

Prova scritta di Metodi Matematici per l'Informatica

Corso di Laurea in Informatica

4 Marzo 2014

Avvertenza: dare giustificazioni dettagliate del ragionamento

4 3 1. (5 punti)

Si consideri l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali e si consideri la seguente relazione:

$$x \mathcal{R} y \iff \exists k \in \mathbb{N} \mid x = ky$$

Dire di quali proprietà (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva) gode la relazione \mathcal{R} e:

- se si tratta di una relazione di equivalenza, dire quali sono le classi di equivalenza;
- se si tratta di una relazione d'ordine dire se si tratta o no di una relazione d'ordine totale (dare una giustificazione della risposta).

4 3 2. (5 punti)

Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$, l'intero $2^{2n} - 1$ è divisibile per 3.

8 3 3. (8 punti)

Si scriva quante parole esistono di lunghezza 10 sull'alfabeto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ contenenti al massimo tre vocali.

8 7 4. (12 punti)

Sia M l'insieme delle matrici 4×3 contenenti elementi in

$$A = \{f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}\}.$$

Calcolare la cardinalità del sottoinsieme delle matrici di M tali che nessuna delle seguenti condizioni è verificata:

- nella prima riga ci sono funzioni di A tali che i numeri pari hanno come immagine una consonante, e i numeri dispari una lettera qualunque;
- nella terza colonna ci sono funzioni iniettive.

Prova Scritta di MMI - 4 Marzo 2014

1) $xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / x = ky$

Riflessiva?

$xRx \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} / x = kx$ per $k=1$ $x=x$

RIFLESSIVA

Simmetrica?

$xRy \Rightarrow yRx$

$x = ky \Rightarrow y = kx$ NO!

Controesempio: $x=6$ $y=2$

$6R2 \Rightarrow 6 = k2$ Vero per $k=3$

$2R6 \Rightarrow 2 = k6$ Vero per $k = \frac{1}{3}$

ma $\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ quindi

$2 \nR 6$

NO SIMMETRICA

Antisimmetrica?

$xRy, yRx \Rightarrow x=y$

$x = ky, y = kx \Rightarrow x=y$ per $k=1$

ANTISIMMETRICA

~~Transitiva?~~

Transitiva?

$xRy, yRz \Rightarrow xRz$

$x = ky, y = jz \Rightarrow x = iz$ $k, j, i \in \mathbb{N}$

$y = \frac{x}{k}$ $\frac{x}{k} = \frac{jz}{j} \Rightarrow x = \underbrace{j \cdot k}_i z \Rightarrow x = iz$

TRANSITIVA

Relazione d'ordine.

Totale o parziale?

Se fosse Totale, $\forall(x,y) \Rightarrow xRy \vee yRx$

Controesempio: $x=5$ $y=3$ i 2 numeri non sono proporzionali per nessun $k \in \mathbb{N}$. Quindi:

~~5R3~~ e ~~3R5~~.

RELAZIONE D'ORDINE PARZIALE

2) $2^{2^m} - 1 = 3p$ $p \in \mathbb{N}$ per $\forall m \geq 1$

Base induttiva: $m=1$

$$2^2 - 1 = 3p$$

$$3 = 3p \quad \text{OK per } p=1$$

Passo induttivo:

$$2^{2(m+1)} - 1 = 3q \quad q \in \mathbb{N}$$

$$2^{2m+2} - 1 = 3q$$

$$2^{2m} \cdot 2^2 - 1 = 3q$$

(si aggiunge e si toglie "1" a 2^{2m})

$$(2^{2m} - 1 + 1) \cdot 2^2 - 1 = 3q$$

$$(3p + 1) \cdot 4 - 1 = 3q$$

$$12p + 4 - 1 = 3q$$

$$12p + 3 = 3q$$

$$3(4p + 1) = 3q \Rightarrow 3q = 3q$$

9

$$3) A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

c = consonanti

v = vocali

Caso 0 vocali:

c c c c c c c c c c

$$D_{4,10} = 4^{10}$$

Caso 1 vocale:

v c c c c c c c c c

$$D_{2,1} \cdot D_{4,9} \cdot C_{10,1} = 2 \cdot 4^9 \cdot 10$$

Caso 2 vocali:

v v c c c c c c c c

$$D_{2,2} \cdot D_{4,8} \cdot C_{10,2} = 2^2 \cdot 4^8 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2} = 4^9 \cdot 5 \cdot 9$$

