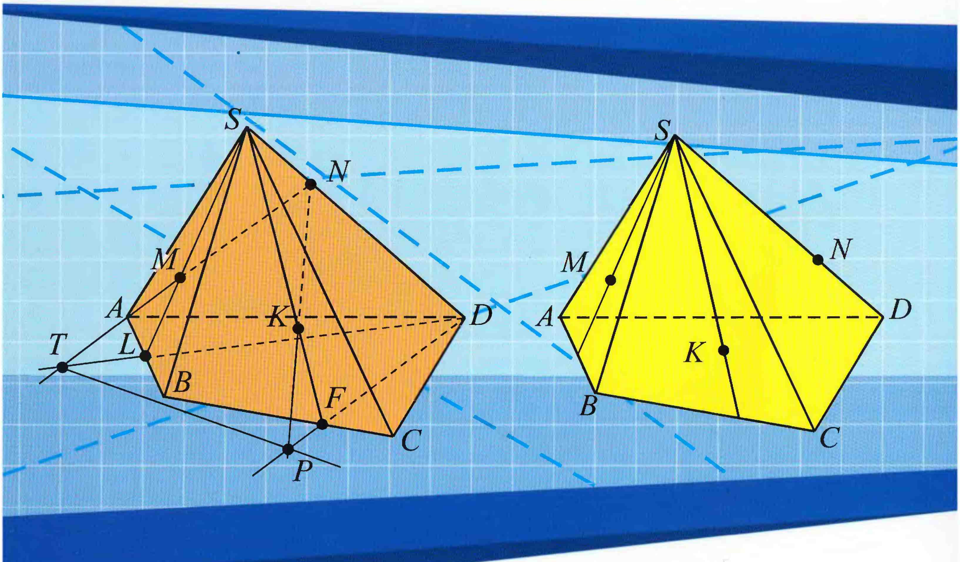
Под редакцией
Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ



ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЛЕГИОН ТМ

Учебно-методический комплекс
«Математика. Подготовка к ЕГЭ»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ

СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Учебно-методическое пособие

™
ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2016

ББК 22.1
Р 34

Рецензент:
С.Ю. Кулабухов — кандидат физико-математических наук.

Резникова Н.М., Фридман Е.М.

Р 34 **Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Сечения многогранников**: учебно-методическое пособие / Н.М. Резникова, Е.М. Фридман; под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2016. — 64 с. — (ЕГЭ).

ISBN 978-5-9966-0922-2

Задачи, связанные с сечениями многогранников, занимают важное место в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике. При этом в учебных программах школьного курса по геометрии отводится крайне мало часов на изучение этой темы, в связи с чем учебники содержат недостаточное количество задач. Предлагаемое пособие призвано разрешить это противоречие.

В начале пособия приведены краткие теоретические сведения. В первых двух разделах содержатся подготовительные задачи: в заданиях первого раздела необходимо в многограннике построить точку пересечения прямой и плоскости, провести отрезок, по которому плоскость сечения пересекает грань многогранника, и т.д. Во втором разделе представлены задания на построение сечений многогранника (призмы, пирамиды). В третьем — задачи, соответствующие заданию 14 профильного уровня ЕГЭ по математике.

Предлагаемое пособие будет полезно учащимся, самостоятельно осваивающим тему «Построение сечений многогранников», а также учителям математики, которые найдут в нём большое количество заданий, что послужит хорошим подспорьем в процессе изучения данной темы по действующим учебникам.

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0922-2

Оглавление

От авторов

Пособие является частью комплекса «Математика. Подготовка к ЕГЭ» и предназначено для помощи в подготовке к государственной итоговой аттестации в форме ЕГЭ по математике. Книга содержит краткие теоретические сведения, которые помогут учащимся восстановить в памяти необходимый материал для решения всех задач данного пособия. В процессе решения заданий первого раздела пособия в различных видах многогранников учащиеся научатся строить точку пересечения прямой и плоскости, проводить отрезок, по которому плоскость сечения пересекает грань многогранника, и т.д.

Задания второго раздела — это задачи на построение сечений многогранников по трём заданным точкам или по точке (прямой) и дополнительному условию. Здесь представлены как задачи с полным, так и с частичным решением, а также задачи для самостоятельного решения.

Задания третьего раздела соответствуют уровню задания 14 ЕГЭ по математике.

Все предложенные в книге задания снабжены ответами, прилагаемыми в конце пособия.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно прислать почтой или на электронный адрес legionrus@legionrus.com. Предлагаем также обсудить пособие на форуме издательства http://f.legionr.ru.

Краткие теоретические сведения

Сечение многогранника — некоторый многоугольник. Вершины этого многоугольника находятся как точки пересечения рёбер многогранника с секущей плоскостью, а стороны многоугольника строятся как линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью.

Таким образом, сечение многогранника — это многоугольник, вершины которого принадлежат рёбрам, а стороны — граням многогранника, при этом две соседние вершины принадлежат одной грани.

Так, MK и KN — стороны многоугольника, который является сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK (см. рис.1). Действительно, точки M и K лежат и в грани AA_1B_1B, и в плоскости сечения MNK, поэтому MK является линией пересечения этих плоскостей, KN — линией пересечения плоскости сечения KMN с гранью $A_1B_1C_1D_1$ параллелепипеда.

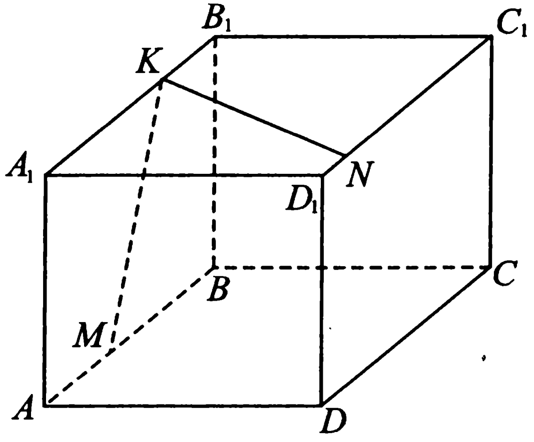


Рис. 1.

Отрезок MN не является стороной многоугольника, являющегося сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK, так как отрезок MN не принадлежит ни одной грани параллелепипеда.

Построение сечений многогранника основано на нескольких утверждениях.

I. Аксиомы стереометрии.

А 1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

А 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки данной прямой лежат в этой плоскости.

А 3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, которой принадлежат все общие точки этих плоскостей.

Аксиомы планиметрии.

А 4. В любой плоскости пространства выполняются все аксиомы планиметрии.

II. Теоремы.

Т1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Т2. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает её, то линия пересечения параллельна этой прямой.

В формулировках задач сечение может быть задано по-разному: тремя точками, не лежащими на одной прямой; точкой и прямой или иначе.

Раздел I

Подготовительные задачи

Задача № 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $M \in DC$, $N \in CC_1$.

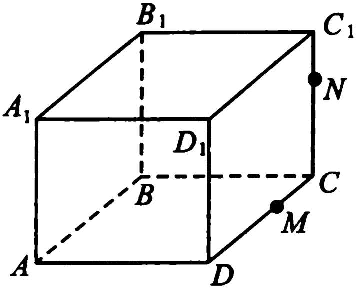


Рис. 2.

Выполните задания:

а) Укажите грань куба, в которой лежит отрезок MN.

Ответ: ______________________________

б) Укажите грань куба, параллельную отрезку MN.

Ответ: ______________________________

Задача № 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на ребрах DC, CC_1, BB_1 взяты соответственно точки M, N, K так, что M и N — середины ребер DC и CC_1, $B_1K : KB = 1 : 2$.

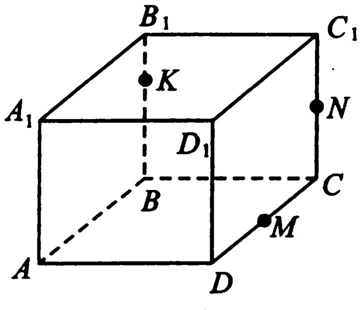


Рис. 3.

а) Укажите грань, параллельную грани DD_1C_1C.

Ответ: ____________________

б) Через точку K проведите прямую KT, параллельную отрезку MN. Укажите грань, в плоскости которой лежит эта прямая.

Ответ: ____________________

в) Укажите ребро куба (отличное от ребра BB_1), которое пересекает прямая KT

Ответ: ____________________

Задача № 3. Внутри грани SBC треугольной пирамиды $SABC$ взята точка D.

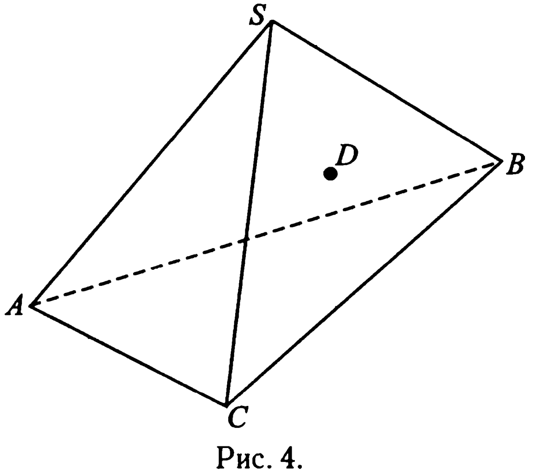


Рис. 4.

Через точку D проведите:

а) отрезок с концами на рёбрах пирамиды, параллельный ребру BC;

б) отрезок с концами на рёбрах пирамиды, параллельный ребру SC;

в) отрезок с концами на рёбрах пирамиды, параллельный ребру SB.

Задача № 4. Через точку D, лежащую на ребре AS тетраэдра $SABC$,

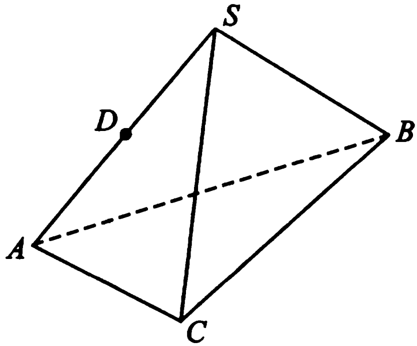


Рис. 5.

постройте:

а) сечение, параллельное основанию ABC;

б) сечение, параллельное грани SBC;

в) сечение, перпендикулярное основанию ABC.

Задача № 5. Постройте линию пересечения грани ASC пирамиды $SABC$ плоскостью, проходящей через точки B, M и N, где точки M и N принадлежат, соответственно, граням ABS и BCS (M и N не лежат на рёбрах пирамиды) (см. рис. 6).

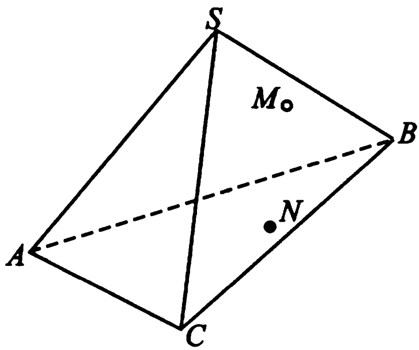


Рис. 6.

Задача № 6. Сечение пирамиды $SABC$ проходит через точки M, N, K (см. рис. 7).

