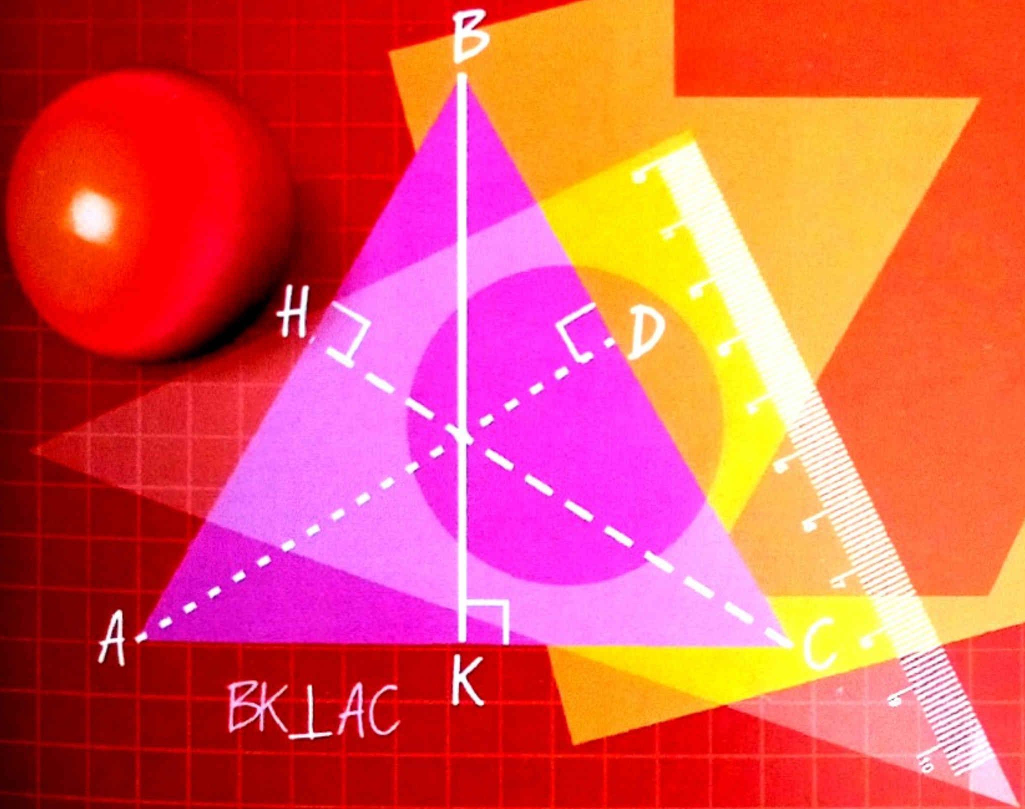
А. А. Мещерякова

Геометрия

Опорные конспекты

7 класс



Аверсэв

А. А. Мещерякова

Геометрия

Опорные конспекты

7 класс

Пособие для учащихся учреждений
общего среднего образования
с русским языком обучения

Рекомендовано
Научно-методическим учреждением
«Национальный институт образования»
Министерства образования
Республики Беларусь

11-е издание, переработанное

Минск
Аверсэв
2023

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721
М56

Рецензенты:

каф. алгебры, геометрии и мат. моделирования физ.-мат. факультета учреждения образования «Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина» (канд. физ.-мат. наук, доц. ***Ал. Н. Сендер***)

учитель математики высш. квалификац. категории гос. учреждения образования «Средняя школа № 1 г. Шклова» ***И. Д. Фроленкова***

Мещерякова, А. А.

М56 Геометрия. 7 класс : опорные конспекты : пособие для учащихся учреждений общ. сред. образования с рус. яз. обучения / А. А. Мещерякова. — 11-е изд., перераб. — Минск : Аверсэв, 2023. — 80 с. : ил.

ISBN 978-985-19-7104-2.

В пособии в форме опорных конспектов наглядно представлен учебный материал курса геометрии 7 класса.

Использование опорных конспектов позволит учащимся сконцентрировать внимание на наиболее трудных для запоминания местах, многократно повторить изученное, а учителям — провести оперативный контроль усвоения материала, привлечь к проверке знаний родителей.

Адресуется учащимся учреждений общего среднего образования.

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721

Учебное издание

Мещерякова Анжелика Анатольевна

ГЕОМЕТРИЯ. 7 КЛАСС
Опорные конспекты

Пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения

11-е издание, переработанное

Ответственный за выпуск *Н. Н. Чернушевич*
Дизайнер *А. А. Барбук*
Изображение на обложке используется по лицензии Shutterstock.com

Подписано в печать 21.03.2023. Формат 60×84 1/16. Бумага типографская. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,65. Уч.-изд. л. 1,67. Тираж 3100 экз. Заказ 1471.

Общество с дополнительной ответственностью «Аверсэв».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/15 от 02.08.2013. Ул. Н. Олешева, 1, офис 309, 220090, г. Минск.
E-mail: info@aversev.by; www.aversev.by
Контактные телефоны: (017) 378-00-00, 379-00-00. Для писем: а/я 3, 220090, г. Минск.

Унитарное полиграфическое предприятие «Витебская областная типография». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/19 от 26.11.2013. Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, г. Витебск.

ISBN 978-985-19-7104-2

Предисловие

Дорогие семиклассники! В этом учебном году вы продолжите изучать математику с помощью уже известных вам опорных схем. Используя их, вы быстрее усвоите теоретический материал учебника геометрии.

В 7 классе вы начинаете свое знакомство с геометрией на плоскости, изу́чите признаки равенства треугольников, свойства и признаки параллельных прямых. С помощью циркуля и линейки нау́читесь строить известные вам фигуры на плоскости.

В данном пособии, как и в предыдущем, в форме опорных конспектов представлены все основные разделы курса геометрии, которые вы изучите в 7 классе. Схемы и сигналы опорных конспектов помогут вам подготовиться к уроку, а при необходимости станут подсказкой во время выполнения практических заданий.

Для удобства пользования весь учебный материал пособия заключен в рамки различного вида:

— теорема, следствие;

— аксиома, определение;

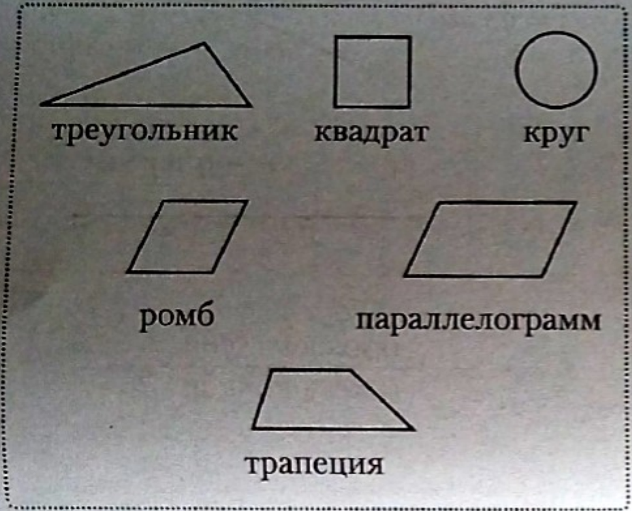
— информация для ознакомления;

— задачи с решениями.

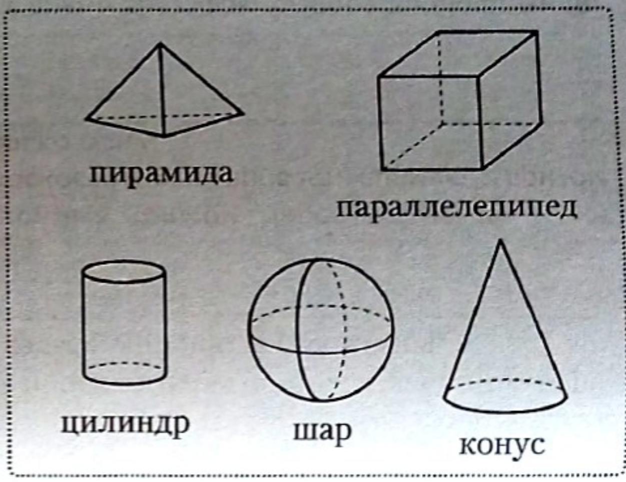
Геометрия на плоскости и в пространстве

Геометрия

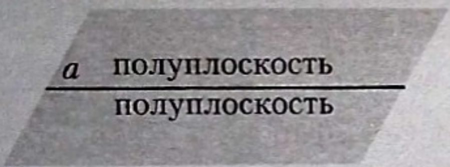
Планиметрия (изучаются свойства плоских фигур)



Стереометрия (изучаются свойства пространственных фигур)



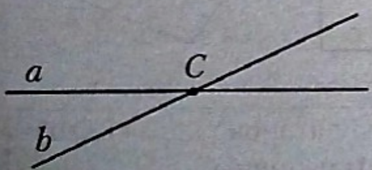
Прямая



На плоскости две прямые могут либо пересекаться, либо не пересекаться.

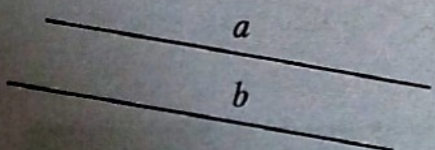
$A \in a$ и $B \in a$

Аксиома прямой. Через любые две точки плоскости можно провести прямую, и притом только одну.



$a \cap b = C$

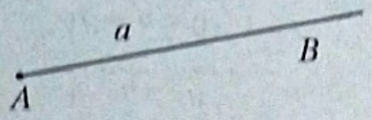
Две прямые называются **пересекающимися**, если они имеют общую точку.



$a \parallel b$

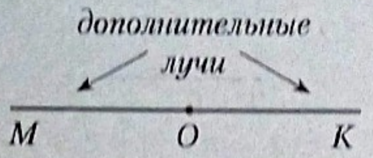
Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Луч. Отрезок



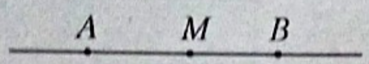
Точка A — начало луча

Лучом называется часть прямой, ограниченная одной точкой.



OM и OK — дополнительные лучи

Два луча называются **дополнительными**, если они имеют общее начало и лежат на одной прямой.

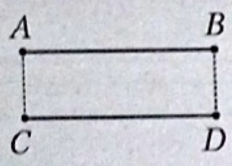


AB, AM, MB — отрезки

Отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками.

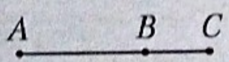
Отрезок состоит из двух точек прямой (концов отрезка) и всех ее точек, лежащих между двумя данными точками.

Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля.



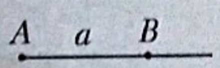
$AB = CD$

Два отрезка называются **равными**, если их можно совместить наложением.



Если $B \in AC$, то $AC = AB + BC$

Аксиома измерения отрезков. Если на отрезке взять точку, то она разобьет данный отрезок на два отрезка, сумма длин которых равна длине данного отрезка.



$AB = a > 0$

Аксиома откладывания отрезков. На любом луче от его начала можно отложить отрезок данной длины, и притом только один.

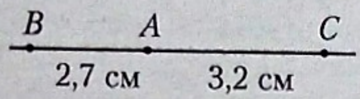
Задача 1.

Точки A, B, C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 2{,}7$ см, $AC = 3{,}2$ см. Сколько решений имеет задача?

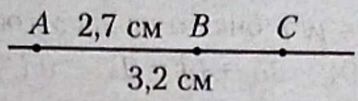
Решение.

Существуют 2 решения.

1) Если точка A лежит между B и C, тогда $BC = AB + AC = 2{,}7 + 3{,}2 = 5{,}9$ (см).

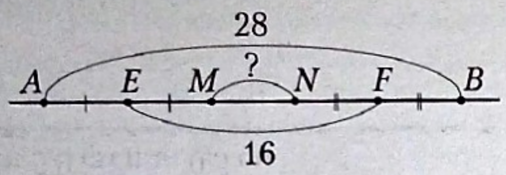


2) Если точка B лежит между A и C, тогда $BC = AC - AB = 3{,}2 - 2{,}7 = 0{,}5$ (см).



Ответ: 5,9 см или 0,5 см.

