

# Analisi 1

## Manuale di sopravvivenza

### Ingegneria Informatica

30 dicembre 2025

## Indice

<b>I Concetti di base</b>	<b>3</b>
<b>1 Derivate</b>	<b>3</b>
1.1 Derivate fondamentali . . . . .	3
1.2 Regole di derivazione . . . . .	3
<b>2 Integrali</b>	<b>3</b>
2.1 Indefiniti . . . . .	3
2.1.1 Pils . . . . .	4
<b>3 Limiti notevoli</b>	<b>5</b>
<b>4 Proprietà dei Logaritmi e delle potenze</b>	<b>5</b>
<b>5 Fattoriali</b>	<b>5</b>
5.0.1 Definizione base . . . . .	5
5.0.2 Relazioni ricorsive . . . . .	5
5.0.3 Fattoriale e coefficienti binomiali . . . . .	5
5.0.4 Prodotti notevoli . . . . .	5
5.0.5 Somma asintotica . . . . .	6
<b>6 Circonferenza Goniometrica</b>	<b>6</b>
<b>7 Ordini di infinito</b>	<b>6</b>
<b>8 Sviluppi di Taylor con resto di Peano (MCLAURIN)</b>	<b>7</b>
<b>II Studio di Funzione</b>	<b>7</b>
<b>9 Studio di Funzione</b>	<b>7</b>
9.1 Dominio, simmetrie e segno . . . . .	7
9.1.1 Dominio . . . . .	7
9.1.2 Simmetrie . . . . .	7
9.2 Punti di accumulazione, limiti e asintoti . . . . .	8
9.3 Studio della continuità e derivabilità, monotonia . . . . .	8
9.3.1 Continuità . . . . .	8
9.3.2 Derivabilità . . . . .	8
9.4 Derivata seconda e convessità . . . . .	9

<b>III Studio della convergenza</b>	<b>9</b>
9.5 Condizione necessaria di convergenza . . . . .	9
9.6 Serie geometrica . . . . .	9
9.7 Serie armoniche . . . . .	10
9.7.1 Serie armoniche generalizzate . . . . .	10
9.8 Serie di Mengoli (Serie telescopica) . . . . .	10
9.9 Criteri con condizioni sufficienti per la convergenza . . . . .	10
9.9.1 Criterio del rapporto (D'Alembert) . . . . .	10
9.9.2 Criterio della radice (CAUCHY) . . . . .	10
9.9.3 Criterio del confronto . . . . .	11
9.9.4 Criterio del confronto asintotico . . . . .	11
9.9.5 Criterio dell'assoluta convergenza . . . . .	11
9.9.6 Criterio di Leibniz . . . . .	11
<b>10 Convergenza degli Integrali</b>	<b>12</b>
10.0.1 Integrali impropri . . . . .	12
<b>IV Equazioni Differenziali</b>	<b>12</b>
<b>11 Equazioni di 1° Grado</b>	<b>12</b>
11.1 Equazioni differenziali “ELEMENTARI” e “PROBLEMI DI CAUCHY” . . . . .	12
11.1.1 Tipologia 1 . . . . .	12
11.1.2 Tipologia 2 . . . . .	12
11.1.3 Problema di CAUCHY . . . . .	13
11.2 Equazioni differenziali “A variabili separabili” . . . . .	13
11.3 Equazioni lineari del “1° Ordine” . . . . .	13
<b>12 Equazioni di 2° Grado</b>	<b>14</b>
12.1 Omogenee . . . . .	14
12.2 Variazione delle costanti . . . . .	15

# Parte I

## Concetti di base

### 1 Derivate

#### 1.1 Derivate fondamentali

1.  $D[x^n] = nx^{n-1}$
2.  $D[x] = 1$
3.  $D[\frac{1}{x}] = -\frac{1}{x^2}$
4.  $D[\sqrt{x}] = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5.  $D[a^x] = a^x * \ln|a|$
6.  $D[e^x] = e^x$
7.  $D[\log_a x] = \frac{1}{x * \ln a}$
8.  $D[\ln x] = \frac{1}{x}$
9.  $D[\sin x] = \cos x$
10.  $D[\cos x] = -\sin x$
11.  $D[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x}$
12.  $D[\cotan x] = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13.  $D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14.  $D[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15.  $D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$

#### 1.2 Regole di derivazione

1.  $D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$
2.  $D[k * f(x)] = k * f'(x)$
3.  $D[f(x) * g(x)] = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
4.  $D[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{g(x)^2}$