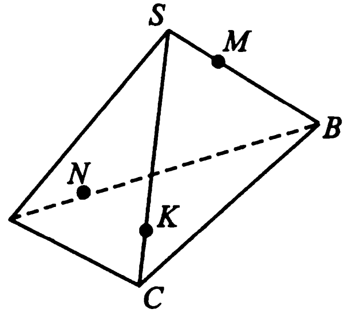


Рис. 7.

Выполните задания, вставив на подчёркнутые места в представленном решении нужные точки, линии или плоскости. Постройте:

а) линию пересечения плоскости ASB и плоскости MNK;

б) точку пересечения прямой MK и плоскости ABC;

в) линию пересечения грани ABC с плоскостью MNK;

г) линию пересечения грани ASC с плоскостью MNK.

Решение.

а) Точки ______ и ______ лежат в каждой из плоскостей ASB и MNK, следовательно, ______ — линия пересечения плоскости ASB и плоскости MNK (см. рис. 8).

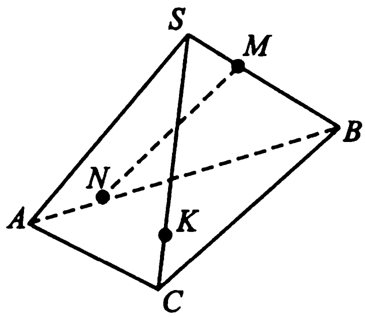


Рис. 8.

б) Прямые MK и BC лежат в плоскости BSC и не параллельны, следовательно, точка пересечения этих прямых — точка T — принадлежит прямой BC, а значит, и плоскости ____________ (см. рис. 9).

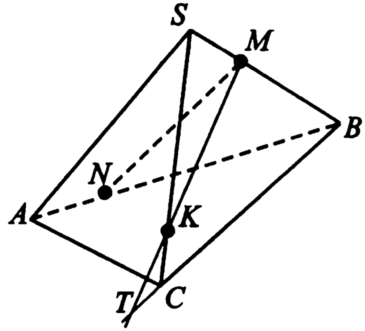


Рис. 9.

в) Точка T принадлежит плоскости сечения MNK, т. к. ____________.
Точки ______ и ______ лежат одновременно в плоскости ABC и плоскости сечения, следовательно, прямая — ______ — линия пересечения плоскости ABC с плоскостью MNK (см. рис. 10).

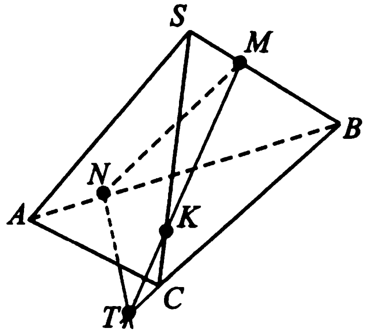


Рис. 10.

Прямая NT пересекает ребро AB в точке P, поэтому __________ — линия пересечения грани ABC с плоскостью MNK (см. рис. 11).

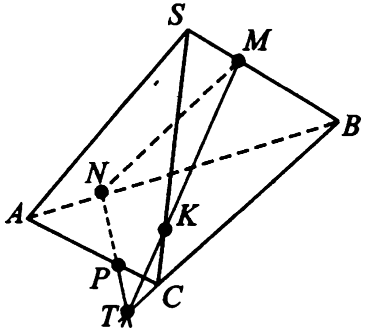


Рис. 11.

г) Точки __________ и ______ лежат в плоскости сечения и в грани ______, следовательно, отрезок ______ является линией пересечения грани ASC с плоскостью MNK (см. рис. 12).

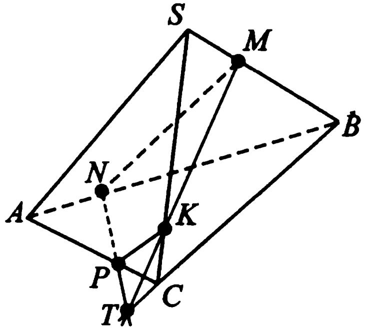


Рис. 12.

Задача № 7. $SABC$ — пирамида, точка M лежит в грани ASB, K — в грани SBC, $N \in SD$, как показано на рисунке 13. Постройте линию пересечения плоскости MNK с плоскостью ABC.

Решение.

Шаг 1. С помощью центрального проектирования с центром в точке ______ найдём проекции точек M, N и K на плоскость ABC (см. рис. 13).

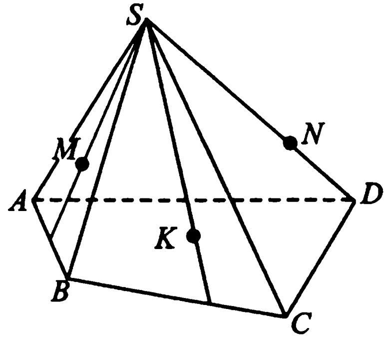


Рис. 13.

Проекция точки M — точка пересечения ______ и ______, обозначим её буквой L, проекция точки K лежит на ребре ______, обозначим её буквой F, ______ — проекция точки N.

Шаг 2. Построим точки пересечения прямых MN и NK с плоскостью ABC (см. рис. 14).

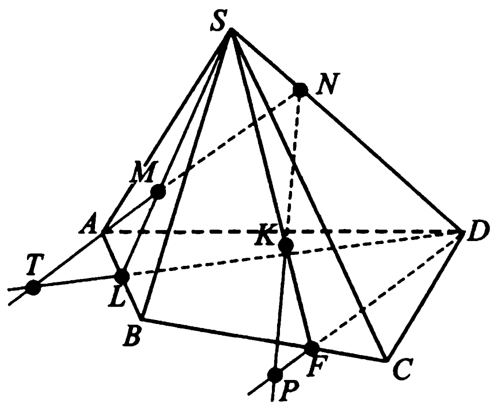


Рис. 14.

Для этого построим сначала точку T пересечения прямой MN и её проекции ______, затем — точку P — точку пересечения прямой NK и её проекции ______.

Шаг 3. Проведём прямую ______, эта прямая лежит и в плоскости ABC и в плоскости MNK, следовательно, является их линией пересечения (см. рис. 15).

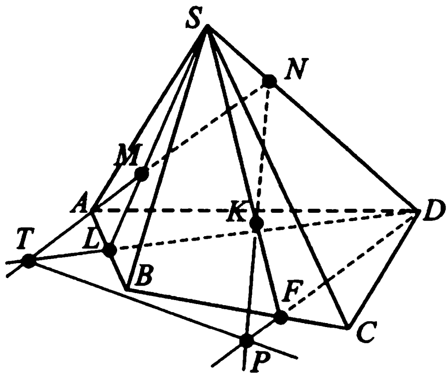


Рис. 15.

Решите задачи

Задача № 8. Является ли треугольник MNK сечением призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK (см. рис. 16)?

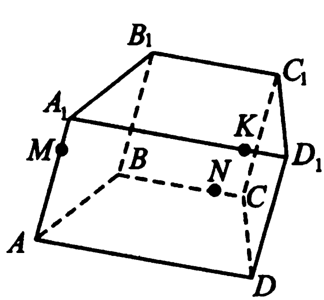


Рис. 16.

Задача № 9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 4. Постройте отрезок, по которому пересекаются грань $A_1B_1C_1$ и плоскость, проходящая через вершины A, B и середину ребра A_1C_1. Найдите длину этого отрезка.

Задача № 10. Через середины рёбер AB и BC тетраэдра $SABC$ проведена плоскость, параллельная ребру SB. Выберите (и обоснуйте) верное утверждение:

1) линии пересечения граней SAB и SBC этой плоскостью параллельны;

2) линии пересечения граней SAB и SBC этой плоскостью не параллельны.

Задача № 11. $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, точка M лежит на луче AB ($AB < AM$), $N \in AC$ (см. рис. 17).

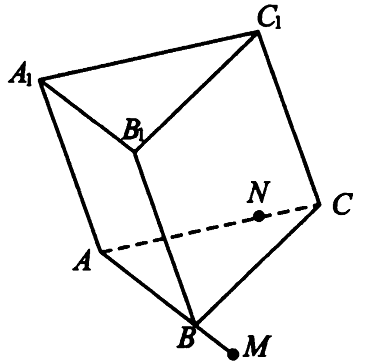


Рис. 17.

Постройте:

а) линию пересечения грани AA_1B_1B и плоскости A_1MN;

б) линию пересечения грани BB_1C_1C и плоскости A_1MN.

Задача № 12. Постройте линию пересечения плоскости MNK с плоскостью ABC (см. рис. 18).

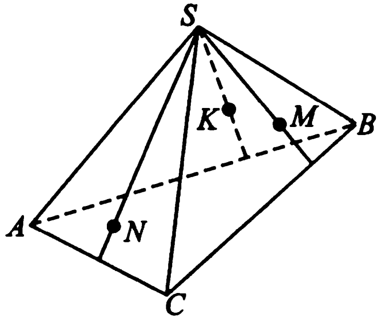


Рис. 18.

Задача № 13. Постройте линию пересечения плоскости MNK с плоскостью ABC (см. рис. 19).

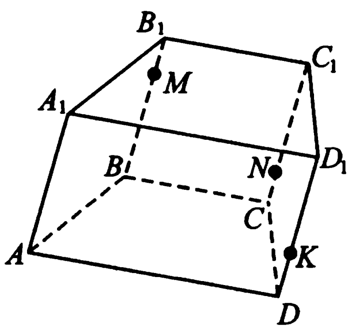


Рис. 19.

Задача № 14. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. На ребре AA_1 взята точка M так, что $AM : MA_1 = 1 : 3$.

а) Постройте точку пересечения прямой B_1M и плоскости ABC и вычислите расстояние от этой точки до точки A;

б) Найдите расстояние между точками пересечения прямых B_1M и D_1M с плоскостью ABC.

Задача № 15. Точки M и N — середины рёбер AB и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение куба, перпендикулярное плоскости ABC и проходящее через прямую MN;

б) Постройте сечение куба, перпендикулярное отрезку MN и проходящее через его середину.

Задача № 16. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 6$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении 8 : 3, считая от вершины B_1. Постройте отрезок, по которому пересекаются грань CC_1D_1D и плоскость BDK. Найдите длину этого отрезка.

Задача № 17. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра: $AB = 4$, $AD = 2$, $AA_1 = 5$. Точка O принадлежит ребруBB_1 и делит его в отношении 3 : 2, считая от вершины B.

а) Постройте отрезок, по которому пересекаются грань CC_1D_1D параллелепипеда и плоскость AOC_1. Найдите длину этого отрезка.

б) Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью AOC.

в) Выберите верное утверждение и обоснуйте его:

1) построенное сечение — прямоугольник;

2) построенное сечение — ромб;

3) построенное сечение — параллелограмм;

4) построенное сечение — треугольник.

3. Зак. № 38

Задача № 18. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте сечение AB_1C и определите его вид (см. рис. 20).

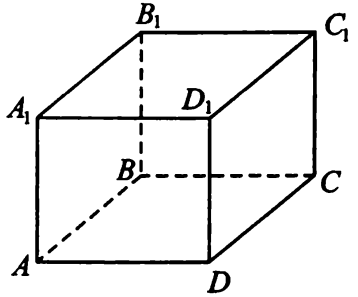


Рис. 20.

Задача № 19. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AA_1 = 8$, $AD = 6$, $AB = 3$, точки M и N — соответственно середины рёбер AA_1 и AD, $K \in B_1C_1$, $B_1K : KC_1 = 2 : 1$ (см. рис. 21).

