ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

с решениями и указаниями

5–7
классы

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Лаборатория
ЗНАНИЙ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ
с решениями и указаниями

5–7
классы

Под редакцией
М. В. Федотова

Электронное издание

Москва
Лаборатория знаний
2021

УДК 373.167.1:511
ББК 22.130я721.6
З-80

Золотарёва Н. Д.

З-80 Олимпиадная математика. Логические задачи с решениями и указаниями. 5–7 классы : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — Электрон. изд. — М. : Лаборатория знаний, 2021. — 241 с. — (ВМК МГУ — школе). — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-00101-952-7

Настоящее пособие составлено на основе олимпиадных задач по математике преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также указания и решения к большинству задач.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

УДК 373.167.1:511
ББК 22.130я721.6

Деривативное издание на основе печатного аналога: Олимпиадная математика. Логические задачи с решениями и указаниями. 5–7 классы : учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов ; под редакцией М. В. Федотова. — М. : Лаборатория знаний, 2021. — 238 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе). — ISBN 978-5-00101-382-2.

ISBN 978-5-00101-952-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ РЕДАКТОРА

Уважаемые читатели, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ — школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем пятнадцатилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии, информатике и физике для старшеклассников для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы. Недавно вышли пособия по математике для подготовки к ГИА для девятиклассников.

Но мы не хотим останавливаться только на стандартных задачах, необходимых для сдачи ГИА и ЕГЭ и экзаменов в вузы. Мы хотим, чтобы школьники с младших классов и до окончания школы могли решать задачи повышенной сложности — олимпиадные задачи, на которые у учителя обычно не остаётся времени на обычном уроке математики. Большинство книг по этой тематике выходят без разбивки по классам либо без разбивки по темам. Многие хорошие книги с олимпиадными задачами вышли давно и с тех пор не переиздавались. Мы собрали много задач из различных старых и не очень старых сборников олимпиадных задач и предлагаем их вам.

Настоящее пособие рассчитано на 5–7 классы и является третьим в серии пособий по олимпиадным задачам. Будет ещё несколько книг для 5–7 классов. Параллельно мы уже ведём работу над сборником задач для 8–9 классов. Завершит серию, конечно же, пособие для 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте. Дорогу осилит идущий.

Заместитель декана по учебной работе
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М.В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики

М. В. Федотов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах в основном расположены по принципу *«от простого — к сложному»*. Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

После номера задачи приведены номера классов, для которых эта задача была предложена на олимпиаде. Однако это разделение на классы довольно условно. Понятно, что если задачу давали в 5 классе, то её можно давать и в 6–7 классах, и часто, наоборот, задача, которую давали на олимпиаде для 6–7 классов, вполне по силам пятиклассникам. Поэтому, придерживаясь рекомендаций о принадлежности задачи тому или иному классу, относитесь к этим рекомендациям творчески. Кстати, распределение задач по разделам тоже не всегда однозначно. Одну и ту же задачу можно было отнести к разным разделам.

В принципе по этому пособию можно заниматься три года: в 5 классе пройти по всем разделам, выбирая задачи для 5 класса, в 6 классе снова пройти по всем разделам, выбирая задачи для 6 класса и т. д. А можно пройти и за более короткий срок: за два года, если вы начали заниматься в 6 классе, или за один год, если вы уже в 7 классе.

Пособие рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

Желаем удачи!

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a;
$\cup$ — объединение;
$\cap$ — пересечение;
$\varnothing$ — пустое множество;
$\in$ — знак принадлежности;
$\subset$ — знак включения подмножества;
$\forall$ — для любого;
$A \backslash B$ — разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ — следовательно;
$\Longleftrightarrow$ — тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;
ОДЗ — область допустимых значений;
$\begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$ — знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;
$\left[\begin{array}{l} \cdots \\ \cdots \end{array}\right.$ — знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Необходимо отметить, что в формулировках задач параллельно с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используется школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$.

Часть I. **ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ**

Логические задачи встречаются на олимпиадах всех уровней. Они требуют умения логически мыслить, перебирать все возможные варианты и быть очень внимательным.

1. Сюжетные логические задачи

Теоретический материал

В этом разделе собраны сюжетные логические задачи. Чтобы решать такие задачи, необходимо уметь рассуждать, выделять из текста причину и следствие. Многие задачи этого раздела могут быть решены перебором вариантов. Однако использование рисунков и таблиц значительно упрощает решение.

Примеры решения задач

Пример 1. До царя дошла весть, что кто-то из трёх богатырей убил Змея Горыныча. Приказал царь им явиться ко двору. Молвили богатыри:

Илья Муромец: «Змея убил Добрыня Никитич».
Добрыня Никитич: «Змея убил Алёша Попович».
Алёша Попович: «Я убил Змея».

Известно, что только один богатырь сказал правду, а двое других слукавили. Кто убил Змея?

Решение. Поскольку Добрыня Никитич и Алёша Попович утверждают одно и то же, а правду сказал только один богатырь, они оба лукавят. Значит, правду сказал Илья Муромец и Змея убил Добрыня Никитич.
Ответ. Змея Горыныча убил Добрыня Никитич.

Пример 2. Гриша, Люда, Зина и Петя родились 12 февраля, 6 апреля, 12 июня, 26 июня. Интересно, что Петя и Люда родились в одном месяце, а Зина и Петя родились в один и тот же день разных месяцев. Когда родился Гриша?

Решение. Решаем задачу с помощью таблицы. По вертикали пишем имена, а по горизонтали — даты. Будем ставить минусы в те клетки таблицы, которые точно не подходят, т. е. будем отбрасывать заведомо неподходящие варианты. Из условия следует, что Петя и Люда родились в одном месяце, т. е. в июне. Поэтому в таблице напротив их имён ставим минусы в первых двух колонках.

Так как Зина и Петя родились в один и тот же день разных месяцев, т. е. 12 числа, то Пете ставим минус в последнюю колонку. Получается, что Петя мог родиться только 12 июня (ставим ему плюс в третью колонку таблицы). Поэтому Зина родилась 12 февраля (ставим ей плюс в первую колонку таблицы).

	12 февраля	6 апреля	12 июня	26 июня
Гриша		+		
Люда	–	–		+
Зина	+			
Петя	–	–	+	–

Тогда Люда могла родиться только 26 июня (ставим ей плюс в четвёртую колонку таблицы). Поэтому Гриша мог родиться только 6 апреля.
Ответ. 6 апреля.

Пример 3. В одном из городов Казахстана часть жителей умеет говорить только по-казахски, часть — только по-русски. По-казахски говорят 90% всех жителей, по-русски — 80%. Сколько процентов всех жителей говорит на обоих языках?

Решение. Приведём два способа решения.

Первый способ. Из условия следует, что 20% всех жителей не говорят по-русски. Очевидно, что все они среди тех жителей, которые говорят по-казахски. Значит, $90 - 20 = 70\%$ всех жителей говорят на обоих языках.

Второй способ. Из условия следует, что 10% всех жителей не говорят по-казахски, а 20% — по-русски. Значит, $10 + 20 = 30\%$ всех жителей говорят только на одном языке, а остальные 70% говорят на обоих языках.
Ответ. 70%.

Пример 4. В клетках прямоугольника 11×15 расставлены крестики и нолики. Известно, что в каждой строке прямоугольника крестиков больше, чем ноликов. Докажите, что обязательно найдётся столбец, в котором крестиков тоже больше, чем ноликов.

Решение. Доказательство проведём методом от противного.

Предположим обратное, т. е. пусть в каждом столбце крестиков не больше, чем ноликов. Тогда во всей таблице крестиков также не больше, чем ноликов. Но это противоречит условию, поскольку из условия следует, что если в каждой строке прямоугольника крестиков больше, чем ноликов, то и во всей таблице крестиков больше, чем ноликов.

Значит, наше предположение неверно и найдётся столбец, в котором крестиков больше, чем ноликов. Что и требовалось доказать.

Задачи

1. 5 Три поросёнка построили три домика: из соломы, из прутьев и из камней. Каждый из них получил один домик: Ниф-Ниф — не из камней и не из прутьев, Нуф-Нуф — не из камней. Какой домик достался Наф-Нафу?

2. 5-7 Рядом сидят мальчик и девочка. «Я мальчик», — говорит черноволосый ребёнок. «Я девочка», — говорит рыжий ребёнок. Если хотя бы один из них врёт, то кто здесь мальчик, а кто девочка?

3. 6-7 а) Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли он что-то лишнее?

   5-7 б) За сутки до дождя Петин кот всегда чихает. Сегодня кот чихнул. «Завтра будет дождь», — подумал Петя. Прав ли он?

4. 5-7 — У Вовы больше тысячи книг, — сказал Ваня.
   — Нет, книг у него меньше тысячи, — возразила Аня.
   — Одна-то книга у него наверняка есть, — сказала Маня.

   Если истинно только одно из этих утверждений, то сколько книг у Вовы?

5. 6 Баба-яга в своей избушке на курьих ножках завела сказочных животных трёх видов. Все они, кроме двух, — Говорящие Коты. Все, кроме двух, — Мудрые Совы; остальные — Усатые Тараканы. Сколько обитателей в избушке у Бабы-яги?

6. 5-6 а) Приехало 100 туристов. Из них 10 человек не знали ни немецкого, ни французского языка, 75 знали немецкий язык и 83 знали французский язык. Сколько туристов знали и французский, и немецкий языки?

   6-7 б) В одном из городов Грузии часть жителей умеет говорить только по-грузински, часть — только по-русски. По-грузински говорят 85% всех жителей, по-русски —

75%. Сколько процентов всех жителей говорит на обоих языках?

[6-7] в) В классе 35 учеников. Из них 20 школьников занимаются в математическом кружке, 11 — в экологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько экологов увлекаются математикой?

7. [5-6] а) Четыре брата Юра, Петя, Вова и Коля учатся в 1, 2, 3, 4 классах. Петя — отличник, младшие братья стараются брать с него пример. Вова учится в 4 классе. Юра помогает решать задачи брату. Кто из них в каком классе учится?

б) Олег, Игорь и Аня учатся в 6 классе. Среди них есть лучший математик, лучший шахматист и лучший художник. Известно, что:

1) лучший художник не нарисовал своего портрета, но нарисовал портрет Игоря;

2) Аня никогда не проигрывала мальчикам в шахматы.

Кто в классе лучший математик, лучший шахматист и лучший художник?

8. [6-7] Львов, Михайлов и Николаев работают бухгалтером, кассиром и секретарём. Если Николаев — кассир, то Михайлов — секретарь, если Николаев — секретарь, то Михайлов — бухгалтер. Если Михайлов — не кассир, то и Львов — не кассир, если Львов — бухгалтер, то Николаев — секретарь. Кто кем работает?

9. [5-6] а) В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

б) В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребёнку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на 3?

в) На улице, став в кружок, беседуют четыре девочки: Аня, Валя, Галя, Надя. Девочка в зелёном платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье носит каждая из девочек?

10. [6] В летний лагерь приехали отдыхать три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из следующих фамилий: Иванов, Семёнов, Герасимов. Миша — не Герасимов. Отец Володи — инженер. Володя

учится в 6 классе. Герасимов учится в 5 классе. Отец Иванова — учитель. Какая фамилия у каждого из трёх друзей?

11. 6-7 а) Три друга — Владимир, Игорь и Сергей преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Калуги. Владимир работает не в Рязани, Игорь — не в Туле, туляк преподаёт литературу, рязанец — не физику, Игорь — не математику. Какой предмет и в каком городе преподаёт каждый из них?

6 б) Три подруги вышли в белом, синем, зелёном платьях и туфлях таких же цветов. Известно, что только у Ани цвет платья и туфель совпадает. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми. Наташа была в зелёных туфлях. Определить цвет платья и туфель каждой подруги.

6-7 в) Офицеры Александров, Борисов, Васильев и Григорьев имеют звания — майор, капитан и два лейтенанта. Александров и один из лейтенантов — танкисты, Борисов и капитан — артиллеристы, Александров младше по званию[1)], чем Васильев. Определите воинское звание и род войск каждого из них.

12. 6 а) Три школьных товарища купили в буфете 14 пирожков. Коля купил в 2 раза меньше Вити, а Женя — больше Коли, но меньше Вити. Сколько пирожков купил каждый товарищ?

б) Разместите восемь козлят и девять гусей в пяти хлевах так, чтобы в каждом хлеве были и козлята, и гуси, а число их ног равнялось 10.

13. 7 а) В рождественских подарках Кролика, Тигры и других обитателей Леса было 55 хлопушек — у каждого не меньше двух. Тигра сразу же использовал свои хлопушки на то, чтобы узнать, едят тигры хлопушки или не едят. А все остальные сберегли свои хлопушки, и на следующий день каждый подарил половину своих хлопушек Кролику на день рождения. От этого число хлопушек у Кролика увеличилось в 10 раз. Сколько хлопушек продегустировал Тигра?

б) В рождественских подарках Пятачка, Тигры и других обитателей Леса было 50 бутылочек кетчупа — у каждого не меньше двух. Тигра сразу же использовал свои бутылочки на то, чтобы узнать, едят тигры кетчуп или не едят. А все остальные сберегли свой кетчуп, и на следующий день каждый подарил половину своих бутылочек

[1)] Майор старше по званию, чем капитан, а капитан старше лейтенанта.

кетчупа Пятачку на день рождения. От этого число бутылочек кетчупа у Пятачка увеличилось в 9 раз. Сколько бутылочек кетчупа попробовал Тигра?

14. 5-6 В некотором доме живут только супружеские пары с маленькими детьми, причём бездетных семей нет, у каждого мальчика есть сестра и мальчиков больше, чем девочек. Может ли оказаться, что в этом доме взрослых больше, чем детей?

15. 7 а) На встрече собрались участники двух туристических походов (некоторые из них участвовали в обоих походах). В первом походе было 60% мужчин, а во втором — 75%. Докажите, что на встречу пришло не меньше мужчин, чем женщин.

б) В кружке тяжёлого ракетостроения занимаются 40 школьников. У каждого из них есть болтики, винтики и гвоздики. Известно, что кружковцев, у которых количество гвоздиков не равно количеству болтиков, ровно 15 человек. Количество тех, у кого число винтиков равно числу гвоздиков, — 10. Докажите, что есть не менее 15 кружковцев, у которых число винтиков не равно числу болтиков.

16. 6-7 а) Жюри составляет варианты олимпиады для 5, 6, 7, 8, 9 и 10 классов (по одному для каждого класса). Члены жюри договорились, что в каждом варианте должно быть семь задач, ровно четыре из которых не встречаются ни в одном другом варианте. Какое максимальное число задач можно включить в такую олимпиаду?

б) Каждый из трёх игроков записывает сто слов, после чего записи сравнивают. Если слово встретилось хотя бы у двоих, то его вычёркивают из списков.

1) Могло ли случиться так, что у первого игрока осталось 54 слова, у второго — 75 слов, а у третьего — 80 слов?

2) Могло ли случиться так, что у первого игрока осталось 61 слово, у второго — 80 слов, а у третьего — 82 слова?

17. 6-7 а) В таблице 10×10 расставлены натуральные числа. В каждой строке подчеркнули наибольшее натуральное число (или одно из наибольших, если таковых несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчёркнутые числа подчёркнуты два раза. Докажите, что все числа в таблице равны.

б) 25 школьников стоят в ряд. Самый левый школьник выше самого правого. Докажите, что найдётся школьник в ряду, у которого левый сосед выше правого.

в) В клетках прямоугольника 9×17 расставлены крестики и нолики. Известно, что в каждой строке прямоугольника крестиков меньше, чем ноликов. Докажите, что обязательно найдётся столбец, в котором крестиков тоже меньше, чем ноликов.

18. $\boxed{6\text{-}7}$ В кладовой лежит 300 сапог — по 100 сапог 40-го, 41-го и 42-го размеров, причём левых и правых поровну — по 150 штук. Докажите, что из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 пар (в каждой паре левый и правый сапоги одного размера).

