ANNO ACCADEMICO 2001 - 2002
Corso di laurea triennale in INFORMATICA
Prova di FORMAZIONE DISCRETA assegnata il 13.09.2002

1) Provare che, per ogni $n \in N$, risulta:

$$4^{2n} - 3.4^{n} \equiv 4 \pmod 3$$

2) Risolvere in Z il sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \quad \text{mod } 7 \\ x \equiv 2 \quad \text{mod } 5 \end{cases}$$

e trovare, in particolare, la più piccola soluzione positiva divisibile per 4.

3) Studiare in Z la struttura (Z, *), dove a * b = a + b - 1.

4) Siano $f(x) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$ un polinomio in Q[x] ed $f'(x)$ il suo polinomio derivato. Trovare il MCD di $f(x)$ e $f'(x)$.

5) Studiare l'applicazione lineare definita in R^3 ed associata, rispetto alle basi canoniche, alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k-1 \\ 0 & k & 0 \\ k-1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

determinando, in particolare, *Im f* e *Ker f*.

6) Sono assegnati il punto A = (0,1,2), le rette r: $x + z = 0$, $x - 2y + 4 = 0$, s: $x = 1 - t$, $y = 2t$, $z = 2 + t$, ed il piano α: $2y + z + 5 = 0$. Trovare:
   a) la retta per A complanare ad r e ad s;
   b) la retta per A e parallela ad r;
   c) la retta per A e ortogonale ad α;
   d) la proiezione ortogonale di r su α.

7) Trovare la parabola con l'asse parallelo alla retta $x = 0$, avente vertice di ascissa 1, passante per O = (0,0) ed ivi tangente alla retta $y = 2x$.

8) Trovare la sfera tangente in O al piano x - y + z = 0 e avente il centro sul piano 2y + z + 5 = 0.