Задача 2.



Дано: $AB = 28$ см; $EF = 16$ см; $AE = EM$, $NF = FB$.

Найти: MN.

Решение.

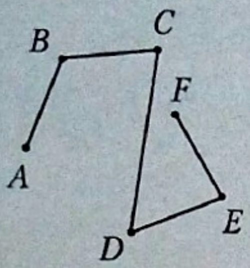
1) $AB = AE + EF + FB$, тогда $AE + FB = AB - EF = 28 - 16 = 12$ (см).

2) $AE = EM$, $NF = FB$ (по условию), следовательно, $EM + NF = 12$ см.

3) $MN = EF - (EM + NF) = 16 - 12 = 4$ (см).

Ответ: 4 см.

Ломаная

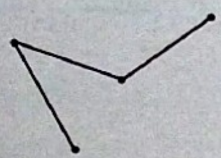
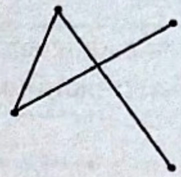
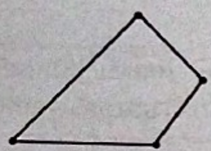
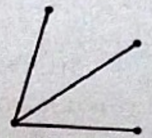


$ABCDEF$ — ломаная

отрезки AB, BC, CD, DE, EF — звенья ломаной

A, B, C, D, E и F — вершины ломаной

Ломаной называется геометрическая фигура, образованная отрезками, последовательно соединенными своими концами, у которой никакие два соседних звена не лежат на одной прямой. **Длиной ломаной** называется сумма длин ее звеньев.

 простая незамкнутая ломаная	 непростая незамкнутая ломаная
 простая замкнутая ломаная	 не ломаная

Окружность

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, которая называется центром окружности.

OA, OB и OC — радиусы
AB — диаметр,
$AB = OA + OB$
EH — хорда
$\cup KM$ и $\cup EH$ — дуги

$\omega\ (O, r)$ — окружность, где O — центр окружности, r — радиус

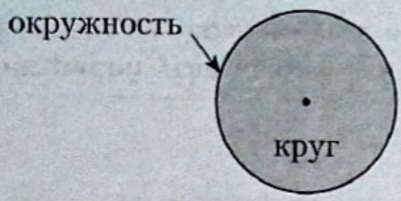
Хордой окружности называется отрезок, соединяющий две точки окружности.

Диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр окружности.

Радиусом окружности называется отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой на окружности (или длина этого отрезка).

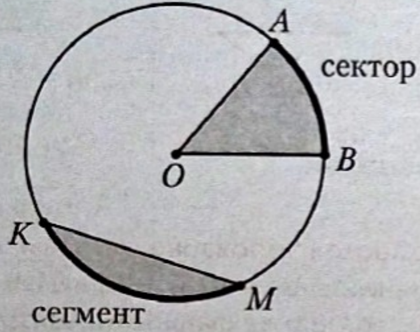
Дугой окружности называется часть окружности, ограниченная двумя точками.

Круг



Кругом называется внутренняя часть плоскости, ограниченная окружностью.

Кругом с центром в точке O и $r > 0$ называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до центра меньше или равно r.

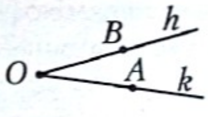


Часть круга, заключенная между двумя радиусами, называется **сектором**.
Два радиуса разбивают круг на два сектора.

Часть круга, заключенная между дугой окружности и хордой, соединяющей концы дуги, называется **сегментом**.
Хорда разбивает круг на два сегмента.

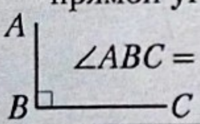
Угол. Виды углов

Угол — это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки, и частью плоскости, которую они ограничивают.



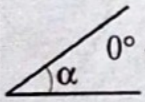
O — вершина угла.
Обозначения угла:
$\angle(hk)$, или $\angle AOB$, или $\angle O$.

прямой угол



$\angle ABC = 90°$.

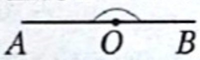
острый угол



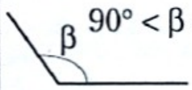
$0° < \alpha < 90°$.

развернутый угол

$\angle AOB = 180°$.



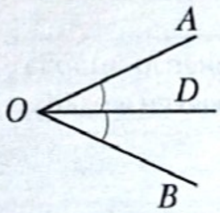
тупой угол



$90° < \beta < 180°$.

Два угла называются **равными**, если их можно совместить наложением.

Биссектрисой угла называется луч, который выходит из вершины угла и делит его на два равных угла.

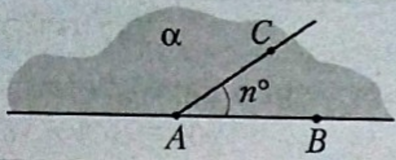


Луч OD — биссектриса $\angle AOB$.

$\angle AOD = \angle BOD = \frac{1}{2}\angle AOB$.

Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля.

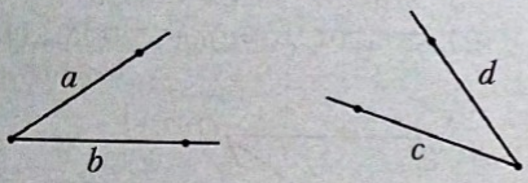
Аксиома откладывания углов



$\angle CAB = n°$,
$0° < n° < 180°$.

От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол данной градусной меры, и притом только один.

Свойства градусной меры углов



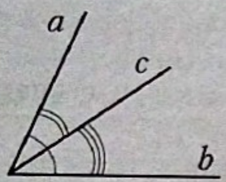
Равные углы имеют равные градусные меры.

$\angle(ab) = \angle(cd)$, значит, $\begin{cases} \angle(ab) = n°, \\ \angle(cd) = n°. \end{cases}$

Углы, имеющие равные градусные меры, равны.

$\left.\begin{aligned} \angle(ab) = n°, \\ \angle(cd) = n°, \end{aligned}\right\}$ значит, $\angle(ab) = \angle(cd)$.

Аксиома измерения углов

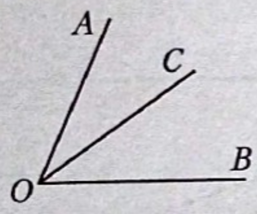


$\angle(ab) = \angle(ac) + \angle(cb)$.

Если внутри угла из его вершины провести луч, то он разобьет данный угол на два угла, сумма градусных мер которых равна градусной мере данного угла.

Задачи по теме «Угол. Виды углов»

Задача 1.



Дано: $\angle AOB$, луч OC, $\angle AOB = 78°$,
$\angle AOC < \angle COB$ на $18°$.

Найти: $\angle COB$.

Решение.

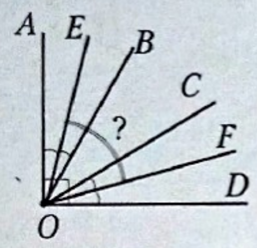
1) Пусть $\angle AOC = x°$, тогда $\angle COB = x° + 18°$,
$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$,
$\angle AOB = 78°$ (по условию).

Составим уравнение:
$x + x + 18° = 78°$,
$2x = 78° - 18°$,
$2x = 60°$,
$x = 30°$.

2) $\angle AOC = 30°$,
$\angle COB = 30° + 18° = 48°$.

Ответ: $48°$.

Задача 2.



Дано: $\angle AOD = 90°$;
$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$;
OE – биссектриса $\angle AOB$;
OF – биссектриса $\angle COD$.

Найти: $\angle EOF$.

Решение.

1) По условию $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$, а $\angle AOD = 90°$, значит,

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 90° : 3 = 30°.$$

2) Так как OE – биссектриса $\angle AOB$ и OF – биссектриса $\angle COD$, следовательно,

$$\angle EOB = \angle COF = 30° : 2 = 15°.$$

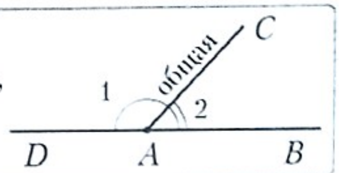
$$\angle EOF = \angle EOB + \angle BOC + \angle COF = 15° + 30° + 15° = 60°.$$

Ответ: 60°.

Смежные углы

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

$\angle 1$ и $\angle 2$ – смежные углы,
AD и AB – дополнительные лучи,
AC – общая сторона.

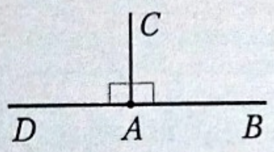


Теорема. Сумма смежных углов **равна 180°**.

Если $\angle CAB$ и $\angle CAD$ – смежные, то $\boldsymbol{\angle CAB + \angle CAD = 180°}$.

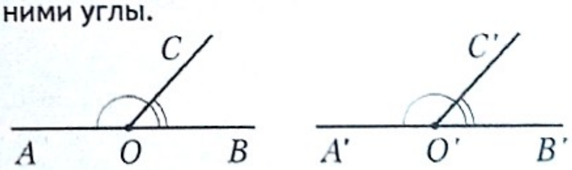
Следствия

1. Если смежные углы равны, то каждый из них прямой.



Если $\angle CAB$ и $\angle CAD$ – смежные и $\angle CAB = \angle CAD$, то $\boldsymbol{\angle CAB = \angle CAD = 90°}$.

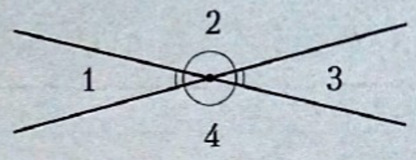
2. Если два угла равны, то равны и смежные с ними углы.



Если $\angle AOC = \angle A'O'C'$, $\angle AOC$ и $\angle COB$, $\angle A'O'C'$ и $\angle C'O'B'$ – смежные, то $\boldsymbol{\angle COB = \angle C'O'B'}$.

Вертикальные углы

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются дополнительными лучами к сторонам другого.



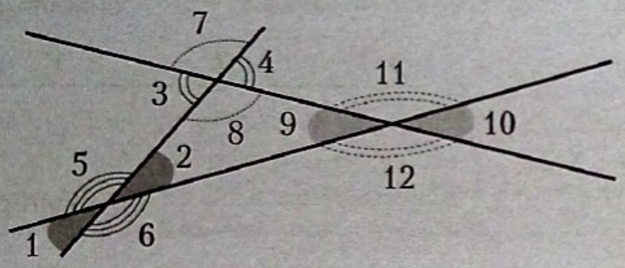
Теорема. Вертикальные углы равны.

Если $\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные,

$\angle 2$ и $\angle 4$ — вертикальные,

то $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$.

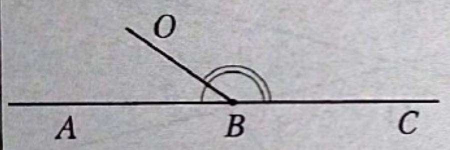
Углом между двумя пересекающимися прямыми называется меньший из образованных ими углов.



$$\left.\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 2,\\ \angle 3 = \angle 4,\\ \angle 5 = \angle 6,\\ \angle 7 = \angle 8,\\ \angle 9 = \angle 10,\\ \angle 11 = \angle 12\end{array}\right\}\text{ как вертикальные углы.}$$

Задачи по теме «Смежные и вертикальные углы»

Задача 1.



Дано: $\angle ABO$ и $\angle OBC$ — смежные углы, OB — луч, $\angle OBC$ больше $\angle ABO$ в 4 раза.

Найти: $\angle ABO$, $\angle OBC$.

Решение.

$\angle ABO + \angle OBC = 180°$ (так как смежные углы),

$\angle OBC = 4 \cdot \angle ABO$ (так как $\angle OBC$ больше $\angle ABO$ в 4 раза),

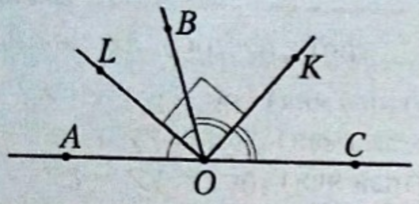
$\angle ABO + 4 \cdot \angle ABO = 180°$,

$5 \cdot \angle ABO = 180°$; $\angle ABO = 180° : 5 = 36°$,

$\angle OBC = 4 \cdot \angle ABO = 4 \cdot 36° = 144°$.