19. $\boxed{5\text{-}6}$ Митя, Толя, Сеня, Юра и Костя пришли в музей и встали в очередь. Если бы Митя встал посередине очереди, то он оказался бы между Сеней и Костей, а если бы Митя встал в конце очереди, то рядом с ним мог быть Юра, но Митя встал впереди всех своих товарищей. Кто за кем стоит?

20. $\boxed{6\text{-}7}$ На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: А, Б, 4, 5 (о том, что на обратных сторонах, ничего не известно). Какое наименьшее количество карточек и какие именно надо перевернуть, чтобы проверить, верно ли утверждение: «Если на одной стороне карточки написано чётное число, то на другой стороне карточки — гласная буква»?

21. $\boxed{6\text{-}7}$ Предположим, что справедливы следующие утверждения:

1) Среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами.

2) Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

22. $\boxed{7}$ Три стрелка Сергеев, Борисов и Воробьёв сделали по шесть выстрелов по одной мишени и выбили поровну очков. Известно, что Сергеев за первые три выстрела выбил 43 очка, а Борисов первым выстрелом выбил три очка. Сколько очков за каждый выстрел выбил каждый стрелок, если в 50 было одно попадание, в 25 — два, в 20 — три, в 10 — три, в 5 — два, в 3 — два, в 2 — два, в 1 — три?

23. $\boxed{5\text{-}7}$ Николай с сыном и Иван с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько и его сын, а Иван — втрое больше, чем его сын. Всего было поймано 35 рыб. Сколько рыб поймал Иван и как звали его сына, если известно, что Иван — самый старший из рыбаков?

2. Истинные и ложные высказывания. Рыцари, лжецы, хитрецы

Теоретический материал

В этом разделе собраны логические задачи на истинные и ложные высказывания. Несколько таких задач уже было предложено в предыдущем разделе. В задачах такого типа необходимо уметь логически рассуждать и перебирать все возможные варианты. Часто удобно отбросить заведомо неподходящие варианты и рассмотреть оставшиеся. Обращаем ваше внимание на то, что если даже вы нашли непротиворечивый вариант, то это не значит, что можно заканчивать решение задачи. Нет, необходимо рассмотреть все возможные варианты или доказать, что других решений нет.

Большинство задач данного раздела будут про рыцарей (они всегда говорят правду), лжецов (всегда лгут) и хитрецов (иногда говорят правду, а иногда лгут).

Примеры решения задач

Пример 1. Житель острова Крит говорит: «Все критяне — лжецы». Истинно или ложно это высказывание?

Решение. Предположим, что это высказывание истинно. Следовательно, сам говорящий тоже лжец. Но тогда его высказывание ложно. Противоречие.

Значит, данное высказывание ложно и не все критяне лжецы, но при этом сам говорящий — лжец. Это ничему не противоречит.
Ответ. Высказывание ложно.

Пример 2. На столе стоят три одинаковых ящика, в одном находятся 2 чёрных шарика, в другом — 1 чёрный и 1 белый шарик, в третьем — два белых шарика. На ящиках написано: «2 белых», «2 чёрных», «чёрный и белый». При этом известно, что ни одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только один шарик, определить правильное расположение шариков?

Решение. Необходимо вынуть шарик из ящика с надписью «чёрный и белый», так как в нём обязательно будут шарики одного цвета.

Если вынутый шарик окажется белым, то в этом ящике 2 белых шарика, в ящике с надписью «2 белых» будут 2 чёрных, а в ящике с надписью «2 чёрных» будут чёрный и белый.

Аналогично рассуждаем, если вынутый шарик — чёрный. Тогда в этом ящике 2 чёрных шарика, в ящике с надписью

«2 чёрных» будут 2 белых, а в ящике с надписью «2 белых» будут чёрный и белый.

Пример 3. Пятеро школьников приехали из пяти различных городов в Смоленск для участия в областной математической олимпиаде. «Откуда вы, ребята?» — спросили их. Вот что они ответили:

Александров: «Я живу в Рославле, а Гусаров — в Гагарине».

Богданов: «В Гагарине живёт Викторов. Я же прибыл из Вязьмы».

Викторов: «Из Рославля прибыл я, а Богданов — из Ельни».

Гусаров: «Я прибыл из Гагарина, а Дмитриев — из Ярцева».

Дмитриев: «Александров приехал из Вязьмы, а я действительно живу в Ярцеве».

Когда удивились противоречивости их ответов, ребята объяснили: «Каждый высказал одно утверждение правильное, а другое — ложное. Но по нашим ответам вполне можно установить, откуда мы приехали». Откуда приехал каждый из школьников?

Решение. Возможны два случая: верно первое утверждение Александрова, а второе ложно или, наоборот, верно второе утверждение Александрова, а первое ложно.

1) Предположим, что первое утверждение Александрова верное и он живёт в Рославле. Тогда второе его утверждение ложное и Гусаров — не из Гагарина. Поэтому первое утверждение Гусарова ложное, а второе верное и Дмитриев прибыл из Ярцева. Тогда первое утверждение Дмитриева ложное и Александров приехал не из Вязьмы. Это согласуется с нашим предположением.

Поскольку, по предположению, в Рославле живёт Александров, первое утверждение Викторова ложное. Тогда верным будет его второе утверждение, т. е. Богданов — из Ельни. Следовательно, второе утверждение Богданова ложно, а верно первое, и Викторов живёт в Гагарине. Значит, первое утверждение Викторова ложно, а второе верно, и Богданов — из Ельни. Тогда Гусарову остаётся Вязьма.

2) Рассмотрим теперь случай, когда второе утверждение Александрова верное, т. е. Гусаров — из Гагарина. Тогда второе утверждение Гусарова ложное и Дмитриев — не из Ярцева. Следовательно, первое утверждение Дмитриева верное и Александров приехал из Вязьмы.

Поскольку, по предположению, Гусаров приехал из Гагарина, то первое утверждение Богданова ложно, а второе верно, и Богданов прибыл из Вязьмы. Это противоречит тому, что из

Вязьмы приехал Александров. Значит, второй случай невозможен.
Ответ. Александров приехал из Рославля; Богданов — из Ельни; Викторов — из Гагарина; Гусаров — из Вязьмы; Дмитриев — из Ярцева.

Пример 4. На какой вопрос все жители острова рыцарей (рыцари всегда говорят правду) и лжецов (они всегда лгут) дадут один и тот же ответ?

Решение. Таких вопросов можно задать несколько. Например:

на вопрос: «Вы — рыцарь?» и рыцарь, и лжец ответят «Да»;

на вопрос: «Вы — лжец?» оба ответят «Нет»;

на вопрос: «Кто вы — рыцарь или лжец?» и тот и другой ответят «Рыцарь».

То есть при попытке выяснить, кем является житель острова, из ответов будет следовать, что на острове живут одни рыцари, и никто не назовёт себя лжецом.
Ответ. «Вы — рыцарь?» (Да.); «Вы — лжец?» (Нет.); «Кто вы — рыцарь или лжец?» (Рыцарь.).

Пример 5. В городе Невезения на острове лжецов и рыцарей живут 100 человек. Каждый житель города поклоняется одному из трёх богов — богу Солнца, богу Луны или богу Земли. Каждому жителю города задали три вопроса:

1) Поклоняетесь ли вы богу Солнца?
2) Поклоняетесь ли вы богу Луны?
3) Поклоняетесь ли вы богу Земли?

На первый вопрос утвердительно ответили 60 человек, на второй — 40 человек и на третий — 30 человек. Сколько лжецов на острове?

Решение. Очевидно, что каждый рыцарь дал утвердительный ответ только на один вопрос, а каждый лжец — на два. Поэтому суммарное количество утвердительных ответов равно числу рыцарей плюс удвоенное число лжецов, т. е. всему населению острова плюс число лжецов. Поскольку утвердительных ответов было $60 + 40 + 30 = 130$, а жителей 100, то на острове живёт 30 лжецов.
Ответ. 30 лжецов.

Задачи

1. $\boxed{5}$ а) Истинно или ложно высказывание: «Нет правил без исключения»? (Данное высказывание также является правилом.)

б) Коля произнёс истинное утверждение. Миша повторил его дословно, и оно стало ложным. Что мог сказать Коля?

2. $\boxed{5}$ а) В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько груздей и сколько рыжиков в корзине?

   б) В правительстве 20 министров. По крайней мере один из них честен. Из любых двух министров хотя бы один продажен. Сколько честных министров?

3. $\boxed{6\text{-}7}$ Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы бы рады отпустить тебя, но по нашему закону ты сначала должен произнести какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы съедим тебя. Если оно окажется ложным, тебя съест наш лев». Помогите Робинзону.

4. $\boxed{5}$ а) Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном — просо, в другом — мак, а в третьем — ещё не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них приклеила таблички: «Мак», «Просо», «Смесь». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная запись. Ученик Феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зёрнышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?

   $\boxed{5}$ б) В трёх мешках находятся крупа, вермишель и сахар. На одном мешке написано «крупа», на другом — «вермишель», на третьем — «крупа или сахар». В каком мешке что находится, если содержимое каждого из них не соответствует записи?

   $\boxed{6\text{-}7}$ в) Пришёл Иван-царевич в подземелье в Кощею Бессмертному Василису Прекрасную освобождать. В подземелье три темницы. В одной из них томится Василиса, в другой расположился Змей Горыныч, а третья темница пустая. На дверях есть надписи, но все они ложные. На первой темнице написано: «Здесь Василиса Прекрасная»; на второй темнице: «Темница № 3 не пустая»; на третьей темнице написано: «Здесь Змей Горыныч». В какой же темнице Василиса?

5. [5] В Стране чудес проводилось следствие по делу об украденной муке. На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, в которых указали на вора, но эти показания по каким-то причинам не были записаны. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трёх подсудимых и что только он дал правдивые показания. Кто украл муку?

6. [6-7] На суде каждый из троих подсудимых обвинял одного из двух других. Оказалось, что первый был единственным, кто говорил правду. Если бы каждый стал обвинять другого из оставшихся (но не себя), то второй был бы единственным, кто сказал правду. Кто виновен?

7. [6-7] а) Инопланетяне сообщили жителям Земли, что в системе их звезды три планеты А, Б, В. Они живут на второй планете. Далее передача сообщения ухудшилась из-за помех, но было принято ещё два сообщения, которые, как установили учёные, оказались оба ложными:

   1. А — не третья планета от звезды.
   2. Б — вторая планета.

   Как называется планета, на которой живут инопланетяне?

   б) К Васе пришли его одноклассники. Мать Васи спросила у него, сколько пришло гостей. Вася ответил: «Больше шести», а стоявшая рядом сестрёнка сказала: «Больше пяти». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?

8. [6-7] а) Три брата имеют звания: капитан, старшина и сержант. Из трёх утверждений: «Алексей — старшина», «Владимир — не старшина», «Семён — не сержант» — лишь одно верное. Является ли Семён старшиной?

   б) Три богини пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее.

   Афродита: «Я самая прекрасная, Гера не самая прекрасная».
   Афина: «Афродита не самая прекрасная. Я самая прекрасная».
   Гера: «Я самая прекрасная».

   Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения остальных богинь ложны. Исходя из этого, определите прекраснейшую из богинь.

9. 6-7 Четыре человека А, Б, В и Г сделали следующие утверждения:

А: «Б, В и Г — мужчины».
Б: «А, В и Г — женщины».
В: «А и Б солгали».
Г: «А, Б и В сказали правду».

Сколько из них на самом деле сказали правду?

10. 6-7 а) Ученицы Мария, Нина, Ольга и Поля участвовали в лыжных соревнованиях и заняли I–IV места. На вопрос, кто какое место занял, они дали 3 разных ответа:

«Ольга заняла I место, Нина — II».
«Ольга — II, Поля — III».
«Мария — II, Поля — IV».

Отвечавшие при этом признали, что одна часть каждого ответа верна, а другая — неверна. Какое место заняла каждая из учениц?

б) В велогонках приняли участие 5 школьников. После гонок 5 болельщиков заявили:

«Коля занял I место, а Ваня — IV».
«Серёжа занял II место, а Ваня — IV».
«Серёжа занял II место, а Коля — III».
«Толя занял I место, а Надя — II».
«Надя заняла III место, а Толя — V».

Зная, что одно из показаний каждого болельщика верное, а другое — неверное, найти правильное распределение мест.

в) Пять школьников приехали из 5 различных городов в Архангельск на областную математическую олимпиаду. «Откуда вы, ребята?» — спросили их хозяева. Вот что ответил каждый из них:

Андреев: «Я приехал из Онеги, а Григорьев живёт в Каргополе».
Борисов: «В Каргополе живёт Васильев. Я же прибыл из Коряжмы».
Васильев: «Я прибыл из Онеги, а Борисов — из Котласа».
Григорьев: «Я прибыл из Каргополя, а Данилов — из Вельска».
Данилов: «Да, я действительно из Вельска, Андреев же живёт в Коряжме».

Хозяева очень удивились противоречивости ответов приехавших гостей. Ребята объяснили им, что каждый из них высказал одно утверждение правильное, а другое ложное. Но по их ответам вполне можно установить, кто откуда приехал. Откуда приехал каждый школьник?

В задачах 11–21 дело происходит на острове, где живут рыцари (они всегда говорят правду) и лжецы (они всегда лгут).

11. [5] Человек говорит: «Я лжец». Является ли он жителем острова?

12. [5-6] а) Путешественник дважды задал рыцарю один и тот же вопрос и получил разные ответы. Приведите пример такого вопроса.

б) Какой вопрос надо задать встречному аборигену (жителю острова), чтобы понять, лжец он или рыцарь?

в) Путник послал проводника спросить у аборигена, работающего в поле, кто он — рыцарь или лжец. Проводник вернулся и сказал: «Лжец». Кем был проводник — рыцарем или лжецом?

13. [6-7] а) Какой вопрос вы задали бы жителю острова, чтобы узнать, живёт ли у него дома ручной крокодил?

б) Лжецы бывают в городе рыцарей, а рыцари — в городе лжецов. Путешественник встретил аборигена в одном из этих городов. Какой вопрос должен путешественник задать аборигену, чтобы выяснить в каком городе он находится?

14. [6-7] а) Островитянин A в присутствии островитянина B говорит: «По крайней мере один из нас — лжец». Кто такой A и кто такой B?

б) Каждый из собравшихся на площади жителей острова заявил остальным: «Все вы — лжецы». Сколько рыцарей среди них?

15. [6-7] а) Из трёх жителей острова К, М и Р двое сказали:

К: «Мы все лжецы».

М: «Один из нас рыцарь».

Кто из жителей К, М и Р рыцарь и кто лжец?

б) Из трёх жителей острова К, М и Р двое сказали:

К: «Мы все лжецы».

М: «Ровно один из нас лжец».

Кем является Р — рыцарем или лжецом?

16. [6-7] Некоторые жители острова заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечётным?

17. [6-7] Путешественник прибыл в город на острове, в котором каждый лжец, отвечая на вопрос «Сколько...?» называет число, на 2 больше или на 2 меньше, чем правильный ответ, а каждый рыцарь отвечает верно. Путешественник встретил двух аборигенов и спросил у каждого, сколько рыцарей и лжецов проживает в городе. Первый ответил: «Если не считать меня, то 1001 лжец и 1002 рыцаря», а второй: «Если не считать меня, то 1000 лжецов и 999 рыцарей». Сколько лжецов и рыцарей в городе? Кем оказались первый и второй аборигены?

18. [6-7] Четыре жителя острова разговаривают между собой:
Беня (Вене): Ты лжец.
Женя (Бене): Сам ты лжец.
Сеня (Жене): Да они оба лжецы. Впрочем, и ты тоже.
Кто из них лжец, а кто рыцарь?

19. [6-7] В городе Счастья на острове лжецов и рыцарей живут 200 человек. Каждый житель города поклоняется одному из трёх богов — богу Солнца, богу Луны или богу Земли. Каждому жителю города задали три вопроса:
   1) Поклоняетесь ли вы богу Солнца?
   2) Поклоняетесь ли вы богу Луны?
   3) Поклоняетесь ли вы богу Земли?

   На первый вопрос отрицательно ответили 60 человек, на второй — 120 человек и на третий — 130 человек. Сколько лжецов на острове?

