ESERCIZIO N°1

In $R^* \times N$ è definita l'operazione $\oplus$ nel seguente modo:

$$(\alpha, n) \oplus (\beta, m) = (\alpha\beta^n, n\cdot m).$$

Provare che $(R^* \times N, \oplus)$ è un semigruppo. E' commutativo?

Posto $a = (2, 2)$ e $b = (1, 2)$ provare che $(a \oplus b)^2 \neq a^2 \oplus b^2$.

$\alpha\beta^n \in R^*$ e $n\cdot m \in N$ $\forall \alpha,\beta \in R^*$ e $\forall n,m \in N$ $\Rightarrow$ $(R^* \times N, \oplus)$ è un gruppoide.

$\forall (\alpha, n), (\beta, m), (\gamma, p) \in R^* \times N$ si ha:

$$\mathbf{((\alpha, n) \oplus (\beta, m)) \oplus (\gamma, p) =}$$
$$= (\alpha\beta^n, n\cdot m) \oplus (\gamma, p) =$$
$$= (\alpha\beta^n \gamma^{n\cdot m}, n\cdot m\cdot p) =$$
$$= (\alpha(\beta \gamma^m)^n, n\cdot m\cdot p) =$$
$$= (\alpha, n) \oplus (\beta\gamma^m, m\cdot p) =$$
$$\mathbf{= (\alpha, n) \oplus ((\beta, m) \oplus (\gamma, p))}$$

$\Rightarrow$ $(R^* \times N, \oplus)$ è un semigruppo.

Verifichiamo se è commutativo, ossia se $(\alpha, n) \oplus (\beta, m) = (\beta, m) \oplus (\alpha, n)$:

$(\alpha, n) \oplus (\beta, m) = (\alpha\beta^n, n\cdot m)$

$(\beta, m) \oplus (\alpha, n) = (\beta\alpha^n, m\cdot n)$

per $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $n = m = 2$ non è vera $\Rightarrow$ l'operazione $\oplus$ non è commutativa.

Proviamo che posto $a = (2, 2)$ e $b = (1, 2)$ si ha: $(a \oplus b)^2 \neq a^2 \oplus b^2$.

$((2, 2) \oplus (1, 2))^2 = (2, 4)^2 = (2, 4) \oplus (2, 4) = (2^5, 16)$

$(2, 2)^2 \oplus (1, 2)^2 = (2^3, 4) \oplus (1, 4) = (2^3, 16)$

$\Rightarrow$ posto $a = (2, 2)$ e $b = (1, 2)$ si ha: $(a \oplus b)^2 \neq a^2 \oplus b^2$.

ESERCIZIO N°2

Posto $\overline{G} = (Z, +)$ ed osservato che $G = (\{-1, 1\}, \times)$, dove $\times$ è l'ordinaria moltiplicazione fra numeri, è un gruppo, si provi che l'applicazione $f : \overline{G} \to G$ così definita: $f(z) = (-1)^z$ è un omomorfismo.

G è chiuso rispetto all'operazione $\times$

$\times$ gode notoriamente della proprietà associativa e commutativa, 1 è l'elemento unità ed è l'inverso di se stesso. 1 è l'inverso di –1 $\Rightarrow$ G è un gruppo abeliano.

$f(z_1 + z_2) = (-1)^{z_1+z_2} = (-1)^{z_1} \cdot (-1)^{z_2} = f(z_1) \cdot f(z_2)$ $\forall z_1, z_2 \in Z$ $\Rightarrow$ f è un omomorfismo.

ESERCIZIO N°3

+ e * indicano rispettivamente l'ordinaria addizione e moltiplicazione fra razionali, si provi che la struttura $\overline{S} = (Q, +, *)$ è un campo essendo * l'operazione così definita: $x * y = \frac{5}{9} x \cdot y$, $\forall x, y \in Q$.