Ответ: $\angle ABO = 36°$, $\angle OBC = 144°$.

Задача 2.



Дано: $\angle AOC = 180°$,
$\angle AOB$ и $\angle COB$ – смежные углы,
OL – биссектриса $\angle AOB$,
OK – биссектриса $\angle COB$.
Доказать: $\angle LOK = 90°$.

Доказательство.

Пусть $\angle AOB = \alpha$, $\angle COB = \beta$,
значит, $\angle AOB + \angle COB = \alpha + \beta = 180°$ (как смежные углы).

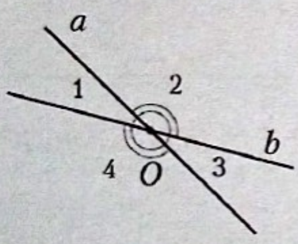
$\angle LOB = \frac{\alpha}{2}$ (так как OL – биссектриса $\angle AOB$),

$\angle KOB = \frac{\beta}{2}$ (так как OK – биссектриса $\angle COB$),

$\angle LOB + \angle KOB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$, что и требовалось доказать.

Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.

Задача 3.



Дано: $a \cap b = O$,
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 210°$.
Найти: $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$.

Решение.

1) $\left.\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 3,\\ \angle 2 = \angle 4\end{array}\right\}$ (как вертикальные углы),

$\left.\begin{array}{l}\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360°,\\ \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 210° \text{ (по условию)},\end{array}\right\}$ значит, $\angle 4 = 360° - 210° = 150°$;

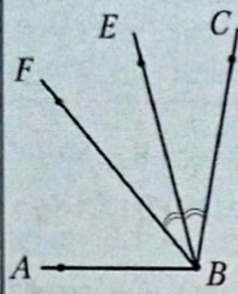
2) $\angle 4 = 150°$,

$\left.\begin{array}{l}\angle 2 = \angle 4 = 150° \text{ (как вертикальные углы)},\\ \angle 1 + \angle 2 = 180° \text{ (как смежные углы)},\end{array}\right\}$ значит, $\angle 1 = 180° - \angle 2 = 180° - 150° = 30°$,

$\angle 1 = \angle 3 = 30°$ (как вертикальные углы).

Ответ: 30°, 150°, 30°, 150°.

Задача 4.



Дано: $\angle ABC$,
BF – биссектриса $\angle ABC$,
BE – биссектриса $\angle FBC$,
$\angle EBC = 25°$.

Найти: $\angle ABC$.

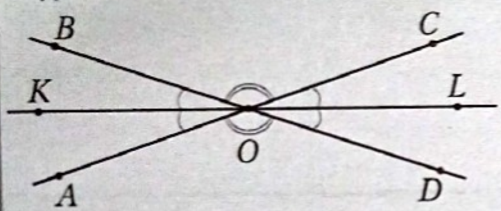
Решение.

1) Так как BE – биссектриса $\angle FBC$, значит, $\angle FBE = \angle EBC = 25°$,
$\angle FBC = \angle FBE + \angle EBC = 25° + 25° = 50°$;

2) так как FB – биссектриса $\angle ABC$, значит, $\angle ABF = \angle FBC = 50°$,
$\angle ABC = \angle ABF + \angle FBC = 50° + 50° = 100°$.

Ответ: 100°.

Задача 5.



Дано: $\angle AOB$ и $\angle DOC$ – вертикальные углы,
OK – биссектриса $\angle AOB$,
OL – биссектриса $\angle COD$.

Доказать: $\angle KOL = 180°$.

Доказательство.

Пусть $\angle BOC = \beta$, $\angle AOB = \alpha$.

$\angle KOL = \angle KOB + \angle BOC + \angle COL$,

$$\left.\begin{array}{l} \angle AOB = \angle DOC = \alpha \text{ (как вертикальные углы)}, \\ \angle KOB = \dfrac{\alpha}{2} \text{ (так как } OK \text{ – биссектриса } \angle AOB), \\ \angle LOC = \dfrac{\alpha}{2} \text{ (так как } OL \text{ – биссектриса } \angle COD), \\ \angle BOC = \beta \text{ (по условию)}, \end{array}\right\} \text{ следовательно,}$$

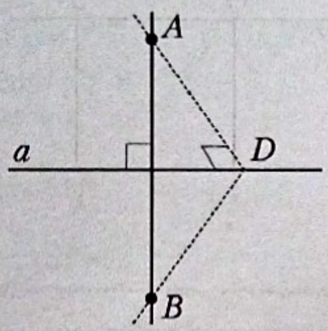
$\angle KOL = \beta + \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = \beta + \alpha = 180°$ (так как α и β – смежные углы), что и требовалось доказать.

Угол между биссектрисами вертикальных углов равен 180°.

Перпендикулярные прямые

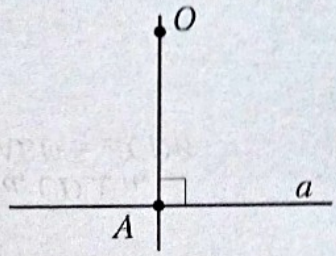
Две прямые называются **перпендикулярными**, если они пересекаются под прямым углом.

Теорема. Через любую точку плоскости можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.



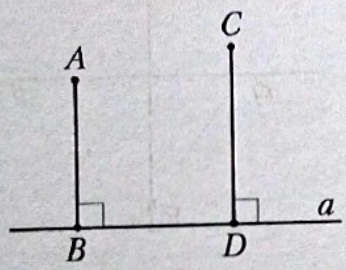
$A \notin a$,
$AB \perp a$.

Рассмотрим прямую a и точку O, не лежащую на ней. Отрезок OA называется **перпендикуляром**, проведенным из точки O **к прямой** a, если прямые OA и a перпендикулярны. Точка A называется **основанием перпендикуляра**.



$OA \perp a$,
точка A — основание перпендикуляра.

Задача по теме «Перпендикулярные прямые»



Дано: a — прямая,
$A \notin a$,
$C \notin a$,
$AB \perp a$, $CD \perp a$.
Доказать: $\angle ABD = \angle CDB$.

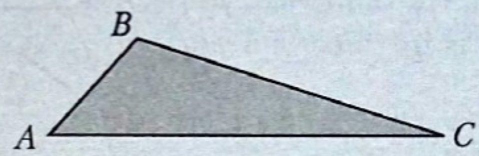
Доказательство.

$\left.\begin{array}{l} AB \perp a\text{, значит, } \angle ABD = 90^\circ, \\ CD \perp a\text{, значит, } \angle CDB = 90^\circ, \end{array}\right\}$ следовательно, $\angle ABD = \angle CDB$,

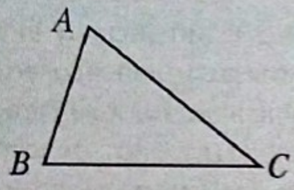
что и требовалось доказать.

Треугольник

Треугольником называется трехзвенная замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, которую она ограничивает.

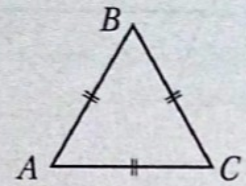


разносторонний



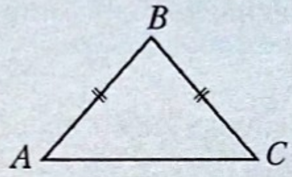
$AB \neq BC \neq AC.$

равносторонний



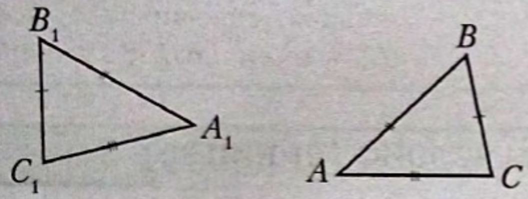
$AB = BC = AC.$

равнобедренный



$AB = BC.$

Два треугольника называются **равными**, если их можно совместить наложением.

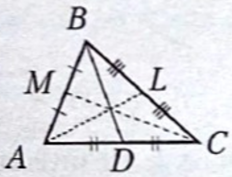


$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1.$

$\angle A = \angle A_1,$ $\angle B = \angle B_1,$ $\angle C = \angle C_1.$	$AB = A_1B_1,$ $AC = A_1C_1,$ $BC = B_1C_1.$

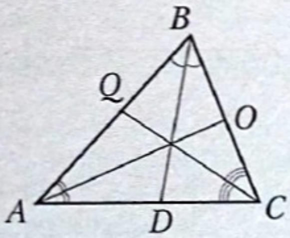
Медиана, биссектриса, высота треугольника

Медиана треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.



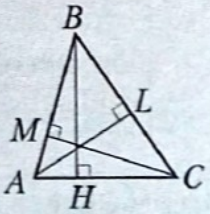
BD — медиана, $AD = DC$,
AL — медиана, $BL = LC$,
CM — медиана, $AM = MB$.

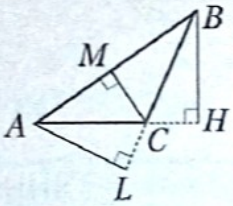
Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой пересечения биссектрисы с противоположной стороной.



BD — биссектриса треугольника,
$\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle B;$
AO — биссектриса треугольника,
$\angle CAO = \angle BAO = \frac{1}{2}\angle A;$
CQ — биссектриса треугольника,
$\angle BCQ = \angle ACQ = \frac{1}{2}\angle C.$

Высота треугольника — перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону или на ее продолжение.



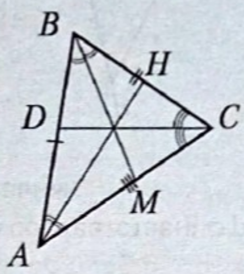


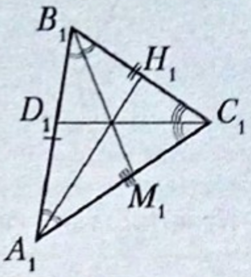
BH — высота, $BH \perp AC$,
CM — высота, $CM \perp AB$,
AL — высота, $AL \perp BC$.

Признаки равенства треугольников

Свойства равенства треугольников

1. У равных треугольников все соответствующие элементы равны (стороны, углы, медианы, высоты, биссектрисы и т. д.).
2. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов лежат равные стороны.





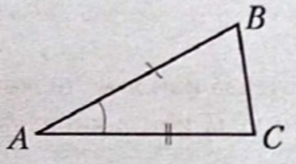
Признаки равенства треугольников

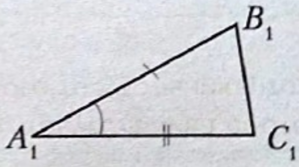
1. По двум сторонам и углу между ними.

Теорема. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Если: $AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$,

то $\triangle \boldsymbol{ABC} = \triangle \boldsymbol{A_1B_1C_1}$.



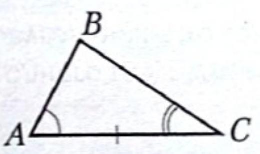


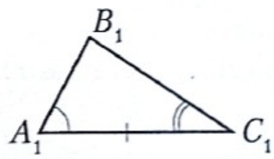
2. По стороне и двум прилежащим к ней углам.

Теорема. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Если: $AC = A_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$,
$\angle C = \angle C_1$,

то $\triangle \boldsymbol{ABC} = \triangle \boldsymbol{A_1B_1C_1}$.



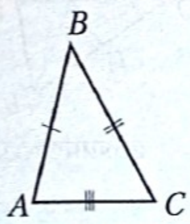


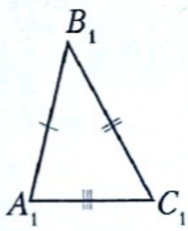
3. По трем сторонам.

Теорема. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

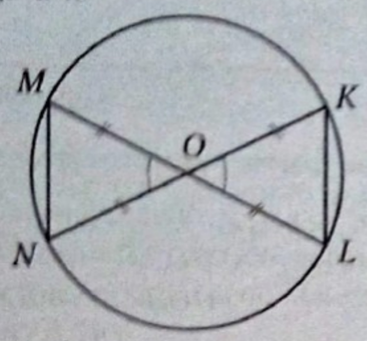
Если: $AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$,
$BC = B_1C_1$,

то $\triangle \boldsymbol{ABC} = \triangle \boldsymbol{A_1B_1C_1}$.