### 2 Integrali

#### 2.1 Indefiniti

1.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
2.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
3.  $\int e^x dx = e^x + c$
4.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
5.  $\int \sin x dx = -\cos x + c$
6.  $\int \cos x dx = \sin x + c$
7.  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$
8.  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

$$9. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c, -\arccos x + c$$

$$10. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$11. \int f(x)^\alpha * f'(x) dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$12. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$13. \int e^{f(x)} * f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$14. \int a^{f(x)} * f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$15. \int \sin f(x) * f'(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$16. \int \cos f(x) * f'(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$17. \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \tan f(x) + c$$

$$18. \int \frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)} dx = -\cot f(x) + c$$

$$19. \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx = \arcsin f(x) + c, -\arccos f(x) + c$$

$$20. \int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \arctan f(x) + c$$

$$21. \int f(x) * g'(x) dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x) dx$$

$$22. \int \frac{f'(x)}{k^2+f(x)^2} dx = \frac{1}{k} \arctan\left(\frac{f(x)}{k}\right) + c$$

### 2.1.1 Pils

Durante lo svolgimento potrei trovarmi i seguenti casi che sono più complessi, riassunti in 3 macro-casi possono essere risolti in modo più semplice.

Caso:

- Grado D < Grado N: Uso la divisione.
- Denominatore: 1° Grado:  $\frac{f'(x)}{f(x)}$
- Denominatore 2° Grado: Dopo aver calcolato il  $\Delta$  ho i tre seguenti casi:

–  $\Delta = 0$ :

$$* \int f'(x) * f(x)^\alpha dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

\* Divisione A/B

–  $\Delta < 0$ :

$$* \int \frac{f'(x)}{k^2+f(x)^2} dx = \frac{1}{k} \arctan\left(\frac{f(x)}{k}\right) + c$$

\*  $\int \frac{\text{numeratore}+a-a}{\text{denominatore}} dx$

–  $\Delta > 0$ :

$$* \text{Divisione A/B}$$

\*  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$

### 3 Limiti notevoli

Espressione in $x$	Espressione in $f(x)$	F. Indeterminata
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{f(x)})^{fx} = e$	$[1^\infty]$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \ln a$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\ln a}$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+f(x))^k - 1}{f(x)} = k$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(f(x))}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}$	$[\frac{0}{0}]$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(f(x))}{f(x)} = 1$	$[\frac{0}{0}]$

LIMITE NOTEVOLE IMPORTANTE:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{A}{x})^{Bx} = e^{AB}$

### 4 Proprietà dei Logaritmi e delle potenze

Logaritmi	Potenze
$\log_a(x * y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$a^n * b^n = (a * b)^n$
$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$	$\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$
$\log_a(x^n) = n * \log_a(x)$	$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$
$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a(b)}$	$(a^n)^p = a^{n^p} = a^{n*p}$
$\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$	$a^0 = 1$

### 5 Fattoriali

#### 5.0.1 Definizione base

Per  $n \in \mathbb{N}$ :  $n! = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * 2 * 1$   
con  $0! = 1$  (Per convenzione).

#### 5.0.2 Relazioni ricorsive

1.  $(n + 1)! = (n + 1) * n!$
2.  $n! = n * (n - 1)!$
3.  $n! = \frac{(n+1)!}{n+1}$

#### 5.0.3 Fattoriale e coefficienti binomiali

1.  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k!)}$
2.  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

#### 5.0.4 Prodotti notevoli

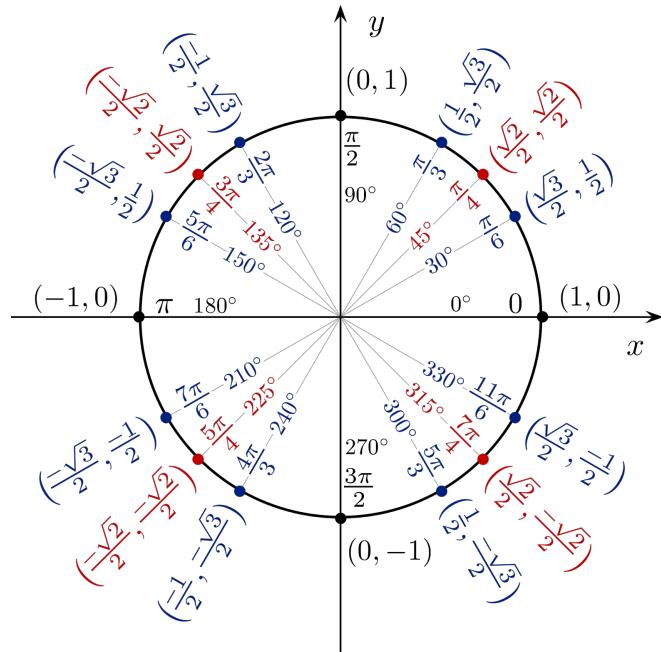
1.  $\binom{(2n)!}{n!} = (n + 1) * (n + 2) * \dots * (2n)$
2.  $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$