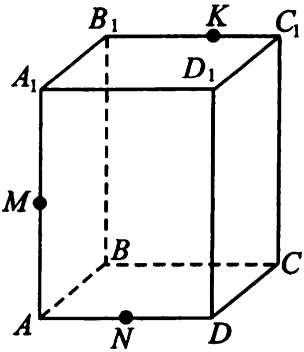


Рис. 21.

а) Проведите отрезок MN и укажите грань, в которой лежит отрезок MN.

б) Назовите линию пересечения грани AA_1D_1D параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и секущей плоскости MNK.

в) Назовите грань параллелепипеда, параллельную грани AA_1D_1D.

г) Проведите через точку K прямую l, параллельную отрезку MN, укажите ребро куба (отличное от ребра B_1C_1), которое пересекает эта прямая.

д) Постройте точку L пересечения прямой l и ребра CC_1. Укажите, в каком отношении точка L делит ребро CC_1, считая от вершины C.

е) Назовите грань параллелепипеда, в которой лежит KL.

ж) Назовите линию пересечения грани BB_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и секущей плоскости MNK.

з) Найдите длину отрезка KL.

и) Постройте точку R — пересечения прямых MN и A_1D_1. Найдите длину отрезка RA_1;

к) Назовите грани параллелепипеда, в плоскостях которых лежит точка R.

л) Постройте точку T пересечения отрезка RK и ребра A_1B_1;

м) Назовите линию пересечения грани $A_1B_1C_1D_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и секущей плоскости MNK.

н) Проведите отрезок MT. Назовите грань параллелепипеда, в которой лежит отрезок MT.

о) Назовите грань параллелепипеда, параллельную грани DD_1C_1C.

п) Постройте отрезок LP, параллельный отрезку MT.

р) Постройте отрезок PN. Назовите грань параллелепипеда, в которой лежит отрезок PN.

с) Назовите сечение параллелепипеда плоскостью MNK.

Задача № 20. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ постройте сечение, проходящее через рёбра AA_1 и CC_1.

Раздел II

Построение сечений многогранников

Задача № 1. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK (см. рис. 22).

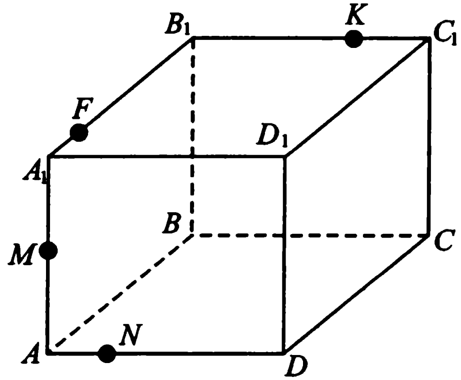


Рис. 22.

Решение.

Шаг 1. Точки M и N лежат в плоскости передней грани AA_1D_1D и в плоскости сечения MNK, поэтому прямая MN — линия пересечения этих плоскостей (см. рис. 23).

Шаг 2. Прямые MN и A_1D_1 лежат в плоскости AA_1D_1D и пересекаются в точке T, значит, точка T лежит в плоскости сечения.

Шаг 3. Точки T и K лежат и в плоскости сечения MNK, и в плоскости верхней грани $A_1B_1C_1D_1$. Отсюда следует, что TK — линия их пересечения, а F — точка пересечения прямых TK и A_1B_1 (см. рис. 23).

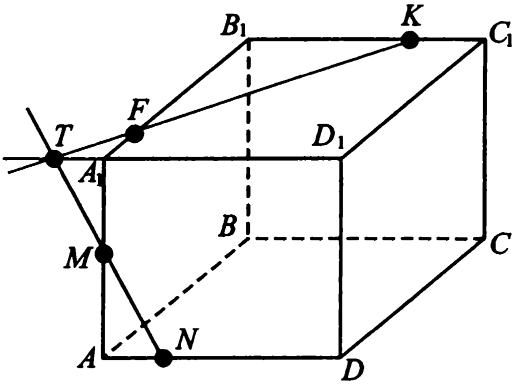


Рис. 23.

Шаг 4. MF — линия пересечения плоскости сечения и грани AA_1B_1B (см. рис. 24).

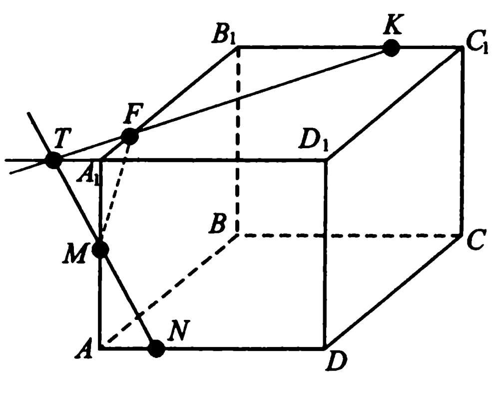


Рис. 24.

Шаг 5. В плоскости ABC через точку N проведём прямую, параллельную FK (см. **Т1**). Эта прямая пересекает прямую BC в точке P, CD — в точке L (см. рис. 25).

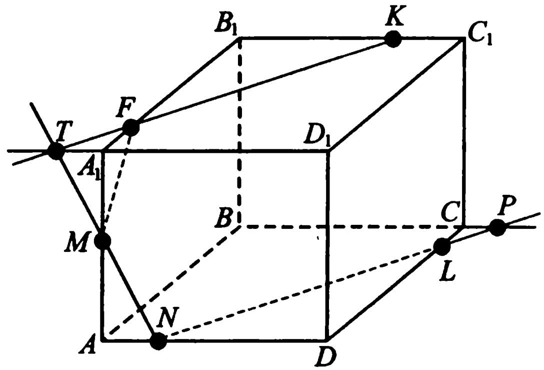


Рис. 25.

Шаг 6. Прямая KP — линия пересечения плоскости грани BB_1C_1C и плоскости сечения MNK (см. рис. 26). G — точка пересечения KP и C_1C.

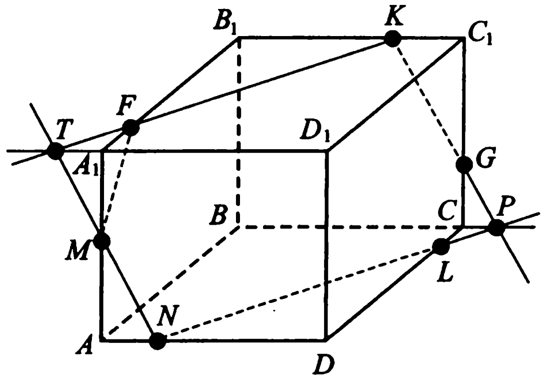


Рис. 26.

Шаг 7. Отрезок GL — линия пересечения грани DD_1C_1C и плоскости сечения MNK (см. рис. 27).

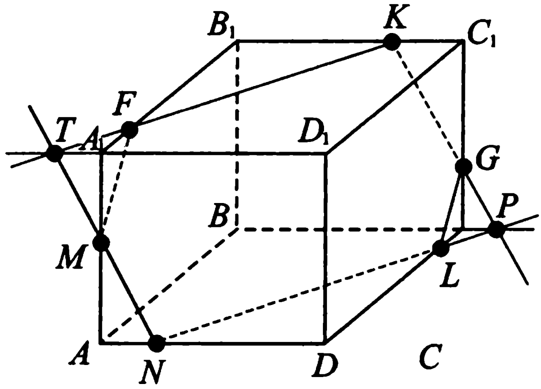


Рис. 27.

$NMFKGL$ — сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK (см. рис. 28).

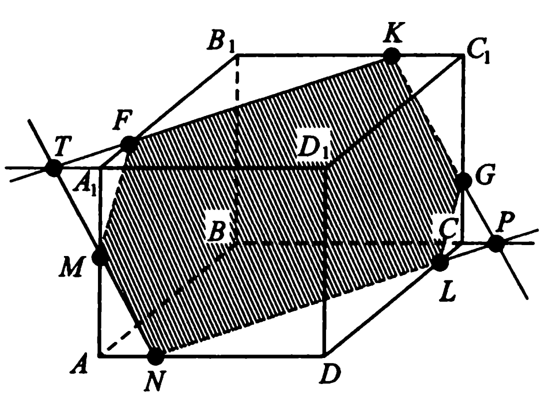


Рис. 28.

Задача № 2. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK (см. рис. 29).

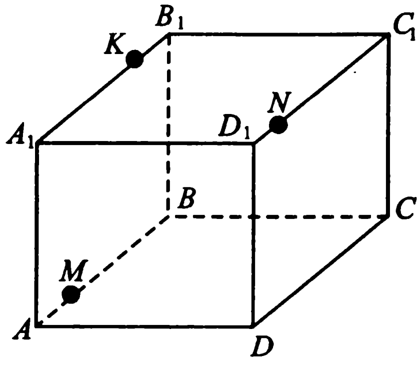


Рис. 29.

Решение.

Шаг 1. Точки ____________ лежат в плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$ и в плоскости сечения, значит, прямая ______ — линия пересечения этих плоскостей (см. рис. 30). Аналогично прямая KM — линия пересечения плоскости ____________ и плоскости ____________.

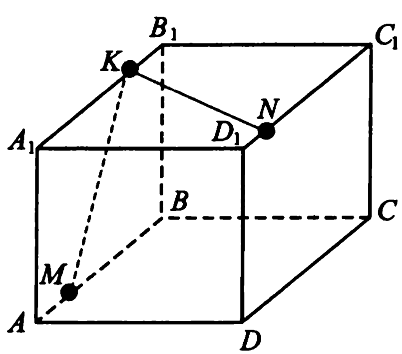


Рис. 30.

Шаг 2. По теореме (см. **Т1**) через точку N в плоскости ________ ______________ проведём прямую NT, ______________ прямой MK. T — точка пересечения NT и DD_1 (см. рис. 31). Аналогично через точку M в плоскости ____________ проведём прямую MP, ______________ KN. P — точка пересечения прямой MP и ребра ______.

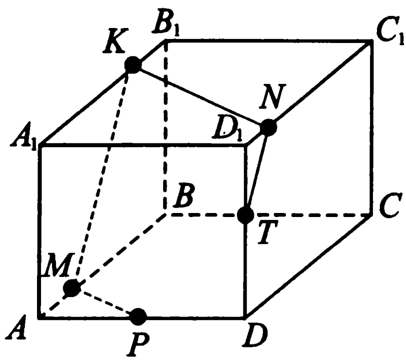


Рис. 31.

Шаг 3. PT — линия пересечения плоскости грани ________ и плоскости сечения (см. рис. 32).

____________ искомое сечение.

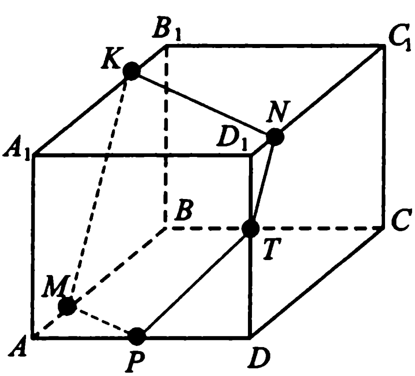


Рис. 32.

Задача № 3. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK (см. рис. 33).