Задача 1.



Дано: $\omega(O, r)$,
ML, NK – диаметры.

Доказать: $\triangle OMN = \triangle OKL$.

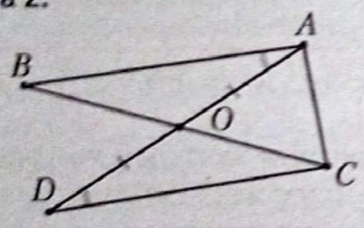
Доказательство.

Рассмотрим $\triangle OMN$ и $\triangle OKL$:

$MO = OL = r$ (так как ML – диаметр, O – центр окружности),
$NO = OK = r$ (так как NK – диаметр, O – центр окружности),
$\angle MON = \angle KOL$ (как вертикальные углы),
следовательно,

$\triangle OMN = \triangle OKL$ (по двум сторонам и углу между ними), что и требовалось доказать.

Задача 2.



Дано: $AD \cap BC = O$,
$AO = DO$,
$\angle BAO = \angle CDO$,
$\angle ACO = 55°$, $\angle ABO = 30°$.

Найти: $\angle ACD$.

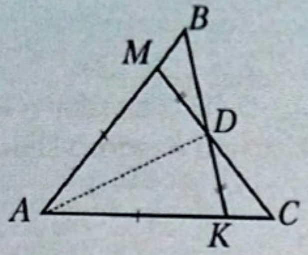
Решение.

1) Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle DOC$:
$AO = DO$,
$\angle BAO = \angle CDO$ (по условию),
$\angle BOA = \angle COD$ (как вертикальные углы),
значит, $\triangle AOB = \triangle DOC$ (по стороне и двум прилежащим углам),
следовательно, $\angle DCO = \angle ABO = 30°$;

2) $\angle ACD = \angle ACO + \angle DCO = 55° + 30° = 85°$.

Ответ: 85°.

Задача 3.



Дано: $\triangle ABK$, $\triangle ACM$,
$BK \cap MC = D$,
$AM = AK$,
$DM = DK$.

Доказать: 1) $BD = CD$; 2) $AB = AC$.

Доказательство.

1) Рассмотрим $\triangle AMD$ и $\triangle AKD$:
$AM = AK$, $DM = DK$ — по условию, AD — общая, значит, $\triangle AMD = \triangle AKD$ (по трем сторонам треугольника), следовательно, $\angle AMD = \angle AKD$;

2) $\angle BMD = 180° - \angle AMD$, $\angle CKD = 180° - \angle AKD$,
$\angle AMD = \angle AKD$ (по доказанному), следовательно, $\angle BMD = \angle CKD$;

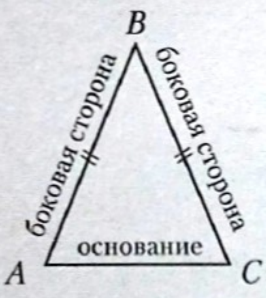
3) рассмотрим $\triangle MDB$ и $\triangle KDC$:
$MD = DK$ (по условию),
$\angle MDB = \angle KDC$ (как вертикальные),
$\angle BMD = \angle CKD$ (по доказанному в п. 2), значит, $\triangle MDB = \triangle KDC$ (по стороне и двум прилежащим углам), следовательно, $BD = CD$, что и требовалось доказать. Кроме того, $MB = KC$;

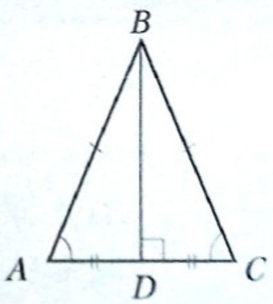
4) $AB = AM + MB$, $AC = AK + KC$,
$AM = AK$ (по условию), $MB = KC$ (по доказанному в п. 3), следовательно, $AB = AC$, что и требовалось доказать.

Равнобедренный треугольник

Треугольник называется **равнобедренным**, если у него две стороны равны.

$AB = BC$, значит $\triangle ABC$ — равнобедренный.

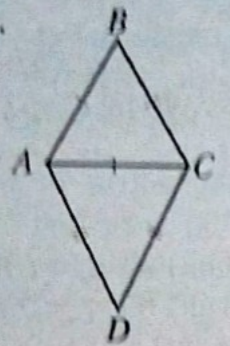




Свойства	Признаки
1. Если в $\triangle ABC$ $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$ **(углы при основании равны)**.	1. Если в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$.
2. Если $\triangle ABC$ — равнобедренный и BD — медиана, **то BD — высота и биссектриса**.	2. Если в треугольнике • высота является медианой, или • высота является биссектрисой, или • медиана является биссектрисой, **то треугольник равнобедренный**.

Задачи по теме «Равнобедренный треугольник»

Задача 1.



Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний,
$\triangle ADC$ – равнобедренный ($AD = CD$),
AC – общая сторона,
$BC = 8$ см,
$P_{ADC} > P_{ABC}$ в 1,5 раза.

Найти: CD.

Решение.

1) Так как $\triangle ABC$ – равносторонний, то $AB = BC = AC = 8$ см, следовательно, $P_{ABC} = 3 \cdot BC = 3 \cdot 8 = 24$ (см);

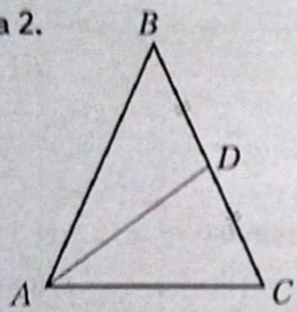
2) так как $P_{ADC} > P_{ABC}$ в 1,5 раза, то $P_{ADC} = 1{,}5 \cdot P_{ABC} = 1{,}5 \cdot 24 = 36$ (см).

Так как $\triangle ADC$ – равнобедренный, то

$$\left.\begin{array}{l} P_{ADC} = AC + 2CD, \\ AC = 8 \text{ см}, \\ P_{ADC} = 36 \text{ см}. \end{array}\right\} \text{Значит: } \begin{array}{l} 36 = 8 + 2 \cdot CD, \\ 2 \cdot CD = 28, \\ CD = 14 \text{ см}. \end{array}$$

Ответ: $CD = 14$ см.

Задача 2.



Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный,
$AB = BC$,
AD – медиана,
$AB + BD = 27$ см,
$AC + CD = 21$ см.

Найти: AB, BC, AC.

Решение.

1) Пусть $BD = x$ см.

$$\left.\begin{array}{l} BD = DC = x \text{ см (так как } AD \text{ – медиана)}, \\ AB = BC = 2x \text{ см (по условию)}, \\ AB + BD = 27 \text{ см (по условию)}. \end{array}\right\} \text{Составим уравнение: } \begin{array}{l} 2x + x = 27, \\ 3x = 27, \\ x = 9. \end{array}$$

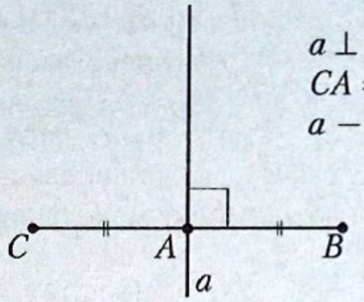
Значит, $AB = BC = 2x$ см $= 18$ см;

2) $$\left.\begin{array}{l} AC + CD = 21 \text{ см (по условию)}, \\ CD = BD = 9 \text{ см}, \end{array}\right\} \text{следовательно, } AC = 21 - CD = 21 - 9 = 12 \text{ (см)}.$$

Ответ: $AB = BC = 18$ см, $AC = 12$ см.

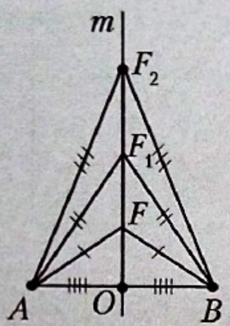
Серединный перпендикуляр к отрезку

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная этому отрезку и проходящая через его середину.



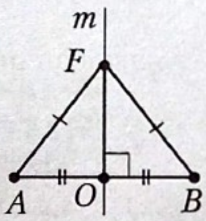
$a \perp CB$,
$CA = AB$,
a — серединный перпендикуляр.

Теорема. Любая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.



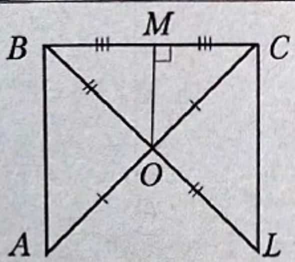
O — середина AB,
m — серединный перпендикуляр к отрезку AB.
Тогда:
$F_1A = F_1B$,
$F_2A = F_2B$,
$FA = FB$.

Теорема. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.



AB — отрезок, $F \notin AB$
$FA = FB$.
Тогда $F \in m$, где m — серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Задача по теме «Серединный перпендикуляр к отрезку»



Дано: $\triangle ABC$,
BO — медиана,
OM — серединный перпендикуляр к BC,
$L \in BO$, $BO = OL$.
Доказать: $\angle BCL = \angle BAO + \angle OBC$.

Доказательство.

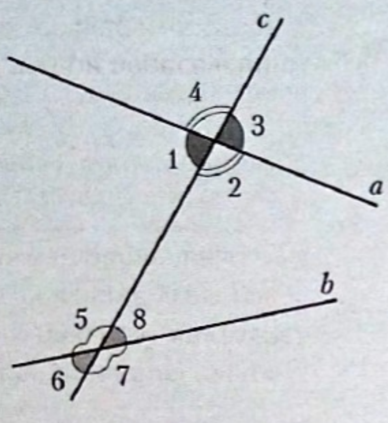
1) Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle COL$:
$AO = OC$ (так как BO — медиана),
$BO = OL$ (по условию),
$\angle AOB = \angle LOC$ (как вертикальные),
следовательно, $\triangle AOB = \triangle COL$ (по двум сторонам и углу между ними), значит, $\angle BAO = \angle LCO$, $AB = LC$;

2) рассмотрим $\triangle OBM$ и $\triangle OCM$:
OM — общая,
$\angle BMO = \angle CMO = 90°$ (так как $OM \perp BC$),
$BM = MC$ (OM — серединный перпендикуляр),
следовательно, $\triangle OBM = \triangle OCM$ (по двум сторонам и углу между ними), значит, $\angle OCM = \angle OBM$;

3) $\angle BCL = \angle BCO + \angle OCL$,
$\angle BCO = \angle OBC$ (по доказанному в п. 2),
$\angle OCL = \angle BAO$ (по доказанному в п. 1),
следовательно, $\angle BCL = \angle BAO + \angle OBC$, что и требовалось доказать.

Углы при пересечении двух прямых секущей

a, b, c — прямые; c — секущая (пересекает прямые a и b).



$\angle 4$ и $\angle 7$, $\angle 3$ и $\angle 6$ — внешние накрест лежащие углы.

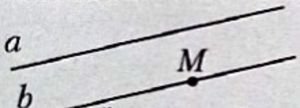
$\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 6$ — внешние односторонние углы.

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 8$ — внутренние односторонние углы.

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 5$ — внутренние накрест лежащие углы.

$\angle 1$ и $\angle 6$, $\angle 2$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 8$ — соответственные углы.

