ESERCIZIO N° 1

Sia $A = \{2,4,8,16\}$, provare che A con la relazione R così definita:

$$aRb \Leftrightarrow \exists n \in N : a^n = b$$

è un insieme parzialmente ordinato.

Disegnare il diagramma dell'insieme A parzialmente ordinato con la relazione R. Trovare, se esiste, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di $B = \{2,4,8\}$ in A.

Una relazione binaria definita su un insieme A si chiama relazione di ordinamento parziale se gode delle proprietà riflessiva, transitiva e antisimmetrica.

Proviamo che R gode della PROPRIETA' RIFLESSIVA:

$$aRa \;\Leftrightarrow\; \exists n \in N : a^n = a \quad \forall a \in A \text{ per n=1 la propr. è VERA } \forall a \in A$$

Proviamo che R gode della PROPRIETA' TRANSITIVA:

$$aRb \;\wedge\; bRc \;\Rightarrow\; aRc \quad \forall a,b,c \in A$$

$$\left.\begin{array}{l} aRb \;\Leftrightarrow\; \exists n \in N : a^n = b \\ bRc \;\Leftrightarrow\; \exists m \in N : b^m = c \end{array}\right\} \overset{\text{sostituendo}}{\Rightarrow} \left(a^n\right)^m = c \Rightarrow a^{nm} = c \Rightarrow \exists í = nm \in N : a^í = c \Rightarrow aRc$$

la proprietà è quindi VERA $\forall a,b,c \in A$.

Proviamo che R gode della PROPRIETA' ANTISIMMETRICA:

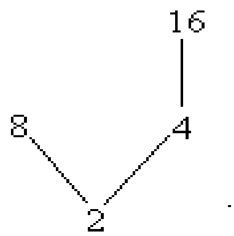
$$aRb \;\wedge\; bRa \;\Rightarrow\; a = b \quad \forall a,b \in A$$

$$\left.\begin{array}{l} aRb \;\Leftrightarrow\; \exists n \in N : a^n = b \\ bRa \;\Leftrightarrow\; \exists m \in N : b^m = a \end{array}\right\} \overset{\text{sostituendo}}{\Rightarrow} \left(a^n\right)^m = a \Rightarrow a^{nm} = a \Rightarrow nm = 1 \overset{\text{poichè } n,m \in N}{\Rightarrow} n = m = 1 \Rightarrow a = b$$

la proprietà è quindi VERA $\forall a,b \in A$.

Essendo verificate le proprietà riflessiva, transitiva e antisimmetrica R è una relazione di ordinamento parziale.

Per disegnare il diagramma dell'insieme A parzialmente ordinato si distribuiscono gli elementi dell'insieme su righe parallele rappresentate successivamente dall'alto verso il basso secondo il seguente criterio: si rappresentano sulla prima riga gli elementi ciascuno dei quali non è ≤ di alcun altro elemento di A; sia A' l'insieme dei rimanenti elementi; se è A'≠∅ si rappresentano nella seconda riga gli elementi di A' ciascuno dei quali non è ≤ di alcun altro elemento di A' e così via fino ad esaurire tutti gli elementi di A. Quindi si traccia un segmento di estremi a,b se è a≤b e non esiste alcun x∈A, x≠a, b tale che a ≤ x ≤ b.



Diremo che un elemento a∈B è l'estremo inferiore se esso è il massimo dei minoranti; nel nostro caso, ossia se verifica le seguenti proprietà:

1) a∈A e $\exists n \in N$: $a^n = b$ $\forall b \in B$;

2) b∈A : $\exists n \in N$: $b^n = x$ $\forall x \in B$ allora $\exists m \in N$: $b^m = a$;

2 è l'unico minorante: 2Ra ∀a∈B, per cui 2 è l'estremo inferiore e minimo di B in A.

Diremo che un elemento *a∈B* è l'estremo superiore se esso è il minimo dei maggioranti; nel nostro caso, ossia se verifica le seguenti proprietà:

1) a ∈ A e $\exists n \in N$: $b^n = a$ $\forall b \in B$;

2) b ∈ A e $\exists n \in N$: $x^n = b$ $\forall x \in B$ allora $\exists m \in N$: $a^m = b$;

Non esistono maggioranti di B in A, pertanto l'estremo superiore di B in A non esiste.

