# Analisi 1
# Teoria di sopravvivenza

4 dicembre 2025

## Indice



### 0.1 (12) Enunciare il teorema della media integrale

Sia $f$ continua in $[a, b]$. Esiste $c \in [a, b]$ tale che $\int_a^b f(x) = f(c)(b - a)$.

## 0.2 (8) Enunciare il criterio integrale per le serie numeriche

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente crescente e non negativa. Allora $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ converge se e solo se $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. Se inoltre, in caso di convergenza, si indica con $s = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ la somma della serie e con $s_n$ la sua somma parziale n-esima, abbiamo che: $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq s - s_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt$.

## 0.3 (8) Dimostra che $f$ è strettamente crescente (decrescente)

Supponiamo che $f$ sia strettamente crescente. Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$.
Se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ e se $x_1 > x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$. Pertanto in ogni caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$, ossia $f$ è iniettiva.
Sappiamo inoltre che $f^{-1} : \mathcal{F}(f)$, $y_1 < y_2$, e siano $x_1?f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Se si avesse che $x_1 > x_2$, allora, siccome $f$ è strettamente crescente, otterremmo che $f(x_1) > f(x_2)$ cioè $f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$ da cui segue $y_1 > y_2$, in contraddizione con l'ipotesi. Quindi $x_1 \leq x_2$. Se $x_1 = x_2$, allora $y_1 = f(x_1) = f(x_2)$, in contraddizione con l'ipotesi. Segue che $x_1 < x_2$.
Pertanto $f^{-1}$ è strettamente crescente.
(Analogo per $f$ decrescente)

## 0.4 Teorema del differenziale (Lagrange)

### 0.4.1 (7) Enunciato

Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo, $x_0 \in I$, $x_0$ interno e $f$ derivabile in $x_0$. Allora esiste una funzione $\omega : I \to \mathbb{R}$ tale che $\omega$ è continua in $x_0$ e $\omega(x_0) = 0$ per cui, per ogni $x \in I$, si ha $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)$.

### 0.4.2 (10) Dimostrazione

Definiamo $\omega(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ se $x \neq x_0$. Dato che $f$ è derivabile in $x_0$ abbiamo che $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$. Prolunghiamo allora la funzione $\omega(x)$ definendo $\omega(x) = 0$. Allora per ogni $x \in I$ abbiamo che $\omega(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ da cui segue la tesi.

## 0.5 Teorema di Lagrange ($\neq$Teorema differenziale)

#### Enunciato

Siano $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f$ continua in $[a, b]$ e $f$ derivabile in $(a, b)$. Allora $\exists \xi \in (a, b)$ tale che $f(b) - f(a) = f'(\xi) * (b - a)$.

#### Dimostrazione

Sia $\varphi(x) = (f(x) - f(a))(b - a) - (f(b) - f(a))(x - a)$. Si osservi che $\varphi$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in $(a, b)$ grazie ai teoremi di derivabilità e continuità di somma e rapporto. Inolte $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Il teorema di Rolle implica che esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$. Osservando che $\varphi(\xi) = f'(\xi) * (b - a) - (f(b) - f(a))$ si ottiene la tesi.

## 0.6 (6) Enuncia la condizione necessaria di convergenza per le serie numeriche

Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ una serie convergente. Allora $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

## 0.7 Definizione di serie convergente divergente ed indeterminata

Se $\lim_{n \to +\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ diremo che la serie di termine generale $a_k$ è convergente. Se $\lim_{n \to +\infty} s_n = s \in \{-\infty, +\infty\}$ diremo che la serie di termine generale $a_k$ è divergente. Se non esiste $\lim_{n \to +\infty} s_n$ diremo che la serie di termine generale $a_k$ è indeterminata.

## 0.8 Definizione di successione convergente, divergente ed indeterminata

Sia $a_n$ una successione.
Diremo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se e solo se $\forall \epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon > 0$ tale che $|a_n - l| < \epsilon$ $\forall n > N_\epsilon$. In tal caso la successione è convergente a $l$.
Diremo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty(-\infty)$ se e solo se $\forall k \in \mathbb{R}$ esiste $N_k > 0$ tale che $a_n > k$ $(a_n < -k)$ $\forall n > N_k$. In tal caso la successione diverge positivamente (negativamente).
Nel caso non esista $\lim_{n \to +\infty} a_n$ la successione è indeterminata.

## 0.9 Definizione d'integrale di Riemann

Una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann se: $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. In questo caso il valore comune si chiama integrale di Riemann di $f$ e si indica con $\int_a^b f(x)dx$.

## 0.10 Enuncia il teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato

Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f$ continua in $[a, b]$ e sia $f(a) * f(b) < 0$. Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f(\xi) = 0$.