Параллельные прямые

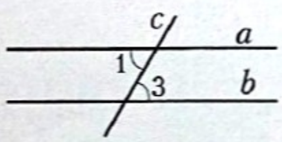


$a \parallel b \quad M \in b$

<u>Аксиома параллельных прямых</u>. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

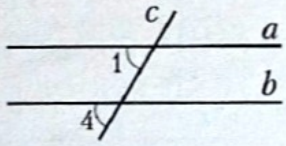
Признаки параллельности прямых

1. **<u>Теорема</u>. Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.**



Если $\angle 1$ и $\angle 3$ — внутренние накрест лежащие углы при прямых a и b и секущей c, $\angle 1 = \angle 3$, **то $a \parallel b$.**

2. **<u>Теорема</u>. Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.**



Если $\angle 1$ и $\angle 4$ — соответственные углы при прямых a и b и секущей c, $\angle 1 = \angle 4$, **то $a \parallel b$.**

Свойства параллельности прямых

1. **<u>Теорема</u>. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то внутренние накрест лежащие углы равны.**

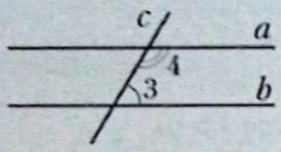
Если $a \parallel b$, c — секущая, $\angle 1$ и $\angle 3$ — внутренние накрест лежащие углы, **то $\angle 1 = \angle 3$.**

2. **<u>Теорема</u>. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.**

Если $a \parallel b$, c — секущая, $\angle 1$ и $\angle 4$ — соответственные углы, **то $\angle 1 = \angle 4$.**

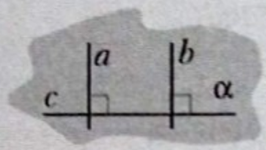
Признаки параллельности прямых

3. **Теорема. Если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.**



Если $\angle 3$ и $\angle 4$ – внутренние односторонние углы при прямых a и b и секущей c, $\angle 4 + \angle 3 = 180°$, **то** $\boldsymbol{a \parallel b}$.

4. **Теорема. Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.**



Пусть три прямые лежат в плоскости.
Если $a \perp c$, $b \perp c$, **то** $\boldsymbol{a \parallel b}$.

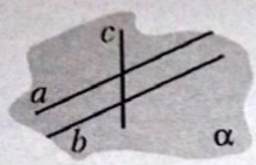
Свойства параллельности прямых

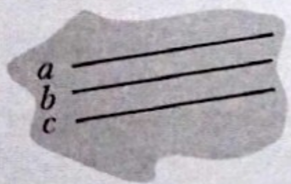
3. **Теорема. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.**

Если $a \parallel b$, c – секущая, $\angle 3$ и $\angle 4$ – внутренние односторонние углы,
то $\boldsymbol{\angle 4 + \angle 3 = 180°}$.

4. **Следствие. Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой прямой.**

Если $a \parallel b$, $c \perp a$, **то** $\boldsymbol{c \perp b}$.





Свойства параллельности прямых

5. **Теорема. Если на плоскости прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую прямую.**

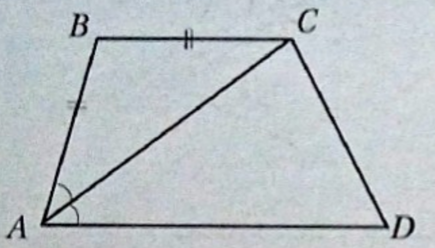
Пусть три прямые лежат в плоскости.
Если $a \parallel b$, $c \cap a$,
то $\boldsymbol{c \cap b}$.

Теорема (о двух прямых, параллельных третьей). На плоскости две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны между собой.

Пусть три прямые лежат в плоскости.
Если $a \parallel c$, $b \parallel c$,
то $\boldsymbol{a \parallel b}$.

Задачи по теме «Признаки параллельности прямых»

Задача 1.



Дано: $AB = BC$,
$\angle BAC = \angle CAD$.

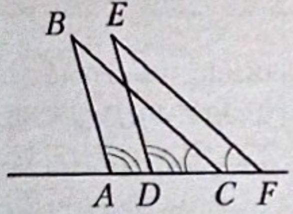
Доказать: $BC \parallel AD$.

Доказательство.

1) Так как $AB = BC$, значит, $\triangle ABC$ – равнобедренный, следовательно,
$\left.\begin{array}{l}\angle BAC = \angle BCA,\\ \angle BAC = \angle CAD \text{ (по условию)},\end{array}\right\}$ значит, $\angle CAD = \angle BCA$;

2) $\left.\begin{array}{l}\angle CAD = \angle BCA,\\ \angle CAD \text{ и } \angle BCA \text{ – внутренние накрест лежащие}\\ \text{углы при прямых } BC \text{ и } AD \text{ и секущей } AC,\end{array}\right\}$ значит, $BC \parallel AD$, что и требовалось доказать.

Задача 2.



Дано: AC и DF лежат на одной прямой,
$\triangle ABC = \triangle DEF$.

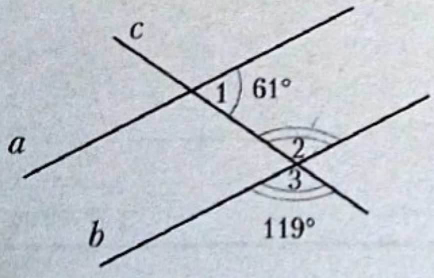
Доказать: 1) $BC \parallel EF$; 2) $AB \parallel DE$.

Доказательство.

1) $\left.\begin{array}{l}\angle BCA = \angle EFD \text{ (так как } \triangle ABC = \triangle DEF),\\ \angle BCA \text{ и } \angle EFD \text{ – соответственные углы}\\ \text{при прямых } BC \text{ и } EF \text{ и секущей } AF,\end{array}\right\}$ значит, $BC \parallel EF$, что и требовалось доказать.

2) $\left.\begin{array}{l}\angle BAC = \angle EDF \text{ (так как } \triangle ABC = \triangle DEF),\\ \angle BAC \text{ и } \angle EDF \text{ – соответственные углы при прямых } AB \text{ и } ED \text{ и секущей } AF,\end{array}\right\}$
значит, $AB \parallel DE$, что и требовалось доказать.

Задача 3.



Дано: $c \cap a$, $c \cap b$,
$\angle 1 = 61°$, $\angle 3 = 119°$.

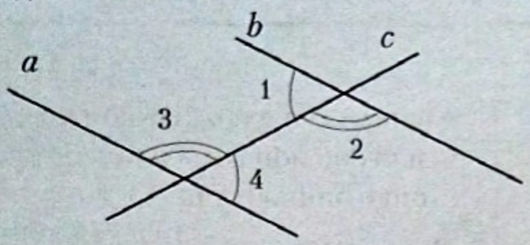
Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство.

$\left.\begin{array}{l}\angle 2 = \angle 3 = 119° \text{ (как вертикальные углы)},\\ \angle 2 \text{ и } \angle 1 \text{ – внутренние односторонние}\\ \text{углы при прямых } a \text{ и } b \text{ и секущей } c,\\ \angle 2 + \angle 1 = 119° + 61° = 180°,\end{array}\right\}$ значит, $a \parallel b$, что и требовалось доказать.

Задачи по теме «Свойства параллельных прямых»

Задача 1.



Дано: $a \parallel b$,
$c \cap a$,
$c \cap b$,
$\angle 1 + \angle 4 = 110°$.

Найти: $\angle 2$, $\angle 3$.

Решение.

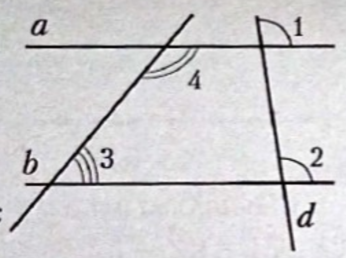
1) Так как $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 4$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных a и b и секущей c), $\angle 1 + \angle 4 = 110°$, значит, $\angle 1 = \angle 4 = 110° : 2 = 55°$;

2) $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 55° = 125°$ (как смежные углы);

3) так как $a \parallel b$, то $\angle 2 = \angle 3 = 125°$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых a и b и секущей c).

Ответ: $\angle 2 = \angle 3 = 125°$.

Задача 2.



Дано: $c \cap a$, $c \cap b$,
$\angle 1 = \angle 2$,
$\angle 4 = 130°$.

Найти: $\angle 3$.

Решение.

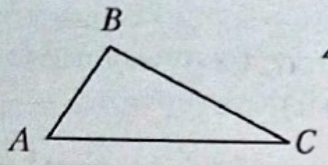
1) Так как $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1$ и $\angle 2$ — соответственные углы при прямых a и b и секущей d, то $a \parallel b$;

2) так как $a \parallel b$, $\angle 3$ и $\angle 4$ — внутренние односторонние углы при параллельных прямых a и b и секущей c, то $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Так как $\angle 4 = 130°$, то $\angle 3 = 180° - \angle 4 = 180° - 130° = 50°$.

Ответ: $\angle 3 = 50°$.

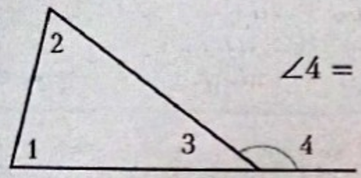
Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180°.



$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

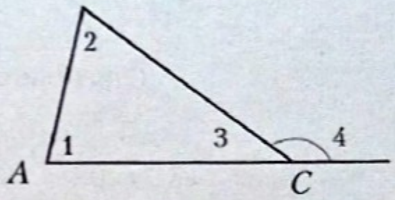
Теорема. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.



$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.

Внешний угол треугольника

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с его внутренним углом.



$\angle 4$ — внешний (при вершине C).

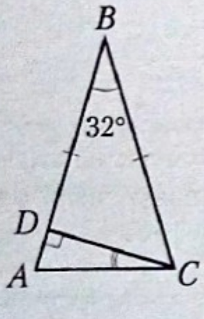
Следствие

Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, не смежного с ним:

$\angle 4 > \angle 2$,
$\angle 4 > \angle 1$.

Задачи по теме «Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника»

Задача 1.



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$,
$CD \perp AB$,
$\angle ABC = 32°$.

Найти: $\angle ACD$.

Решение.

1) Так как $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Тогда $\angle BAC = \angle BCA = = \dfrac{180° - \angle ABC}{2} = \dfrac{180° - 32°}{2} = 74°$

(так как сумма углов треугольника равна 180°).

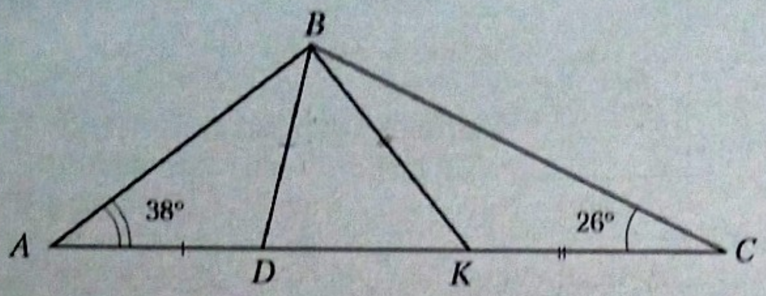
2) Рассмотрим $\triangle ACD$:

$\left.\begin{array}{l} \angle BAC = 74°, \\ \angle ADC = 90° \text{ (так как } CD \perp AB), \end{array}\right\}$ значит,

$\angle ACD = 180° - (\angle BAC + \angle ADC) = 180° - (74° + 90°) = 16°$.

Ответ: $\angle ACD = 16°$.

Задача 2.



Дано: $AD = DB$, $BK = KC$, $\angle BAD = 38°$, $\angle BCK = 26°$.

Найти: $\angle BDK$, $\angle BKD$, $\angle DBK$.

Решение.

1) Так как $AD = DB$, то $\triangle ADB$ – равнобедренный, следовательно, $\angle BAD = \angle ABD = 38°$;

2) так как $BK = KC$, то $\triangle BKC$ – равнобедренный, следовательно, $\angle KBC = \angle BCK = 26°$;

3) $\angle BDK = \angle DAB + \angle ABD$ (как внешний угол $\triangle ADB$), $\angle BDK = 38° + 38° = 76°$;

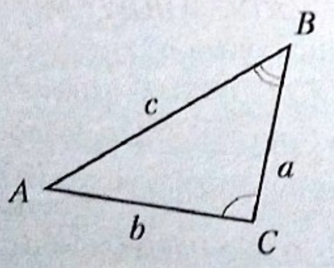
4) $\angle BKD = \angle KCB + \angle KBC$ (как внешний угол $\triangle BKC$), $\angle BKD = 26° + 26° = 52°$;

5) $\angle DBK = 180° - (\angle DKB + \angle BDK) = 180° - (52° + 76°) = 52°$ (так как сумма углов треугольника равна 180°).