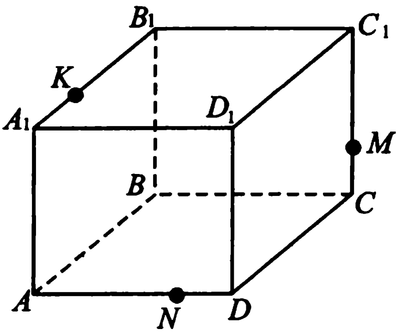


Рис. 33.

Решение.

Шаг 1. L и C — проекции точек K и M на плоскость $ABCD$ (см. рис. 34). F — точка пересечения прямых KM и LC ($KL \parallel MC$). Точка F лежит в плоскости сечения и в плоскости грани $ABCD$.

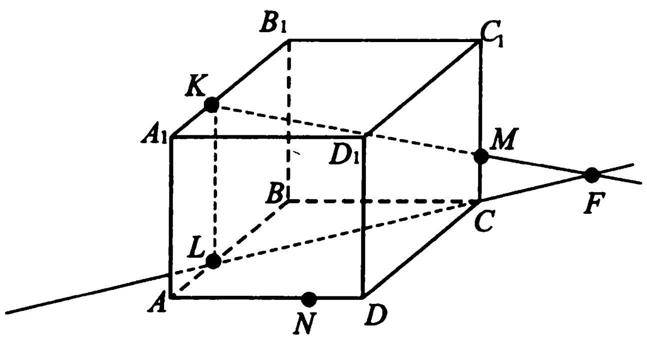


Рис. 34.

Шаг 2. FN — линия пересечения плоскости сечения MNK и плоскости $ABCD$ (см. рис. 35). FN пересекает ребро CD в точке E.

Шаг 3. ME — линия пересечения грани DD_1C_1C и плоскости сечения (см. рис. 35).

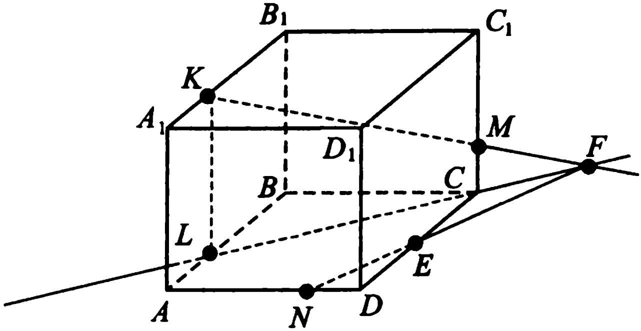


Рис. 35.

Шаг 4. Прямая FN пересекает прямую AB в точке G (см. рис. 36).

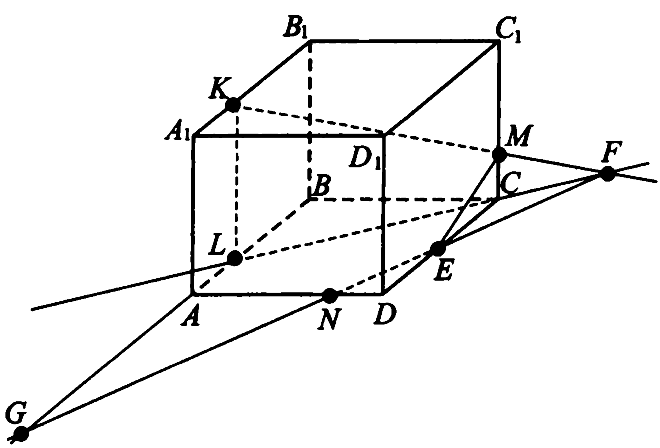


Рис. 36.

Шаг 5. Точки G и K лежат в плоскости AA_1B_1B (см. рис. 37). GK пересекает ребро AA_1 в точке R, ребро BB_1 — в точке S. RK — линия пересечения грани AA_1B_1B и плоскости сечения.

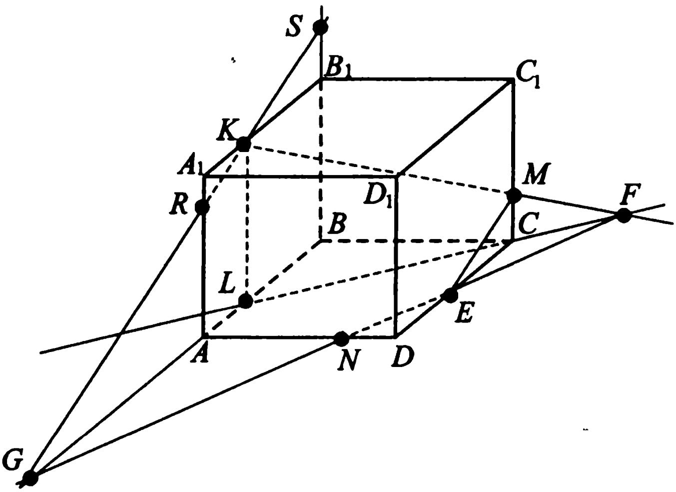


Рис. 37.

Шаг 6. SM — линия пересечения плоскости BB_1C_1 и плоскости сечения (см. рис. 38). X — точка пересечения SM и B_1C_1.

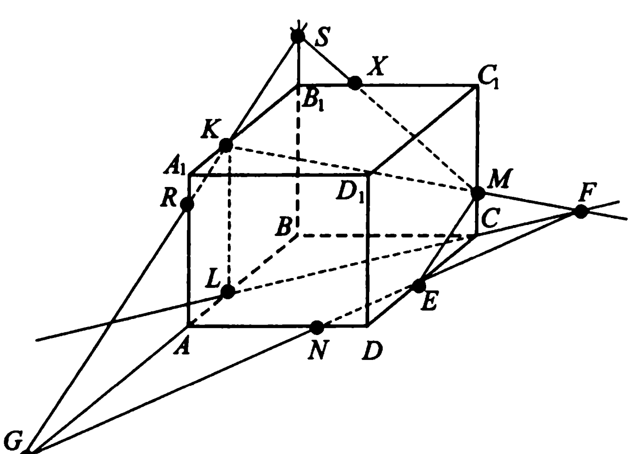


Рис. 38.

Шаг 7. KX — линия пересечения плоскости $A_1B_1C_1D_1$ и плоскости MNK (см. рис. 39).

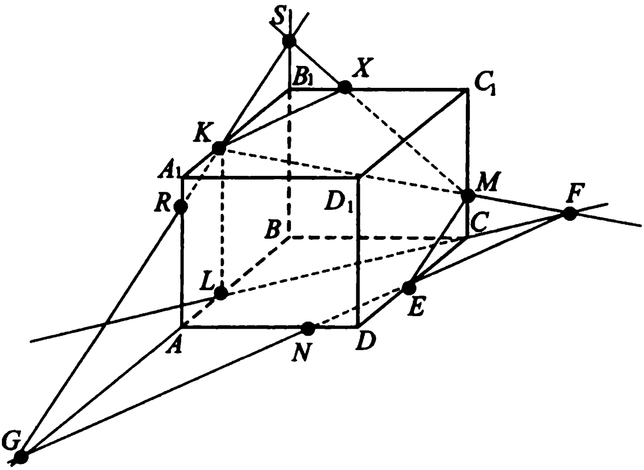


Рис. 39.

Итак, $NRKXME$ — искомое сечение (см. рис. 40).

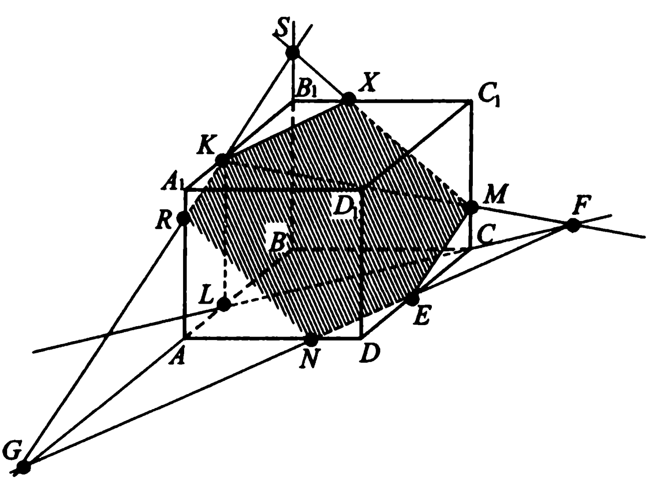


Рис. 40.

Задача № 4. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK (см. рис. 41).

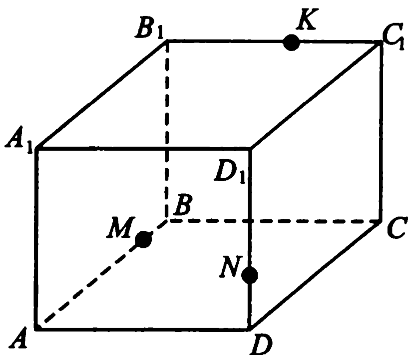


Рис. 41.

Решение.

Шаг 1. _____ — проекции точек K и N на плоскость $ABCD$ (см. рис. 42).

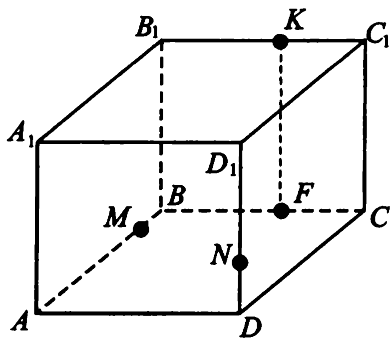


Рис. 42.

Шаг 2. S — точка пересечения прямых KN и FD — лежит в плоскости грани ____________ и в плоскости ____________ (см. рис. 43).

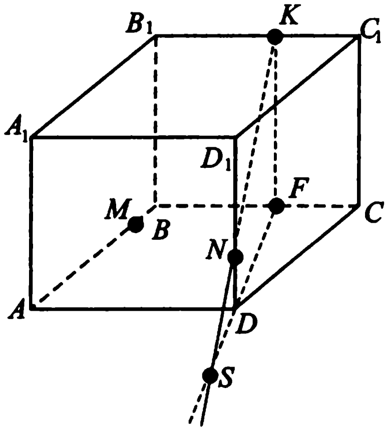


Рис. 43.

Шаг 3. Прямая SM лежит в плоскости ______ и пересекает AD в точке P, BC — в точке L (см. рис. 44).

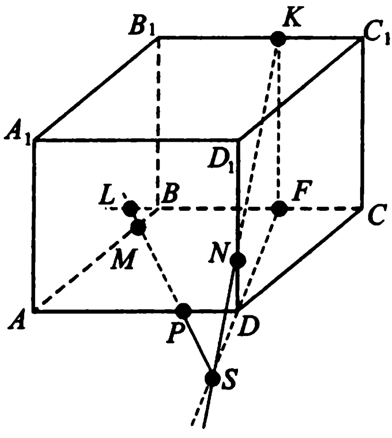


Рис. 44.

Шаг 4. Точки ______ и ______ лежат в плоскости грани BB_1C_1C и плоскости сечения, значит, ______ — линия их пересечения (см. рис. 45). Прямая ______ пересекает ребро BB_1 в точке V.