Posto $S = (Q, +, \cdot)$ si provi che l'applicazione $f : \overline{S} \to S$, $f(x) = \frac{5}{9} x$ è un omomorfismo verificando inoltre che è $f(1_{\overline{S}}) = 1_S$.

Sappiamo che (Q, +) è un gruppo abeliano, ossia che:

1) vale la proprietà associativa;
2) esiste l'elemento neutro;
3) ogni elemento ammette l'inverso.

L'operazione * è:

- associativa: $\forall x, y, z \in Q$

$$(x * y) * z = \frac{5}{9}x \cdot y * z = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} x \cdot y \cdot z = \frac{5}{9} x \cdot \frac{5}{9} y \cdot z = x * \frac{5}{9} yz = x * (y * z)$$

- commutativa : $\forall x, y \in Q \quad (x * y) = (y * x) \;\Rightarrow\; \frac{5}{9}xy = \frac{5}{9}yx$
- esiste l'elemento unità: $\forall x \in Q \quad x * e = x \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{9}xe = x \;\Rightarrow\; e = \frac{9}{5}$
- gli elementi diversi da zero sono invertibili: $\forall x \in Q, x \neq 0 \quad x * \overline{x} = e \;\Leftrightarrow\; x * \overline{x} = \frac{9}{5}$

$$\frac{5}{9} x\overline{x} = \frac{9}{5} \;\Rightarrow\; \overline{x} = \frac{81}{25x}.$$

Vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:

$$a * (b + c) = \frac{5}{9} a(b + c) = \frac{5}{9} ab + \frac{5}{9} ac = a * b + a * c \;\; \forall a, b, c \in Q$$

$\Rightarrow \overline{S}$ è un campo.

f è un omomorfismo, infatti:

$$\forall x, y \in Q \quad f(x + y) = \frac{5}{9}(x + y) = \frac{5}{9}x + \frac{5}{9}y = f(x) + f(y)$$

$$\forall x, y \in Q \quad f(x * y) = \frac{5}{9}x * y = \frac{5}{9}\frac{5}{9}xy = \frac{5}{9}x\frac{5}{9}y = f(x) * f(y)$$

$$f\left(\frac{9}{5}\right) = \frac{5}{9}\frac{9}{5} = 1$$

ESERCIZIO N°4

Verificare che l'insieme $M = Q-\{-2\}$ rispetto all'operazione $\circ$ così definita: $a \circ b = ab + 2a + 2b + 2$ risulta un gruppo abeliano.

Determinare gli elementi di M di ordine 2.

$(M, \circ)$ è chiuso rispetto all'operazione $\circ$, infatti: $a \circ b = ab + 2a + 2b + 2 = \mathbf{(a + 2)(b + 2) - 2 \neq - 2}$ $\forall a, b \in M$.

Si verifica facilmente che l'operazione $\circ$ è associativa e commutativa $\Rightarrow (M, \circ)$ è un semigruppo abeliano.

Verifichiamo che esiste l'elemento neutro:

$a \circ x = a \;\forall a \in M$

$a \circ x = ax + 2a + 2x + 2 = a \;\Leftrightarrow\; (x + 1)a + 2(x + 1) = 0 \;\; \forall a \in M \;\Rightarrow x = -1$

verifichiamo che ogni elemento è simmetrizzabile:

$a \circ x = -1 \;\forall a \in M$

$ax + 2a + 2x + 2 = - 1 \;\Rightarrow\; (a + 2)x = -3 - 2a \;\Rightarrow\; x = \frac{-3-2a}{a+2}$ è il simmetrico di a $\Rightarrow (M, \circ)$ è un gruppo abeliano.

Gli elementi di ordine 2 sono tra quelli per cui è: $a \circ a = - 1 \;\Rightarrow\; a^2 + 2a + 2a + 2 = - 1 \;\Rightarrow$ $a^2 + 4a + 3 = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = - 3$ e $a_2 = -1 \;\Rightarrow\; a_1 = - 3$ è l'unico di ordine 2 perché $a_2 = -1$ è l'elemento neutro ed è di ordine 1.