ESERCIZIO N° 1

Sia $A = \{1,2,3,4\}$

1) quanti sono i sottoinsiemi di A e determinarli;
2) quanti sono i sottoinsiemi di A che contengono 1 e quelli che non lo contengono;
3) quanti sono i sottoinsiemi di A che contengono 1 e 2;
4) quante sono le applicazioni $\gamma : A \to A$? E quante di esse sono biunivoche?
5) quante relazioni è possibile definire in A?
6) quante sono le relazioni di equivalenza che è possibile definire in A?
7) quante sono le relazioni di equivalenza in A tali che 2 R 3?

---

1) $|P(A)| = 2^4 = 16$

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, A\}$

2) $|P(A - \{1\})| = 2^3$ rappresenta il numero dei sottoinsiemi diA che non contengono 1 e coincide col numero dei sottoinsiemi di A che contengono 1. Questo numero si può ottenere come differenza tra la cardinalità dell'insieme delle parti di A ($|P(A)| = 16$) e la cardinalità dell'insieme delle parti di $A - \{1\}$($|P(A - \{1\})| = 8$), quindi 16 – 8 = 8, oppure considerando i sottoinsiemi di A che non contengono 1 (e sono 8) e ad ognuno di essi aggiungiamo l'elemento 1, quindi abbiamo ancora 8 sottoinsiemi.

3) $|P(\{3,4\})| = 2^2$

4) si hanno 4 possibilità di scelta per l'immagine di 1, così pure per 2,3 e 4, per cui le applicazioni $\gamma : A \to A$ sono: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$. In generale se $|A| = n \quad \Rightarrow \quad |A^A| = n^n$.

Se si vogliono le applicazioni biunivoche: una volta fissata l'immagine di 1(in 4 modi possibili) il corrispondente di 2 è possibile sceglierlo in 3 modi diversi, il corrispondente di 3 in 2 modi ed il corrispondente di 4 in un solo modo. Si ha $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$. In generale se $|A| = n$ le applicazioni biunivoche di A in A sono n!.

5) Una relazione binaria su A è un sottoinsieme di
$A \times A \quad \Rightarrow \quad |A \times A| = 16 \quad \Rightarrow \quad |P(A \times A)| = 2^{16}$

in generale se $|A| = n$ le relazioni su A sono 2^{n^2} .

6) Le relazioni di equivalenza sono tante quante le possibili partizioni di A:

– $P_1(A) = \{\{1,2,3,4\}\}$
– $P_2(A) = \{\{1,2,3\}, \{4\}\}$, $\quad P_3(A) = \{\{1,2,4\}, \{3\}\}$, $\quad P_4(A) = \{\{1,3,4\}, \{2\}\}$, $\quad P_5(A) = \{\{2,3,4\}, \{1\}\}$
– $P_6(A) = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$, $\quad P_7(A) = \{\{1,3\}, \{2,4\}\}$, $\quad P_8(A) = \{\{1,4\}, \{2,3\}\}$
– $P_9(A) = \{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}\}, \dots \quad P_{12}(A) = \{\{2,3\}, \{1\}, \{4\}\}, \dots \quad P_{14}(A) = \{\{3,4\}, \{1\}, \{2\}\}$
– $P_{15}(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

8) Le relazioni di equivalenza su A per cui 2 R 3 sono quelle definite dalle partizioni $P_1(A), P_2(A), P_5(A), P_8(A), P_{12}(A)$: per cui sono 5.

ESERCIZIO N° 2

Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due applicazioni. Dimostrare che:

1) se $g \circ f$ è suriettiva allora g è suriettiva.
2) se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva.
3) se $g \circ f$ è biiettiva allora f è iniettiva e g è suriettiva.

---

1) $g \circ f$ suriettiva $\Leftrightarrow \forall c \in C \;\; \exists a \in A : g \circ f(a) = c$ ma

$g \circ f(a) = g(f(a)) \Rightarrow \exists b \in B, b = f(a) : g(b) = c \Rightarrow$ g è suriettiva.

2) $g \circ f$ iniettiva $\Leftrightarrow \forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 : g \circ f(a_1) \neq g \circ f(a_2) \Leftrightarrow g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$

$\Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow$ f iniettiva.

3) segue dalle 1) e 2).