20. [6-7] а) Каждый из 7 сидящих за круглым столом сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Кто за столом?
б) Каждый из 9 сидящих за круглым столом сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Кто за столом?

21. [7] Однажды 50 жителей острова сели за круглый стол и каждый сказал про своего соседа справа, рыцарь тот или лжец. При этом жители, сидящие на 1-м, 3-м, ..., 49-м местах, сказали «Рыцарь», а сидящие на 2-м, 4-м, ..., 48-м местах — «Лжец». Что мог сказать житель, сидящий на 50-м месте? (Места занумерованы по кругу, начиная с некоторого.)

В задачах 22–24 среди аборигенов появляются хитрецы — они иногда говорят правду, иногда лгут.

22. [5] а) Из трёх жителей, К, М и Р, отдалённого района острова один является рыцарем, другой — лжецом, а тре-

тий — хитрецом. Они произнесли следующие утверждения:
К: «Я хитрец».
М: «Это правда».
Р: «Я не хитрец».
Кем в действительности являются К, М и Р?
б) Три аборигена, А, В, С (рыцарь, лжец и хитрец), на вопрос: «Кто В?» ответили так:
А: «Лжец».
В: «Я хитрец».
С: «Рыцарь».
Кто рыцарь и кто хитрец?

23. 6-7 а) Двое людей К и М, о которых известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо хитрец, утверждают:
К: «М — рыцарь».
М: «К — не рыцарь».
Докажите, что по меньшей мере один из них говорит правду и является хитрецом.
б) Из трёх человек, А, В, и С, один — рыцарь, другой — лжец, а третий — хитрец.
А сказал: «Я хитрец».
В сказал: «А и С иногда говорят правду».
С сказал: «В — хитрец».
Кто из них лжец, кто — рыцарь, а кто — хитрец?

24. 7 За круглым столом сидели рыцари. Каждый рыцарь посадил за стол между собой и ближайшим рыцарем слева своих пажей. При этом оказалось, что у всех рыцарей одинаковое число пажей и за столом сидят 12 человек. Известно, что рыцари всегда говорят правду, а пажи могут как сказать правду, так и солгать. Король обошёл всех по кругу и задал каждому из них вопрос: «Кто сидит слева от вас?» Первый и девятый ответили: «Паж». Третий, седьмой, восьмой, десятый, одиннадцатый и двенадцатый ответили: «Рыцарь». Ответы остальных король не расслышал. Определите, сколько рыцарей сидело за столом.

3. Переправы и задачи на переливание

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на переправы и задачи на переливание.

Задачи на переправы часто встречаются в книгах для младших школьников, и, вообще говоря, многие младшеклассники (школьники 1–4 классов) их умеют решать. Тем не менее мы приведём несколько таких задач. В этих задачах некоторым персонажам приходится несколько раз переправляться туда и обратно, чтобы осуществить переправу по правилам, приведённым в задаче.

В задачах на переливание разрешаются следующие действия:

1) в сосуд можно наливать ровно столько жидкости, сколько в нём помещается;
2) можно выливать из одного сосуда в другой всю жидкость, если она в том помещается;
3) можно доливать один сосуд до полного из второго, при этом во втором сосуде может оставаться жидкость.

Задачи на переливание являются классическими и встречаются практически во всех книгах на смекалку и в сборниках олимпиадных задач. Мы просмотрели достаточно много таких книг и нигде не нашли общего метода решения подобных задач, а в лучшем случае, только решение, в котором предлагается 5–10 раз (иногда и больше) переливать жидкость из одного сосуда в другой и третий, потом обратно и т. д. Возможно, нам просто не повезло и нам не попалась такая книга, либо мы не заметили этого метода в книгах, которые смотрели. А метод довольно прост.

Рассмотрим общую задачу на переливание, условие которой обычно имеет следующий вид:

Имея сосуды вместимостью A литров и B литров, получить C литров жидкости. Жидкость имеется либо в неограниченном количестве (*водопроводный кран, озеро, река, цистерна, ...*), *либо в ограниченном* (*тогда надо дополнительно следить, чтобы её хватило*). *Здесь A, B и C — конкретные натуральные числа.*

Идея решения очень проста: надо подобрать такие натуральные числа x и y, при которых выполняется одно из двух равенств:

$$C = x \cdot A - y \cdot B \qquad \text{или} \qquad C = y \cdot B - x \cdot A.$$

В общем виде эти равенства смотрятся довольно страшно, но в реальных задачах A, B и C — конкретные натуральные числа, а неизвестных только два — x и y, которые легко подбираются. После того как числа x и y подобраны (желательно подобрать x и y так, чтобы сумма $x + y$ была наименьшей из всех возможных), остаётся расписать процесс переливания словами. Конкретный пример будет приведён ниже. Кстати, ответ к задачам на переливание будет даваться именно в виде одной из приведённых выше формул.

Примеры решения задач

Пример 1. Может ли крестьянин перевезти через реку волка, козу и капусту, если в лодку вместе с ним помещается только кто-то один из них? (Нельзя оставить без присмотра ни волка с козой, ни козу с капустой.)

Решение. Это классическая задача на переправы. Иногда её называют загадкой. При имеющихся ограничениях её решение довольно просто (козу придётся покатать больше других, перевозя её обратно, раз её нельзя ни с кем оставить):

- Сначала крестьянин перевозит козу на другой берег.
- Затем возвращается один и забирает, например, волка и перевозит его на другой берег.
- Высадив волка, крестьянин забирает козу и перевозит её обратно.
- Высадив козу, крестьянин забирает капусту и перевозит её на другой берег.
- Затем крестьянин возвращается за козой и перевозит её.

За всё время коза ни с кем не оставалась — ни с волком, ни с капустой без присмотра крестьянина.
Ответ. Да.

Пример 2. Имеются два сосуда ёмкостью 3 л и 5 л. Надо, пользуясь этими сосудами, получить: а) 1 л воды; б) 2 л воды; в) 4 л воды. В нашем распоряжении водопроводный кран и раковина, куда можно сливать воду.

Решение. а) Запишем равенство: $1 = x \cdot 3 - y \cdot 5$. Легко подбираются $x = 2$, $y = 1$, т. е. $1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5$. Теперь опишем словами наши действия, при этом каждое действие будем записывать на отдельной строке, иначе очень сложно читать такое решение:

- Наполним трёхлитровый сосуд.
- Перельём воду из него в пятилитровый сосуд.
- Снова наполним трёхлитровый сосуд и дополним из него пятилитровый сосуд. В трёхлитровом сосуде остался 1 литр воды.

б) В данном случае удобнее второе равенство: $2 = y \cdot 5 - x \cdot 3$ (Хотя можно подбирать x и y в первом равенстве, просто будет больше действий.) Совсем легко подбираются $y = 1, x = 1$, т. е. $2 = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 3$. Теперь опишем словами наши действия:

- Наполним пятилитровый сосуд.
- Перельём воду из него в трёхлитровый сосуд. В пятилитровом сосуде осталось 2 литра воды.

в) Сразу запишем два равенства с числами (опустим равенства с x и y): $4 = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5$ или $4 = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3$. Кажется, что оба случая по количеству действий совпадают (сумма $x + y = 4$ в обоих способах). Опишем оба способа наших действий и проверим, так ли это.

Первый способ.

- Наполним трёхлитровый сосуд.
- *Перельём воду из него в пятилитровый сосуд.*
- Снова наполним трёхлитровый сосуд *и дополним из него пятилитровый сосуд*. В трёхлитровом сосуде остался 1 л.
- Выльем воду из пятилитрового сосуда в раковину *и перельём в него 1 л из трёхлитрового сосуда.*
- Ещё раз наполним трёхлитровый сосуд.
- *Снова перельём воду из него в пятилитровый сосуд,* в нём получилось 4 л.

Второй способ.

- Наполним пятилитровый сосуд.
- *Наполним из него трёхлитровый сосуд.* В пятилитровом сосуде осталось 2 л.
- Выльем воду из трёхлитрового сосуда в раковину *и перельём в него 2 л из пятилитрового сосуда.*
- Ещё раз наполним пятилитровый сосуд.
- Из него дополним трёхлитровый сосуд (перельём 1 л). В пятилитровом сосуде осталось 4 л.

Если посчитать все действия, включая наливание воды из крана в сосуд, выливание воды из сосуда в раковину и переливание воды из одного сосуда в другой, то получается, что в первом способе надо совершить 8 действий, а во втором — только 6 действий, хотя из наших равенств следовало, что оба способа одинаковы по действиям (сумма $x + y = 4$ в обоих способах). Так получилось из-за того, что наши равенства учитывают только действия по наливанию воды из крана в сосуд и выливанию воды из сосуда в раковину, но не учитывают действия по переливанию воды из одного сосуда в другой. *Эти действия выделены курсивом.* Последнее действие во втором способе не выделено курсивом, поскольку оно, по сути, является действием по выливанию 3 л в раковину.

В первом способе действий по переливанию из одного сосуда в другой было 4, а во втором только 2. Значит, второй способ оптимальнее.

Ответ. а) $1 = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 5$; б) $2 = 1 \cdot 5 - 1 \cdot 3$; в) $4 = 2 \cdot 5 - 2 \cdot 3$.

Пример 3. Имеются двое песочных часов: на 3 минуты и на 7 минут. Яйцо варится 11 минут. Как отмерить это время при помощи имеющихся часов?

Решение. Так же как и в предыдущем примере, получим равенство: $11 = 2 \cdot 7 - 3$. В этой задаче его удобно переписать в следующем виде: $11 = (7 - 3) + 7$. Теперь легко записать наши действия:

- Переворачиваем одновременно песочные часы.
- В тот момент, когда в трёхминутных часах закончится песок, в семиминутных часах останется песка ровно на 4 минуты — начинаем варить яйцо.
- Когда в семиминутных часах закончится песок (прошло 4 минуты с момента начала варки яйца), переворачиваем их.
- Когда во второй раз закончится песок в семиминутных часах — яйцо готово.

Ответ. $11 = (7 - 3) + 7$.

Задачи

1. $\boxed{5}$ а) Трое учеников пошли на рыбалку, взяв с собой лодку, выдерживающую нагрузку до 100 кг. Смогут ли ученики перебраться с берега на остров, если их массы равны 40 кг, 50 кг, 70 кг?

   $\boxed{5\text{-}7}$ б) Двое мальчиков катались на лодке по реке. К берегу подошёл отряд солдат. Лодка так мала, что на ней могли переправиться двое мальчиков или только один солдат. Смогли ли солдаты переправиться через реку?

2. $\boxed{5\text{-}7}$ Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 мин, мама — за 2 мин, малыш — за 5 мин, а бабушка — за 10 мин. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Смогут ли они перейти мост за 17 мин? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Перебрасывать фонарик через реку нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

3. $\boxed{5\text{-}7}$ Барон Мюнхгаузен и его слуга Томас подошли к реке. На берегу они обнаружили лодку, способную перевезти

лишь одного человека. Тем не менее они переправились через реку и продолжили путешествие. Могло ли так быть?

4. 5-7 В лодке, вмещающей только двух человек, через реку должны переправиться три миссионера и три людоеда. Миссионеры боятся остаться в меньшинстве. Смогут ли они переправиться?

5. 5-7 Могут ли три рыцаря, каждый со своим оруженосцем, переправиться через реку на двухместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев?

6. 6-7 Могут ли четыре рыцаря, каждый со своим оруженосцем, переправиться через реку на двухместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев?

7. 6-7 Могут ли четыре рыцаря, каждый со своим оруженосцем, переправиться через реку на трёхместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев?

8. 6-7 Четыре рыцаря, каждый со своим оруженосцем, должны переправиться через реку на двухместной лодке. Посреди реки есть остров, на котором можно высаживаться. Спрашивается, смогут ли они совершить эту переправу так, чтобы ни на берегах, ни на острове, ни в лодке ни один оруженосец не находился в обществе чужих рыцарей без своего хозяина?

9. 6-7 а) По длинному узкому каналу один за другим идут три парохода. Навстречу им — ещё три парохода. Канал такой узкий, что два парохода в нём разойтись не могут, но на канале есть залив, в котором может поместиться один пароход. Могут ли разойтись пароходы?

   б) Поезд Б приближается к станции железной дороги, но его нагоняет идущий быстрее поезд А, который необходимо пропустить вперёд. У станции от главного пути отходит боковая ветка, куда можно отвести на время вагоны с главного пути, но ветка эта настолько короткая, что на ней не помещается весь поезд Б. Спрашивается, удастся ли всё-таки пропустить поезд А вперёд?

   в) По железнодорожному одноколейному пути движутся навстречу друг другу два поезда, состоящие каждый из паровоза и девяти вагонов. Они должны разъехаться на станции, около которой путь разделяется на две отдельные ветви, снова соединяющиеся на противоположном конце в одну линию. На каждой ветви может поместиться или 5 вагонов, или паровоз и 4 вагона. Удастся ли разъехаться поездам, чтобы продолжать свой путь?

10. $\boxed{5}$ Продавец получил для продажи несколько пачек конвертов по 100 конвертов в каждой. 10 конвертов он отсчитывает за 10 секунд. За сколько секунд сообразительный продавец может отсчитать 70 конвертов? 90 конвертов?

11. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Карлсон очень любил сладкое. Налив себе в стакан сметаны, он добавил туда варенья из банки, но как только он перемешал сметану и варенье, то понял, что хочет есть одно варенье. Недолго думая, он перелил в банку столько варенья со сметаной, сколько взял из банки варенья. После перемешивания Карлсон задумался: чего же получилось больше — сметаны в банке с вареньем или варенья в стакане со сметаной? А как думаете вы?

б) В один стакан налито 5 ложек чая, а в другой — 5 ложек молока. Ложку молока перелили из второго стакана в первый, затем тщательно перемешали и ложку чая с молоком перелили обратно во второй стакан. Чего оказалось больше: чая во втором стакане или молока в первом? Как изменится ответ, если такое переливание производили 10 раз? Если перемешивали не очень тщательно? Если чая в первом стакане немного больше, чем молока во втором?

12. $\boxed{5\text{-}6}$ От полного стакана кофе я отпил половину и долил столько же молока. Затем отпил третью часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Наконец, я отпил шестую часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Только после этого я выпил всё до конца. Чего в итоге я больше выпил: молока или кофе?

13. $\boxed{5}$ а) Как с помощью двух бидонов вместимостью 5 л и 8 л отлить из молочной цистерны 7 л молока? Молоко разрешается выливать обратно в цистерну.

$\boxed{5\text{-}7}$ б) В бочке не менее 10 литров бензина. Как отлить из неё 6 литров с помощью девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

$\boxed{5\text{-}7}$ в) Из восьмилитрового ведра, наполненного молоком, надо отлить 4 литра с помощью пустых трёхлитрового и пятилитрового бидонов.

14. $\boxed{5}$ а) Как, имея два сосуда вместимостью 5 л и 7 л, налить из водопроводного крана 6 л?

5 б) Как с помощью семилитрового ведра и трёхлитровой банки налить в кастрюлю, объём которой больше 5 л, но неизвестен, ровно 5 литров воды из водопроводного крана?

5-7 в) Двенадцативёдерная бочка наполнена керосином. Разлить его на две равные части, пользуясь пустыми пятивёдерной и восьмивёдерной бочками.

5-7 г) В бочке находится не менее 13 вёдер бензина. Как отлить из неё 8 вёдер с помощью пятивёдерной и девятивёдерной бочек?

15. 6-7 Можно ли, пользуясь девятилитровым и двенадцатилитровым сосудами, отмерить 4 л воды из озера?

16. 6-7 а) Как, пользуясь сосудами в 7 л и 12 л, набрать 1 л воды из озера?

б) Каким образом можно принести из реки ровно 6 л воды, если имеется только два ведра: одно — ёмкостью 4 л, а другое — 9 л?

в) Бидон ёмкостью 10 л наполнен молоком. Требуется перелить из этого бидона 5 л в семилитровый бидон, используя при этом ещё один бидон, вмещающий 3 л. Как это сделать?

г) Отлейте из цистерны 13 л молока, пользуясь бидонами ёмкостью 17 л и 5 л.

д) Можно ли отмерить 8 л воды, находясь у реки и имея два ведра: одно вместимостью 15 л, другое — 16 л?

