non è in un estremo di $[a, b]$
esempio sia $x_1 \in (a, b)$. Allora x_1 è interno ad $[a, b]$. Per le condizioni necessarie di estremalità si ha $f'(x_1) = 0$
Nel caso di $x_2 \in (a, b)$: si replichi lo stesso ragionamento.

12 Teorema di Lagrange

12.1 Enunciato

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$, f derivabile in (a, b).
Allora $\exists \overline{x} \in (a, b) / f(b) - f(a) = f'(\overline{x})(b - a)$
Sia $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$, f è continua in $[a, b]$;
φ è derivabile in (a, b), $\varphi(a) = 0 - 0 = 0$; $\varphi(b) = 0 - 0 = 0$.
Per il teorema di Rolle: $\exists \overline{x} \in (a, b)$ $\qquad \varphi(\overline{x}) \to$ punto che azzera la derivata prima.
Ma $\varphi'(x) = (f'(x)(b - a)) - (f(b) - f(a))\ \forall x \in (a, b)$

$$\Rightarrow 0 = \varphi'(\overline{x}) = f'(\overline{x})(b - a) - f(b) - f(a)$$
e quindi $0 = \varphi'(\overline{x})$ dato che il resto è nullo
da cui segue la tesi.



13 Teorema condizione necessaria di convergenza delle serie

13.1 Enunciato

$$\text{Se } \sum a_k \text{ converge, allora } \lim_{x\to+\infty} a_k = 0$$

13.2 Dimostrazione

Sia $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Per ipotesi $\exists A \in \mathbb{R} \lim_{n\to+\infty} An = A$.
Inoltre si ha che $A_n - A_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_n - \sum_{h=0}^{n-1} a_n = a_n$
Ma $\lim_{n\to+\infty}(A_n - A_{n-1}) = (\lim_{n\to+\infty} A_n) - (\lim_{n\to+\infty} A_{n-1}) = A - A = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

14 Teorema Disuguaglianza di Bernoulli

14.1 Enunciato

$x \in \mathbb{R}$, $x > -1$. Allora $(1+x)^m \geq 1 + nx \ \forall n \in \mathbb{N}$

14.2 Dimostrazione

Passo base:
È vero che: $(1+x)^0 \leq 1 + 0 * x$?, si $\Rightarrow$ passo base verificato!

Passo induttivo:
Ipotesi induttiva: $(1+x)^m \geq 1 + mx \quad$ con $m \in \mathbb{N}$
Tesi induttiva: $(1+x)^{m+1} \geq 1 + (m+1)x$

$(1+x)^{m+1} = (1+x)(1+x)^m \geq (1+mx)(1+x)$
$1 + x + mx + mx^2 = x(1+m) + 1 + mx^2 = (m+1)x + 1 + mx^2 \geq (m+1)x + 1$ Posso anche ingnorare mx^2 perche è sempre positivo

Quindi il passo induttivo è verificato per il principio di induzione $\forall x > -1$