Per cui, essendoci in A un suo sottoinsieme che non ha estremo superiore, A non è completo; 8 e 16 sono massimi relativi di A e 2 è il minimo assoluto.

ESERCIZIO N°2

Rappresentare il numero 694 in base 5 e 568 in base 12, usando l'algoritmo per ottenere un numero in base b>1.

Per scrivere il numero 694 in base 5 si deve dividere 694 per 5 e successivamente dividere il quoziente ottenuto per 5 fino ad ottenere un quoziente minore di 5.

$$\begin{array}{rrrrrr} 694 & \multicolumn{1}{|l}{5} & & & & \\ \cline{2-2} 4 & \multicolumn{1}{r|}{138} & 5 & & & \\ \cline{3-3} & 3 & \multicolumn{1}{r|}{27} & 5 & & \\ \cline{4-4} & & 2 & \multicolumn{1}{r|}{5} & 5 & \\ \cline{5-5} & & & 0 & 1 & \end{array}$$

La rappresentazione cercata è: $694=(10234)_5$.

Per scrivere il numero 568 in base 12 si deve dividere 568 per 12 e successivamente dividere il quoziente ottenuto per 12 fino ad ottenere un quoziente minore di 12.

$$\begin{array}{rrr} 568 & \multicolumn{1}{|l}{12} & \\ \cline{2-2} 4 & \multicolumn{1}{r|}{47} & 12 \\ \cline{3-3} & 11 & 3 \end{array}$$

Ricordiamo che se il sistema scelto ha base n>10 dovremo aggiungere alle cifre indo - arabe altri simboli: di solito vengono usate le prime lettere maiuscole dell’alfabeto. Così in un sistema a base 12 occorreranno dodici simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B. Questi simboli letterali hanno in base dieci il seguente valore: $A_{10}=10$, $B_{10}=11$.
Pertanto, la rappresentazione cercata è $568=(3B4)_{12}$.

ESERCIZIO N°3

Risolvere la seguente congruenza: $x + 7 \equiv 3 \pmod 5$. (a)

Fissato $n\in N$ diremo che $a \equiv b \pmod n$ se $a – b = kn$ per qualche $k \in Z$; inoltre la congruenza in Z è una relazione di equivalenza, quindi vale la proprietà riflessiva, possiamo, quindi, scrivere:

$$-7 \equiv -7 \pmod 5 \qquad \text{(b)}$$

$$\overset{\substack{\text{sommando membro}\\ \text{a membro (a)+(b)}}}{\Rightarrow} \quad x \equiv -4 \pmod 5$$

$$\overset{\substack{-4\equiv 1 \pmod 5 \text{ e}\\ \text{per la prop. trans.}}}{\Rightarrow} \quad x \equiv 1 \pmod 5$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 + 5n$$

ESERCIZIO N°4

Risolvere la seguente congruenza: $12x \equiv 6 \pmod{15}$

$12x - 6 = 15y$
$12x - 15y = 6$ divido ambo i membri per 3
$4x - 5y = 2$ una soluzione è la coppia (3,2), allora
$x = 3 + 5k$

ESERCIZIO N°5

Tra le soluzioni intere del seguente sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ y \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

determinare quelle tali che:

a) x assuma il più piccolo valore positivo possibile;
b) y assuma il più grande valore negativo possibile;
c) x = 2y.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x \equiv 2 \pmod 3 \\ y \equiv 1 \pmod 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x = 2 + 3k \\ y = 1 + 4h \end{cases} \Rightarrow \quad 2(2 + 3k) + 3(1 + 4h) = 1 \Rightarrow 6k + 12h = -6 \Rightarrow k + 2h = -1$$

una soluzione è la coppia (-3,1), allora:

$$\begin{cases} k = -3 - 2t \\ h = 1 + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 3(-3 - 2t) \\ y = 1 + 4(1 + t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 - 6t \\ y = 5 + 4t \end{cases}$$