17. 6-7 Можно ли, имея два полных десятилитровых бидона молока и пустые четырёхлитровую и пятилитровую кастрюли, отмерить по 2 л молока в каждую кастрюлю?

18. 5 а) Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша должна вариться 15 минут. Как сварить кашу, переворачивая часы минимальное число раз?

5-7 б) Как при помощи двух песочных часов, отмеряющих соответственно 5 и 7 минут, отмерить 9 минут?

4. Задачи на взвешивание

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на взвешивание. В этих задачах обычно используются чашечные весы без гирь, которые уравновешены, если в обеих чашках лежат одинаковые по весу предметы, и одна из чашек поднимается выше, чем другая, если в ней лежит более лёгкий предмет.

Обычно задачи на взвешивание формулируются в терминах поиска фальшивых монет среди настоящих. Фальшивые монеты отличаются по весу от настоящих, а настоящие все весят одинаково. Правда, некоторые авторы для разнообразия вводят в задачи колечки, пластинки и другие предметы, среди которых есть один или несколько предметов, отличающихся по весу от остальных, которые весят одинаково. Но суть задач от этого не меняется.

В задачах на определение одной фальшивой монеты среди настоящих обычно делят всё количество монет на три равные[1)] кучки и одним взвешиванием определяют, в какой кучке находится фальшивая монета, если известно, легче или тяжелее фальшивая монета по сравнению с настоящими. Если же это не известно, то требуется одно дополнительное взвешивание на определение этого факта.

В некоторых задачах на взвешивание вместо чашечных весов используют точные весы со стрелкой, которые позволяют взвесить груз, положенный на них, с точностью до 1 грамма.

Среди задач на взвешивание часто встречаются такие, в которых несколько предметов попарно различного веса надо расположить в порядке возрастания весов. В таких задачах тоже удобно разбивать предметы на группы и упорядочивать сначала предметы в группах, а затем сравнивать предметы из разных групп.

Если надо угадать задуманное кем-то число за наименьшее число вопросов, а отвечают только «да» или «нет», то надо спрашивать меньше ли это число, чем середина множества чисел, в котором находится задуманное число. Таким образом, количество чисел в множестве будет каждый раз уменьшаться в два раза и вы быстро угадаете число. Так, если надо угадать число, лежащее в промежутке от 1 до 1024 ($1024 = 2^{10}$), то достаточно 10 вопросов. Быстрее, вообще говоря, угадать нельзя.

[1)]Если количество монет не делится нацело на три, то две кучки делают равные, а в третьей — на одну монету больше или меньше.

Примеры решения задач

Пример 1. Из девяти монет одна фальшивая, она легче остальных. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая?

Решение. Разделим монеты на три кучки по три монеты в каждой. Поскольку фальшивая монета только одна, то она окажется в одной из кучек, а в двух других будут только настоящие монеты. Поэтому кучка с фальшивой монетой будет легче двух других, которые будут весить одинаково. Определим сначала кучку, в которой находится фальшивая монета.

Положим первую кучку на левую чашку весов, а вторую кучку на правую чашку весов. Возможны два случая:

1) Чашки весов уравновешены. Значит, эти кучки весят одинаково и в них нет фальшивой монеты. Следовательно, фальшивая монета находится в третьей кучке.

2) Одна из чашек оказалась выше другой. Значит, фальшивая монета именно в этой чашке и лежит.

Итак, мы за одно взвешивание определили кучку, в которой находится фальшивая монета. Поскольку в кучке три монеты, из которых ровно одна фальшивая, предыдущий алгоритм позволит за одно взвешивание определить её.

Берём две любые монеты из этой кучки и кладём на разные чашки весов. Опять возможны два случая:

1) Чашки весов уравновешены. Значит, эти монеты весят одинаково и среди них нет фальшивой монеты. Следовательно, фальшивой является третья монета.

2) Одна из чашек оказалась выше другой. Значит, фальшивая монета лежит именно в этой чашке.

Таким образом, за два взвешивания мы определили фальшивую монету. При решении задачи мы последовательно делили монеты, среди которых находится фальшивая монета, на три кучки. Этот подход очень часто применяется при решении задач на взвешивание.

Пример 2. Имеются чашечные весы без гирь и 9 одинаковых по внешнему виду монет. Одна из монет фальшивая, причём неизвестно, легче она настоящих монет или тяжелее (настоящие монеты одного веса). Сколько надо сделать взвешиваний, чтобы определить фальшивую монету?

Решение. Эта задача похожа на предыдущую, но сложнее, поскольку мы не знаем, легче или тяжелее фальшивая монета настоящих. Определение этого будет нам стоить одного лишнего взвешивания.

Начало такое же. Разделим монеты на три кучки по три монеты в каждой. Поскольку фальшивая монета только одна, то она окажется в одной из кучек, а в двух других будут только настоящие монеты. Поэтому кучка с фальшивой монетой будет отличаться по весу от двух других, которые будут весить одинаково. Определим сначала кучку, в которой находится фальшивая монета.

Положим первую и вторую кучку на разные чашки весов. Возможны два случая:

Первый случай. Чашки весов уравновешены. Значит, эти кучки весят одинаково и в них нет фальшивой монеты. Следовательно, фальшивая монета находится в третьей кучке.

Снимаем все монеты с весов — они настоящие — и откладываем их в сторону. Берём две монеты из третьей кучки и кладём их на разные чашки весов. Опять возможны два случая:

а) Чашки весов уравновешены. Значит, на весах настоящие монеты, а фальшивой является третья монета. За два взвешивания мы определили, какая из монет фальшивая, но не определили, легче она или тяжелее настоящих. Если это надо, то третьим взвешиванием мы это легко делаем.

б) Одна из чашек оказалась ниже другой. Значит, фальшивая монета на весах, но не известно на какой стороне. Третьим взвешиванием мы можем определить, на какой чашке весов находится фальшивая монета, и даже узнать, легче она или тяжелее настоящей. Предположим для определённости, что левая чашка весов оказалась выше, а правая ниже. Снимем с правой чашки монету и положим туда третью (настоящую) монету. Если чашки весов уравновесятся, то снятая монета фальшивая и она тяжелее настоящих. Если же левая чашка так и останется выше правой, то фальшивая монета в левой чашке и она легче настоящих.

Второй случай. Одна из чашек оказалась ниже другой. Значит, фальшивая монета в одной из этих кучек. Вторым взвешиванием мы можем определить, в какой именно кучке находится фальшивая монета, и даже узнать, легче она или тяжелее настоящей. Предположим для определённости, что левая чашка весов оказалась выше, а правая ниже.

Снимем с правой чашки монеты и положим туда монеты из третьей кучки. Если чашки весов уравновесятся, то фальшивая монета в снятой кучке и она тяжелее настоящих. Если же левая чашка так и останется выше правой, то фальшивая монета в левой чашке и она легче настоящих.

Третьим взвешиванием из трёх монет легко, аналогично предыдущей задаче, находим фальшивую.

Таким образом, за три взвешивания мы определили фальшивую монету и даже узнали, легче она или тяжелее настоящих.

Ответ. Не более трёх.

Пример 3. Имеется четыре предмета попарно различных масс. Как с помощью чашечных весов без гирь пятью взвешиваниями расположить все эти предметы в порядке возрастания массы?

Решение. Если действовать линейно, то потребуется шесть взвешиваний. Действительно, чтобы выяснить, какой из двух предметов легче, а какой тяжелее, достаточно одного взвешивания.

Чтобы добавить к ним третий предмет, нужно, вообще говоря, два взвешивания — третий с первым и третий со вторым.

Чтобы к трём упорядоченным добавить четвёртый предмет, необходимо уже три взвешивания — четвёртого предмета с каждым из первых трёх.

Итого 6 взвешиваний. А надо использовать только 5 взвешиваний.

Чтобы сэкономить одно взвешивание, разделим предметы на группы. Поскольку предметов четыре, разобьём их на две группы по два предмета в каждой. За два взвешивания — по одному на каждую группу — мы расположим предметы в порядке возрастания массы в группах. Для простоты дальнейших записей обозначим предметы из первой группы a_1 и a_2, причём a_1 легче a_2 (будем писать $a_1 < a_2$), а предметы из второй группы — b_1 и b_2 ($b_1 < b_2$).

Теперь предметы из второй группы будем по очереди добавлять в первую группу. Возьмём более лёгкий предмет b_1 из второй группы и третьим взвешиванием сравним его с более лёгким предметом a_1 из первой группы. Возможны два случая:

Первый случай. $a_1 < b_1$. Тогда четвёртым взвешиванием b_2 с a_2 устанавливаем порядок.

Второй случай. $b_1 < a_1$. Тогда не более чем двумя взвешиваниями b_2 с a_2 и затем, если потребуется, с a_1, полностью устанавливаем порядок.

Таким образом, при любом раскладе нам потребуется не более пяти взвешиваний.

Пример 4. Какие веса должны иметь три гири, чтобы с их помощью можно было взвесить любое число килограммов от 1 до 10 на чашечных весах? (Гири можно класть на обе чашки весов.)

Решение. Если бы груз можно было класть только на одну чашу весов, а гири только на другую, то очевидно, что эти гири должны были иметь веса, которые являются степенью двойки: 1, 2, 4, 8[1)].

Но в условиях нашей задачи, когда разрешается класть гири и к взвешиваемому грузу, можно брать гири с весами, которые являются степенью тройки: 1, 3 и 9, поскольку, перекладывая гири 1 и 3 с одной чашки весов на другую, можно легко имитировать гири весом: 1, 2, 4 и 8. Например, гирю в 2 кг можно имитировать, положив гирю весом 1 кг к взвешиваемому грузу, а гирю 3 кг на другую чашку весов, и т. д.

Вообще говоря, эта задача имеет не одно решение. Например, подойдут и гири весом 1, 3 и 6 кг или 1, 3 и 7 кг, или 1, 3 и 8 кг. Но если бы надо было взвесить груз от 1 до 13 кг, то эти решения уже не проходили бы, а первый набор (1, 3 и 9 кг) позволяет взвесить любой груз от 1 до 13 кг. То есть набор гирь с весами, которые являются степенью тройки, наиболее оптимальный. Однако, если есть дополнительные условия на гири, например сумма их весов должна быть минимальной, тогда надо уменьшать вес последней гири так, чтобы сумма весов всех гирь была равна максимальному требуемому взвешиваемому грузу.

Ответ. Например, 1, 3 и 9 кг или 1, 3 и 6 кг.

Задачи

1. $\boxed{5}$ Имеются чашечные весы без гирь и 3 одинаковые по внешнему виду монеты. Одна из монет фальшивая — она легче настоящих. Можно ли за одно взвешивание определить фальшивую монету?

2. $\boxed{5\text{-}6}$ Из восьми внешне совершенно одинаковых монет 7 — золотых, одна — фальшивая, несколько легче остальных. Требуется при помощи не более чем двух взвешиваний на чашечных весах, не пользуясь гирями, определить фальшивую монету. Можно ли это сделать?

3. $\boxed{5\text{-}7}$ Из 81 монеты одна фальшивая, она легче остальных. Можно ли при помощи четырёх взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая? Сколько потребуется взвешиваний для 80 монет?

[1)] Если требуется взвешивать не до 10 кг, а больше 15 кг, то надо продолжать дальше. Гири с весами $1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n$ позволяют взвесить любое число килограммов от 1 до $2^{n+1} - 1$. Это нетрудно посчитать, особенно тем, кто знает, что такое геометрическая прогрессия.

А сколько потребуется взвешиваний для n монет (n — произвольное число)?

4. $\boxed{6}$ Среди девяти монет две фальшивые. Определите фальшивые монеты за четыре взвешивания на двух чашечных весах без гирь, если известно, что обе фальшивые монеты весят одинаково, причём они тяжелее настоящих.

5. $\boxed{7}$ Среди семи монет имеются две фальшивые монеты (одинакового между собой веса, но легче настоящих). Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь понадобится, чтобы выделить обе фальшивые монеты?

6. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Имеются чашечные весы без гирь и три одинаковые по внешнему виду монеты. Одна из монет фальшивая, причём неизвестно, легче она настоящих монет или тяжелее (настоящие монеты одного веса). Сколько надо сделать взвешиваний, чтобы определить фальшивую монету?

   б) Решите эту же задачу в случае, когда имеется 4 монеты.

   $\boxed{5\text{-}6}$ в) Из двенадцати монет одна фальшивая, отличная по весу от настоящих монет. Можно ли при помощи не более четырёх взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая?

   $\boxed{6}$ г) Имеется 75 монет. Среди них 74 одинаковые настоящие монеты и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Можно ли это сделать с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

7. $\boxed{6\text{-}7}$ Имеется 101 монета. Среди них 100 одинаковых настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Можно ли это сделать с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

8. $\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить хотя бы одну настоящую монету из 5 одинаковых по внешнему виду монет, если известно, что среди этих монет 3 настоящие и 2 фальшивые, одна из которых легче, а другая тяжелее настоящих монет?

9. $\boxed{7}$ Имеется 7 внешне одинаковых монет, среди которых 5 настоящих (все одинакового веса) и 2 фальшивые (одинакового между собой веса, но легче настоящих). Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выделить 3 настоящие монеты?

10. $\boxed{7}$ а) Имеется 6 внешне одинаковых монет, среди которых 4 настоящие (все одинакового веса) и 2 фальшивые (обе легче настоящих, но различного веса). Можно ли с помощью трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь найти обе фальшивые монеты?

б) Имеется 6 внешне одинаковых монет, среди которых 4 настоящие, по 4 г каждая, и 2 фальшивые: массой 5 г и 3 г. Можно ли с помощью четырёх взвешиваний на чашечных весах без гирь найти обе фальшивые монеты?

11. $\boxed{6\text{-}7}$ Имеется 10 мешков монет. Известно, что в одном из них монеты фальшивые. Настоящая монета весит 10 грамм, а фальшивая — 9 грамм. Как при помощи одного взвешивания на весах с делениями определить мешок с фальшивыми монетами?

12. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Имеется 4 гири с маркировками 1 г, 2 г, 3 г и 4 г. Одна из них дефектная: более лёгкая или более тяжёлая, чем указано. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь узнать, какая из гирь дефектная, и при этом определить, легче она или тяжелее, чем на этой гире указано?

б) Есть пять монет достоинством 1, 2, 3, 5 и 10 пиастров. Одна из них фальшивая, т. е. её вес в граммах не равен её достоинству. Можно ли при помощи чашечных весов без гирь определить фальшивую монету?

13.★ $\boxed{7}$ Есть сто монет достоинством 1, 2, 3, ..., 100 пиастров. Среди них не более 20 фальшивых, т. е. таких, что их вес в граммах не равен их достоинству. Можно ли при помощи чашечных весов без гирь определить, фальшива ли монета достоинством в 10 пиастров?

14. $\boxed{6\text{-}7}$ Имеется три предмета попарно различных масс. Всегда ли можно с помощью чашечных весов без гирь двумя взвешиваниями расположить все эти предметы в порядке возрастания массы?

15. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Имеется четыре предмета попарно различных масс. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти самый тяжёлый и самый лёгкий предметы?

б) Имеется шесть предметов попарно различных масс. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти самый тяжёлый и самый лёгкий предметы?

16. $\boxed{6\text{-}7}$ Имеется 68 монет, различных по весу. За 100 взвешиваний на чашечных весах без гирь найдите самую тяжёлую и самую лёгкую монеты.

17. [6-7] а) Имеется 32 камня попарно различных масс. Докажите, что за 35 взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить самый тяжёлый и второй по массе камни.

[7] б) Имеется 64 камня попарно различных масс. Докажите, что за 68 взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить самый тяжёлый и второй по массе камни.

18. [6-7] Имеются две красные, две жёлтые и две зелёные гири. В каждой паре одна из гирь немного легче другой. Все три тяжёлые гири весят одинаково. Все три лёгкие гири тоже весят одинаково. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах определить, какая из гирь в каждой паре тяжелее?

19. [5-7] а) В ящике 25 кг гвоздей. Можно ли с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

б) В ящике 24 кг гвоздей. Можно ли на чашечных весах без гирь за три взвешивания отмерить 9 кг?