Caso 3 vocali:

v v v c c c c c c c

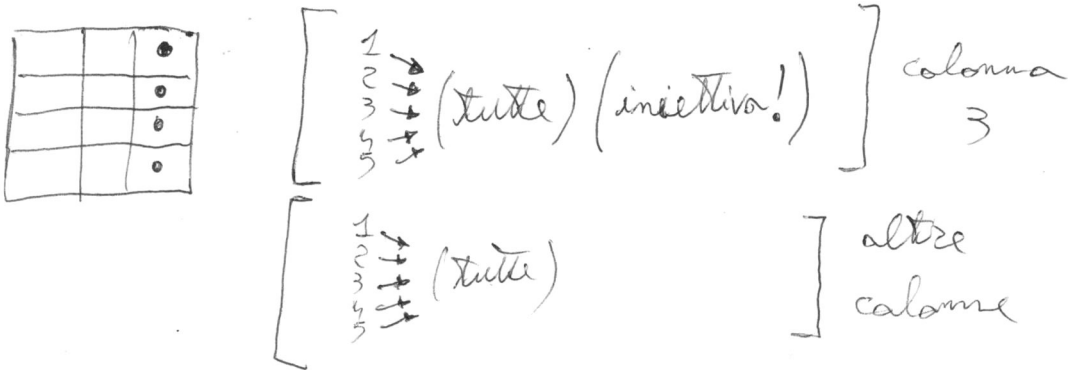
$$D_{3,2} \cdot D_{4,7} \cdot C_{10,3} = 2^3 \cdot 4^7 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7! \cdot 3 \cdot 2} = 8 \cdot 4^7 \cdot 5 \cdot 3$$

Summa diretta (poiché non esistono intersezioni ovvero, una parola non può contemporaneamente avere 0 vocali e 1 vocale o 1 vocale e 2 vocali, ecc...):

$$4^{10} + 2 \cdot 4^9 \cdot 10 + 4^9 \cdot 5 \cdot 9 + 8 \cdot 4^7 \cdot 5 \cdot 3$$

Caso 2: (Y)

Y: {matrici dove nella terza colonna ci sono funzioni iniettive}

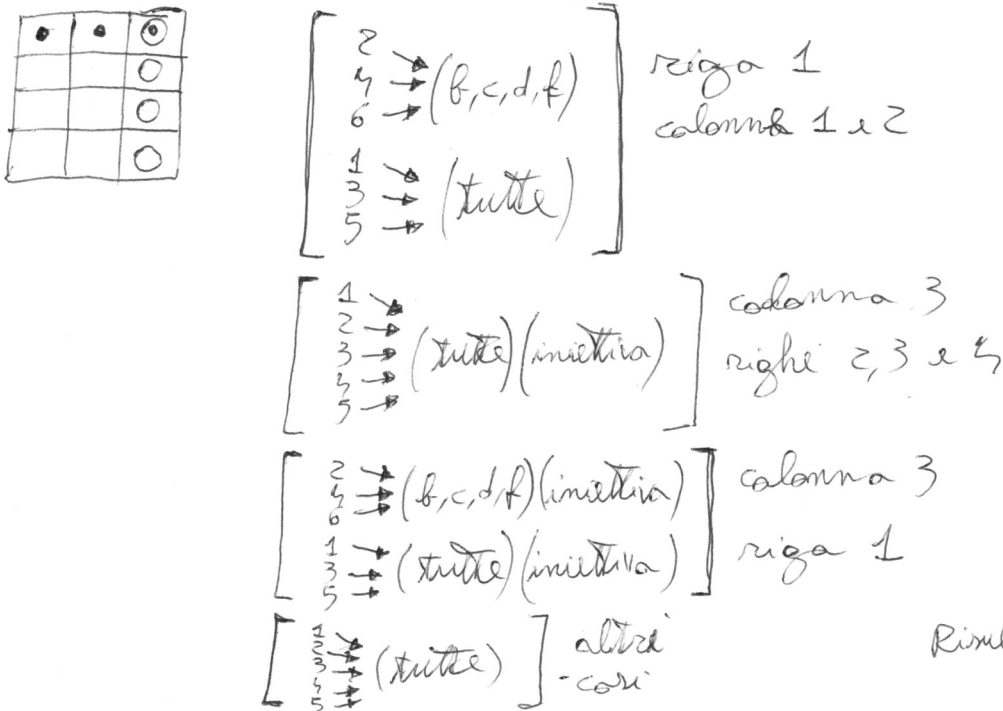


$$|Y| = (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^4 \cdot (6^5)^8$$

in questo caso (SOLO in questo caso...) si può scrivere anche:

$$|Y| = (6!)^4 \cdot (6^5)^8$$

Intersezione: (X ∩ Y)



$$\text{Risultato: } |A| - |X| - |Y| + |X \cap Y|$$

$$|X \cap Y| = (4^3 \cdot 6^3)^2 \cdot (6!)^3 \cdot ((4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4))^1 \cdot (6^5)^6$$

$$\text{LSC } \frac{14}{20} \cdot \frac{14}{09}$$