a) $t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -7 + 12 = 5 \\ y = 5 - 8 = -3 \end{cases}$ la soluzione richiesta è la coppia (5, -3)

b) $t = -2 \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 8 = -3 \\ x = -7 + 12 = 5 \end{cases}$ la soluzione richiesta è la coppia (5, -3)

c) $x = 2y \Rightarrow -7 - 6t = 2(5 + 4t) \Rightarrow 14t = -17 \Rightarrow t = -\frac{17}{14} \notin Z$ non esiste una coppia ordinata di interi relativi soluzione del sistema assegnato che verifichi la condizione c).

ESERCIZIO N°6

Determinare i valori di $n \in N$, $n \leq 10$ in corrispondenza ai quali il seguente sistema

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 4 \\ x \equiv 8 \pmod n \end{cases}$$

abbia soluzioni. Nei casi possibili determinare le soluzioni.

$$\begin{cases} x = 1 + 4k \\ x = 8 + nh \end{cases} \Rightarrow \quad 1 + 4k = 8 + nh \Rightarrow 4k - nh = 7$$

n non può essere pari perché il secondo membro è dispari. Pertanto i casi possibili sono n=1,3,5,7,9

$n = 1 \Rightarrow x = 1 + 4k$ perché nel sistema assegnato la seconda congruenza è verificata $\forall x \in Z$;

$n = 3 \Rightarrow 4k - 3h = 7$ una soluzione è (1, -1) allora $\begin{cases} k = 1 + 3t \\ h = -1 + 4t \end{cases} \Rightarrow x = 1 + 4(1 + 3t) = 5 + 12t$

$n = 5 \Rightarrow 4k - 5h = 7$ una soluzione è (3, 1) allora $k = 3 + 5t \Rightarrow x = 1 + 4(3 + 5t) = 13 + 20t$

$n = 7 \Rightarrow 4k - 7h = 7$ una soluzione è (7, 3) allora $k = 7 + 7t \Rightarrow x = 1 + 4(7 + 7t) = 29 + 28t$

$n = 9 \Rightarrow 4k - 9h = 7$ una soluzione è (4, 1) allora $k = 4 + 9t \Rightarrow x = 1 + 4(4 + 9t) = 17 + 36t$

ESERCIZIO N° 7

Trovare il più piccolo numero primo soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x \equiv -1 \pmod 3 \\ x \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$$

$\begin{cases} x+1=3h \\ x-3=5k \end{cases} \Rightarrow$ 3h – 1 = 5k + 3 $\Rightarrow$ 3h –5k = 4 una soluzione è la coppia (3,1), allora

h = 3 + 5t $\Rightarrow$ x + 1 = 3(3 + 5t) $\Rightarrow$ x = 15t + 8

per avere il più piccolo numero primo soluzione del sistema basta porre t = 1 $\Rightarrow$ x = 23.

Poiché i moduli 3 e 5 sono coprimi, allora il sistema, per il teorema cinese del resto ammette soluzioni, che sono gli interi $x' = \bar{x} + kM$, dove x = $-1\cdot x_1 + 3\cdot x_2$ e M=3*5=15, k$\in$Z.

I numeri x_1 e x_2 sono ognuno una soluzione particolare dei seguenti due sistemi:

(1) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 3 \\ x \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$

i due numeri m_1=3 e k_1=5 sono coprimi per cui è $1=5r_1+3s_1$ da cui $x_1=r_1k_1=5r_1$ è una soluzione del sistema. Risulta r_1=2 e s_1=-3 e quindi x_1=10.

(2) $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod 3 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}$

i due numeri m_2=5 e k_2=3 sono coprimi per cui è $1=5r_2+3s_2$ da cui $x_2=r_2k_2=3r_2$ è una soluzione del sistema. Risulta r_2=2 e s_2=-3 e quindi x_2=6.

In conclusione $\bar{x} = -1x_1 + 3x_2 = -10 + 18 = 8$ e x' = 8 + 15t

per avere il più piccolo numero primo soluzione del sistema basta porre t = 1 $\Rightarrow$ x = 23.