20. [5-6] а) Разместите на трёх грузовиках 7 полных бочек, 7 бочек, заполненных наполовину, и 7 пустых бочек так, чтобы на всех грузовиках был одинаковый по массе груз.

б) Как разложить гирьки весом 1, 2, ..., 9 грамм в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй — три, в третьей — четыре, а суммарные веса гирек в каждой из коробочек были одинаковыми?

21. [5] Школьники Петя и Вася взвесили свои портфели на весах. Весы показали 3 кг и 2 кг. Когда же они поставили на весы оба портфеля, весы показали 6 кг. «Как же так? — удивился Петя. — Ведь $2 + 3$ не равняется 6». На что Вася ответил: «Разве ты не видишь, что у весов сдвинута стрелка?» Сколько же весят портфели на самом деле?

22. [7] На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Суд знает, что фальшивые монеты весят одинаково, настоящие монеты весят одинаково, но фальшивые монеты легче настоящих. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю фальшивые, а с 8-й по 14-ю настоящие. Может ли он доказать это за три взвешивания на чашечных весах без гирь?

23. [6-7] а) За сколько вопросов можно наверняка отгадать целое число, заключённое между 1 и 64, если на вопросы отвечают только «да» и «нет»?

б) За сколько вопросов можно наверняка отгадать целое число, заключённое между 1 и 1000, если на вопросы отвечают только «да» и «нет»?

24. [6-7] Разложите по семи кошелькам 127 рублёвых монет так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков (другими словами, отдав содержимое одного или нескольких кошельков).

25. [6-7] а) Какие веса должны иметь четыре гири, чтобы с их помощью на чашечных весах можно было взвесить любое число килограммов от 1 до 40? (Гири можно класть на обе чашки весов.)

    б) Какие веса должны иметь пять гирь, чтобы с их помощью на чашечных весах можно было взвесить любое число килограммов от 1 до 120? (Гири можно класть на обе чашки весов.)

26. [6-7] В гостиницу приехал путешественник. У него была лишь серебряная цепочка из 7 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки.

    а) Какое звено цепочки надо распилить, чтобы прожить в гостинице 7 дней и ежедневно расплачиваться с хозяином? (Хозяин может давать сдачу звеньями, полученными ранее.)

    б)★ Сколько звеньев пришлось бы распилить, если бы путешественник жил в гостинице 100 дней и имел цепочку из 100 звеньев?

27. [6-7] Имеется 4 рубля монетами 1 коп., 2 коп., 5 коп., 10 коп. Докажите, что этими монетами можно набрать 3 рубля.

28. [7] Имеется 6 одинаковых с виду гирек массой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г соответственно. На гирьках сделали надписи: 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г и 6 г. Можно ли двумя взвешиваниями на чашечных весах без других гирек проверить, что нет неправильных надписей?

29.★ [7] Из двенадцати монет одна фальшивая, отличная по весу от настоящих монет. Можно ли при помощи трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая?[1)]

30.★ [7] Из 13 монет одна фальшивая, отличная по весу от настоящих монет. Можно ли при помощи трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая?

[1)] Эта задача значительно сложнее той, где надо было определить фальшивую монету за четыре взвешивания, но тем не менее она тоже имеет решение.

5. Принцип крайнего

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на принцип крайнего.

При решении многих задач ключевой идеей оказывается рассмотрение некоторой крайней или экстремальной величины, занимающей особое (крайнее) положение, например: наибольшее, наименьшее, центральное число, ближайшая точка, самая большая или самая маленькая геометрическая фигура, фигура, лежащая в стороне от остальных.

Принципом крайнего называется метод решения задач, при котором рассматривается крайний объект в наборе объектов. Этим принципом пользуются для доказательства утверждений или решения задач. Разглядеть крайний объект не всегда просто. Иногда существование крайнего очевидно, а иногда требует непростого доказательства.

Примеры решения задач

Пример 1. По кругу записано 100 чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все 100 чисел равны.

Решение. Рассмотрим наибольшее из записанных чисел. Если таких чисел окажется несколько, то возьмём любое из них. Поскольку это число не меньше своих соседей и является средним арифметическим этих соседей, оба соседа равняются данному числу.

Проводя аналогичные рассуждения для соседей данного числа, для их соседей и т. д., получаем, что все числа равны между собой. Что и требовалось доказать.

Замечание. В этой задаче крайним было наибольшее из всех чисел.

Пример 2. В системе Зелёной Собаки 2013 планет. На каждой из этих планет сидит астроном и смотрит в телескоп на ближайшую планету. Докажите, что если попарные расстояния между планетами различны, то найдётся планета, на которую никто не смотрит.

Решение. Рассмотрим две планеты A и B, расстояние между которыми наименьшее. Астроном на планете A смотрит на планету B, а астроном на планете B смотрит на планету A. Если астроном с какой-нибудь другой планеты смотрит на одну из планет A или B, то, поскольку планет и астрономов одинаковое количество, а на одну из планет смотрят два астронома, найдётся планета, на которую никто не смотрит.

Предположим, что ни один астроном с других планет не смотрит на планеты A и B. Тогда эти планеты можно исключить из рассмотрения и перейти к системе из 2011 планет.

Проводя аналогичные рассуждения, мы каждый раз будем уменьшать количество планет в системе на две планеты и постепенно придём к системе из трёх планет. Выберем две из них, расстояние между которыми наименьшее, и получим, что на третью планету никто не смотрит.

Замечание. В этой задаче крайним было наименьшее расстояние между планетами.

Пример 3. В классе 24 ученика. Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причём для любых двух учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимаются не менее 16 учеников.

Решение. Если в некоторый кружок ходит весь класс, то всё доказано. Далее будем считать, что такого кружка нет.

Пусть самый многочисленный кружок — математический. Его участников мы будем называть математиками. Поскольку не весь класс ходит в этот кружок, найдётся ученик Петров, который в него не ходит. Рассмотрим его и одного из математиков. Они вместе ходят в другой кружок, допустим в физический (физики). Петров не может ходить в этот кружок вместе со всеми математиками, иначе математический кружок не будет самым многочисленным. Значит, с кем-то из математиков он ходит ещё в один кружок, например литературный (лирики).

Поскольку Петров занимается не более чем в двух кружках, то математики не могут заниматься больше ни в каких других кружках. Значит, каждый математик может ещё быть только либо физиком, либо лириком, а Петров является физиком и лириком одновременно.

То, что было сказано про Петрова, можно сказать и про любого другого ученика, который не является математиком: каждый из таких учеников — физик и лирик одновременно (и больше ни в какие кружки не ходит).

Таким образом, кружков всего три, и каждый ученик ходит ровно в два кружка. Так как в классе 24 ученика, то на три кружка в общей сложности приходится 48 их участников. Поэтому в математический кружок (самый многочисленный) ходит не менее чем $\frac{48}{3} = 16$ учеников.

Замечание. В этой задаче крайним был самый многочисленный кружок.

Пример 4. 2014 прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку) разбивают плоскость на части. Докажите, что к любой прямой примыкает треугольник разбиения.

Решение. Рассмотрим произвольную прямую a и ближайшую к ней точку P пересечения двух других прямых — l_1 и l_2. Тогда треугольник, образованный прямыми a, l_1 и l_2, не пересекает ни одна другая прямая, так как иначе нашлась бы точка пересечения прямых, лежащая к прямой a ближе, чем точка P.

Замечание. В этой задаче крайней является ближайшая точка к прямой.

Задачи

1. 5-6 Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разного размера и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?
2. 5-6 В турнире по волейболу, прошедшем в один круг, 20 процентов всех команд не выиграли ни одной игры. Сколько было команд?
3. 6-7 а) Дано шесть натуральных чисел. Все они различны и дают в сумме 22. Найти эти числа и доказать, что других нет.

   7 б) Дано 100 натуральных чисел. Все они различны и дают в сумме 5051. Найти эти числа и доказать, что других нет.
4. 6-7 Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.
5. 6-7 а) Можно ли расставить по кругу все целые числа от -7 до 7 (включая нуль) так, чтобы у каждого числа произведение двух его соседей было неотрицательным? Если да — приведите пример, если нет — объясните почему.

   б) Можно ли расставить по кругу все целые числа от -9 до 9 (включая нуль) так, чтобы у каждого числа произведение двух его соседей было неотрицательным? Если да — приведите пример, если нет — объясните почему.
6. 6-7 По окружности записаны 30 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после

него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 200. Найти эти числа.

7. 6-7 а) Можно ли расставить на окружности 100 натуральных чисел так, чтобы каждое из них было либо суммой, либо разностью соседних?

   б) Можно ли расставить на окружности 300 натуральных чисел так, чтобы каждое из них было либо суммой, либо разностью соседних?

   в) По окружности записаны 2003 натуральных числа. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых чётна.

8. 7 а) Можно ли расставить натуральные числа от 1 до 1978 в строку так, чтобы любые два числа, стоящие рядом, и любые два числа, расположенные через одно, были взаимно просты?

   б) Можно ли выписать в ряд числа от 1 до 1963 так, чтобы любые два соседних числа и любые два числа, расположенные через одно, были взаимно просты?

9. 6-7 В клетках шахматной доски стоят натуральные числа так, что каждое равно среднему арифметическому своих соседей. Сумма чисел, стоящих в углах доски, равна 16. Найдите число, стоящее на поле $e2$.

10. 6-7 а) Отряд пионеров выстроен прямоугольником. В каждой шеренге отмечается самый высокий, и из этих пионеров выбирается самый низкий. В каждом ряду отмечается самый низкий, и из них выбирается самый высокий. Какой из этих двух пионеров выше?[1)]

    б) В каждой клетке таблицы 10×10 записано число. В каждой строке подчеркнули наибольшее число (или одно из наибольших, если их несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчёркнутые числа подчёркнуты ровно два раза. Докажите, что все числа, записанные в таблице, равны между собой.

11. 6-7 У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

12. 6-7 а) Пятизначное число назовём *неразложимым*, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

[1)] Имеется в виду, что два указанных пионера — самый высокий из низких и самый низкий из высоких — должны быть разными. В шеренге стоят плечом к плечу, в ряду стоят в затылок друг другу.

б) Шестизначное число назовём *неразложимым*, если оно не раскладывается в произведение трёхзначного и четырёхзначного чисел. Какое наибольшее число неразложимых шестизначных чисел может идти подряд?

13. [6-7] Из двухсот чисел: 1, 2, 3, 4, ..., 200 произвольно выбрали сто одно число. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

14. [6-7] В одной из школ в течение года 20 раз проводился литературный кружок. На каждом занятии присутствовало ровно пять школьников, причём никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.

15. [6-7] Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причём для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимается не менее двух третей всего класса.

16. [6-7] Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причём никакие два из них не собрали одинаковое число грибов. Докажите, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.

17. [7] За круглым столом сидят 25 человек. Им роздано по две карточки. На каждой из 50 карточек написано одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, 25$, причём каждое из чисел встречается дважды. Раз в минуту по сигналу ведущего каждый из сидящих передаёт своему соседу справа ту из своих карточек, на которой написано меньшее число. Если же у кого-то на руках окажутся две карточки с одинаковыми номерами, то процесс заканчивается. Докажите, что это рано или поздно произойдёт.

18. [7] Рассмотрим конечное множество единичных квадратов на плоскости таких, что их стороны параллельны осям координат (квадраты могут пересекаться) и для любой пары квадратов расстояние между их центрами не больше 2. Докажите, что существует единичный квадрат (не обязательно из данного множества) со сторонами, параллельными осям, пересекающийся хотя бы по одной точке с каждым квадратом данного множества.

19. [7] В клетках доски $n \times n$ произвольно расставлены числа от 1 до n^2. Докажите, что найдутся две такие соседние клетки, имеющие общую вершину или общую сторону, что стоящие в них числа отличаются не меньше чем на $n + 1$.

6. Оценка + пример

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение какой-либо величины.

Такие задачи решаются следующим способом. Сначала необходимо провести оценку, т. е. доказать, что данная величина не может быть больше (меньше) некоторого значения. Затем надо привести пример, подтверждающий, что данное значение достигается.

Таким образом, решение задачи состоит из двух этапов:

Первый этап. Оценка.

Второй этап. Пример.

Примеры решения задач

Пример 1. Какое наибольшее количество ладей можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Решение. На каждой горизонтали может стоять не более одной ладьи, иначе они будут бить друг друга. Значит, всего на доску можно поставить не более 8 ладей, так как шахматная доска имеет 8 горизонталей и 8 вертикалей. Это мы получили оценку сверху.

Теперь приведём пример расстановки 8 ладей, чтобы они не били друг друга. Их надо поставить на одну из главных диагоналей. Тогда они будут удовлетворять условию.

Ответ. 8.

Пример 2. Какое наибольшее число прямоугольников 1×5 можно вырезать из квадрата 8×8?

Решение. Поскольку в квадрате 8×8 всего 64 клетки, а в прямоугольниках, которые требуется вырезать, — 5 клеток, то нельзя вырезать больше 12 квадратов ($12 \cdot 5 = 60 < 64$, а $13 \cdot 5 = 65 > 64$).

Осталось показать, как вырезать 12 прямоугольников. Это сделать просто. Оставляем квадрат 2×2 в центре квадрата 8×8, а остальные 60 клеток разбиваем на четыре прямоугольника 3×5, каждый из которых разрезается на 3 прямоугольника 1×5.

Ответ. 12.

Пример 3. Какое наименьшее количество типов монет должен выпустить Монетный двор России, чтобы любую сумму от 1 до 20 рублей можно было бы уплатить не более чем двумя монетами (без сдачи)?

Р е ш е н и е. При решении этой задачи мы изменим порядок действий, т. е. сначала приведём пример, а затем покажем, что меньшим количеством типов обойтись нельзя.

Легко проверить, что монеты достоинством 1, 3, 5, 7, 9 и 10 рублей удовлетворяют условию задачи. Покажем, что монет пяти типов не хватит.

Действительно, имея монеты пяти типов, мы сможем, соблюдая условия задачи, уплатить не более 20 сумм:

- не более десяти, беря по две различные монеты;
- пять, беря по две одинаковые монеты;
- пять, беря по одной монете.

Поскольку требуется уплатить ровно 20 различных сумм (1, 2, 3, ..., 20), то все перечисленные выше суммы должны быть различными.

Далее, так как все суммы, которые требуется уплатить, равны целому числу, то и каждая из наших пяти монет должна быть достоинством в целое число рублей. Поэтому должна быть обязательно монета достоинством в 1 рубль. Тогда двухрублёвой монеты быть не должно, иначе сумму в 2 рубля можно будет уплатить двумя различными способами, что запрещено выше.

Трёхрублёвая монета должна быть, а четырёхрублёвой монеты быть не должно ($4 = 3 + 1$), но пятирублёвая монета должна быть. Тогда получается, что сумму в 6 рублей можно составить двумя способами: $6 = 5 + 1 = 3 + 3$. Следовательно, сделать все 20 сумм различными не удастся. Поэтому монет пяти типов не хватит.

О т в е т. Шесть: 1, 3, 5, 7, 9 и 10 рублей.

Задачи

1. $\boxed{5\text{-}6}$ На сковородке помещается два кусочка хлеба. На поджаривание куска с одной стороны требуется 1 минута. За какое минимальное количество минут можно обжарить 3 куска хлеба с обеих сторон?

2. $\boxed{5\text{-}6}$ Четыре кузнеца должны подковать пять лошадей. Какое наименьшее время они могут затратить на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову пять минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

3. $\boxed{5\text{-}6}$ В пять горшочков, стоящих в ряд, Кролик налил три килограмма мёда (не обязательно в каждый и не обязательно поровну). Винни-Пух может взять любые два

горшочка, стоящие рядом. Какое наибольшее количество мёда сможет гарантированно съесть Винни-Пух?

4. [5-6] а) Винни-Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели 70 бананов, причём каждому досталось хотя бы по одному банану. Винни-Пух съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик вместе съели 45 бананов. Сколько бананов съел Пятачок?