### 5.0.5 Somma asintotica

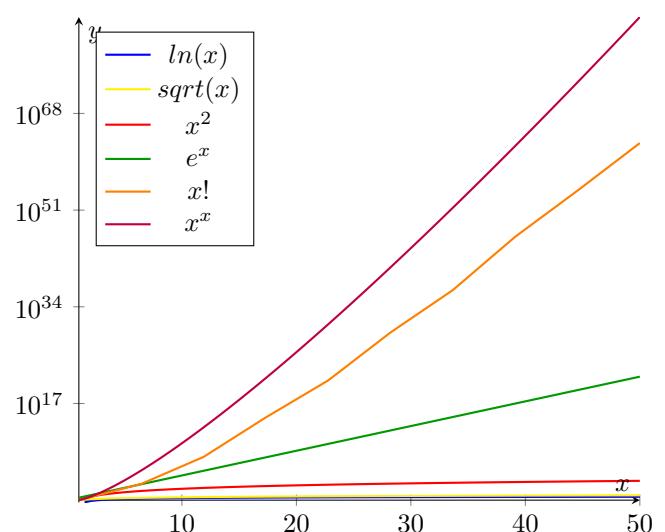
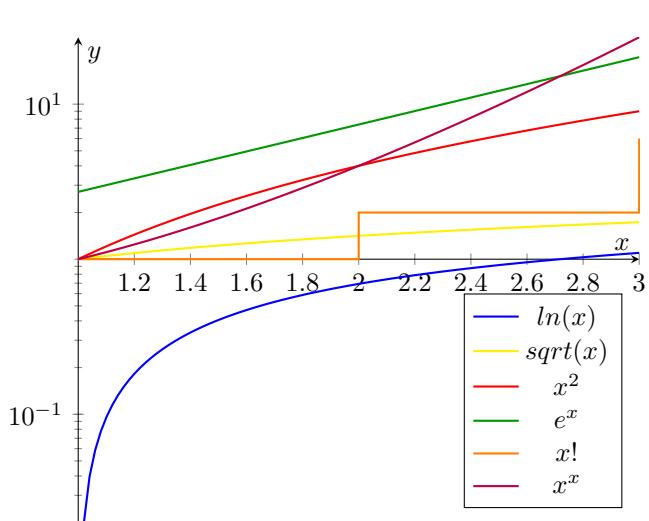
$$n! \sim \sqrt{2\pi n} * \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

## 6 Circonferenza Goniometrica

Circonferenza di raggio unitario situato al centro di un piano cartesiano con centro nell'origine degli assi.



## 7 Ordini di infinito



**NB.** È corretto visualizzare  $f(x) = x!$  a “gradini” dato che la funzione è definita solo per  $x \in \mathbb{N}$

## 8 Sviluppi di Taylor con resto di Peano (MCLAURIN)

Funzione	Sviluppo in forma troncata	Sviluppo in forma compatta
$(1+u)^\alpha$	$1 + \alpha u + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} u^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} u^3 + o(u^3)$	$\sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} u^k + o(u^n)$
$e^u$	$1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^5}{120} + o(u^5)$	$\sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} + o(u^n)$
$\sin u$	$u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} - \frac{u^7}{5040} + o(u^7)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(u^{2n+2})$
$\cos u$	$1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} - \frac{u^6}{720} + \frac{u^8}{40320} + o(u^8)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{u^{2k}}{(2k)!} + o(u^{2n+1})$
$\log(1+u)$	$u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$	$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{u^k}{k} + o(u^n)$
$\sinh u$	$u + \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + \frac{u^7}{5040} + o(u^7)$	$\sum_{k=0}^n \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(u^{2n+2})$
$\cosh u$	$1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + \frac{u^6}{720} + o(u^6)$	$\sum_{k=0}^n \frac{u^{2k}}{(2k)!} + o(u^{2n+1})$
$\tan u$	$u + \frac{u^3}{3} + \frac{2}{15} u^5 + \frac{17}{315} u^7 + \frac{62}{2835} u^9 + o(u^{10})$	-
$\tanh u$	$u - \frac{u^3}{3} + \frac{2}{15} u^5 - \frac{17}{315} u^7 + \frac{62}{2835} u^9 + o(u^{10})$	-
$\arctan u$	$u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + o(u^9)$	$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{2k+1} + o(u^{2n+2})$
$\operatorname{arctanh} u$	-	$\sum_{k=0}^n \frac{u^{2k+1}}{2k+1} + o(u^{2n+2})$

## Parte II

## Studio di Funzione

### 9 Studio di Funzione

#### 9.1 Dominio, simmetrie e segno

##### 9.1.1 Dominio

Per dominio si intende l'insieme dei valori di  $x$  per cui la funzione è definita.  
Casi tipici:

- Frazioni  $\rightarrow$  denominatore  $\neq 0$ .
- Radici pari  $\rightarrow$  argomento  $\geq 0$ .
- Logaritmi  $\rightarrow$  argomento  $> 0$ .
- Funzioni goniometriche con  $Df(x) \neq \mathbb{R}$  (Esclusi frazioni con seni e coseni ad es. tangente):
  - $f(x) = \arcsin x \rightarrow Df(x) = [-1, 1]$
  - $f(x) = \arccos x \rightarrow Df(x) = [-1, 1]$

Esempio:  $f(x) = \frac{x-3}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & \text{se } x = 3 \\ f(x) > 0 & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 3 \\ f(x) < 0 & \text{se } -1 < x < 3 \end{cases}$

##### 9.1.2 Simmetrie

- Parità:

- $f(-x) = f(x) \rightarrow$  Funzione pari (simmetria rispetto all'asse  $y$ )
- $f(-x) = -f(x) \rightarrow$  Funzione dispari (simmetria rispetto all'origine)

Esempio:  $f(x) = x^2 \Rightarrow f(-x) = (-x)^2 = x^2 \Rightarrow f$  pari.

## 9.2 Punti di accumulazione, limiti e asintoti

Principalmente lo studio dei limiti è finalizzato alla determinazione dell'esistenza degli asintoti, questi possono essere:

- Asintoti Verticali → Quando il limite in un punto va a  $\pm\infty$
- Asintoti Orizzontali → Quando  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$
- Asintoti Obliqui

Per gli asintoti obliqui il procedimento è leggermente più lungo, innanzitutto *la presenza di asintoti orizzontali preclude la presenza di asintoti obliqui* quindi se sono presenti as. orizzontali ci si può fermare, in caso non siano presenti fare testo a quanto segue:

Un as. obliquo è una retta (Quindi forma  $y = mx + q$ ), per trovarlo calcolo la pendenza "m" con:  $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$  se questo limite esiste ed è finito allora possiamo calcolare "q" con:  $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$  se anche questo limite esiste ed è finito allora l'asintoto obliquo esiste ed è proprio:  $y = mx + q$ .

**NB.** se  $m = 0$  l'asintoto non è obliquo ma orizzontale, se il grado del numeratore è maggiore di 1 grado rispetto al denominatore (ad es.  $\frac{x^2}{x}$ ) è comune avere un as. obliquo, se invece il denominatore ha grado maggiore di 2 o più rispetto al numeratore probabilmente avremo un as. verticale.

## 9.3 Studio della continuità e derivabilità, monotonia

### 9.3.1 Continuità

Per definizione una funzione è continua in un dato punto  $x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Verifico punti critici del dominio di  $f$  e controllo se sono presenti discontinuità, queste possono essere:

- **Eliminabile:** limite esiste finito ma  $f(x_0)$  non è definito o è diverso.
- **Di salto:** i due limiti laterali esistono ma sono diversi.
- **Infinita:** almeno un limite laterale tende a  $\pm\infty$ .

Esempio:  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow D[f(x)] = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  In  $x = 1 \rightarrow$  discontinuità eliminabile.

**NB.** "Eliminabile" e "di salto" sono di **1a Specie**, "Infinita" è di **2a specie**.

### 9.3.2 Derivabilità

Per definizione una funzione è derivabile in un dato punto  $x_0$  se  $f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$   
Se  $f$  è derivabile allora è continua, ma non sempre vale il contrario.

Strategia operativa:

1. Controllo dove la funzione è sospetta (valori assoluti, radici, punti angolosi)
2. Verifico che il limite destro e sinistro su quel punto coincidano

Nel caso non dovessero coincidere vuol dire che ci troviamo di fronte ad un punto di non derivabilità, casi più comuni:

- **Angolo:** ad es.  $f(x) = |x|$  funzione continua ma non derivabile, c'è un'improvvisa cambio di pendenza, in  $x_0 = 0^-$   $f'(x_0) = -1$ , in  $x = 0^+$   $f'(x_0) = +1$ .
- **Cuspide:** ad es.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  funzione continua ma non derivabile, in  $x_0 = 0^-$   $f'(x_0) = -\infty$ , in  $x_0 = 0^+$   $f'(x_0) = +\infty$ .
- **Tangente verticale:** ad es.  $f(x) = \sqrt{x}$  non è richiesto che la funzione sia derivabile sia da destra che da sinistra, basta 1 delle due, basta che la funzione sia continua e che la derivata da destra o sinistra vada a  $\pm\infty$ .

Se una funzione non è continua, automaticamente non è derivabile, ad esempio  $f(x) = \frac{1}{x}$  in  $x = 0$  non è derivabile per discontinuità.

Strategia operativa:

1. Controllo la continuità. Se non è continua → già classificata.
2. Se è continua:
  - (a) Calcolo la derivata a destra e sinistra.

- (b) Confronto i valori:
- Diversi e finiti → **angolo**.
  - Entrambi infiniti con segni opposti → **cuspide**.
  - Entrambi con stesso segno → **tangente verticale**.