Ответ: $\angle BDK = 76°$, $\angle BKD = 52°$, $\angle DBK = 52°$.

Соотношение между сторонами и углами треугольника

Теорема. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол. В треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона.



Если в $\triangle ABC$ $AB > AC$, то $\angle C > \angle B$.

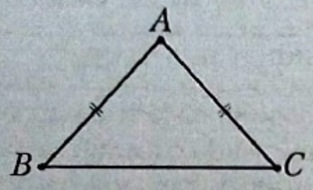
Если в $\triangle ABC$ $\angle C > \angle B$, то $AB > AC$.

Неравенство треугольника

Теорема. Любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

$a < b + c$ $\quad$ $b < a + c$ $\quad$ $c < a + b$

Задача по теме «Соотношение между сторонами и углами треугольника»



Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный,
$AB = AC$,
$AC < BC$.

Сравнить: $\angle B$, $\angle C$, $\angle A$.

Найти: $\angle A$.

Решение.

1) $AB = AC$ (по условию), значит, $\angle B = \angle C$.
$AC < BC$ (по условию), значит, $\angle B < \angle A$, } следовательно,
$AB < BC$ и, значит, $\angle C < \angle A$;

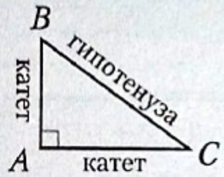
2) $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$.

Ответ: $\angle B = \angle C$; $\angle C < \angle A$; $\angle B < \angle A$; $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

Треугольник называется **прямоугольным**, если у него есть прямой угол.

Напротив прямого угла лежит наибольшая сторона — **гипотенуза.**



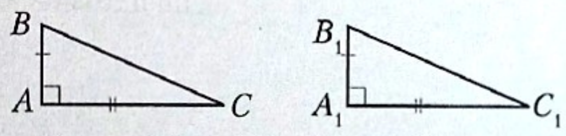
$\angle A = 90°$,
$\angle B + \angle C + \angle A = 180°$.
Значит, $\angle B + \angle C = 90°$.

Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°.

Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. По двум катетам.

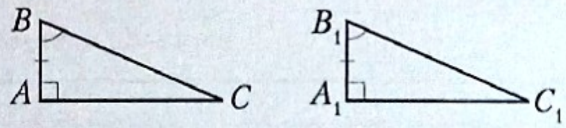
Теорема. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



Если: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$,
то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

2. По катету и прилежащему острому углу.

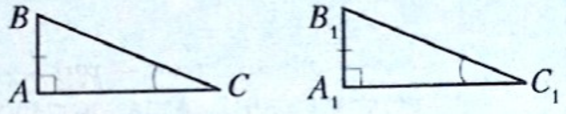
Теорема. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



Если: $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$,
то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

3. По катету и противолежащему острому углу.

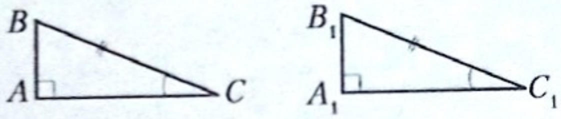
Теорема. Если катет и противолежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



Если: $AB = A_1B_1$, $\angle C = \angle C_1$,
то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

4. По гипотенузе и острому углу.

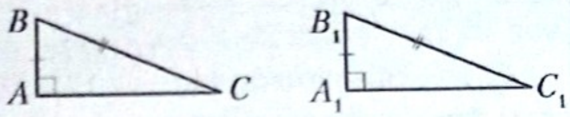
Теорема. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



Если: $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$,
то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

5. По гипотенузе и катету.

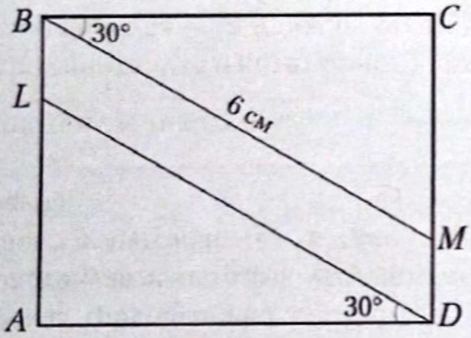
Теорема. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



Если: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$,
то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Задачи по теме «Признаки равенства прямоугольных треугольников»

Задача 1.



Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
$M \in CD$,
$L \in AB$,
$\angle MBC = \angle LDA = 30°$,
$BM = 6$ см.

Найти: LD.

Решение.

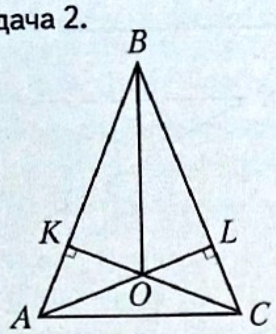
1) Так как $ABCD$ – прямоугольник, значит, $\angle B = \angle C = \angle D = \angle A = 90°$, следовательно, $\triangle BCM$ и $\triangle DAL$ – прямоугольные;

2) рассмотрим $\triangle DAL$ и $\triangle BCM$:

$\left.\begin{array}{l} BC = AD \text{ (так как } ABCD \text{ – прямоугольник),} \\ \angle MBC = \angle LDA = 30° \text{ (по условию),} \end{array}\right\}$ значит, $\triangle BCM = \triangle DAL$ (по катету и острому углу), следовательно, $LD = BM = 6$ см.

Ответ: $LD = 6$ см.

Задача 2.



Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный,
CK и AL – высоты,
$CK \cap AL = O$.

Доказать: BO – биссектриса $\angle ABC$.

Доказательство.

1) Так как CK и AL – высоты, то $\triangle AKC$ и $\triangle CLA$ – прямоугольные и $\triangle KBO$ и $\triangle LBO$ – прямоугольные;

2) рассмотрим $\triangle AKC$ и $\triangle CLA$:
$\angle KAC = \angle LCA$ (так как $\triangle ABC$ – равнобедренный),
AC – общая гипотенуза,
} следовательно, $\triangle AKC = \triangle CLA$ (по гипотенузе и острому углу), значит, $AK = LC$;

3) $KB = AB - AK$,
$BL = BC - LC$,
$AB = BC$ (так как $\triangle ABC$ – равнобедренный),
$AK = LC$ (по доказанному в пункте 2),
} следовательно, $KB = BL$;

4) рассмотрим $\triangle KBO$ и $\triangle LBO$:
$KB = BL$ (по доказанному в пункте 3),
BO – общая гипотенуза,
} следовательно, $\triangle KBO = \triangle LBO$ (по катету и гипотенузе), значит, $\angle KBO = \angle LBO$, следовательно, BO – биссектриса $\angle ABC$, что и требовалось доказать.

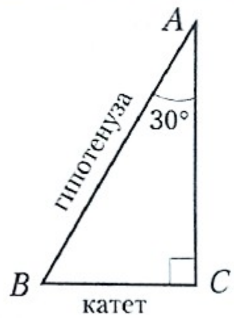
Свойства катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в 30°

<u>Теорема</u>. Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

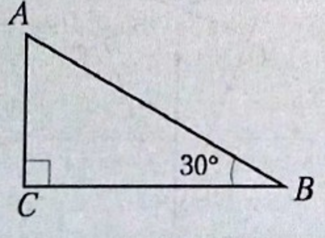
⇨ Если $\angle BAC = 30°$, то $\boldsymbol{BC = \frac{1}{2}AB}$.

<u>Теорема</u>. Если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то этот катет лежит против угла в 30°.

⇨ Если $BC = \frac{1}{2}AB$, то $\boldsymbol{\angle BAC = 30°}$.



Задача.



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle C = 90°$,
$AC + AB = 21$ см, $\angle ABC = 30°$.

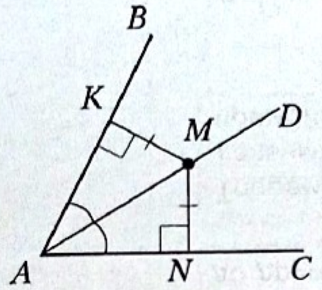
Найти: AC, AB.

Решение. $AC = \frac{1}{2}AB$ (как катет, лежащий против угла в 30°).
Пусть $AC = x$ см, тогда $AB = 2x$ см. $AC + AB = 21$ см (по условию).
Составим уравнение: $x + 2x = 21$, $3x = 21$, $x = 7$.
$AC = 7$ см, тогда $AB = 7 \cdot 2 = 14$ (см).

Ответ: 7 см, 14 см.

Свойство точек биссектрисы угла

Теорема. Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла.



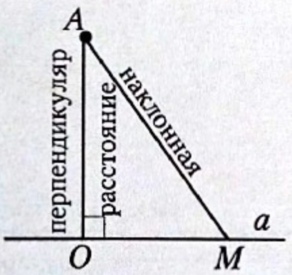
Если AD — биссектриса $\angle BAC$, $M \in AD$, $MK \perp AB$, $MN \perp AC$, то $\boldsymbol{MK = MN}$.

Теорема. Если точка внутри угла равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла.

$\angle BAC$, $MK \perp AB$, $MN \perp AC$, $MK = MN$, $M \in AD$, **то луч** $\boldsymbol{AD}$ **— биссектриса** $\boldsymbol{\angle BAC}$.

Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

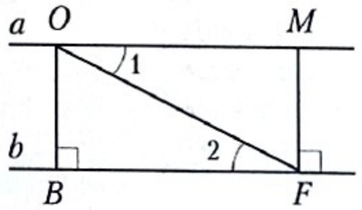
Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к прямой.



$AO \perp a$,
AO — расстояние от точки A до прямой a,
$AO = d\,(A, a)$,
M — основание наклонной,
OM — проекция наклонной,
$AO < AM$, $OM < AM$.

Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от произвольной точки, взятой на одной из этих прямых, до другой прямой.

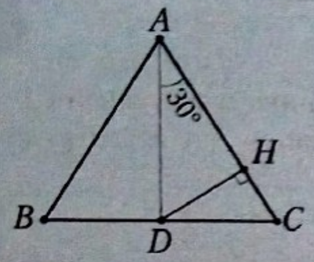
Теорема. Все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b, \\ O \in a, \\ M \in a, \\ OB \perp b, \\ MF \perp b, \end{array}\right\}$$

следовательно, $OB = MF$.

Задача по теме «Расстояние от точки до прямой»



Дано: $\triangle ABC$ – равносторонний,
AD – биссектриса,
DH – расстояние от точки D до AC,
$DH = 6$ см.

Найти: AD.

Решение.

1) $AB = BC = CA$, так как $\triangle ABC$ равносторонний, значит, $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$,
AD – биссектриса (по условию), значит, $\angle DAC = 30°$;

2) рассмотрим $\triangle ADH$:
$DH \perp AC$, так как DH – расстояние от точки D до AC,
значит, $\triangle ADH$ – прямоугольный ($\angle DHA = 90°$).

$$\left.\begin{array}{l} DH \text{ – катет,} \\ \angle DAH = 30°, \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{значит, } AD = 2 \cdot DH = 2 \cdot 6 = 12 \text{ (см)} \\ \text{(по свойству катета, лежащего против угла в } 30°\text{).} \end{array}$$

Ответ: 12 см.

Задачи на построение

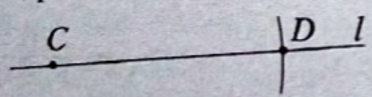
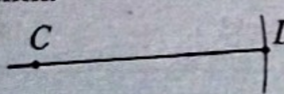
Задача. Откладывание отрезка, равного данному.

Дано: A ├──────┤ B

Построить: отрезок $CD = AB$.

Построение:

Обозначения:
ω (O, r), где O – центр окружности,
а r – радиус окружности,
⋂ – пересечение.

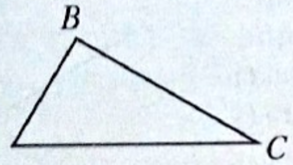
Что делаем	Как делаем
1. Строим прямую l и на этой прямой отмечаем точку C.	С помощью линейки строим прямую l, $C \in l$.
2. Проводим окружность с центром C и радиусом, равным AB. 	Ножку циркуля ставим в точку C и строим дугу с радиусом, равным AB. На пересечении дуги с прямой l делаем засечку, отмечаем точку D.
3. Отрезок CD – искомый, так как он совмещается с данным отрезком AB при наложении. 	