ESERCIZIO N° 8

Determinare con il metodo delle divisioni successive (algoritmo di Euclide) il MCD(25,60) e trovare la relativa identità di Bezout.

$$\left.\begin{array}{l} 60 = 25\cdot 2+10 \\ 25 = 10\cdot 2+5 \\ 10 = 5\cdot 2+0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{M.C.D.}(60, 25) = 5$$

Troviamo la relativa identità di Bezout: dati due numeri a,b il cui M.C.D. è d allora $\exists$ x,y $\in$ Z : d=ax+by

Nel nostro caso: 5 = 60x + 25y

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 25-10\cdot 2 \\ 10 = 60-25\cdot 2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{sostituendo}} 5 = 25-(60-25\cdot 2)\cdot 2 = 25-60\cdot 2+25\cdot 4 = 25\cdot 5-60\cdot 2$$

L'identità di Bezout richiesta è $5 = 25\cdot 5 - 60\cdot 2$.

ESERCIZIO N° 9

Determinare con il metodo delle divisioni successive (algoritmo di Euclide) il MCD(84,90) e trovare la relativa identità di Bezout.

$$\left.\begin{array}{l} 90 = 84\cdot 1+6 \\ 84 = 6\cdot 14+0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{M.C.D.}(84,90) = 6$$

Troviamo la relativa identità di Bezout:

$6 = (-1)\cdot 84 + 1\cdot 90$

ESERCIZIO N°10

Provare che $\forall n \in N$ si ha $n^3 \equiv n(\mathrm{mod}\,6)$.

Dobbiamo provare che $n^3-n=6k$. Utilizziamo il principio d'induzione.
Se n=0 : 0=6k vera per k=0
Supponiamo che l'uguaglianza sia vera per n cioè che $n^3-n=6k$ e dimostriamo che è vera per n+1, cioè che $(n+1)^3-(n+1)=6k'$.
$(n+1)^3-(n+1)=6k'$

$$n^3+3n^2+3n+1-n-1=n^3-n+3n(n+1) \overset{\substack{\text{per l'ipotesi}\\ \text{induttiva}}}{=} 6k+3n(n+1)$$

Si possono allora presentare due casi:

1) n pari $\Rightarrow$ 3n è multiplo di 6
2) n dispari $\Rightarrow$ n+1 è pari $\Rightarrow$ 3(n+1) è multiplo di 6

in ogni caso $3n(n+1)=6t \Rightarrow 6k+3n(n+1)=6k+6t=6(k+t)=6k'$.
col principio d'induzione abbiamo provato che la tesi è vera per n=0 ed anche per n+1 ogni qualvolta è vera per n. Allora la tesi è vera $\forall n \in N$.

ESERCIZIO N° 11

Provare che $\forall n \in N$ si ha $(n^2+1)>\log_2(n+1)$

Per provare la tesi possiamo provare che:

$$(n^2+1)\log_2 2=\log_2 2^{n^2+1}>\log_2(n+1) \overset{\substack{\log_2 \text{ è una}\\ \text{funz. cresc.}}}{\Leftrightarrow} 2^{n^2+1}>n+1$$

Utilizziamo il principio d'induzione.
Se n=0 : $2^{0+1}>0+1 \Rightarrow 2>1$ vera

$$2^{n^2+1}>n+1$$

Supponiamo che l'uguaglianza sia vera per n cioè che $2^{n^2+1}>n+1$ e dimostriamo che è vera per n+1, cioè che $2^{(n+1)^2+1}>n+1+1$

$$2^{(n+1)^2+1}=2^{(n^2+1)+2n+1} \overset{\substack{\text{per l'ip.}\\ \text{induttiva}}}{>} (n+1)\cdot 2=n+1+n+1 \overset{\text{poichè } n>0}{>} n+1+1 \text{ cioè la tesi.}$$

col principio d'induzione abbiamo provato che la tesi è vera per n=0 ed anche per n+1 ogni qualvolta è vera per n. Allora la tesi è vera $\forall n \in N$.