   б) Винни-Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели 85 орехов, причём каждому досталось хотя бы по одному ореху. Пятачок съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик вместе съели 55 орехов. Сколько орехов съел Винни-Пух?

5. [5-6] За́мок имеет вид семиугольника, в каждой вершине которого находится сторожевая башня. Каждую из семи стен замка охраняют стражники в башнях, находящихся в концах этой стены. Какое наименьшее количество стражников нужно разместить в башнях, чтобы каждая стена охранялась не менее чем семью стражниками?

6. [5-6] а) Каким наибольшим количеством монет в 3 коп. и 5 коп. можно набрать сумму 37 коп.?

   б) Каким наименьшим количеством монет в 3 коп. и 5 коп. можно набрать сумму 37 коп.?

7. [5-6] Электронные часы показывают цифры часов и минут (например, 15:30). Какая наибольшая сумма цифр может быть на таких часах?

8. [5-6] В верхнем ящике шкафа лежат 5 одинаковых белых перчаток на правую руку и 10 одинаковых белых перчаток на левую руку. В нижнем ящике шкафа лежат 10 одинаковых чёрных перчаток на правую руку и 15 одинаковых чёрных перчаток на левую руку. Содержимое ящиков перемешали и положили в пакет. Какое наименьшее количество перчаток нужно вытащить из пакета наугад (не заглядывая в пакет), чтобы среди них оказалась полноценная пара одноцветных перчаток?

9. [5-6] а) Рома на каждой следующей перемене съедал конфет больше, чем на предыдущей, и за все 5 перемен съел 31 конфету. Сколько конфет он мог съесть на четвёртой перемене, если на первой он съел в три раза меньше, чем на пятой?

   б) Сумма нескольких различных натуральных слагаемых равна 50. Каково наибольшее число слагаемых?

   в) Найдите наименьшее возможное число членов кружка, если известно, что девочек в нём меньше 50%, но больше 40%.

10. 6-7 Составьте из прямоугольников 1×1, 1×2, 1×3, ..., 1×13 прямоугольник, каждая сторона которого больше 1.

11. 6-7 а) Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

    б) Какое наибольшее количество уголков, состоящих из трёх квадратов 1×1, можно поместить в прямоугольнике 5×7? (Уголки можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.)

12. 6-7 Какое наибольшее количество прямоугольников 1×4 можно вырезать из квадрата 18×18?

13. 6-7 Квадрат 10×10 хотят покрыть квадратами 3×3 со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата. Каким наименьшим числом квадратов 3×3 можно обойтись?

14. 6-7 Какое наибольшее количество кораблей 1×2 можно уложить на доске 10×10 без нарушения правил «морского боя» [1)]?

15. 6-7 Поле для игры в «морской бой» имеет форму квадрата 8×8. На нём стоит один корабль, имеющий форму прямоугольника 1×4. Какое наименьшее количество выстрелов надо сделать, чтобы

    а) ранить корабль;

    б) однозначно определить положение корабля?

16. 5-6 Какое наименьшее число ладей могут побить всю шахматную доску?

17. 6-7 Какое наибольшее количество ферзей можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга? (Ферзь — фигура, которая бьёт на любое количество клеток по вертикали, горизонтали или диагонали и в любом направлении.)

18. 6-7 Какое наибольшее количество слонов можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

19. 6-7 Какое наибольшее количество коней можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

20. 6-7 За какое наименьшее количество ходов можно перевести шахматного коня из левой нижней в правую верхнюю клетку доски размером а) 10×10; б) 8×8?

21. 6-7 Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички (каждая спичка составляет ровно одну сторону

[1)] По правилам «морского боя» два корабля не могут соприкасаться ни по стороне, ни по вершине.

клетки). Какое наименьшее количество спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с любого поля на любое, не перепрыгивая через спички?

22. $\boxed{6\text{-}7}$ На шахматной доске расставлены ладьи так, что каждую ладью бьют не более трёх других. Найти наибольшее количество ладей.

23. $\boxed{6\text{-}7}$ На какое наибольшее число частей можно разрезать тремя прямыми разрезами (перекладывать куски нельзя) а) колобок; б) блин?

24. $\boxed{6\text{-}7}$ Шоколадка имеет углубления в виде двух продольных и трёх поперечных канавок, по которым её можно разламывать. Какое наименьшее число разломов необходимо, чтобы разломать её на кусочки, не имеющие канавок, если одним разломом можно ломать и несколько кусков, приложив их друг к другу?

25. $\boxed{6\text{-}7}$ Сумма трёх натуральных чисел (не обязательно различных) равна 100. Из этих чисел можно составить три попарные разности (при вычислении разности из большего числа вычитают меньшее). Какое наибольшее значение может принимать сумма этих попарных разностей?

26. $\boxed{6\text{-}7}$ На 22 карточках написаны натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целые значения?

27. $\boxed{6\text{-}7}$ Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора 1, 2, ..., 2007, чтобы сумма любых двух выбранных чисел делилась на 8?

28. $\boxed{6\text{-}7}$ а) В гости пришло 10 человек, и каждый оставил в коридоре пару калош. Все пары калош имеют разные размеры. Гости начали расходиться по одному, надевая любую пару калош, в которые они могли влезть, т. е. каждый гость мог надеть пару калош, не меньшую, чем его собственные. В какой-то момент обнаружилось, что ни один из оставшихся гостей не может найти себе пару калош, чтобы уйти. Какое максимальное число гостей могло остаться?

    б) Для того чтобы застеклить 15 окон различных размеров и форм, заготовлено 15 стёкол в точности по окнам (в каждом окне должно быть одно стекло). Стекольщик, не зная, что стёкла подобраны, работает так: он подходит к очередному окну и перебирает неиспользованные стёкла до тех пор, пока не найдёт достаточно большое (т. е. либо в точности подходящее, либо такое, из которого можно вырезать подходящее), если же такого стекла нет, то переходит к следующему окну, и так, пока не обойдёт все окна. Составлять стекло из нескольких частей нельзя. Какое максимальное число окон может остаться незастеклёнными?

29. $\boxed{6\text{-}7}$ Найдите наибольшее возможное отношение трёхзначного числа $\overline{abc}$ к числу $\overline{ac} + \overline{bc}$.

30. $\boxed{6\text{-}7}$ В шахматном турнире участвовало 30 человек. Тем, кто набрал не менее 60% возможных очков, присвоили разряд. Какому наибольшему числу участников мог быть присвоен разряд?

31. $\boxed{6\text{-}7}$ а) На доске написано 10 двоек. Разрешается стереть любые два числа и записать на доску их сумму или их произведение. Может ли после нескольких таких операций на доске остаться число 1002?

    б) На доске написано 11 двоек. Разрешается стереть любые два числа и записать на доску их сумму или их произведение. Может ли после нескольких таких операций на доске остаться число 774?

32. $\boxed{6\text{-}7}$ В пять 15-литровых вёдер налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается утроить количество воды в любом сосуде, перелив в него воду из другого. Какое наибольшее количество воды можно такими действиями собрать в одном ведре?

33. $\boxed{6\text{-}7}$ Назовём набор из 60 гирь *крепким*, если его невозможно разбить на три группы по 20 гирь в каждой так, чтобы массы всех трёх групп были разными. Найдите все крепкие наборы, в которых есть хоть одна гиря массой 1 кг и хоть одна гиря массой 2 кг.

34. $\boxed{6\text{-}7}$ На совместной конференции лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека. Их рассадили в 4 ряда по 8 человек. В перерыве каждый из них заявил: «Среди моих соседей есть представители обеих партий». Какое наименьшее количество лжецов могло участвовать в конференции? (Два участника являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого.)

7. Принцип Дирихле

Теоретический материал

Общая формулировка принципа Дирихле звучит так:

Если m кроликов рассажены в n клеток, то хотя бы в одной клетке находится не менее $\frac{m}{n}$ кроликов, и хотя бы в одной клетке находится не более $\frac{m}{n}$ кроликов.

Если число $\frac{m}{n}$ не целое, то при решении задач берётся целая часть этого числа.

Доказывается он очень просто — методом от противного. Докажем только первую часть утверждения, поскольку вторая часть доказывается аналогично. Предположим, что в каждой клетке сидит меньше чем $\frac{m}{n}$ кроликов. Тогда всего кроликов в клетках меньше чем $n \cdot \frac{m}{n} = m$. Это противоречит условию, значит, есть клетка, в которой сидит не менее чем $\frac{m}{n}$ кроликов.

Наиболее распространена следующая частная формулировка этого принципа:

Если кролики рассажены в клетки, причём число кроликов больше числа клеток, то хотя бы в одной из клеток находится более одного кролика.

Реже используется другая частная формулировка принципа Дирихле:

Если число клеток больше, чем число кроликов, то как минимум одна клетка пуста.

В принципе Дирихле используется понятие «более». Верно близкое утверждение, использующее понятие «менее», которое полезно знать:

Если в n клетках сидит менее $\frac{n(n-1)}{2}$ кроликов, то найдутся две клетки, в которых сидит одинаковое количество кроликов (*может быть, ни одного*).

Докажем это. Предположим противное. Пусть во всех клетках сидит различное количество кроликов. Расположим клетки в порядке увеличения числа кроликов в них. Тогда в первой клетке число кроликов не менее 0, во второй — не менее 1, в третьей — не менее 2, ..., в n-й клетке — не менее $n-1$ кроликов. Но тогда всего кроликов не менее

$$0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Это противоречит условию, следовательно, предположение не верно. Значит, найдутся две клетки, в которых сидит одинаковое количество кроликов (может быть, ни одного).

Покажем на конкретных примерах, как работает этот принцип в задачах.

Примеры решения задач

Пример 1. В школе 500 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

Р е ш е н и е. Предположим, что это не так, т. е. в каждый день года родились не более одного ученика школы. Тогда, поскольку всего дней в году 366 (будем рассматривать максимально возможное число дней в году, т. е. високосный год), всего учеников в школе не более 366, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и, значит, в школе есть хотя бы два ученика, которые родились в один день года.

Замечание. В этой задаче сработала частная формулировка принципа Дирихле: роль кроликов играют ученики, а роль клеток — дни года.

Пример 2. На площадке 20 собак восьми разных пород. Докажите, что среди них есть не менее трёх собак одной породы.

Р е ш е н и е. Предположим, что это не так, т. е. собак каждой породы менее трёх, т. е. не более двух. Тогда, поскольку пород восемь, всего собак на площадке не более $2 \cdot 8 = 16$, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и, значит, есть не менее трёх собак одной породы.

Замечание. В этой задаче сработал общий принцип Дирихле: роль кроликов играют собаки, а роль клеток — породы. Тогда

$$m = 20, \quad n = 8, \quad \frac{m}{n} = \frac{20}{8} = 2{,}5.$$

Значит, по общему принципу Дирихле есть порода, к которой принадлежат не менее 2,5 собак. Так как число собак может быть только целым, то должно быть не менее трёх собак одной породы.

Пример 3. В непрозрачном мешке лежат 4 красных и 2 зелёных шара. Какое наименьшее число шаров надо вытащить, чтобы среди них оказался: а) один красный шар; б) один зелёный шар; в) один красный и один зелёный шар; г) два шара одного цвета?

Р е ш е н и е. Эта задача из тех, в которых придётся при решении использовать слова *«в худшем случае»*.

а) В худшем случае мы можем вытащить первые два шара зелёного цвета, тогда в мешке останутся только шары красного цвета и третий шар обязательно будет красным. Значит, надо вытащить три шара. Конечно, может так случиться, что среди вытащенных трёх шаров будут два или даже три красных шара, но в худшем случае будет только один красный шар.

б) Рассуждая аналогично, получаем, что надо вытащить 5 шаров.

в) Поскольку красных шаров больше, то в худшем случае первые четыре шара могут оказаться красными и только пятый — зелёным. Поэтому надо вытащить 5 шаров.

г) При кажущейся похожести вопрос этого пункта отличается от трёх предыдущих. Этот вопрос ставит классическую задачу на принцип Дирихле. Здесь клетки — цвета, а кролики — шары. Цветов только два. Значит, по принципу Дирихле достаточно вынуть 3 шара, чтобы среди них оказались два одного цвета.

Ответ. а) 3; б) 5; в) 5; г) 3.

Пример 4. Можно ли разложить 44 шарика на 9 кучек так, чтобы количество шариков в разных кучках было различным?

Решение. Предположим, нам это удалось. Упорядочим кучки по возрастанию количества шариков. Тогда в первой кучке должно быть не менее одного шарика, во второй — не менее двух, ..., в девятой — не менее девяти. Всего шариков должно быть не менее чем

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45.$$

А у нас только 44. Противоречие. Значит, нельзя.

Ответ. Нельзя.

Замечание. В этом примере использовалось последнее утверждение из теоретической части, причём $n = 10$, так как для использования этого утверждения нам надо считать, что есть десятая кучка, в которой нет шариков. Тогда

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45,$$

а у нас только 44 шарика.

Как видите, решать задачи на принцип Дирихле несложно. Надо просто понять, что в задаче является клетками, а что — кроликами.

При решении задач этого раздела обязательно доказывайте принцип Дирихле в каждой задаче, чтобы отработать этот метод доказательства. На олимпиаде же это обязательно надо делать, иначе вам могут снизить оценку за данную задачу.

Задачи

1. $\boxed{5}$ а) В классе 34 ученика. Докажите, что среди них найдутся по меньшей мере двое, у которых фамилии начинаются с одной и той же буквы.

   б) В бору 600 000 сосен, и на каждой из них не более 500 000 иголок. Докажите, что в этом бору найдутся две сосны с одинаковым количеством иголок.

   в) В Москве живёт более 10 миллионов человек. Докажите, что у каких-то двух из них одинаковое число волос на голове, если известно, что у любого человека на голове менее миллиона волос.

   г) В школе 20 классов. В ближайшем доме живёт 23 ученика этой школы. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два одноклассника?

   д) Условие этой задачи записано стихами:

   Ни у кого из тысячи пиратов
   Не наберётся тысячи дукатов.
   Но даже самый маленький пират
   Имеет всё же хоть один дукат.
   Так можно ли сказать о тех пиратах,
   Что среди них — безусых и усатых,
   Косматых, безбородых, бородатых —
   Есть двое одинаково богатых?

2. $\boxed{5\text{-}6}$ а) Ведущий и каждый из 30 игроков записывают числа от 1 до 30 в некотором порядке. Затем записи сравнивают: если у игрока и ведущего на одном и том же месте стоят одинаковые числа, то игрок получает очко. Оказалось, что все игроки набрали разное количество очков. Докажите, что чья-то запись совпала с записью ведущего.

   б) При каком наименьшем количестве учеников школы среди них найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

   в) У всех 25 учеников на родительское собрание пришли папы и мамы. Мам было 20, а пап — 10. У скольких учеников на родительское собрание пришли и папы, и мамы?

3. $\boxed{6\text{-}7}$ На шахматной доске стоят 44 ферзя. Докажите, что каждый из них бьёт какого-нибудь другого ферзя.

4. $\boxed{6\text{-}7}$ В футбольном чемпионате участвует 30 команд. Докажите, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

5. $\boxed{5\text{-}7}$ а) Алёша в среду, четверг и пятницу съел всего 7 конфет. Докажите, что хотя бы в один день он съел более двух конфет.

б) Машинистка, перепечатывая текст в 25 страниц, сделала 102 ошибки. Докажите, что найдётся страница, на которой сделано более 4 ошибок.

в) В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трёх сортов, причём в каждом ящике лежали яблоки какого-то одного сорта. Можно ли найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?

г) В ящике лежат 105 яблок четырёх сортов. Докажите, что среди них найдётся по меньшей мере 27 яблок какого-либо одного сорта.

6. 5-7 а) В классе 40 учеников. Найдётся ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса?

   б) В классе учится 22 ученика. Докажите, что из них можно выбрать четырёх, которые родились в один день недели.

   в) В школе 30 классов и 1000 учащихся. Доказать, что есть класс, в котором не менее 34 учеников.

   г) В школе 33 класса, 1150 учеников. Найдётся ли класс, в котором меньше 35 учеников?

7. 5-7 У человека на голове не более миллиона волос, в Москве проживает более 10 миллионов человек. Докажите, что найдётся 10 москвичей с одинаковым числом волос.