## 9.4 Derivata seconda e convessità

In questa fase andiamo a controllare se ci sono cambi di convessità e se sono presenti punti di flesso.

Strategia operativa:

- Calcolo la derivata seconda ( $f''(x)$ )
- Trovo i punti candidati ad essere punti di flesso con  $f''(x) = 0$
- Verifico se in questi punti c'è un cambio di concavità ( $f$  passa da  $f''(x) > 0$  a  $f''(x) < 0$  o viceversa), se questo si verifica allora c'è un punto di flesso, altrimenti no.
- Riassumo i vari risultati in uno studio del segno per completezza.

Esempio:  $f(x) = x^3$ ,  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f''(x) = 6x$ , risolvendo  $f''(x) = 0$  si ottiene  $x = 0$ . Per  $x < 0$  si ha  $f''(x) < 0 \rightarrow$  concava, per  $f''(x) > 0 \rightarrow$  convessa. Dato che c'è stato un cambio di concavità in  $x = 0$  allora in questo punto c'è un flesso.

Esempio:  $f(x) = x^4$ ,  $f'(x) = 4x^3$ ,  $f''(x) = 12x^2$ , risolvendo  $f''(x) = 0$  si ottiene  $x = 0$ . Però  $f''(x)$  è sempre  $\geq 0$  quindi la curva è sempre convessa verso l'alto e quindi non essendoci nessun cambio di concavità in quel punto non c'è un flesso.

## Parte III Studio della convergenza

### 9.5 Condizione necessaria di convergenza

Affinche una serie converga è necessario che il *termine generale*  $a_n$  sia *infinitesimo* (Ovvero  $a_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow +\infty$ )

**NB.** Non è necessario svolgere questo l'limite durante la risoluzione, ma sicuramente è comodo da fare.

**NB.** Se il risultato del limite è 0 la serie può divergere o convergere il fatto che il risultato sia 0 è necessario solo per la divergenza ma non sufficiente.

### 9.6 Serie geometrica

$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$  con  $q \in \mathbb{R}$  è detta serie geometrica.

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } 1 \leq -1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{convergente (con somma } \frac{1}{1-q} \text{)} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{divergente} & \text{se } q \geq 1 \\ \text{indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

**ESEMPIO:**  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$  converge (essendo  $\frac{1}{2} < 1$  dove  $\frac{1}{2} = q$ ) e la somma è:  $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Siano  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  due serie numeriche convergenti e sia  $k \in \mathbb{R}$ . Allora:

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} K a_n = K \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

**NB.** Se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  converge, anche  $\sum_{n=0}^{\infty} K a_n$  converge (stessa cosa per la divergenza)

## 9.7 Serie armoniche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

### 9.7.1 Serie armoniche generalizzate

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \text{ oppure } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha < 1 \text{ oppure } \alpha = 1 \text{ e } \beta \leq 1 \end{cases}$$

## 9.8 Serie di Mengoli (Serie telescopica)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ è detta serie di Mengoli}$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [1 - \frac{1}{n+1}] = 1 \Rightarrow \text{La serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ converge e la somma è 1.}$$

*NB. Trovare negli esercizi la serie telescopica è piuttosto raro.*

## 9.9 Criteri con condizioni sufficienti per la convergenza

Serie a termini non negativi	$\begin{cases} \text{criterio del rapporto} \\ \text{criterio della radice} \\ \text{criterio del confronto} \\ \text{criterio del confronto asintotico} \end{cases}$
Serie a termini di segno variabile	$\begin{cases} \text{criterio dell'assoluta convergenza} \\ \text{criterio di Leibniz} \end{cases}$

### 9.9.1 Criterio del rapporto (D'Alembert)

Sia  $a_n > 0$  definitivamente e supponiamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$  (Essendo  $a_n > 0$  allora  $l \in [0, +\infty)$  oppure  $l = +\infty$ )

- Se  $l < 1$  allora  $\sum a_n$  converge
- Se  $l > 1$  allora  $\sum a_n$  diverge
- se  $l = 1$  tutto è possibile (bisogna cambiare criterio)

**Esempio:** Studio il carattere della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{2015}}{3^n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^{2015}}{3^{n+1}}}{\frac{n^{2015}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{2015}}{3 * 3^n} * \frac{3^n}{n^{2015}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} * \frac{(n+1)^{2015}}{n^{2015}} = \frac{1}{3} < 1 \text{ quindi la serie converge.}$$

### 9.9.2 Criterio della radice (CAUCHY)

Siano  $a_n \geq 0$  definitivamente e supponiamo che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

- Se  $l < 1$  allora  $\sum a_n$  converge
- Se  $l > 1$  allora  $\sum a_n$  diverge
- se  $l = 1$  tutto è possibile (bisogna cambiare criterio)

**Esempio:**  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} [(\log n)^{-\frac{n}{2}}]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\log n)^{-\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\log n}} = 0 < 1 \Rightarrow$  La serie converge.