ESERCIZIO N° 3 (18/01/2001)

Siano f e g due applicazioni $R \to R$ così definite: $f(x) = 5x + 2$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 3$.

a) Provare che esse sono biunivoche.
b) Verificare che $g \circ f \neq f \circ g$
c) Posto $\overline{g}(x) = \mu x + \lambda$, determinare tutti i valori di λ e μ ∈ Z tali che $\overline{g} \circ f = f \circ \overline{g}$

---

a) Un'applicazione $f : A \to B$ si dice biunivoca se è iniettiva e suriettiva.
Proviamo che è **iniettiva**, ossia che ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B.
(nel ns esercizio A=B=R)
Siano $x_1, x_2 \in R$ con $x_1 \neq x_2$ (#) allora:

$$f(x_1) \overset{?}{\neq} f(x_2)$$
$$5x_1 + \cancel{2} \overset{?}{\neq} 5x_2 + \cancel{2}$$
$$5x_1 \overset{?}{\neq} 5x_2$$
$$x_1 \neq x_2 \qquad \text{vero per ipotesi } (\#)$$

Proviamo che è **suriettiva**, ossia se ogni elemento di B è il corrispondente di qualche elemento di A.

$$\forall y \in R, \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad \exists x \in R : \quad y = f(x)$$

$$\text{Sia } y = 5x + 2 \in R \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y-2}{5} \overset{\substack{\text{poichè la sott. e} \\ \text{la div. sono op.} \\ \text{chiuse in R}}}{\in} R$$

Abbiamo provato allora che preso un qualunque $y \in R, \quad \Rightarrow \quad \exists x \in R : \quad y = f(x)$
Essendo, quindi, l'applicazione sia iniettiva che suriettiva, essa è biunivoca.

b) calcoliamo $g \circ f$ e $f \circ g$:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(5x+2) = \frac{5x+2}{2} + 3 = \frac{5x+8}{2} \qquad (1)$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}+3\right) = 5\left(\frac{x}{2}+3\right) + 2 = \frac{5x}{2} + 15 + 2 = \frac{5x+34}{2} \qquad (2)$$

Confrontando (1) e (2) si ha la tesi: $g \circ f \neq f \circ g$.

c) calcoliamo $\overline{g} \circ f$ e $f \circ \overline{g}$:

$$\overline{g} \circ f(x) = \overline{g}(f(x)) = \mu(5x+2) + \lambda = 5\mu x + 2\mu + \lambda \qquad (3)$$

$$f \circ \overline{g}(x) = f(\overline{g}(x)) = 5(\mu x + \lambda) + 2 = 5\mu x + 5\lambda + 2 \qquad (4)$$

per essere vera la tesi dovrà essere (3) = (4) , ossia:

$$\overline{g} \circ f(x) = f \circ \overline{g}(x)$$

$$5\mu x + 2\mu + \lambda = 5\mu x + 5\lambda + 2$$

$$2\mu + \lambda = 5\lambda + 2$$

$$\mu - 2\lambda = 1$$

$$\begin{cases} \mu = 1 + 2t \\ \lambda = t \end{cases} \qquad t \in Z$$

<u>ESERCIZIO N°4</u>

In $R \times R$ si consideri la relazione R definita da : $(x, y)\Re(x', y') \quad \Leftrightarrow \quad 2x + ky' = \lambda x' + 3y$.

Determinare:

a) λ e k in modo che R sia una relazione di equivalenza.
b) Il valore del parametro t affinché $(1+t, 1) \equiv (4, 3)$ e trovare la loro classe di equivalenza.
c) Le classi di equivalenza e rappresentarle geometricamente.

---

a) perché R sia una relazione di equivalenza è necessario che R goda delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

<u>Proprietà riflessiva</u>: $\forall (x, y) \in R \times R : (x, y)\Re(x, y)$ e cioè

$$2x + ky = \lambda x + 3y$$

$$(2-\lambda)x + (k-3)y = 0 \quad \forall x, y \in R \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Si dimostra facilmente che R gode delle proprietà simmetrica e transitiva $\Rightarrow$ R è una relazione di equivalenza.

b) $(1+t, 1) \equiv (4, 3) \quad \Leftrightarrow \quad 2(1+t) - 3 = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$(x, y) \equiv (1, 1) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 3y = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1$

la classe rappresentata da (1,1) è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (x,y) che soddisfano all'equazione $2x - 3y = -1$

$C((-1,1)) = \left\{ (x, y) \middle| y = \frac{1+2x}{3}, x \in R \right\}$ (geometricamente è la retta r : $2x - 3y = -1$)

c) $C((x',y')) = \left\{ (x,y) \middle| y = \frac{2}{3}(x-x') + y',\ x \in R \right\}$ è la retta parallela alla retta $y = \frac{2}{3}x$ e passante per (x’,y’).

La partizione di R^2 definita da R è il fascio improprio di rette parallele a $y = \frac{2}{3}x$.

<u>ESERCIZIO N°5</u>

Sia $a \neq 1$, provare che $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Dimostriamolo utilizzando il principio d’induzione.

Per $n = 0$ $\quad 1 = \frac{1-a}{1-a}$ VERA

Supponiamo che la tesi sia vera per n e dimostriamo che è vera per n+1

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1} + a^{n+1} - aa^{n+1}}{1-a} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

Col principio d’induzione, abbiamo provato che la tesi è vera per n=0 ed anche per n+1 ogni qualvolta è vera per n. Allora la tesi è vera $\forall n \in N$.