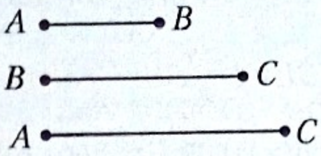
Запись построения в тетради:

1) l – прямая, $C \in l$;
2) ω (C; AB) ⋂ $l = D$;
3) CD – искомый отрезок.

Опорная задача 1.
Построение треугольника по трем сторонам

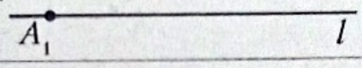
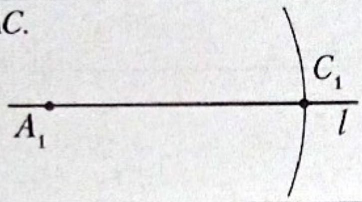
Дано:

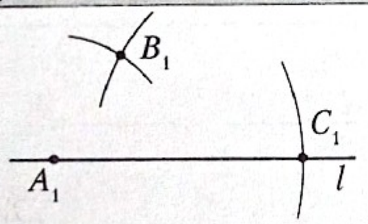
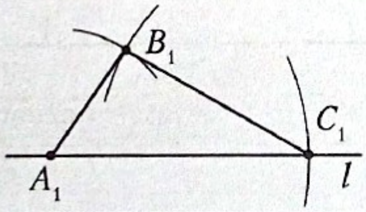




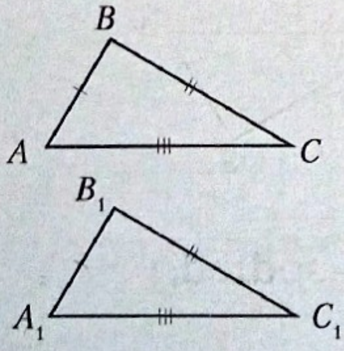
Построить: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

Построение:

Что делаем	Как делаем
1. Строим прямую l, $A_1 \in l$. 	С помощью линейки строим прямую l, отмечаем точку A_1.
2. Строим отрезок $A_1C_1 = AC$. 	Ножку циркуля ставим в точку A_1 и строим дугу с радиусом AC. На пересечении дуги с прямой l отмечаем точку C_1.

Что делаем	Как делаем
3. Строим точку B_1. 	Ножку циркуля ставим в точку C_1 и строим дугу с радиусом CB. Ножку циркуля ставим в точку A_1 и строим дугу с радиусом AB. На пересечении дуг отмечаем точку B_1.
4. Строим $\triangle A_1B_1C_1$. 	Проводим отрезки A_1B_1 и B_1C_1.

Запись построения в тетради: 1) прямая l, $A_1 \in l$;



2) строим точку C_1: $\omega_1\,(A_1; AC) \cap l = C_1$;

3) строим точку B_1: $\omega_2\,(C_1; BC) \cap \omega_3\,(A_1; AB) = B_1$;

4) получили $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

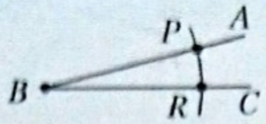
Доказательство.

Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$:

$$\left.\begin{array}{l} AB = A_1B_1 \text{ (по построению)}, \\ AC = A_1C_1 \text{ (по построению)}, \\ BC = B_1C_1 \text{ (по построению)}, \end{array}\right\} \text{значит, } \triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC \text{ (по трем сторонам).}$$

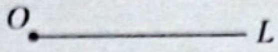
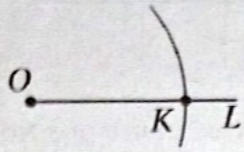
Опорная задача 2. Построение угла, равного данному

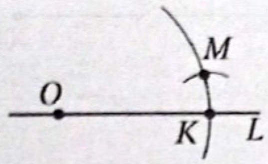
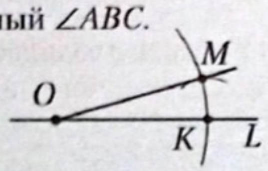
Дано:



Построить: $\angle MOK = \angle ABC$.

Построение:

Что делаем	Как делаем
1. Строим луч OL. 	С помощью линейки строим луч OL.
2. Работа с чертежом в «Дано». Строим дугу произвольного радиуса с центром B данного $\angle ABC$.	Ножку циркуля ставим в точку B и строим дугу произвольного радиуса. Дуга пересекает стороны CB и AB $\angle ABC$ в точках R и P соответственно.
3. Строим отрезок $OK = BR$. 	Ножку циркуля ставим в точку O и строим дугу с радиусом, равным BR. При пересечении с лучом OL отмечаем точку K.

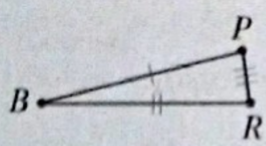
Что делаем	Как делаем
4. Строим дугу радиусом PR с центром в точке K. 	Ножку циркуля ставим в точку K и строим дугу с радиусом PR. Дуга с радиусом PR пересекает ранее построенную дугу с радиусом BR. Отмечаем точку M.
5. Строим $\angle MOK$, равный $\angle ABC$. 	С помощью линейки строим луч OM. $\angle MOK$ – искомый угол.

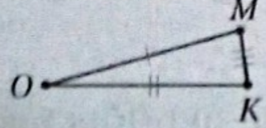
Запись построения в тетради: 1) OL – луч, O – начало луча;

2) строим отрезок OK: $\omega_1\ (O;\ r = BR) \cap OL = K$;

3) строим точку M: $\omega_2\ (K;\ r = PR) \cap \omega_1\ (O;\ r = BR) = M$.

4) $\angle MOK$ – искомый угол.





Доказательство.

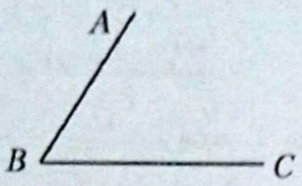
Рассмотрим $\triangle BPR$ и $\triangle OMK$:

$BR = OK$ (по построению),
$BP = OM$ (по построению),
$PR = MK$ (по построению),

значит, $\triangle BPR = \triangle OMK$ (по трем сторонам), следовательно, $\angle ABC = \angle MOK$.

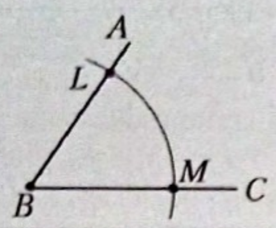
Опорная задача 3. Построение биссектрисы угла

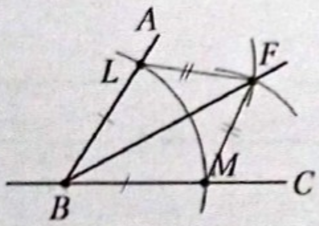
Дано:



Построить: BF – биссектрису $\angle ABC$.

Построение:

Что делаем	Как делаем
1. Строим равные отрезки BL и BM на сторонах $\angle ABC$. 	Пусть дан $\angle ABC$. Ножку циркуля ставим в точку B и строим дугу произвольного радиуса. Отмечаем точки M и L пересечения дуги со сторонами $\angle ABC$.

Что делаем	Как делаем
2. Строим биссектрису BF. 	Ножку циркуля ставим в точку L и строим дугу произвольного радиуса. Ножку циркуля ставим в точку M и строим дугу такого же радиуса, как и в точке L. Отмечаем F – точку пересечения дуг. Соединяем точку B и точку F. BF – искомая биссектриса.

Запись построения в тетради: 1) строим точку L: $\omega_1\,(B; r_1) \cap BA = L$;
2) строим точку M: $\omega_1\,(B; r_1) \cap BC = M$;
3) строим точку F: $\omega_2\,(M; r_2) \cap \omega_3\,(L; r_2) = F$;
4) BF – искомая биссектриса.

Доказательство.

Рассмотрим $\triangle BFL$ и $\triangle BFM$.

$$\left.\begin{array}{l} BF \text{ – общая,} \\ FM = LF \text{ (по построению),} \\ BL = BM \text{ (по построению),} \end{array}\right\} \text{значит, } \triangle BLF = \triangle BMF \text{ (по трем сторонам),}$$

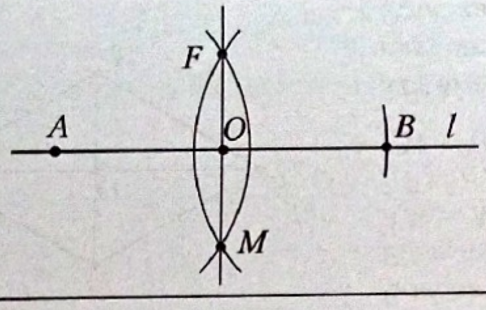
следовательно, $\angle LBF = \angle MBF$, значит, BF – биссектриса $\angle ABC$.

Опорная задача 4. Построение середины отрезка

Дано: A ——— B

Построить: точку O — середину AB.

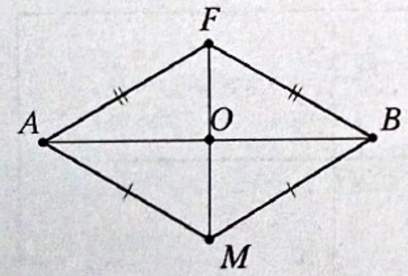
Построение:

Что делаем	Как делаем
Строим перпендикулярную прямую, проходящую через середину AB. 	Пусть AB — данный отрезок. Ножку циркуля ставим в точку A и строим дугу с радиусом, большим половины AB. Ножку циркуля ставим в точку B и строим дугу с тем же радиусом. Отмечаем точки F и M пересечения дуг. Проводим прямую через точки F и M. Отмечаем точку O — точку пересечения FM и AB. Точка O — середина AB.

Запись построения в тетради: 1) строим точки F и M: $\omega_1(A; r_1) \cap \omega_2(B; r_1) = F; M$; где $r_1 > \frac{AB}{2}$.

2) строим точку O: $FM \cap AB = O$;

3) точка O — середина AB.



Доказательство.

Рассмотрим $\triangle FAM$ и $\triangle FBM$:

$$\left.\begin{array}{l} AM = MB \text{ (по построению)}, \\ AF = BF \text{ (по построению)}, \\ FM \text{ — общая}, \end{array}\right\} \text{ следовательно,}$$

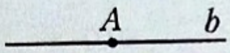
$\triangle FAM = \triangle FBM$ (по трем сторонам), значит, $\angle AFM = \angle BFM$, следовательно, FO — биссектриса, значит, FO — медиана (так как $\triangle AFB$ — равнобедренный), следовательно, точка O — середина AB.

Указанный выше способ построения середины отрезка также является и способом построения серединного перпендикуляра к отрезку.

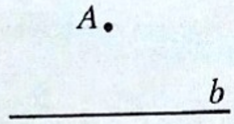
Опорная задача 5.
Построение прямой, перпендикулярной данной

Алгоритм построения одинаков для случая, когда точка A принадлежит прямой b и когда точка A не принадлежит прямой b.

Дано: а)

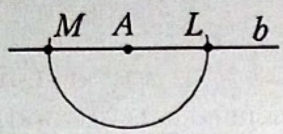
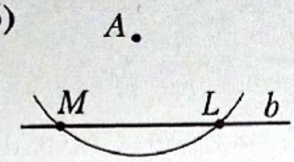


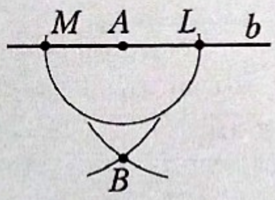
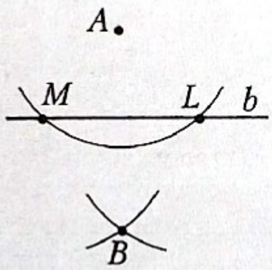
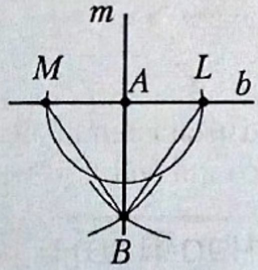
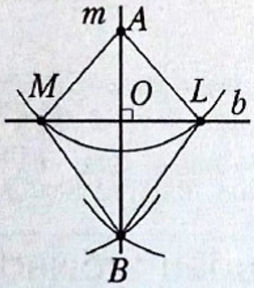
б)



Построить: $m \perp b$.

