TRACCIA DI SOLUZIONE DEL 13.09.02

(proposta da Silvia Cariolo)

ESERCIZIO N° 1

principio di dimostrazione per induzione I: *Supponiamo che ad ogni numero naturale sia associata una proprietà P(n). Se accade che:*

1. *P(0) è vera;*
2. *$P(n^+)$ è vera ogni qualvolta è vera P(n);*

allora P(n) è vera per ogni $n \in N$.

la relazione data si scrive anche $4^{2n} - 3 \cdot 4^n - 4 = 3k$ con $k \in Z$.

Proviamo che 1) per n = 0 è vera: si ha $1 - 3 - 4 = -6 = 3k$ con $k \in Z$;

2) ammessa vera per n: $4^{2n} - 3 \cdot 4^n - 4 = 3k$ verifichiamo che è vera per n+1.

$4^{2(n+1)} - 3 \cdot 4^{n+1} - 4 = 4^{2n} \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 \cdot 4^n - 4 = 4^2\,(3 \cdot 4^n + 4 + 3k) - 3 \cdot 4 \cdot 4^n - 4 =$

$= 36 \cdot 4^n + 4^2 \cdot 3k + 4 \cdot 15 = 3\,\bar{k}$

$\Rightarrow \forall\, n \in N$ la relazione data è vera.

ESERCIZIO N° 2

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 2 \pmod 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 3 + 7k \\ x \equiv 2 + 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 7k = 2 + 5\lambda \\ x = 3 + 7k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7k - 5\lambda = -1 \\ x = 3 + 7k \end{cases}$$

risulta $\begin{matrix} k = 2 + 5t \\ \lambda = 3 + 7t \end{matrix}$ con $k, \lambda, t \in Z$.

Pertanto è $x = 3 + 7(2 + 5t) = 17 + 35\,t$; per t = 1 si ottiene la più piccola soluzione positiva divisibile per 4.

ESERCIZIO N° 3

Sono di immediata verifica le proprietà associativa e commutativa dell'operazione *.

Rispetto a tale operazione *, il numero 1 è l'elemento neutro; ogni $a \in Z$ è simmetrizzabile e il suo simmetrico è $a' = 2 - a$.

La struttura (Z, *) risulta pertanto un gruppo abeliano.

ESERCIZIO N° 4

Ricordiamo che un polinomio d(x) si dice che è un MCD fra due polinomi f(x) e g(x):

1. se *d(x)|f(x)* e *d(x)|g(x)*
2. se *q(x)|f(x)* e *q(x)|g(x)* allora *q(x)|d(x)*

Tra tutti i polinomi d(x) = (f(x), g(x)) quello monico è il MCD fra f(x) e g(x).

Un MCD fra due polinomi si può trovare sia con l'algoritmo di Euclide delle divisioni successive che col metodo della fattorizzazione di due polinomi; in quest'ultimo caso un MCd è dato dal prodotto dei fattori comuni dei due polinomi presi col minore esponente.

Determiniamo il MCD con il metodo della fattorizzazione:

$f(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ $\qquad$ $g(x) = 4x^3 - 18x + 4$

x = -1, 2 sono radici di f(x) e avendosi

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -9 & 4 & 12 \\
-1 & & -1 & 1 & 8 & -12 \\ \hline
 & 1 & -1 & -8 & 12 & = \\
2 & & 2 & 2 & -12 & \\ \hline
 & 1 & 1 & -6 & = & \\
2 & & 2 & 6 & & \\ \hline
 & 1 & 3 & = & &
\end{array}
$$

risulta $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2(x + 3)$

x = 2 è una radice di g(x) per cui è:

$$
\begin{array}{r|rrr|r}
 & 4 & 0 & -18 & 4 \\
2 & & 8 & 16 & -4 \\ \hline
 & 4 & 8 & -2 & =
\end{array}
$$

ed inoltre essendo le radici di $2x^2 + 4x - 1$: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+2}}{2}$

risulta $g(x) = 2(x-2)\left(x + \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\right)\left(x - \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}\right)$

Pertanto (f(x), g(x)) = (x - 2)

ESERCIZIO N° 5

Il determinante della matrice M_f associata all'applicazione lineare è $k[1 - (k-1)^2] = k[-k^2 + 2k]$, pertanto

a) se $k \neq 0, 2$ allora $r(M_f) = 3$ e quindi $\mathrm{Imf} = R^3$, $\mathrm{Kerf} = O_{R^3}$

b) se k = 0 allora $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r(M_f) = 1$

dim Imf = 1, Imf = $L[(1,0,1)]$ e le sue equazioni sono $\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

dim Kerf = 2 e la sua equazione è x - z = 0 e una base è costituita dai vettori $v_1=(1,0,1)$ e $v_2 = (0,1,0)$

c) se k = 2 allora $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r(M_f) = 2$

dim Imf = 2, Imf = $L[(1,0,1), (0,1,0)]$ e la sua equazione è $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ x - z = 0

dim Kerf = 1 e le sue equazioni sono $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ e una base è costituita dal vettore (1,0,-1)

ESERCIZIO N°7

L'equazione della parabola è del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con i coefficienti a, b, c soddisfacenti il sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ c = 0 \\ (b-2)^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0,\ b = 2,\ a = -1,$$ l’equazione è dunque $y = -x^2 + 2x$

ESERCIZIO N°8

Soluzione analoga all'esercizio n°7 del 12.06.02