8. 5-7 а) В тёмной кладовой лежат ботинки одного размера: 10 пар чёрных и 10 пар коричневых. Найти наименьшее число ботинок, которое нужно взять из кладовой, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета (считать, что в темноте нельзя отличить не только цвет ботинка, но и левый от правого).

   б) В ящике лежат шары: 5 красных, 7 синих и 1 зелёный. Сколько шаров надо вынуть не глядя, чтобы достать 2 шара одного цвета?

   в) В коробке лежат карандаши: 7 красных и 5 синих. В темноте берут карандаши. Сколько надо взять карандашей, чтобы среди них было не меньше двух красных и не меньше трёх синих?

9. 5-7 В ящике лежат цветные карандаши: 10 красных, 8 синих, 8 зелёных и 4 жёлтых. В темноте берём из ящика карандаши. Какое наименьшее число карандашей надо взять, чтобы среди них заведомо

   а) было не меньше 4 карандашей одного цвета;
   б) был хотя бы один карандаш каждого цвета;
   в) было не меньше 6 синих карандашей?

10. 6-7 В мешке 70 шаров, отличающихся только цветом: 20 красных, 20 синих, 20 жёлтых, остальные — чёрные

и белые. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 10 шаров одного цвета?

11. [6-7] а) В районе 7 средних школ. На район выделили 20 компьютеров. Докажите, что при любом распределении их между школами найдутся две школы, которые получат одинаковое число компьютеров (может быть, ни одного).

б) В районе 15 школ. Доказать, что как бы ни распределяли между ними 90 компьютеров, обязательно найдутся две школы, получившие одинаковое число компьютеров (возможно, ни одного).

в) В автобусе, который делает всего 9 остановок, едут 34 пассажира, причём новые пассажиры ни на одной из них не входят. Докажите, что найдутся две остановки, на которых выйдет одинаковое число пассажиров (возможно, ни одного).

г) Можно ли 60 монет разложить по 12 кошелькам так, чтобы любые два из них содержали разное количество монет (может быть, ни одной)?

д) Доказать, что если 21 человек собрали 200 орехов, то найдутся два человека, собравшие поровну орехов.

12. [6-7] 10 человек собрали вместе 46 грибов, причём известно, что нет двух человек, собравших одинаковое число грибов. Сколько грибов собрал каждый?

8. Принцип Дирихле и делимость целых чисел

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, в которых использование принципа Дирихле основано на том, что при делении любого числа, например, на 5 может быть только 5 различных остатков $(0, 1, 2, 3, 4)$, а при делении на 10 может быть только 10 различных остатков $(0, 1, 2, \ldots, 9)$. В общем случае получаем, что при делении любого числа на n может быть только n различных остатков $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Остатки от деления и будут клетками в данном разделе.

Примеры решения задач

Пример 1. Докажите, что среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

Решение. Поскольку при делении любого числа на n может быть только n различных остатков $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$, то остатки от деления будем считать клетками, а числа — кроликами. Тогда получается n клеток и $n+1$ кроликов. Значит, по принципу Дирихле найдётся клетка, в которой будет не менее двух кроликов, т. е. найдутся два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки.

Пример 2. Дано 12 различных двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых — двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.

Решение. Сначала заметим, что любое двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами, обязательно делится на 11 и, наоборот, если двузначное число делится на 11, то оно записывается двумя одинаковыми цифрами.

Теперь понятно, что клетками будут остатки от деления числа на 11 — различных остатков ровно 11, а кроликами будут данные числа — их 12. Тогда, по принципу Дирихле, найдутся два числа, остаток от деления которых на 11 одинаковый. Эти два числа и являются искомыми.

Замечание. Вы уже, наверное, обратили внимание, что в задачах этого раздела мы используем принцип Дирихле без доказательства, а в прошлом разделе мы в каждом примере доказывали его. Мы считаем, что вы уже умеете его доказывать и при решении задач на олимпиаде обязательно докажете его методом от противного. Это обязательно надо делать, иначе вам могут снизить оценку за данную задачу. Мы же, для краткости изложения, в дальнейшем будем опускать доказательство, а просто будем ссылаться на принцип Дирихле.

Пример 3. Доказать, что найдётся число вида $1\ldots10\ldots0$, делящееся на 211.

Решение. Рассмотрим 212 различных чисел:

$$1, 11, \ldots, \underbrace{11\ldots11}_{212}.$$

Согласно принципу Дирихле, среди них есть два числа с одинаковыми остатками при делении на 211. Их разность и есть искомое число.

Задачи

1. $\boxed{\text{5-7}}$ а) Доказать, что среди шести любых целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

   б) Доказать, что из любых 11 чисел всегда можно выбрать два таких числа, разность которых кратна 10.

   в) Докажите, что среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два числа таких, что их разность делится на n.
2. $\boxed{\text{5-7}}$ Доказать, что из любых трёх натуральных чисел можно найти два, сумма которых делится на 2.
3. $\boxed{\text{5-7}}$ Сколько можно взять разных натуральных чисел, не бо́льших 10, чтобы среди них не нашлось двух, одно из которых точно вдвое больше другого?
4. $\boxed{\text{6-7}}$ а) Верно ли, что среди семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

   б) Из любых ли ста целых чисел можно выбрать два числа, сумма которых кратна 7?
5. $\boxed{\text{6-7}}$ а) Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 1963.

   б) Можно ли найти такие две (различные) степени числа 4, у которых

   1) последняя цифра одинакова;
   2) две последние цифры одинаковы;
   3) три последние цифры одинаковы?

6. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Доказать, что найдётся число вида $11\ldots10\ldots00$, делящееся на 2014.

   б) Докажите, что среди чисел вида $19991999\ldots199900\ldots0$ найдётся хотя бы одно, которое делится на 2001.

7. $\boxed{6\text{-}7}$ Докажите, что среди 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

8. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 2013.

9. $\boxed{6\text{-}7}$ Доказать, что существует натуральное число, последние четыре цифры которого 2012 и которое делится на 2013.

10. $\boxed{6\text{-}7}$ Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

11. $\boxed{6\text{-}7}$ Имеется n целых чисел. Доказать, что среди них всегда найдётся несколько (или, быть может, одно), сумма которых делится на n, если

   а) $n = 3$; б) $n = 100$; в) n — любое.

9. Принцип Дирихле и дополнительные соображения

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, в которых не сразу понятно, что надо принять за клетки, а что — за кроликов, и требуются дополнительные соображения, чтобы это сделать. В более сложных задачах клетки или (и) кроликов необходимо предварительно создать.

Примеры решения задач

Пример 1. 16 учеников сидят за круглым столом, причём больше половины из них — девушки. Докажите, что какие-то 2 девушки сидят друг напротив друга.

Решение. Образуем 8 пар, в каждую из которых входят ученики, сидящие друг напротив друга. Тогда роль клеток будут играть пары, а роль кроликов — девушки. Поскольку девушек более половины, т. е. не меньше 9, то по принципу Дирихле найдётся пара, в которой окажутся 2 девушки.

Пример 2. Докажите, что в любой компании из 5 человек есть двое, имеющие одинаковое число знакомых в этой компании.

Решение. Вариантов числа знакомых всего 5: от 0 до 4. Однако, если у кого-то 4 знакомых, то ни у кого не может быть 0 знакомых. Поэтому остаётся только 4 варианта: либо от 0 до 3, либо от 1 до 4. Возможное количество знакомых — клетки (их 4), а люди — кролики (их 5). Значит, по принципу Дирихле найдутся два человека с одинаковым количеством знакомых.

Пример 3. В клетках таблицы 3×3 расставлены числа $-1, 0, 1$. Докажите, что какие-то две из 8 сумм по всем строкам, всем столбцам и двум главным диагоналям будут равны.

Решение. Поскольку в строке, столбце и на диагонали стоят по три числа из набора $-1, 0, 1$, то каждая сумма может принимать значение от -3 до 3 — всего семь вариантов. В таблице 3×3 три строки, три столбца и две главные диагонали — всего 8 сумм. Тогда по принципу Дирихле какие-то две суммы обязательно совпадут.

Замечание. В данном примере клетки мы создали из возможных значений сумм, а кроликов — из конкретных значений сумм по строкам, столбцам и главным диагоналям таблицы.

Задачи

1. $\boxed{6\text{-}7}$ а) В классе 30 учеников, из них более половины — мальчики. Докажите, что какие-то два мальчика сидят за одной партой. (В классе 15 парт.)

   б) Сто человек сидят за длинным столом по 50 с каждой стороны, причём более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то два мужчины сидят друг напротив друга.

2. $\boxed{6\text{-}7}$ а) На 99 карточках пишутся числа 1, 2, ..., 99. Затем карточки тасуются и раскладываются чистыми сторонами вверх. На чистых сторонах карточек снова пишутся числа 1, 2, ..., 99. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются, и 99 полученных сумм перемножаются. Докажите, что в результате получится чётное число.

   б) Из чисел 1, 2, ..., 49, 50 выбрали 26 чисел. Обязательно ли среди них найдутся два числа, отличающиеся друг от друга на 1?

3. $\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли выбрать 52 различных двузначных числа так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100?

4. $\boxed{6\text{-}7}$ а) На 5 полках шкафа расставлены 160 книг, на одной из них — 3 книги. Докажите, что найдётся полка, на которой стоит не менее 40 книг.

   б) 27 покупателей купили 80 арбузов. Среди них были купившие по одному и по два арбуза. Верно ли, что среди покупателей есть хотя бы один, который купил не менее 4 арбузов?

   в) Десять студентов-математиков составили 35 задач для математической олимпиады. Известно, что среди них были студенты, которые составили по 1, 2 и 3 задачи. Докажите, что среди них есть хотя бы один студент, который составил не менее пяти задач.

5. $\boxed{6\text{-}7}$ Цифры 1, 2, ..., 9 разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

6. $\boxed{6\text{-}7}$ Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей.

7. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Кот Базилио пообещал Буратино открыть Великую Тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел $+1$, -1 и 0 так, чтобы все суммы по строкам, столбцам и большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

б) Можно ли таблицу $n \times n$ заполнить числами $-1, 0, 1$ так, чтобы суммы во всех строках, во всех столбцах и на главных диагоналях были различны?

в) Квадрат со стороной 10 см разделили на 100 квадратов со стороной 1 см, и в каждом из них записали одно из трёх чисел 1, 2 или 3. После этого подсчитали суммы записанных чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей получившейся таблицы. Может ли оказаться, что все подсчитанные суммы будут различными?

8. $\boxed{6\text{-}7}$ а) В школьной математической олимпиаде принимали участие 9 учеников шестого класса. За каждую решённую задачу ученик получал 2 балла, а за каждую нерешённую задачу с него списывался 1 балл. Всего было предложено 10 задач. Докажите, что среди участников олимпиады из шестого класса было по крайней мере два ученика, набравших одинаковое число баллов. (Считается, что ученик, набравший больше штрафных баллов, чем зачётных, набрал ноль баллов.)

   б) В классе из 30 учеников на диктанте один ученик сделал 14 ошибок, а остальные — меньше 14. Докажите, что в классе имеется по крайней мере три ученика, сделавшие в диктанте одинаковое количество ошибок.

9. $\boxed{6\text{-}7}$ Дано 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

10. $\boxed{6\text{-}7}$ Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

11. $\boxed{6\text{-}7}$ Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковые.

12. $\boxed{6\text{-}7}$ а) В бригаде 7 человек, их суммарный возраст 332 года. Докажите, что из них можно выбрать 3 человека, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

   б) Дано 25 чисел. Сумма любых четырёх из них положительна. Докажите, что сумма их всех тоже положительна.

   в) В классе 33 ученика, а сумма их возрастов составляет 430 лет. Справедливо ли утверждение, что найдутся в классе 20 учащихся, сумма возрастов которых больше 260 лет?

13. $\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, веса которых равны 370, 372, ..., 468 кг, на семи трёхтонках?

14. $\boxed{6\text{-}7}$ В классе 13 мальчиков и 6 девочек. Каждый день в течение двух недель они ходили в кино, причём не было двух таких дней, когда в кино ходило бы одинаковое количество детей. Докажите, что найдётся день, когда в кино ходила по крайней мере одна девочка в компании не менее чем восьми мальчиков.

15. $\boxed{7}$ Одиннадцать пионеров посещают пять кружков. Докажите, что среди них есть двое, A и B, таких, что все кружки, которые посещает A, посещает и B.

16. $\boxed{7}$ В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

10. Принцип Дирихле в геометрии

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на использование принципа Дирихле в геометрии.

В некоторых задачах клетки или (и) кроликов необходимо предварительно создать.

Большинство задач данного раздела решаются с помощью аналогов принципа Дирихле, которыми в геометрии являются следующие утверждения:

Если на отрезке (*окружности*) *длины* 1 *расположено несколько отрезков* (*дуг*), *сумма длин которых больше* 1, *то по крайней мере два* (*две*) *из них имеют общую точку*.

Если внутри фигуры площади 1 *расположено несколько фигур, сумма площадей которых больше* 1, *то по крайней мере две из них имеют общую точку.*

Примеры решения задач

Пример 1. Докажите, что никакая прямая не может пересекать все три стороны треугольника (в точках, отличных от вершин).

Решение. Прямая делит плоскость на две полуплоскости, которые будем считать клетками. Три вершины треугольника будем считать кроликами. По принципу Дирихле найдётся клетка, в которой сидит по крайней мере два кролика, т. е. найдутся две вершины, лежащие в одной полуплоскости относительно данной прямой. Сторона, соединяющая эти вершины, не пересекает данную прямую.

Пример 2. В квадрате со стороной 10 отметили 201 точку. Докажите, что какие-то три из отмеченных точек можно накрыть квадратом со стороной 1.

Решение. Разобьём данный квадрат на 100 квадратов со стороной 1 — это будут клетки. По принципу Дирихле в какой-то из них попадёт не менее трёх точек.

Пример 3. Можно ли занумеровать вершины куба числами от 1 до 8 так, чтобы суммы чисел на концах каждого ребра куба были различными?

Решение. Посчитаем количество возможных сумм (они и будут клетками). Суммы чисел на концах рёбер могут принимать значения от $1+2=3$ до $7+8=15$ — всего 13 различных значений, а рёбер у куба 12, т. е. реальных сумм на рёбрах только 12 (они будут кроликами). На первый взгляд получается, что ответ на вопрос задачи положительный. Но при внимательном рассмотрении оказывается, что суммы 3, 4, 5 и 6 все четыре на рёбрах куба получиться не могут.

Для доказательства этого факта рассмотрим вершину, в которой записано число 1. Тогда, чтобы получить на рёбрах суммы 3, 4 и 5, в трёх соседних с единицей вершинах должны стоять числа 2, 3 и 4. Но тогда невозможно получить сумму 6 ($6 = 1 + 5 = 2 + 4$), поскольку рядом с единицей уже нет свободных рёбер, а цифры 2 и 4 уже находятся на разных рёбрах. Значит, клеток уже не 13, а 12.

Аналогично можно доказать, что из сумм 12, 13, 14 и 15 одна получиться не может. Следовательно, клеток не больше 11, а кроликов 12. Значит, по принципу Дирихле одна из сумм обязательно повторится на двух рёбрах.

Ответ. Нельзя.

Задачи

1. $\boxed{5\text{-}7}$ а) Из точки на плоскости проведены 7 несовпадающих лучей. Докажите, что среди углов, образованных соседними лучами, найдётся угол, величина которого больше 51°.

   б) На плоскости нарисовано 12 прямых, проходящих через точку O. Докажите, что можно выбрать две из них так, что угол между ними будет меньше 17°.

   в) На плоскости проведено n прямых, никакие две из которых не параллельны. Доказать, что найдутся две из них, угол между которыми не больше $180^\circ/n$, если:
   1) $n = 7$; 2) n — любое.

2. $\boxed{5\text{-}7}$ Запах от цветущего кустика ландышей распространяется в радиусе 20 м вокруг него. Какое минимальное количество цветущих кустиков ландышей необходимо посадить вдоль прямолинейной 400-метровой аллеи, чтобы в каждой её точке пахло ландышем?