## 0.11 Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Definizioni e teoremi principali. Trovare la soluzione generale dell'equazione: $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ dove $a(x)$ e $b(x)$ sono due funzioni continue assegnate

**Definizione**

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e poi $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni conitnue su $I$. Diremo equazione differenziale del 1° ordine a coefficienti continui il problema $y'(x) = a(x) * y(x) + b(x)$.

**Teorema (soluzione generale)**

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e poi $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su $I$. Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ in $I$. Allora tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale sono date da $y(x) = a^{A(x)} \int e^{-A(x)} * b(x)dx$.

## 0.12 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $I$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Diremo equazione differenziale del secondo ordine a coefficienete costante il problema $y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)\ \forall x \in I$

## 0.13 Definizione di sup e inf per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Dimostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ammette il sup.

**Definizione**

Sia $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora
Se $A$ è inferiormente limitato, chiameremo estremo inferiore di $A$, inf $A$, il massimo di $m_A$.
Se $A$ è superiormente limitato, chiameremo estremo superiore di $A$, sup $A$, il minimo di $M_A$.
Se $A$ non è superiormente (inferiormente) limitato, scriveremo sup $A = +\infty$ (inf$A = -\infty$).

**Dimostrazione (superiormente limitato)**

Sia $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora se $A$ è superiormente limitato, allora $M_A$ ammette minimo.
Sappiamo che per ogni $a \in A$ e per ogni $y \in M_A \neq \emptyset$ segue che $a \leq y$. L'assioma di separazione implica che esiste $b \in \mathbb{R}$ per cui $a \leq b \leq y$ per ogni $a \in A$ e per ogni $y \in M_A$. Pertanto $b \in M_A$ e inoltre $b = \min M_A$.

## 0.14 Definizione di punto di accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Definizione di limite di una funzione per $x \to x_0$, dove $x_0$, è un punto di accumulazione per il dominio della funzione. Dimostrare almeno un teorema significativo sui limiti.

**Definizione punto accumulazione di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$**

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremo che $x_0$ è pto di accumulazione per $A$ se e solo se $\forall\delta > 0$ si ha $D^0(x_0, \delta) \cap A \neq \emptyset$

### 0.14.1 (18) Definizione di limite

Scrivere $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 5$ significa che $\forall\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $\forall x \in D_f$, se $0 < |x + 1| < \delta$, allora $|f(x) - 5| < \epsilon$.

**Dimostrazione (Teorema permanenza del segno)**

Sia $l = +\infty$. Per la definizione del teorema della permanenza del segno sappiamo che per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste $U_{x_0}$, intorno di $x_0$, tale che $f(x) > k$ per ogni $x \in (U_{x_0} \cap A)\backslash\{x_0\}$. Pertanto è sufficiente scegliere $k > 0$ per ottenere la tesi

## 0.15 Formula di Taylor derivabile $n$ volte

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo, sia derivabile $n-1$ volte in $I$ e tali funzioni derivate siano continue in $I$. Sia inoltre $x_0 \in I$, $x_0$ interno ed $\exists f^{(n)}(x_0)$.

Allora $\exists w : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $w$ continua in $x_0$, $w(x_0) = 0$ ed inoltre $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + w(x)(x-x_0)^n$ $\forall x \in I$.

## 0.16 Definizione $f$ continua

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Diremo che $f$ è continua in $x_0$ se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

## 0.17 Definizione $f$ derivabile

Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo e $x_0 \in I$, $x_0$ interno a $I$. Diremo che $f$ è derivabile in $x_0$ se e solo se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$. In tal caso chiameremo derivata prima di $f$ in $x_0$ il valore $l$ di tale limite che indicheremo anche con la notazione $f'(x_0)$. Diremo inolter che $f$ è derivabile in un insieme $J \subseteq I$ se e solo se $f$ è derivabile in $x_0$, per ogni $x_0 \in J$.

## 0.18 Teorema di Weierstrass per le funzioni continue

Sia $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f$ sia continua in $[a,b]$. Allora $f$ ammette estremi globali.

## 0.19 Enuncia il teorema di Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$

Sia $a_n$ una successione limitata. Allora esiste una sottosuccessione $a_{n_k}$ di $a_n$ tale che $a_{n_k}$è convergente.

## 0.20 Definizione di massimo e minimo relativo (o locale) e assoluto

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo (massimo) locale per $f$ in $A$ se e solo se esiste un intorno $U$ di $x_0$ tale che $f(x) \geq (\leq) f(x_0)$ per ogni $x \in U \cap A$. In tal caso il valore $f(x_0)$ viene detto mimino (massimo) locale per $f$ in $A$. Inoltre diremo che $x_0 \in A$ è punto di minimo (massimo) globale per $f$ in $A$ se e solo se $f(x) \geq (\leq) f(x_0)$ per ogni $x \in A$. In tal caso il valore $f(x_0)$ viene detto mimino (massimo) globale per $f$ in $A$.