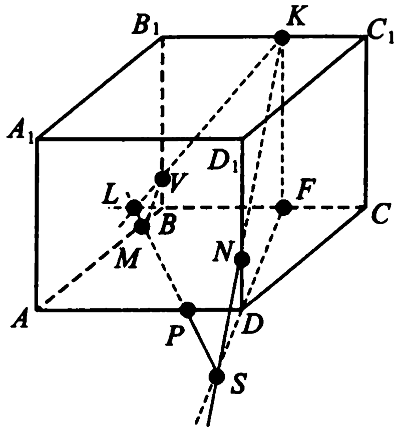


Рис. 45.

Шаг 5. ______ — линия пересечения грани AA_1B_1B и плоскости сечения MNK, ______ — линия пересечения грани AA_1D_1D и плоскости сечения MNK (см. рис. 46).

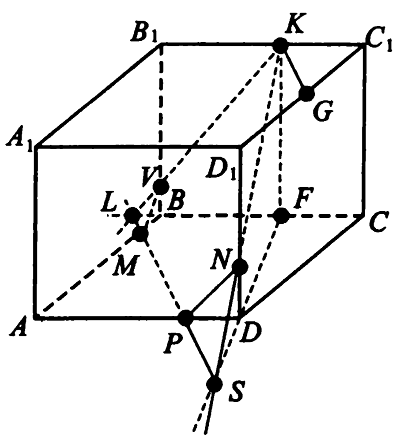


Рис. 46.

Шаг 6. В грани $A_1B_1C_1D_1$ проведём через точку K отрезок KG ________________ отрезку MP (см. **T1**).

Шаг 7. Отрезок ______ — линия пересечения грани DD_1C_1C и плоскости сечения (см. рис. 47).

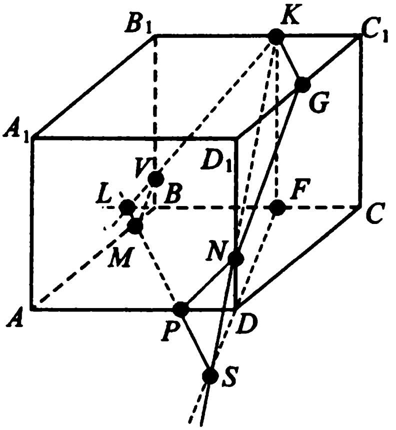


Рис. 47.

Итак, ______________ искомое сечение (см. рис. 48).

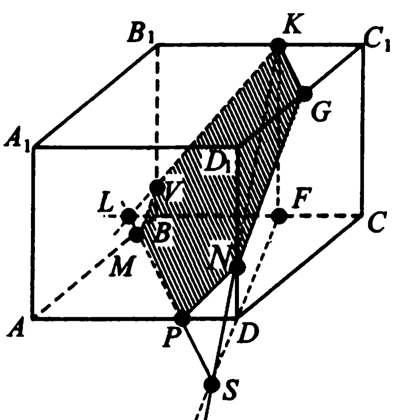


Рис. 48.

Задача № 5. Постройте сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью MNK (см. рис. 49).

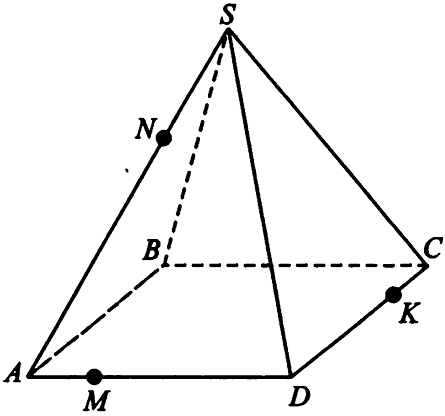


Рис. 49.

Решение.

Шаг 1. MN — линия пересечения плоскости MNK и грани SAD, MK — линия пересечения плоскости MNK и грани $ABCD$ (см. рис. 50).

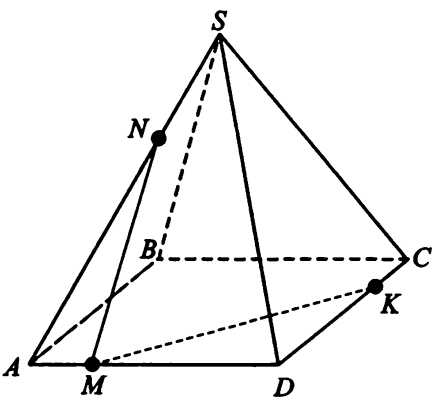


Рис. 50.

Шаг 2. Прямая MK пересекает прямые AB и CD в точках F и L соответственно (см. рис. 51).

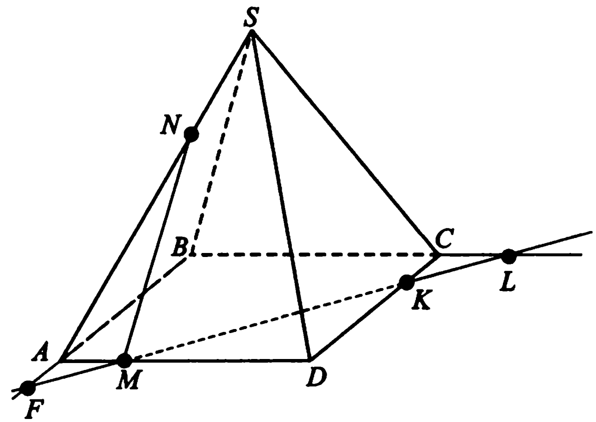


Рис. 51.

Шаг 3. FN — линия пересечения плоскости сечения и плоскости грани ASB (см. рис. 52). FN пересекает ребро SB в точке G. GL — линия пересечения плоскости сечения и плоскости грани SBC. GL пересекает ребро SC в точке R.

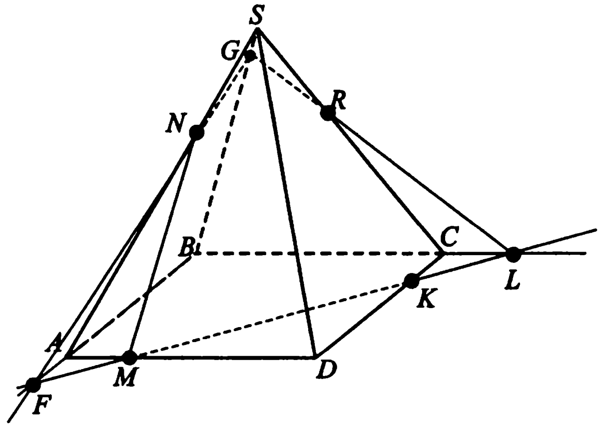


Рис. 52.

Шаг 4. RK — линия пересечения плоскости MNK и плоскости CSD (см. рис. 53).

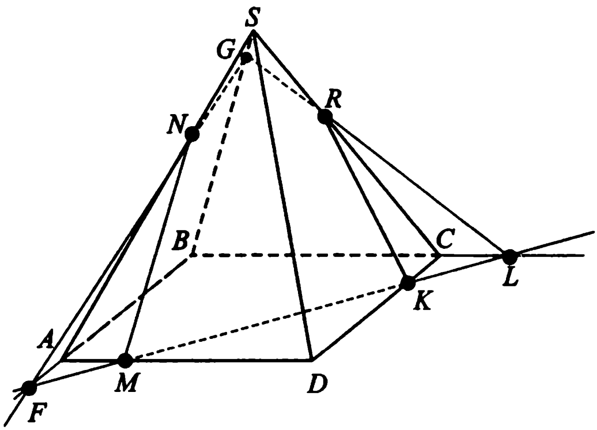


Рис. 53.

Итак, $MNGRK$ — искомое сечение (см. рис. 54).

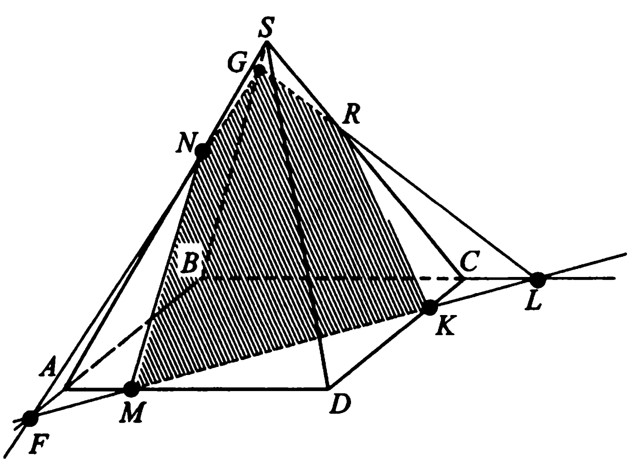


Рис. 54.

Задача № 6. Постройте сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью MNK (см. рис. 55).

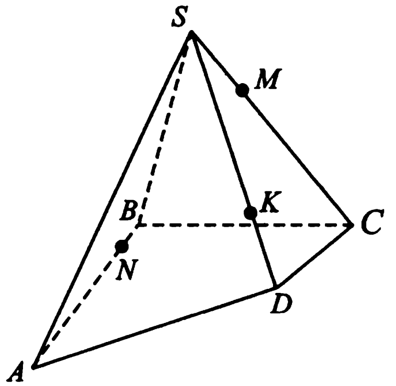


Рис. 55.

Решение.

Шаг 1. ______ — линия пересечения плоскости грани SDC и плоскости сечения MNK (см. рис. 56). Построим точку P пересечения прямых MK и DC.

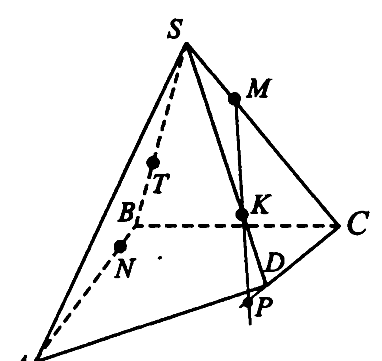


Рис. 56.

Шаг 2. Точки ______ лежат в плоскости основания ABC и в плоскости сечения ______, поэтому PN — линия пересечения плоскостей ABC и MNK (см. рис. 57).

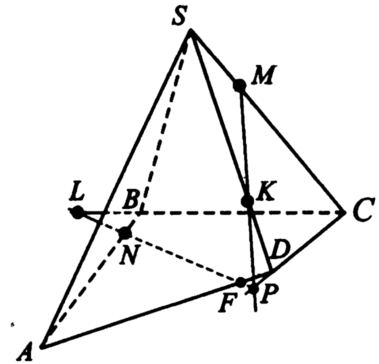


Рис. 57.

Построим точку L пересечения прямых PN и BC и точку F пересечения прямых PN и AD.

Шаг 3. Точки L и M лежат в плоскости грани ______ и в плоскости сечения, следовательно, ______ — линия пересечения грани ______ и плоскости MNK (см. рис. 58). LM пересекает ребро ______ пирамиды $SABCD$ в точке T.

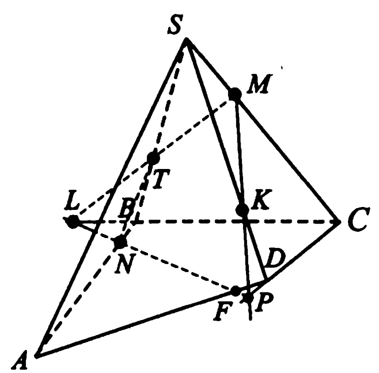


Рис. 58.

