Analisi 1
Teoria di sopravvivenza

3 dicembre 2025

Indice

0.1 (18) Usando la definizione di limite fornire il significato della scrittura: $\lim_{x \to -1} f(x) = 5$

Significa che $\forall \epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $\forall x \in D_f$, se $0 < |x+1| < \delta$, allora $|f(x) - 5| < \epsilon$.

0.2 (13) Enunciare TFCI

Se $f(x)$ è continua su $[a, b]$ e F è una funzione tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

0.3 (12) Enunciare il teorema della media integrale

Sia f continua in $[a, b]$. Esiste $c \in [a, b]$ tale che $\int_a^b f(x) = f(c)(b - a)$.

0.4 (10) Dimostrare il teorema del differenziale (Lagrange)

Definiamo $\omega(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ se $x \neq x_0$. Dato che f è derivabile in x_0 abbiamo che $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = 0$. Prolunghiamo allora la funzione $\omega(x)$ definendo $\omega(x) = 0$. Allora per ogni $x \in I$ abbiamo che $\omega(x)(x - x_0) = f(x) - f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ da cui segue la tesi.

0.5 (8) Enunciare il criterio integrale per le serie numeriche

Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione debolmente crescente e non negativa. Allora $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ converge se e solo se $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge. Se inoltre, in caso di convergenza, si indica con $s = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ la somma della serie e con s_n la sua somma parziale n-esima, abbiamo che: $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \le s - s_n \le \int_n^{+\infty} f(t)dt$.

0.6 (8) Dimostra che f è strettamente crescente (decrescente)

Supponiamo che f sia strettamente crescente. Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$.
Se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ e se $x_1 > x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$. Pertanto in ogni caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$, ossia f è iniettiva. Sappiamo inoltre che $f^{-1} : \mathcal{F}(f)$, $y_1 < y_2$, e siano $x_1 ? f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Se si avesse che $x_1 > x_2$, allora, siccome f è strettamente crescente, otterremmo che $f(x_1) > f(x_2)$ cioè $f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$ da cui segue $y_1 > y_2$, in contraddizione con l'ipotesi. Quindi $x_1 \le x_2$. Se $x_1 = x_2$, allora $y_1 = f(x_1) = f(x_2)$, in contraddizione con l'ipotesi. Segue che $x_1 < x_2$. Pertanto f^{-1} è strettamente crescente.
(Analogo per f decrescente)

0.7 (7) Enuncia il teorema del differenziale (Lagrange)

Siano $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$, x_0 interno e f derivabile in x_0. Allora esiste una funzione $\omega : I \to \mathbb{R}$ tale che ω è continua in x_0 e $\omega(x_0) = 0$ per cui, per ogni $x \in I$, si ha $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)$.

0.8 (6) Enuncia la condizione necessaria di convergenza per le serie numeriche

Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ una serie convergente. Allora $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$

0.9 (5) Enuncia il teorema di Bolzano-Weistrass

Sia a_n, $n \in \mathbb{N}$, una successione. Diremo che la successione b_k, $k \in \mathbb{N}$, data la composizione della funzione strettamente crescente $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto \varphi(k)$, con la successione $a : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ è una sottosuccessione di a_n.

0.10 Definizione di serie convergente divergente ed indeterminata

Se $\lim_{n \to +\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ diremo che la serie di termine generale a_k è convergente. Se $\lim_{n \to +\infty} s_n = s \in \{-\infty, +\infty\}$ diremo che la serie di termine generale a_k è divergente. Se non esiste $\lim_{n \to +\infty} s_n$ diremo che la serie di termine generale a_k è indeterminata.

0.11 Definizione di successione convergente, divergente ed indeterminata

Sia a_n una successione.
Diremo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ se e solo se $\forall \epsilon > 0$ esiste $N_\epsilon > 0$ tale che $|a_n - l| < \epsilon \ \forall n > N_\epsilon$. In tal caso la successione è convergente a l.
Diremo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty(-\infty)$ se e solo se $\forall k \in \mathbb{R}$ esiste $N_k > 0$ tale che $a_n > k$ $(a_n < -k)$ $\forall n > N_k$. In tal caso la successione diverge positivamente (negativamente).
Nel caso non esista $\lim_{n \to +\infty} a_n$ la successione è indeterminata.

0.12 Definizione d'integrale di Riemann

Una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice integrabile secondo Riemann se: $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. In questo caso il valore comune si chiama integrale di Riemann di f e si indica con $\int_a^b f(x)dx$.

0.13 Enuncia il teorema di esistenza degli zeri per una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato

Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua in $[a, b]$ e sia $f(a) * f(b) < 0$. Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f(\xi) = 0$.

0.14 Equazioni differenziali lineari del primo ordine. Definizioni e teoremi principali. Trovare la soluzione generale dell'equazione: $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ dove $a(x)$ e $b(x)$ sono due funzioni continue assegnate

0.14.1 Definizione

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e poi $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni conitnue su I. Diremo equazione differenziale del 1° ordine a coefficienti continui il problema $y'(x) = a(x) * y(x) + b(x)$.

0.14.2 Teorema (soluzione generale)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e poi $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue su I. Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ in I. Allora tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale sono date da $y(x) = a^{A(x)} \int e^{-A(x)} * b(x)dx$.

0.15 Definizione di sup e inf per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Dimostrare che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ superiormente limitato ammette il sup.

0.15.1 Definizione

Sia $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora

Se A è inferiormente limitato, chiameremo estremo inferiore di A, inf A, il massimo di m_A.

Se A è superiormente limitato, chiameremo estremo superiore di A, sup A, il minimo di M_A.

Se A non è superiormente (inferiormente) limitato, scriveremo sup $A = +\infty$ (inf$A = -\infty$).