## 0.21 Enunciato teorema di Fermat (condizione necessaria del 1° ordine per estremi interni)

Se una funzione $f$ ha un punto di massimo (minimo) locale in $x_0$ e $f$ è derivabile in $x_0$ allora la derivata in quel punto è nulla. ($f'(x_0) = 0$).

## 0.22 Monotonia (+ legame con derivata prima)

### Enunciato

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e $I \subseteq A$ un intervallo.

1. Diremo che $f$ è strettamente (debolmente) crescente in $I$ se e solo se $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, si ha che $f(x_1) < (\leq) f(x_2)$.
2. Diremo che $f$ è strettamente (debolmente) decrescente in $I$ se e solo se $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, si ha che $f(x_1) > (\geq) f(x_2)$.
3. Diremo che $f$ è debolmente monotona in $I$ se e solo se $f$ è debolmente crescente o debolmente descrescente in $I$.
4. Diremo che $f$ è strettamente monotona in $I$ se e solo se $f$ è strettamente crescente o strettamente descrescente in $I$.

### Legame con derivata prima

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile.

- Se $f'(x) > 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente.
- Se $f'(x) < 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è strettamente decrescente.
- Se $f'(x) \geq 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è crescente.
- Se $f'(x) \leq 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è decrescente.
- Se $f'(x) = 0$ in $(a,b) \Rightarrow f$ è costante.

## 0.23 Definizione di $o$-piccolo

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ e un punto di accumulazione per A. Diremo che $f$ è o-piccolo di $g$ per $x \to x_0$, e lo scriveremo come $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, se esiste una funzione $\omega : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitesima in $x_0$ e esiste un intorno $U_{x_0}$ di $x_0$ per cui $f(x) = \omega(x)g(x)$ per $x \in (U_{x_0} \cap A) \backslash \{x_0\}$.

## 0.24 Definizione derivata seconda (+convessità)

La derivata seconda di $f$ in $x_0$ è definita come: $f''(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}$ se questo limite esiste.
Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in $I$ (intervallo). Allora $f$ è convessa (concava) in $I$ se e solo se $f''(x) \geq (\leq) 0$ $\forall x \in I$.

## 0.25 (13) Enunciare TFCI

Se $f(x)$ è continua su $[a, b]$ e $F$ è una funzione tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

## 0.26 Dimostrare che se $f$ è una funzione dispari e continua in $0$ allora $f(0) = 0$.

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione dispari e sia $0 \in A$. Per definizione di funzione dispari: $\forall x \in A, f(-x) = -f(x)$.
Poiché $-0 = 0$, otteniamo: $f(0) = -f(0)$ Sommiamo $f(0)$ ad entrambi i membri: $f(0) + f(0) = 0$ e quindi: $2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$.

## 0.27 Definizione di sottosuccessione.

Sia $a_n$, $n \in \mathbb{N}$, una successione. Diremo che la successione $b_k$, $k \in \mathbb{N}$, data dalla composizione della funzione strettamente crescente $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \to \varphi(k)$, con la successione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \to a_n$ è una sottosuccessione di $a_n$.

## 0.28 Enunciare il teorema Ponte in $\mathbb{R}$

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \tilde{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per $A$. Allora $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \tilde{\mathbb{R}}$ se e solo se per ogni successione $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq (A \backslash \{x_0\})$ si ha che $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$ e $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

## 0.29 Definizione di funzione invertibile

Una funzione $f : A \to B$ è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva (biettiva).

## 0.30 Enunciare il principio d'induzione (+esempio)

### Enunciato

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e sia $p \in \mathbb{N}$. Assumiamo che siano valide le seguenti ipotesi:

1. $p \in A$
2. Se $n \in A$ allora $n + 1 \in A$

Allora $A = \{n \in \mathbb{N}$ tali che $n \geq p\}$

### Esempio

Dimostriamo per induzione che $n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Passo base:
$n = 0 \Rightarrow 0 \geq 0$ (Vero).
Passo induttivo:
Supponiamo che $k \geq 0$, vogliamo dimostrare che $k + 1 \geq 0$.
Il che è vero perche $k + 1 > k \geq 0$.

## 0.31 Definizione di punto di flesso

Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I$ intervallo. Diciamo che $x_0 \in I$ è punto di flesso per $f$ se e solo se $\exists \delta > 0$ tale che $f$ sia convessa in $(x_0 - \delta, x_0)$ e $f$ sia concava in $(x_0, x_0 + \delta)$ o viceversa.

## 0.32 È vero che ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ è convergente?

No, ad esempio $a_n = (-1)^n$, è limitata perche ogni termine è compreso in $[-1, 1]$ ma non converge.
Perche ogni successione limitata in $\mathbb{R}$ converga serve aggiungere all'ipotesi che la successione sia monotona.