Шаг 4. ______ — линия пересечения грани ASB и плоскости сечения MNK, ______ — линия пересечения грани ASD и плоскости сечения MNK (см. рис. 59).

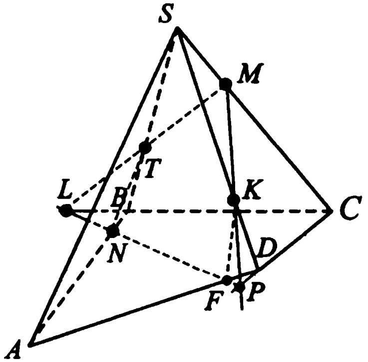


Рис. 59.

Итак, ______ — искомое сечение (см. рис. 60).

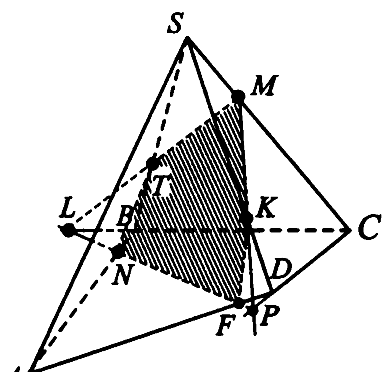


Рис. 60.

Задача № 7. Постройте сечение прямой шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью MNK (см. рис. 61).

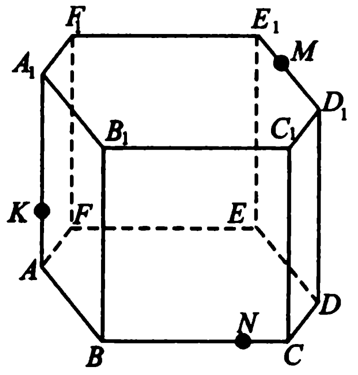


Рис. 61.

Решение.

Шаг 1. T — точка пересечения прямой KM и её проекции PA на плоскость нижнего основания $ABCDEF$ (см. рис. 62).

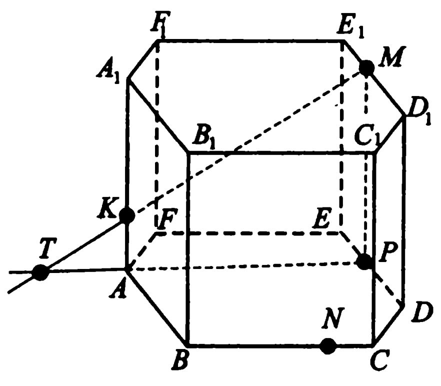


Рис. 62.

Шаг 2. TN — линия пересечения плоскости сечения и плоскости нижнего основания. L — точка пересечения ребра AB и TN (см. рис. 63).

Шаг 3. KL — линия пересечения грани AA_1B_1B и плоскости MNK.

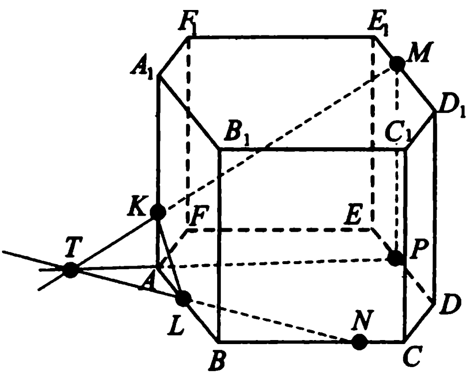


Рис. 63.

Шаг 4. Проведём $RM \parallel LN$, $MV \parallel KL$ (см. **Т1**). RM — линия пересечения плоскости сечения и плоскости верхнего основания $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, MV — линия пересечения плоскости сечения и плоскости EE_1D_1D (см. рис. 64).

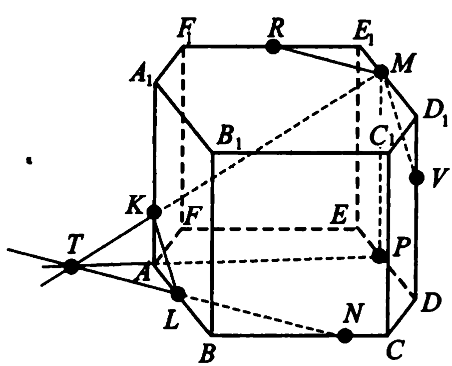


Рис. 64.

Шаг 5. H — точка пересечения прямых TN и CD. HV — линия пересечения плоскости сечения и плоскости грани CC_1D_1D. O — точка пересечения ребра CC_1 и HV (см. рис. 65).

Шаг 6. ON — линия пересечения грани BB_1C_1C и плоскости MNK (см. рис. 65). $RS \parallel NO$ (см. **T1**).

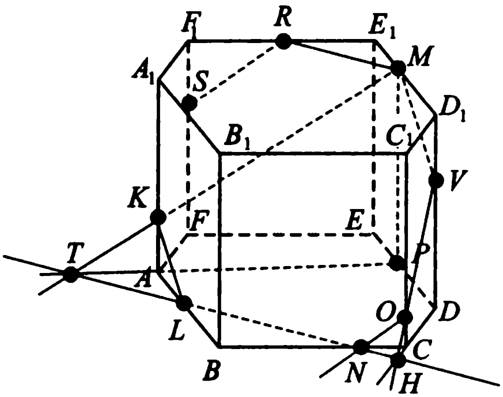


Рис. 65.

Шаг 7. Проводим отрезок KS (см. рис. 66).

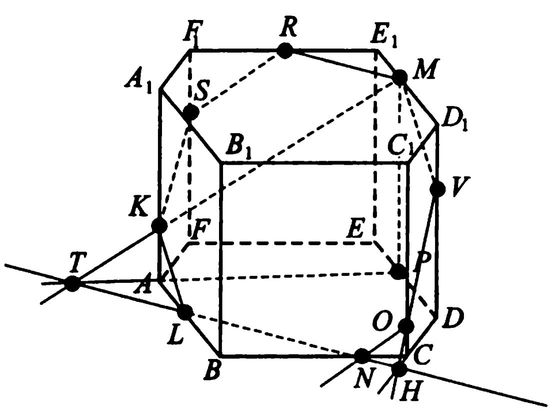


Рис. 66.

Итак, $KSRMVONL$ — искомое сечение (см. рис. 67).

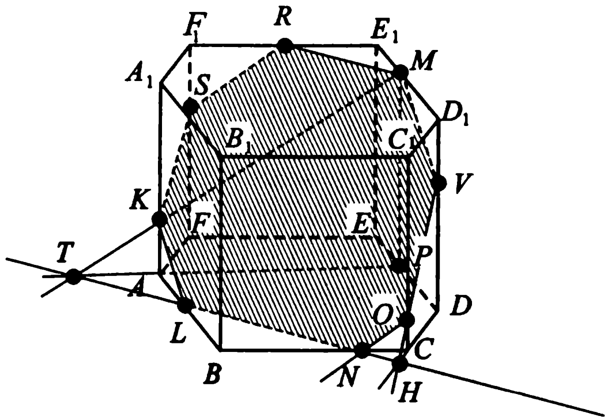


Рис. 67.

Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, содержащее AB_1 и параллельное ребру A_1D_1.

2. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, содержащее A_1D_1 и параллельное AC.

3. Через точку пересечения медиан грани ABC пирамиды $SABC$ постройте сечение, параллельное грани ASB.

4. Постройте сечение пирамиды $SABCD$, содержащее высоту SO пирамиды и параллельное ребру AB.

5. Постройте сечение пирамиды $SABCD$, содержащее высоту SO и перпендикулярное грани SAB.

6. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, проходящее через середину ребра AB параллельно плоскости BC_1D.

7. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите линию пересечения плоскостей AB_1C и BC_1D.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ постройте линию пересечения плоскостей ABC_1 иA_1B_1C.

9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите линию пересечения плоскостей AB_1C_1D и CB_1A_1D.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ постройте сечение, проходящее через ребро BB_1 и перпендикулярное диагонали основания AD.

11. Постройте сечение правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной высоте SO и проходящей через середину ребра AB и точку C.

12. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точку O пересечения его диагоналей параллельно грани а) AA_1B_1B; б) $A_1B_1C_1D_1$; в) AA_1D_1D.

13. Постройте сечение четырёхугольной пирамиды $SABCD$ плоскостью MNK (см. рис. 68).

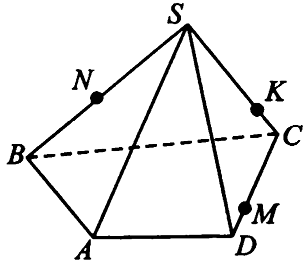


Рис. 68.

14. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью ABC_1.

15. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью MNK (см. рис. 69).

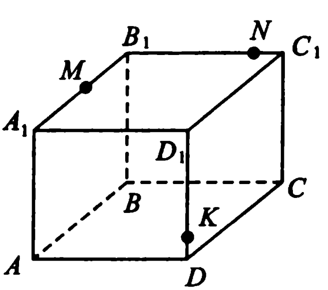


Рис. 69.

Раздел III

Задачи уровня ЕГЭ

Задача № 1. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 10, а боковое ребро — 17. Точка K принадлежит ребру A_1B_1 и делит его в отношении $2:3$, считая от вершины A_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки K, A и C (см. рис. 70).

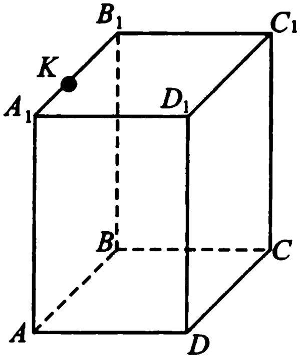


Рис. 70.

Решение.

Точки A и C принадлежат плоскости ____________, следовательно, отрезок ______ лежит в этой плоскости (см. рис. 71).

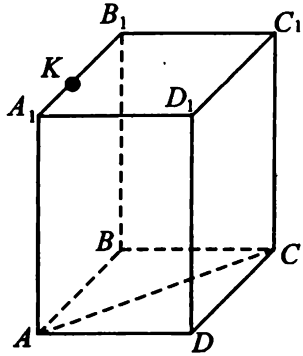


Рис. 71.

Так как плоскости верхнего и нижнего оснований __________, то через точку K в плоскости __________ проведём отрезок KL __________ AC, где ______ $\in$ ______ (см. рис. 72).

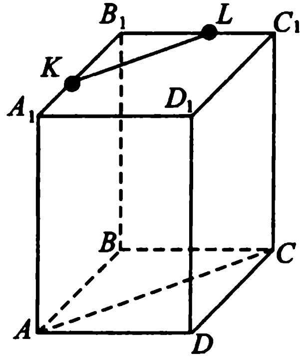


Рис. 72.

Соединим точки A и ______, лежащие в грани __________, а также точки C и ______, лежащие в грани ______. ______ сечение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через точки ______, ______, ______ (см. рис. 73).

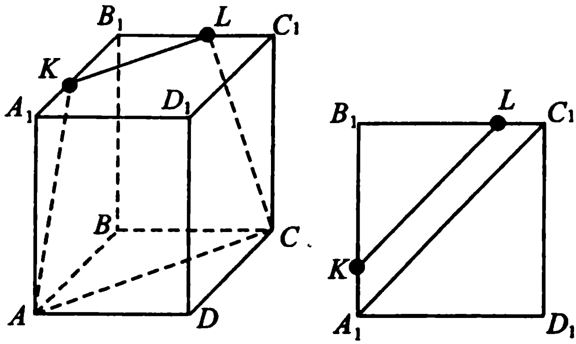


Рис. 73.