### 9.9.3 Criterio del confronto

Supponiamo che  $0 \leq a_n \leq b_n$  definitivamente. Allora valgono le seguenti implicazioni:

- $\sum b_n$  converge  $\Rightarrow \sum a_n$  converge.
- $\sum a_n$  diverge a  $+\infty \Rightarrow \sum b_n$  diverge a  $+\infty$ .

**NB.** Le implicazioni inverse in generale non valgono.

**Esempio:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2 \Rightarrow 0 \leq \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{n^2} \forall n \geq 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge, dunque il criterio del confronto ci assicura che  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2$  converge.

### 9.9.4 Criterio del confronto asintotico

Date 2 successioni  $a_n$  e  $b_n$  a termini definitivamente positivi se  $a_n \sim b_n$  (ovvero se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ ), allora le corrispondenti serie  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  hanno lo stesso carattere.

**Esempio:**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{n^3-3n} \sim \frac{1}{n^2} \rightarrow$  converge a 0.

### 9.9.5 Criterio dell'assoluta convergenza

Una serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  si dice **assolutamente convergente** se la serie dei moduli ad essa associata  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  è **convergente**. Come studiare il carattere della serie associata?

- Studio il carattere di  $|a_n|$  essendo questa per forza ora una serie a termini positivi uso i criteri delle serie a termini non negativi.
  - Se la serie dei moduli ( $|a_n|$ ) **converge**, allora la serie di partenza **convergerà assolutamente**.
  - Se la serie dei moduli ( $|a_n|$ ) diverge (positivamente dato che è per forza a termini positivi), allora la serie di partenza ( $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ) non convergerà assolutamente, **converge o diverge semplicemente**.

**NB.** Per capire se converge o diverge semplicemente va trovato un nuovo modo nonostante il criterio usato dentro all'assoluta convergenza abbia dato la divergenza come soluzione. (**Fai il limite della condizione necessaria di convergenza**)

### 9.9.6 Criterio di Leibniz

Sia  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$  una serie di segno variabile, con  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Se valgono le seguenti ipotesi:

1. Esiste il limite:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
2.  $a_n$  sia definitivamente decrescente, quindi basta verificare che:  $a_n \geq a_{n+1}$ .

Se entrambe valgono allora, il criterio di Leibniz stabilisce che la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$  converge.

**Nel caso in cui uno dei due punti non fosse verificato:**

- Se non vale la **condizione 1** allora la serie **diverge**.
- Se vale la condizione 1 ma non vale la condizione 2, allora il criterio di **Leibniz non si può applicare**, bisogna cambiare criterio.

# 10 Convergenza degli Integrali

## 10.0.1 Integrali imprimi

Tipo integrale	Forma	Converge se	Diverge se	
Vicino a 0	$\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$	$p < 1$	$p \geq 1$	
	$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$	$\alpha < 1, \forall \beta \text{ oppure } \alpha = 1, \beta > 1$	$\alpha > 1$	*
Vicino a $+\infty$	$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$	$p > 1$	$p \leq 1$	
	$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log x)^\beta} dx$	$\alpha > 1, \forall \beta \text{ oppure } \alpha = 1, \beta > 1$	$\alpha < 1 \text{ oppure } \alpha = 1, \beta \leq 1$	
Vicino a $\infty$	$\int_a^{+\infty} \frac{C}{e^{kx}} dx$	$k > 0$	$k \leq 0$	$C \text{ è una costante}$

\*

- se la potenza  $x^{-\alpha}$  è “troppo aggressiva” ( $\alpha > 1$ ) nessun log ti salva.
- se  $\alpha < 1$  sei già al sicuro, il log non importa.
- Se sei nel caso critico  $\alpha = 1$ , allora il log decide: serve  $\beta > 1$ .

# Parte IV

# Equazioni Differenziali

L'ordine di un'equazione differenziale è il massimo ordine di derivazione che compare (esempio:  $f'''(x) + 3f'(x) = 9x$  è di ordine 3)

Esempio:

$$f'(x) = x \Rightarrow y' = x \rightarrow \text{equazione di 1° ordine.}$$

Le equazioni di **1° Ordine** possono essere:

1. Equazioni differenziali “Elementari” (e **Problemi di Cauchy**)
2. Equazioni differenziali a **variabili separabili**
3. Equazioni differenziali **lineari**

## 11 Equazioni di 1° Grado

### 11.1 Equazioni differenziali “ELEMENTARI” e “PROBLEMI DI CAUCHY”

#### 11.1.1 Tipologia 1

$$y' = f(x)$$

Basta integrare:  $y = \int f(x)dx = F(x) + c$

Esempio:

$$y' = 3e^{2x} \Rightarrow y = \int 3e^{2x}dx = 3 \int e^{2x}dx = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$