Построение:

Что делаем	Как делаем
1. Строим дугу с центром в точке A, пересекающую данную прямую. а)  б) 	Ножку циркуля ставим в точку A и проводим дугу с центром в точке A. Отмечаем точки пересечения прямой b и дуги в точках M и L.

Что делаем	Как делаем
2. Строим дуги с равными радиусами и центрами в точках M и L. а)  б) 	Ножку циркуля ставим в точку M и строим дугу произвольного радиуса, большего половины отрезка ML. Ножку циркуля ставим в точку L и строим дугу того же радиуса. Отмечаем точку B — точку пересечения дуг.
3. Строим перпендикуляр к прямой b, проходящий через точку A. а)  б) 	Проводим прямую AB, $AB \perp b$.

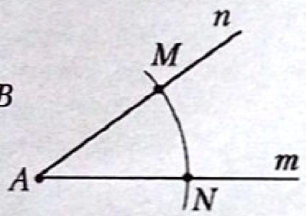
Запись построения в тетради: 1) строим точки M и L: $\omega_1(A; r_1) \cap b = M, L$;
2) строим точку B: $\omega_2(M; r_2) \cap \omega_3(L; r_2) = B$;
3) $AB \perp b$.

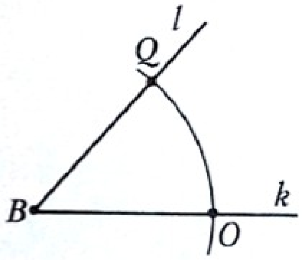
Доказательство.

Так как точки A и B равноудалены от концов отрезка ML ($AM = AL$, $BM = BL$ как радиусы), то AB – серединный перпендикуляр к отрезку ML, следовательно, $AB \perp b$.

Задача 1. Постройте треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам

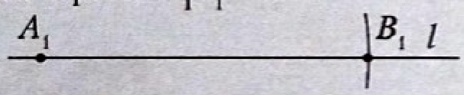
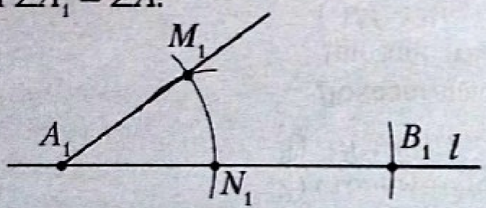
Дано:

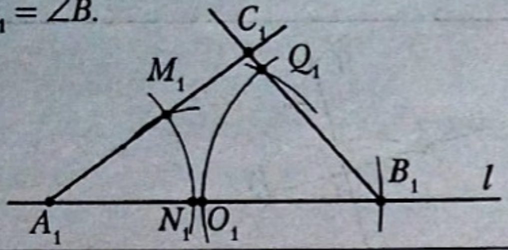




Построить: $\triangle A_1B_1C_1$ такой, что $A_1B_1 = AB$, $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$.

Построение:

Что делаем	Как делаем
1. Строим отрезок $A_1B_1 = AB$. 	Построение отрезка аналогично построению отрезка, равного данному, на с. 59.
2. Строим $\angle A_1 = \angle A$. 	Построение угла аналогично построению угла в опорной задаче № 2 на с. 62–63.

Что делаем	Как делаем
3. Строим $\angle B_1 = \angle B$. 	Построение угла аналогично построению угла в опорной задаче № 2 на с. 62–63. Отмечаем точку C_1 – точку пересечения лучей A_1M_1 и B_1Q_1.
4. Строим $\triangle A_1B_1C_1$.	Соединяем полученные точки A_1, B_1, C_1. $\triangle A_1B_1C_1$ – искомый.

Запись построения в тетради:

1) прямая l, $A_1 \in l$;
2) строим точку B_1: ω_1 $(A_1; AB) \cap l = B_1$;
3) строим точку M_1: ω_2 $(A_1; AN) \cap \omega_3$ $(N_1; NM) = M_1$;
4) строим точку Q_1: ω_4 $(B_1; BO) \cap \omega_5$ $(O_1; OQ) = Q_1$;
5) строим точку C_1: $A_1M_1 \cap B_1Q_1 = C_1$;
6) получили $\triangle A_1B_1C_1$.

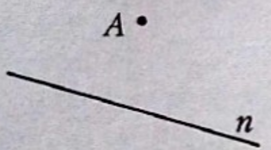
Доказательство.

Рассмотрим $\triangle A_1B_1C_1$:

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 = AB \text{ (по построению)}, \\ \angle A_1 = \angle A \text{ (по построению)}, \\ \angle B_1 = \angle B \text{ (по построению)}, \end{array}\right\} \text{ значит, } \triangle A_1B_1C_1 \text{ – искомый.}$$

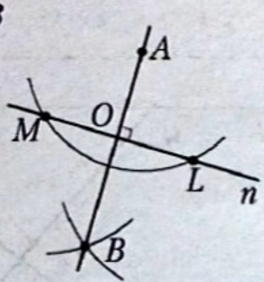
Задача 2. Постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой

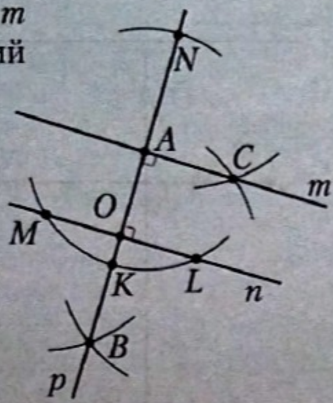
Дано:



Построить: $m \parallel n$, где $A \in m$.

Построение:

Что делаем	Как делаем
1. Строим перпендикуляр AB к прямой n. 	Построение перпендикуляра к прямой аналогично построению перпендикуляра в опорной задаче № 5 на с. 68–70.

Что делаем	Как делаем
2. Строим перпендикуляр m к прямой AB, проходящий через точку A. 	Построение перпендикуляра к прямой аналогично построению перпендикуляра в опорной задаче № 5 на с. 68–70. m – искомая прямая, $m \parallel n$.

Запись построения в тетради:

1) строим $AB \perp n$:

а) $\omega_1 (A; r_1) \cap n = M, L$;

б) $\omega_2 (M; r_2) \cap \omega_3 (L; r_2) = B$;

в) $AB \perp ML$; $AB \cap ML = O$.

2) строим $m \perp AB$:

а) $\omega_1 (A; r_1) \cap AB = N, K$;

б) $\omega_4 (K; r_3) \cap \omega_5 (N; r_3) = C$;

3) получили $AC \perp AB$ и $ML \perp AB$, следовательно, $m \parallel n$.

Доказательство.

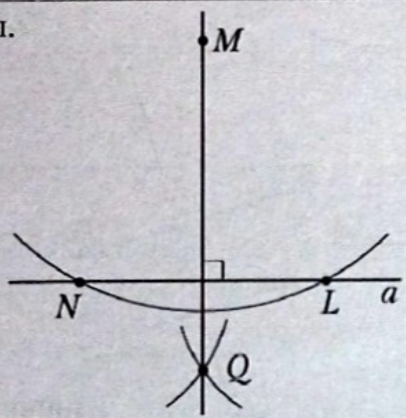
$$\left.\begin{array}{l} \angle CAO = 90^\circ \text{ (по построению),} \\ \angle LOA = 90^\circ \text{ (по построению),} \\ \angle CAO \text{ и } \angle LOA \text{ – внутренние} \\ \text{односторонние при прямых} \\ m \text{ и } n \text{ и секущей } AO, \end{array}\right\} \text{следовательно, } m \parallel n.$$

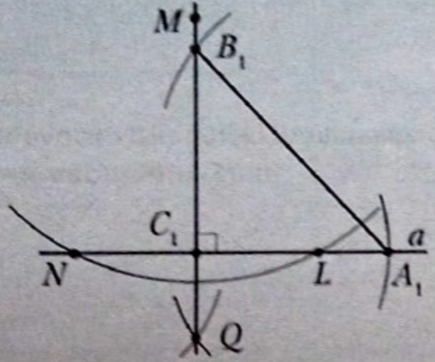
Задача 3. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету

Дано: A •———• B A •———• C

Построить: $\triangle A_1B_1C_1$ – прямоугольный, такой, что гипотенуза $A_1B_1 = AB$, катет $A_1C_1 = AC$.

Построение:

Что делаем	Как делаем
1. Строим прямой угол. 	Построение прямого угла аналогично построению перпендикуляра в опорной задаче № 5 на с. 68–70.

Что делаем	Как делаем
2. Строим прямоугольный $\triangle A_1B_1C_1$. 	Отмечаем точку C_1 пересечения прямых MQ и a. Ножку циркуля ставим в точку C_1 и строим дугу радиусом AC. Отмечаем A_1 — точку пересечения дуги с прямой a. Ножку циркуля ставим в точку A_1 и строим дугу радиусом AB. Отмечаем B_1 — точку пересечения дуги с прямой MQ. Соединяем точки A_1, B_1 и C_1. $\triangle A_1B_1C_1$ — искомый прямоугольный треугольник.

Запись построения в тетради:

1) a – прямая, $M \notin a$;
2) строим $MQ \perp a$:
   а) $\omega_1\ (M; r_1) \cap a = N, L$;
   б) $\omega_2\ (N; r_2) \cap \omega_3\ (L; r_2) = Q$;
3) строим точку C_1: $MQ \cap a = C_1$;
4) строим $\triangle A_1B_1C_1$:
   а) $\omega_4\ (C_1; AC) \cap\ a = A_1$;
   б) $\omega_5\ (A_1; AB) \cap\ MQ = B_1$;
5) $\triangle A_1B_1C_1$ – искомый прямоугольный треугольник.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} A_1B_1 = AB \text{ (по построению)}, \\ A_1C_1 = AC \text{ (по построению)}, \\ \angle B_1C_1A_1 = 90^\circ \text{ (по построению)}, \end{array}\right\} \text{значит,}$$

$\triangle A_1B_1C_1$ – искомый прямоугольный треугольник.

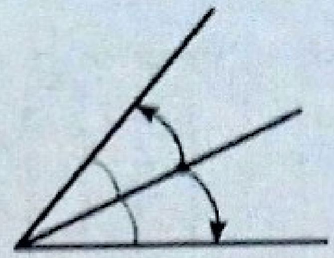
Геометрическое место точек

Геометрическим местом точек (ГМТ) называется множество всех точек, обладающих общим свойством.

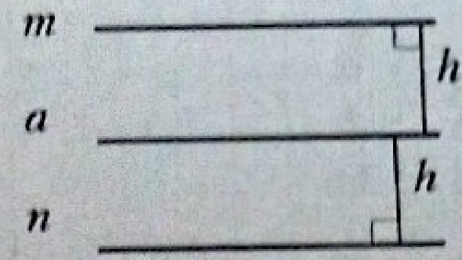
Окружность — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки.

Серединный перпендикуляр — это геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка.

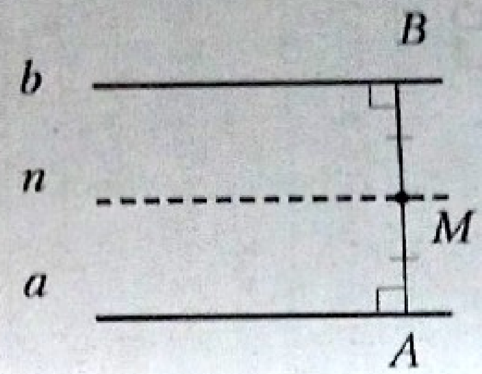
Биссектриса — геометрическое место точек плоскости, находящихся внутри угла и равноудаленных от сторон угла.



Геометрическое место точек, находящихся на заданном расстоянии h от данной прямой a, — две прямые m и n, параллельные данной, находящиеся в разных полуплоскостях от этой прямой на заданном расстоянии от нее.



Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых a и b, есть параллельная им прямая n, проходящая через середину M их общего перпендикуляра AB.



Содержание