Рассмотрим грань $A_1B_1C_1D_1$. По условию $A_1B_1 = 10$, $A_1K : KB_1 = 2 : 3$, поэтому $A_1K =$ __________, $KB_1 =$ __________. $\triangle KB_1L \sim \triangle A_1B_1C_1$, так как KL ______________ A_1C_1 (см. рис. 74). Тогда $B_1L =$ _____ $=$ _____. $LC_1 =$ _____ $=$ _____, $KL =$ _____.

$\triangle AKA_1$ __________, следовательно, $AK =$ _____, значит, четырёхугольник $AKLC$ является ____________________ (см. рис. 74).

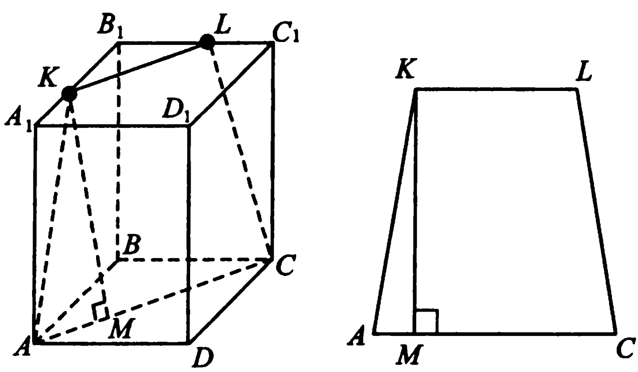


Рис. 74.

Площадь равнобедренной трапеции $AKLC$ найдём по формуле $S_{AKLC} = \dfrac{KL + AC}{2} \cdot KM$.

$KL =$ _____, $AC =$ _____, KM выразим из прямоугольного треугольника _____ по теореме Пифагора.

AK является гипотенузой прямоугольного треугольника ______, катеты которого ______ = ______, ______ = ______

$AK =$ ____________ = ____________ = ____________.

$AM = \frac{1}{2}$ ________________________.

Подставляем найденные значения в выражение
$KM = \sqrt{AK^2 - AM^2}$, получим $KM =$ ______.

$S_{AKLC} = \frac{1}{2}($__________ + __________$) \cdot$ __________.

Ответ ______.

Задача № 2. Через точку L, принадлежащую высоте SO правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, постройте сечение, параллельное грани SDC (см. рис. 75).

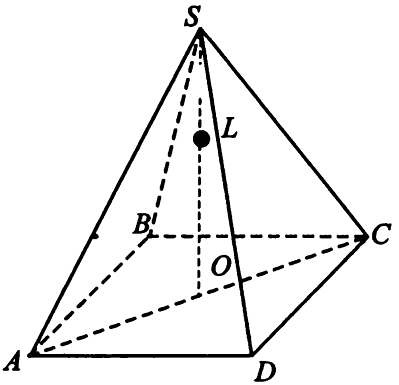


Рис. 75.

Решение.

Обозначим плоскость сечения буквой α. По условию $\alpha \parallel SDC$ и $L \in \alpha$. Это означает, что любая прямая плоскости α, проходящая через точку L, параллельна плоскости SDC (в противном случае плоскости SDC и α будут пересекаться).

Значит, нужно через точку L провести прямую, параллельную плоскости SDC. Можно через точку L провести любую прямую, параллельную плоскости SDC, в частности, это может быть прямая, параллельная DC, или SC, или SD (см. рис. 76).

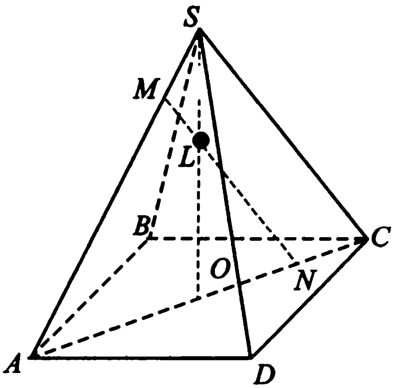


Рис. 76.

Проведём через точку L прямую, параллельную SC. Для этого во вспомогательной плоскости SAC проведём через точку L отрезок $MN \parallel SC$ ($N \in AC$, $M \in AS$). Так как $MN \parallel SDC$, то $MN \in \alpha$.

Точка M принадлежит ребру AS пирамиды, следовательно, M — вершина многоугольника, являющегося искомым сечением.

Линия пересечения α и плоскости боковой грани ASB проходит через точку M параллельно AB. Действительно, плоскость ASB проходит через прямую AB, параллельную DC ($AB \parallel DC$, так как $ABCD$ — квадрат, $\alpha \parallel DC$), и пересекает α по прямой, параллельной AB (см. **Т2**). Проведём в грани ASB отрезок $MK \parallel AB$ ($K \in BS$).

MK — линия пересечения плоскостей ASB и α, $MK \in \alpha$.

K — вершина многоугольника, являющегося искомым сечением.

MK — сторона многоугольника, являющегося искомым сечением, так как точки M и K лежат в грани ASB пирамиды (см. рис. 77).

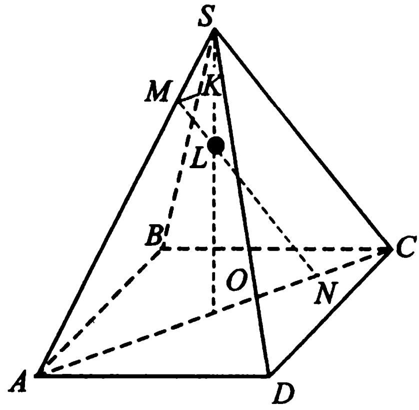


Рис. 77.

Рассуждая аналогично по отношению к грани ASD, проведём отрезок $MP \parallel SD$ $(P \in AD)$. MP — сторона многоугольника, являющегося искомым сечением (см. рис. 78).

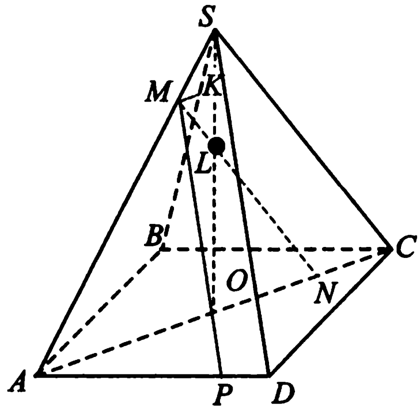


Рис. 78.

Точки N и P лежат в плоскости α и в плоскости нижнего основания $ABCD$, значит, прямая PN — линия пересечения этих плоскостей (см. рис. 79).

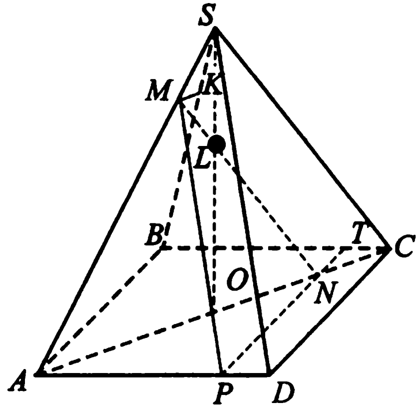


Рис. 79.

PN пересекает ребро BC в точке T, поэтому точка T — вершина многоугольника, являющегося искомым сечением, а PT — сторона этого многоугольника (см. рис. 80).

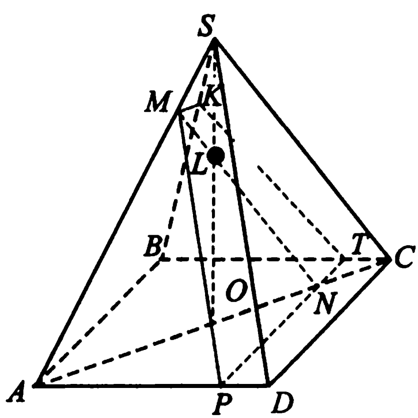


Рис. 80.

Наконец, соединяя точки K и T, которые лежат в грани BSC пирамиды, получим искомое сечение $MKTP$ (см. рис. 81).

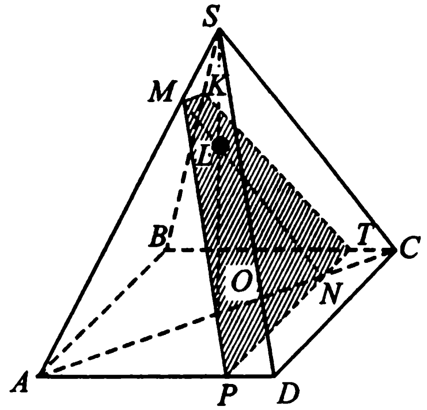


Рис. 81.

Задача № 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через точку D постройте сечение, перпендикулярное диагонали BD_1 (см. рис. 82).

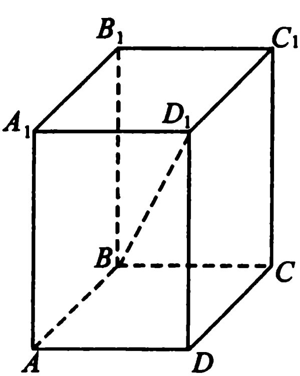


Рис. 82.

Решение.

В диагональном сечении BB_1D_1D проведём DK перпендикулярно BD_1 (см. рис. 83).

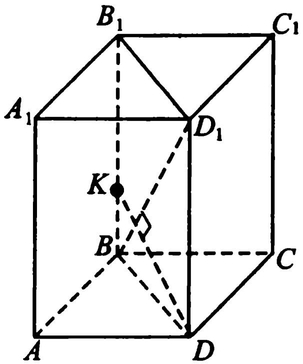


Рис. 83.

Через точку D в плоскости ABC проведём прямую l, перпендикулярную BD (см. рис. 84).

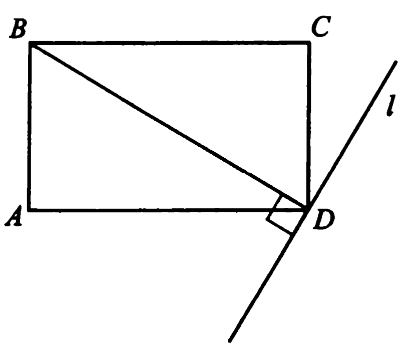


Рис. 84.

$l \perp DD_1$, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $l \perp BB_1D_1$, поэтому $l \perp BD_1$.

Итак, $BD_1 \perp KD$, $BD_1 \perp l$, откуда следует, что BD_1 перпендикуляна плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые KD и l (см. рис. 85).

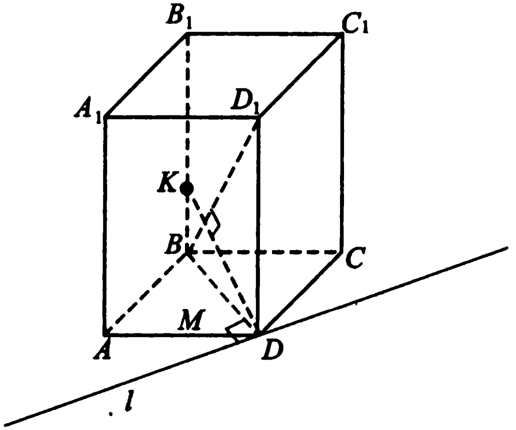


Рис. 85.