#### 11.1.2 Tipologia 2

$$y'' = f(x)$$

Basta integrare 2 volte:

$$\begin{aligned} y' &= \int f(x)dx = F(x) + c_1 \\ y &= \int y' dx = \int [F(x) + c_1]dx = F(x) + c_1x + c_2 \end{aligned}$$

Esempio:

$$y'' = 2 - \cos x$$

$$y' = \int (2 - \cos x)dx = 2x - \sin x + c_1$$

$$y = \int (2x - \sin x + c_1) dx = x^2 + \cos x + c_1 x + c_2$$

$$y(x) = x^2 + \cos x + c_1 + c_2 \text{ (soluzione generale)}$$

### 11.1.3 Problema di CAUCHY

$\begin{cases} \text{Equazione differenziale} \\ \text{Condizioni iniziali (tante quanti i parametri da determinare)} \end{cases}$

Esempio 1:

$$\begin{cases} y' = -e^{-x} & y = \int (-e^{-x}) dx = e^{-x} + c \\ y(0) = 3 & 3 = e^0 + c \Rightarrow c = 2 \end{cases} \Rightarrow y(x) = e^{-x} + 2$$

Esempio 2:

$$\begin{cases} y' = x & y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow y = \int (\frac{x^2}{2} + c_1) dx = \frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2 \\ y(0) = 1 & 1 = \frac{0^3}{6} + c_1 * 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1 \\ y'(0) = 4 & 4 = \frac{0^2}{2} + c_1 \Rightarrow c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{x^3}{6} + x + 4$$

## 11.2 Equazioni differenziali “A variabili separabili”

Sono equazioni che si possono ricondurre alla forma:  $y' = f(x) * g(y)$ , ad esempio:  $y' = \ln x$  oppure  $y' = e^x y \ln y$

Strategia risolutiva:

1. Separo le variabili  $x$  e  $y$
2. Integro ciascun membro alla variabile da cui dipende
3. Ricavo  $y(x)$

Esempio 1:

$$y' = y^2 \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \ln x \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = \ln x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int \ln x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x \ln x - x + c \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{x \ln x - x + c} \text{ (va bene anche } y(x) = 0\text{)}$$

Esempio 2:

$$\begin{cases} y' = \sin x e^y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sin x e^y \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int \sin x dx \Rightarrow e^{-y} = -\cos x + c \Rightarrow y(x) = -\ln(\cos x + c) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow -\ln(\cos(\frac{\pi}{2}) + c) = 1 \Rightarrow \ln(c) = -1 \Rightarrow c = \frac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow y(x) = -\ln(\cos x + \frac{1}{e})$$

**NB.**  $y' = f(x) * g(y)$  se  $\exists \bar{y} \in \mathbb{R} / g(\bar{y}) = 0 \Rightarrow y(x) = \bar{y}$  è una soluzione dell'equazione differenziale. (Conviene prima cercare questo tipo di soluzione e poi proseguire con il procedimento standard)

## 11.3 Equazioni lineari del “1° Ordine”

$$y'(x) = a(x)y(x) + f(x)$$

soltanente si presentano nelle forme:

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

Esempi:

- $y' = xy + 2x$
- $y' + \frac{y}{x} = 4x^2$

Pre check:

- Se  $a(x) = 0$  è elementare
- Se  $f(x) = 0$  (omogenea) diventa a variabili separabili

Se non è nessuno dei due casi descritti procedo con un nuovo sistema:

1. Sposto a sinistra dell'uguale tutti gli elementi che hanno la “ $y$ ”, lascio a destra quelli che hanno solamente la “ $x$ ”
2. Calcolo la primitiva (integrale) di  $a(x)$  ( $A(x) = \int a(x) dx$ )

3. Applico la formula:  $y(x) = e^{-A(x)} * \int f(x) * e^{A(x)} dx + ce^{-A(x)}$ , spesso torna utile risolvere l'integrale per parti i con la sostituzione dell'esponente della "e"

Esempio 1:

$$y'(x) = -xy(x) = 2x$$

1. Sposto i termini:  $y' + xy = 2x$
2. Calcolo la primitiva:  $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$
3. Applico la formula:  $y = e^{-\frac{x^2}{2}} * \int 2x * e^{\frac{x^2}{2}} dx + ce^{-\frac{x^2}{2}}$
4. Risolvo e scrivo il risultato come:  $y(x) = 2 + \frac{c}{e^{\frac{x^2}{2}}}$

Osservazione 1: Se  $a(x)$  e  $f(x)$  sono funzioni continue in un certo intervallo  $I$ , allora  $y(x) = e^{-A(x)} \int f(x)e^{A(x)} dx + ce^{-A(x)}$  è la soluzione generale  $\forall x \in I$

Osservazione 2: La costante arbitraria  $c \in \mathbb{R}$  può essere determinata se viene fornita una condizione iniziale del tipo:  
 $y(x_0) = y_0$  con  $x_0 \in I \Rightarrow \begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

## 12 Equazioni di 2° Grado

Si presentano nella forma  $y''(x) + y'(x) + y(x) = f(x)$ , possono avere  $f(x) = 0$ , in questo caso sono dette omogenee.  
**NB.** Lineari si intende che la  $y(x)$  e le sue derivate non sono moltiplicate e divise tra loro, NON sono nemmeno moltiplicate per altri reali.