Построим точки пересечения прямой l с прямыми AB и BC (см. рис. 86).

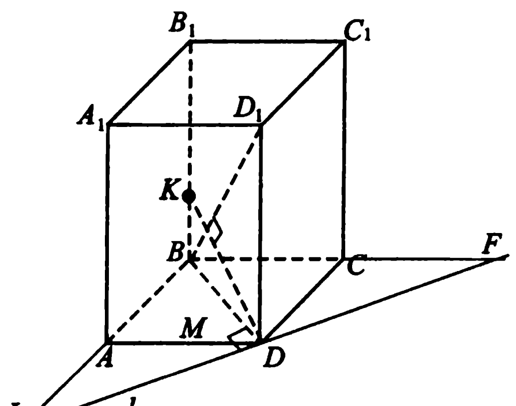


Рис. 86.

KL — линия пересечения левой боковой грани AA_1B_1B и плоскости, проходящей через прямые DK и l, KF — линия пересечения задней грани BB_1C_1C и плоскости, проходящей через прямые DK и l (см. рис. 87).

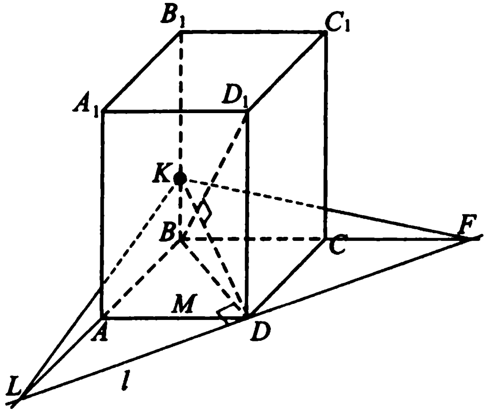


Рис. 87.

T — точка пересечения ребра AA_1 и прямой KL, P — точка пересечения ребра CC_1 и прямой KF.

Проводим отрезки TD в передней грани и DP в правой боковой грани (см. рис. 88).

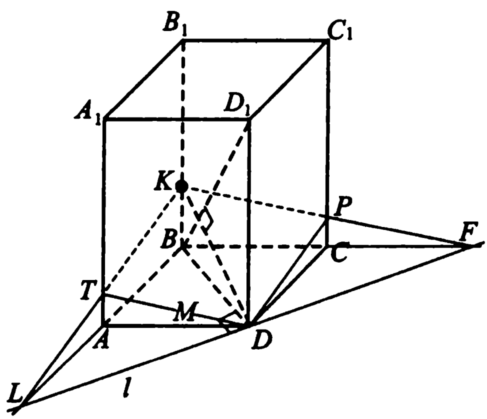


Рис. 88.

$KPDT$ — искомое сечение (см. рис. 89).

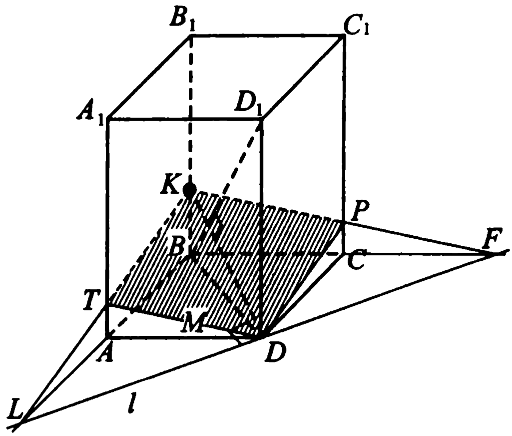


Рис. 89.

Задачи для самостоятельного решения

Задача № 1. Точки M и N — середины боковых рёбер SA и SB правильной треугольной пирамиды $SABC$ с основанием ABC.

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной плоскости ABC и содержащей прямую MN.

2) На каком расстоянии от вершины C находится линия пересечения плоскости сечения и плоскости ABC, если $AB = 30$, $AS = 28$?

Задача № 2. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, $AB = AA_1 = 1$, O — точка пересечения диагоналей грани BB_1C_1. Найдите угол между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точки A и O и параллельной BC. Ответ дайте в градусах.

Задача № 3. M — точка пересечения медиан грани SAB правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$.

1) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку M, перпендикулярной плоскости ABC и параллельной ребру AB.

2) Найдите расстояние от ребра AB до плоскости сечения, если $AB = 5\sqrt{2}$, $AS = 13$?

Задача № 4. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, сторона основания которой равна 4, а высота — 3. Постройте сечение призмы плоскостью AC_1F_1 и найдите площадь этого сечения.

Задача № 5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1. Ответ дайте в градусах.

Задача № 6. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ постройте сечение, параллельное BD, проходящее через точку C и середину ребра SA. Найдите площадь построенного сечения, если сторона основания пирамиды равна 8, а боковое ребро 16.

Задача № 7 (ЕГЭ 2015). Основанием прямой четырёхугольной призмы
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $5\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{14}$. Точка K — середина ребра BB_1. Через точки Kи C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

Задача № 8. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{2}$, высота призмы равна 8. Точка M — середина ребра AA_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, содержащей точки M, B и точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$.

б) Найдите площадь построенного сечения.

Задача № 9. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной, равной 3, через середину бокового ребра CC_1 и точку пересечения диагоналей основания $ABCD$ проведена плоскость, параллельная диагонали B_1D. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что построенное сечение является прямоугольником.

б) Найдите периметр построенного сечения.

Задача № 10. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ постройте сечение, проходящее через высоту SO пирамиды и перпендикулярное грани ASB. Установите вид сечения и найдите его площадь, если сторона основания равна $2\sqrt{87}$, а боковое ребро — 16.

Задача № 11 (ЕГЭ–2015). В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 5. На рёбрах SA, AB, BC взяты точки P, Q, R соответственно так, что $PA = AQ = RC = 2$.

а) Докажите, что плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Найдите расстояние от вершины D до плоскости PQR.

Решение.

а) Стороны треугольника SBD равны 5, 5 и $5\sqrt{2}$, поэтому он прямоугольный, то есть прямая DS перпендикулярна прямой SB (см. рис. 90).

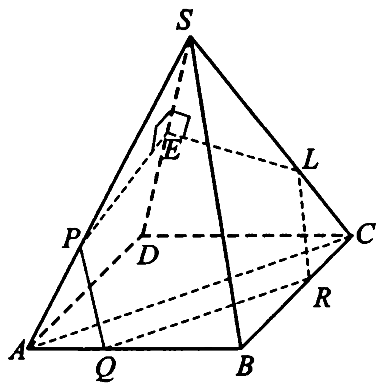


Рис. 90.

Поскольку прямые SB и PQ параллельны, прямая DS перпендикулярна прямой PQ. Прямая AC перпендикулярна прямой BD, и по теореме о трёх перпендикулярах прямая AC перпендикулярна прямой SD, а значит, прямая QR перпендикулярна прямой SD. Таким образом, плоскость PQR перпендикулярна ребру SD.

б) Пусть плоскость PQR пересекает ребро SD в точке E. Из доказанного следует, что прямая PE перпендикулярна прямой SD, откуда

$$SE = SP\cos 60^\circ = \frac{3}{2}.$$

Значит, $DE = SD - SE = \dfrac{7}{2}$.

Поскольку плоскость PQR перпендикулярна ребру SD, искомое расстояние равно DE.

Ответ: б) $\dfrac{7}{2}$.

Задача № 12 (ЕГЭ–2015). В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 30, а боковое ребро SA равно 28. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении $5:1$, считая от точки C.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

Решение.

а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN.

Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды (см. рис. 91).

Плоскости SCE и MNQ перпендикулярны плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Следовательно, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении $2:1$. Значит, $CL:LE = 5:1$:

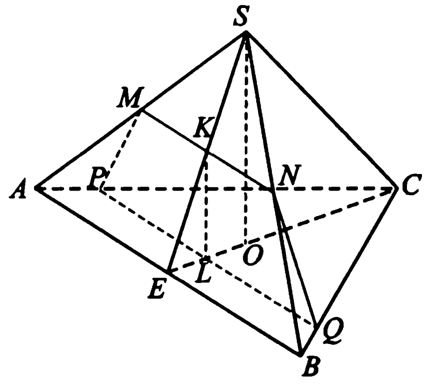


Рис. 91.

б) Прямая CE перпендикулярна KL и PQ, поэтому прямая CE перпендикулярна плоскости MNQ. Прямые AB и PQ параллельны, значит, расстояние от вершины A до плоскости сечения равно расстоянию от точки E до плоскости сечения, то есть $EL = \dfrac{CE}{6} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: б) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ

Раздел I

Ответы к подготовительным задачам

1. а) CDD_1C_1; б) ABB_1A_1. **2.** а) AA_1B_1B; б) AA_1B_1B, в) AB. **8.** Нет. **9.** 3. **10.** 1. **14.** а) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **16.** $3\sqrt{2}$. **17.** а) 5; б) 3. **18.** Треугольник AB_1C. **19.** а) AA_1D_1D; б) MN; в) BB_1C_1C; г) C_1C; д) 2 : 1; е) BB_1C_1C; ж) KL; з) $\sqrt{2}$; и) 3; к) AA_1D_1D и $A_1B_1C_1D_1$; л) T; м) TK; н) AA_1B_1B; о) AA_1B_1B; п) LP; р) $ABCD$; с) $MTKLPN$.

Раздел III

Задачи для самостоятельного решения

1. $24\sqrt{66}$. **2.** $\frac{25\sqrt{3}}{2}$. **3.** 30. **4.** $\frac{5}{3}$. **5.** $6\sqrt{21}$. **6.** 120. **7.** $\frac{16\sqrt{87}}{3}$. **8.** $13+\sqrt{39}$. **9.** $4\sqrt{5}$. **10.** $3+3\sqrt{2}$. **11.** $2\sqrt{3567}$.

ЕГЭ

Учебное издание

Резникова Нина Михайловна
Фридман Елена Михайловна

МАТЕМАТИКА. ЕГЭ
СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ
Профильный уровень

Под редакцией ***Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *Н. Раевская*
Компьютерная верстка *О. Сапожников*
Корректор *Л. Андрецова*

Подписано в печать с оригинал-макета 13.09.2016.
Формат 60x84$^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,11.
Тираж 4000 экз. Заказ № **38.**

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344082, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных
диапозитивов в ООО «Полиграфобъединение»
347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.

Издательство "Легион" предлагает обучающимся и учителям следующие пособия для подготовки к ЕГЭ по математике:

- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова
- Математика. Подготовка к ЕГЭ-2017. Базовый уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.О. Иванова
- Математика. ЕГЭ-2017. Тематический тренинг. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.О. Иванова
- Математика. ЕГЭ. Алгебра: задания с развёрнутым ответом. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова
- Математика. Тренажер для подготовки к ЕГЭ. 10-11 классы. Алгебра, геометрия, стереометрия. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова
- Математика. Большой справочник для подготовки к ЕГЭ. Под редакцией Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова
- Математика. 7-11 классы. Карманный справочник. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухов

ISBN 978-5-9966-0922-2

344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550
Тел. (863) 303-05-50, 248-14-03

ЛЕГИОН ТМ