### 12.1 Omogenee

Si presentano nella forma  $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ . con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**NB.** Possono mancare termini, non può mai mancare  $y''(x)$ , altrimenti sarebbe di 1° Grado).

Soluzione generale:  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

Per risolvere l'equazione caratteristica devo risolvere in  $\mathbb{C}$ :  $az^2 + bz + c = 0$ .

- 2 soluzioni reali distinte ( $\Delta > 0$ ):  $\lambda_1, \lambda_2 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
- 2 soluzioni reali coincidenti ( $\Delta = 0$ ):  $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$
- 2 soluzioni complesse ( $\Delta < 0$ ):  $\lambda_{1/2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

Esempio 1:

$$y'' - 5y' + 4y = 0$$

$$\text{Eq. caratteristica: } z^2 - 5z + 4 = 0, \Delta = 9 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \{1, 4\}$$

$$\text{Soluzione generale: } y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^x$$

Esempio 2:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Eq. caratteristica: } z^2 + 2z + 2 = 0, \Delta = -4 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm i\sqrt{4}}{2} = \{-1 + i, -1 - i\}, \text{ con } \alpha = -1, \beta = 1$$

$$\text{Soluzione generale: } y = c_1 e^{-x} \cos(x) + c_2 e^{-x} \sin(x)$$

Dobbiamo ora risolvere il problema di Cauchy:

$$y' = [c_1 e^{-x} \cos(x)]' + [c_2 e^{-x} \sin(x)]' = -c_1 e^{-x} \cos(x) - c_1 e^{-x} \sin(x) - c_2 e^{-x} \sin(x) + c_2 e^{-x} \cos(x) = c_1 (-e^{-x} \cos(x) - e^{-x} \sin(x)) + c_2 (-e^{-x} \sin(x) + e^{-x} \cos(x))$$

$$y(0) = 1 \iff c_1 e^{-0} \cos(0) + c_2 e^{-0} \sin(0) = 1 \iff c_1 = 1$$

$$y'(0) = 1 \iff c_1 (-e^{-0} \cos(0) - e^{-0} \sin(0)) + c_2 (-e^{-0} \sin(0) + e^{-0} \cos(0)) = 1 \iff c_1(-1) + c_2(1) = 1 \iff c_2 = 2$$

$$\text{Soluzione particolare: } y = e^{-x} \cos(x) + 2e^{-x} \sin(x) = e^{-x} (\cos(x) + 2\sin(x))$$

## 12.2 Variazione delle costanti

Forma:  $y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$

Processo risolutivo:

- Determino la soluzione generale dell'equazione omogenea associata:

$$y_o(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

- Trovo una soluzione particolare della forma:

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

$$\text{Per trovare } c_1(x) \text{ e } c_2(x) \text{ risolvo:} \begin{cases} c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0 \\ c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) = f(x) \end{cases}$$

- Calcolo la soluzione generale sommando  $y_0(x)$  e  $y_p(x) \Rightarrow y(x) = y_o(x) + y_p(x)$

Esempio:

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^4}$$

- $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1$

$$y_o(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

- $\begin{cases} c'_1(x)e^x + c'_2(x)x e^x = 0 \\ c'_1(x)e^x + c'_2(x)[e^x + x e^x] = \frac{e^x}{x^4} \end{cases} \quad \begin{cases} c'_1(x) = -\frac{1}{x^3} \\ c'_2(x) = \frac{1}{x^4} \end{cases}$

Per trovare  $c_1(x)$  e  $c_2(x)$  calcolo le primitive di  $c'_1(x)$  e  $c'_2(x)$ :

$$c_1(x) = \int c'_1(x) dx = - \int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2x^2}$$

$$c_2(x) = \int c'_2(x) dx = \int \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3x^3}$$

**NB.** Non servono i “+c” in quanto ci interessa una soluzione particolare.

Soluzione particolare:  $y_p(x) = \frac{1}{2x^2} e^x - \frac{1}{3x^3} x e^x = \frac{e^x}{6x^2}$

- $y(x) = y_o(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{e^x}{6x^2} \rightarrow$  E' la soluzione generale.