3. $\boxed{6\text{-}7}$ На плоскости дано 5 точек с целыми координатами. Докажите, что середина одного из соединяющих их отрезков также имеет целые координаты.

4. $\boxed{6\text{-}7}$ Дано 7 отрезков, длины которых заключены между 0,1 м и 1 м. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три таких, что из них можно составить треугольник.

5. $\boxed{5\text{-}7}$ а) В квадрате 4×4 нарисовано 15 точек. Докажите, что из него можно вырезать квадратик 1×1 метр, не содержащий внутри себя точек.

б) На шахматной доске размером 8×8 Вася расставил 14 фигур. Докажите, что найдётся квадрат размером 2×2, в котором фигур не будет. (Фигуры размещаются внутри клеток размером 1×1.)

в) На шахматной доске более четверти полей занято шахматными фигурами. Докажите, что занятыми оказались хотя бы две соседние (по стороне или диагонали) клетки.

6. 6-7 а) Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5.

б) На газоне, имеющем форму правильного треугольника со стороной 3 м, растут 10 гвоздик. Докажите, что найдутся две гвоздики, которые находятся друг от друга на расстоянии, не большем 1 м.

в) Внутри правильного шестиугольника со стороной 1 см расположено 7 точек. Докажите, что найдутся две точки, расстояние между которыми меньше 1 см.

7. 6-7 а) В квадрате со стороной 5 см размещено 126 точек. Доказать, что среди них существует 6 точек, которые лежат в круге радиуса 1 см.

б) В квадратном ковре со стороной 1 м моль проела 51 дырку (дырка — точка). Докажите, что некоторой квадратной заплаткой со стороной 20 см можно закрыть не менее трёх дырок.

в) В кубе с ребром 13 выбрано 2013 точек. Можно ли в этот куб поместить куб с ребром 1 так, чтобы внутри него не было ни одной выбранной точки?

8. 6-7 В квадратном ковре со стороной 10 м моль проела 80 дырок. Докажите, что из него можно вырезать квадратный коврик со стороной 1 м, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки считать точечными.) Дырки

а) могут находиться на границе вырезаемого коврика;
б) не могут находиться на границе вырезаемого коврика.

9. 6-7 В прямоугольнике 3×4 расположено 6 точек. Докажите, что среди них найдутся 2 точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$.

10. 6-7 Докажите, что правильный треугольник нельзя покрыть двумя меньшими правильными треугольниками.

11. 7 Внутри выпуклого пятиугольника расположены две точки. Докажите, что можно выбрать четырёхугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что в него попадут обе выбранные точки.

12. [7] Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике имеется не более 35 углов, меньших 170°.

13. [6-7] В каждой вершине куба написано число 1 или число 0. На каждой грани куба написана сумма четырёх чисел, написанных в вершинах этой грани. Может ли так оказаться, что все числа, написанные на гранях, различны? Тот же вопрос, если в вершинах написаны числа 1 или −1.

14. [6-7] На плоскости отмечена 101 точка, причём не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красной ручкой проводится прямая. Доказать, что на плоскости существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.

15. [6-7] На планете в звёздной системе тау Кита суша занимает более половины площади планеты. Докажите, что таукитяне могут прорыть прямой туннель, проходящий через центр планеты и соединяющий сушу с сушей. (Будем считать, что техника у них для этого достаточно развита.)

16. [6-7] Квадрат разрезали 18 прямыми, из которых 9 параллельны одной стороне квадрата, а 9 — другой, на 100 прямоугольников. Оказалось, что ровно девять из них — квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между собой.

17. [6-7] Не видя написанных на гранях куба чисел от 1 до 6, Лёша утверждает, что

    а) у этого куба есть две соседние грани, на которых написаны соседние числа;

    б) таких пар соседних граней у куба не меньше двух.

    Прав ли он в обоих случаях?

18. [6-7] Докажите, что у любого многогранника найдутся две грани, которые имеют одинаковое число сторон.

11. Принцип Дирихле и окраска плоскости и её частей. Таблицы

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи на использование принципа Дирихле при окрашивании плоскости, её частей и объёмных фигур в различные цвета.

Примеры решения задач

Пример 1. Грани куба окрашены в 2 цвета. Докажите, что найдутся две соседние одноцветные грани.

Решение. Рассмотрим три грани куба, имеющие общую вершину. Назовём их кроликами, а данные цвета — клетками. Поскольку кроликов больше, чем клеток, то по принципу Дирихле найдутся две грани, окрашенные в один цвет. Они и будут соседними.

Пример 2. Плоскость окрашена в два цвета — белый и чёрный, причём имеются точки и белого, и чёрного цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

Решение. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной 1, произвольно расположенный на этой плоскости. Поскольку вершин у треугольника три (кролики), а цветов только два (клетки), то согласно принципу Дирихле найдутся две вершины одного цвета (любые две вершины этого треугольника расположены на расстоянии 1 друг от друга).

Пример 3. Некоторые из клеток таблицы 5×5 окрашены в красный цвет, остальные в синий. Докажите, что можно найти четыре клетки, окрашенные одним цветом, которые находятся на пересечении двух строк и двух столбцов.

Решение. Согласно принципу Дирихле в каждой строке есть не менее трёх клеток, окрашенных в один цвет. Так как строк пять, то, опять же по принципу Дирихле, найдутся три, в каждой из которых не менее трёх клеток одного цвета. Пусть для определённости это будут клетки красного цвета.

Рассмотрим две из этих трёх строк. Если в них нет двух столбцов красного цвета, то найдётся один столбец красного цвета, а в остальных четырёх столбцах по одной клетке красного и синего цвета. Тогда, добавляя третью строчку, мы обязательно получим требуемое в задаче.

Задачи

1. $\boxed{5\text{-}7}$ а) Каждая грань куба разделена на четыре равных квадрата, и каждый квадрат окрашен в один из трёх цветов: синий, красный или зелёный так, что квадраты, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько может быть синих, красных и зелёных квадратов?

   $\boxed{6\text{-}7}$ б) Квадратная площадь размером 100×100 выложена квадратными плитами 1×1 четырёх цветов: белого, красного, чёрного и серого так, что никакие две плиты одинакового цвета не соприкасаются друг с другом (т. е. не имеют общей стороны или вершины). Сколько может быть красных плит?

2. $\boxed{6\text{-}7}$ Несколько дуг окружности покрасили в красный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

3. $\boxed{5\text{-}7}$ Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

4. $\boxed{5\text{-}7}$ Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в любом уголке из трёх полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

5. $\boxed{6\text{-}7}$ На поле 10×10 для игры в «Морской бой» стоит один четырёхпалубный корабль. Какое минимальное число выстрелов надо произвести, чтобы наверняка его ранить?

6. $\boxed{6\text{-}7}$ В прямоугольнике 6×7 закрашены какие-то 25 клеток. Докажите, что можно найти квадрат 2×2, в котором закрашены не менее трёх клеток.

7. $\boxed{7}$ В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

8. $\boxed{6\text{-}7}$ В клетчатом квадрате 9×9 закрашено 19 клеток. Докажите, что либо найдутся две закрашенные клетки, имеющие общую сторону, либо найдётся незакрашенная клетка, к сторонам которой примыкает не менее двух закрашенных.

9. $\boxed{6\text{-}7}$ Клетки квадратной таблицы 15×15 раскрашены в красный, синий и зелёный цвета. Докажите, что найдётся по крайней мере две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

10. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Прямая окрашена в два цвета. Доказать, что на ней найдутся три точки A, B, C, окрашенные в один цвет, такие, что B — середина отрезка AC.

    б) Плоскость окрашена в два цвета — белый и чёрный, причём имеются точки и белого, и чёрного цвета. Докажите, что всегда найдутся три точки одного цвета, лежащие на одной прямой, причём так, что одна из точек лежит посередине между двумя другими.

11. $\boxed{5\text{-}7}$ Плоскость окрашена в два цвета — белый и чёрный, причём имеются точки и белого, и чёрного цвета. Докажите, что всегда найдётся равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета.

12. $\boxed{6\text{-}7}$ Вершины правильного семиугольника окрашены в два цвета — белый и чёрный. Докажите, что среди них обязательно найдутся три вершины одного цвета, которые являются вершинами равнобедренного треугольника. Верно ли аналогичное утверждение для правильного восьмиугольника?

13. $\boxed{6\text{-}7}$ Плоскость окрашена в два цвета — красный и чёрный, причём имеются точки и того, и другого цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

14. $\boxed{6\text{-}7}$ Узлы бесконечного листа клетчатой бумаги раскрашены в два цвета. Доказать, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечении которых лежат точки одного цвета.

15. $\boxed{6\text{-}7}$ Можно ли внутри треугольника с синими вершинами отметить 10 синих и 20 красных точек так, чтобы никакие три синие точки не лежали на одной прямой и чтобы внутри любого треугольника с синими вершинами была хотя бы одна красная точка?

Часть II. **УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ**

1. Сюжетные логические задачи

Задача 1

$\boxed{5}$ Три поросёнка построили три домика: из соломы, из прутьев и из камней. Каждый из них получил один домик: Ниф-Ниф — не из камней и не из прутьев, Нуф-Нуф — не из камней. Какой домик достался Наф-Нафу?

Идея. Проанализировать все утверждения про домик из камней.

Решение. Так как домик из камней не получил ни Ниф-Ниф, ни Нуф-Нуф, то он достался Наф-Нафу.
Ответ. Наф-Нафу достался домик из камней.

Задача 2

$\boxed{5\text{-}7}$ Рядом сидят мальчик и девочка. «Я мальчик», — говорит черноволосый ребёнок. «Я девочка», — говорит рыжий ребёнок. Если хотя бы один из них врёт, то кто здесь мальчик, а кто девочка?

Идея. Возможен только один из двух вариантов: мальчик черноволосый, девочка рыжая и мальчик рыжий, девочка черноволосая.

Решение. Если оба ребёнка говорят правду, то мальчик черноволосый, а девочка рыжая. В противном случае, наоборот, мальчик рыжий, девочка черноволосая.
Ответ. Мальчик рыжий, девочка черноволосая.

Задача 3

$\boxed{6\text{-}7}$ а) Петя сказал: «Если кот шипит, то рядом собака, и наоборот, если собаки рядом нет, то кот не шипит». Не сказал ли он что-то лишнее?

Идея. Показать, что второе утверждение следует из первого.
Указание. Действовать от противного.

Решение. Рассмотрим первое утверждение: «Если кот шипит, то рядом собака». Покажем, что тогда «Если собаки рядом нет, то кот не шипит».

Предположим противное. Пусть собаки рядом нет и кот шипит. Но если кот шипит, то собака рядом. Получаем противоречие, следовательно, если собаки рядом нет, то кот не шипит. Значит, второе утверждение следует из первого и является лишним.
Ответ. Да, сказал.

Задача 4

5-7 — У Вовы больше тысячи книг, — сказал Ваня.
— Нет, книг у него меньше тысячи, — возразила Аня.
— Одна-то книга у него наверняка есть, — сказала Маня.

Если истинно только одно из этих утверждений, то сколько книг у Вовы?

Идея. Перебрать все возможные варианты.
Указание. Рассмотреть по отдельности случаи, когда истинным является только первое высказывание, только второе и только третье.

Решение. Если правду сказал Ваня, то у Вовы больше тысячи книг. В этом случае верным оказывается и утверждение Мани: «Одна-то книга у него наверняка есть». Но по условию задачи истинно только одно из утверждений, значит, Ваня сказал неправду и у Вовы не более 1000 книг.

Получается, что либо правду сказала Аня, а неправду Маня, либо наоборот.

В первом случае утверждение «Книг у него меньше тысячи» является верным, а «Одна-то книга у него наверняка есть» нет. Это возможно, только если у Вовы нет книг вообще.

Во втором случае утверждение «Книг у него меньше тысячи» является ложным, а «Одна-то книга у него наверняка есть» истинным. С учётом того что у Вовы не более 1000 книг, получаем, что у Вовы 1000 книг.
Ответ. 0 или 1000.

Задача 5

6 Баба-яга в своей избушке на курьих ножках завела сказочных животных трёх видов. Все они, кроме двух, — Говорящие Коты. Все, кроме двух, — Мудрые Совы, остальные — Усатые Тараканы. Сколько обитателей в избушке у Бабы-яги?

Идея. Использовать то, что животных каждого вида как минимум по одному.
Указание. Из фразы «Все они, кроме двух, — Говорящие Коты» определить число сов и тараканов.
Указание. Из фразы «Все, кроме двух, — Мудрые Совы» определить число котов.

Решение. Из условия следует, что у Бабы-яги живут коты, совы и тараканы.

Из фразы «Все они, кроме двух, — Говорящие Коты» следует, что количество сов и тараканов равно двум, т. е. одна сова и один таракан.

Из фразы «Все, кроме двух, — Мудрые Совы» следует, что количество котов и тараканов равно двум, т. е. один кот и один таракан.
Ответ. 3, всех по одному.

Задача 6

5-6 а) Приехало 100 туристов. Из них 10 человек не знали ни немецкого, ни французского языка, 75 знали немецкий язык и 83 знали французский язык. Сколько туристов знали и французский, и немецкий языки?

Идея. Число туристов, знающих оба языка, равно разности числа туристов, знающих хотя бы один язык, и числа туристов, знающих только один язык.
Указание. Сначала определить число туристов, знающих хотя бы один язык, затем число туристов, знающих только немецкий язык, потом — число туристов, знающих только французский язык.

Решение. Из 100 туристов 10 не знают ни немецкого, ни французского языка, значит, 90 человек знает хотя бы один из языков.

Из этих 90 человек 75 знают немецкий язык, следовательно, $90 - 75 = 15$ человек из этих 90 знают только французский. 83 человека знают французский язык, следовательно, $90 - 83 = 7$ человек знают только немецкий.

Получаем, что $15+7=22$ человека знают только один язык. Получаем, что два языка знают $90-22=68$ человек.
Ответ. 68.

Задача 7

5-6 а) Четыре брата Юра, Петя, Вова и Коля учатся в 1, 2, 3, 4 классах. Петя — отличник, младшие братья стараются брать с него пример. Вова учится в 4 классе. Юра помогает решать задачи брату. Кто из них в каком классе учится?

Идея. Определять последовательно учащегося в 4, 3 и 2 классе.
Указание. У Пети есть младшие братья, у Юры как минимум один младший брат.

Решение. По условию задачи Вова учится в 4 классе, а у Пети есть младшие братья, берущие с него пример. Следовательно, Петя не может учиться в 1 или 2 классе. Значит, он учится в 3 классе. Юра помогает решать задачи брату, значит, он не может учиться в 1 классе. Получается, что Юра учится во втором, а в первом классе учится Коля.
Ответ. Вова в 4 классе, Петя в 3 классе, Юра во 2 классе, Коля в 1 классе.

Задача 8

6-7 Львов, Михайлов и Николаев работают бухгалтером, кассиром и секретарём. Если Николаев — кассир, то Михайлов — секретарь, если Николаев — секретарь, то Михайлов — бухгалтер. Если Михайлов — не кассир, то и Львов — не кассир, если Львов — бухгалтер, то Николаев — секретарь. Кто кем работает?

Идея. Перебрать все возможные варианты профессии Николаева и проверить, какие из них противоречат утверждениям задачи.
Указание. Предположить, что Николаев работает кассиром, и получить противоречие.
Указание. Предположить, что Николаев работает секретарём, и получить противоречие.

Решение. Рассмотрим первое утверждение задачи: «Если Николаев — кассир, то Михайлов — секретарь». Запишем его в компактном виде

$$1)\ \text{Н} = \text{к} \implies \text{М} = \text{с}.$$

Второе утверждение «Если Николаев — секретарь, то Михайлов — бухгалтер» можно записать в виде

$$2)\ \text{Н} = \text{с} \implies \text{М} = \text{б}.$$

Третье утверждение «Если Михайлов — не кассир, то и Львов — не кассир» запишем в виде

$$3)\ \text{М} \neq \text{к} \implies \text{Л} \neq \text{к}.$$

Четвёртое утверждение «Если Львов — бухгалтер, то Николаев — секретарь» запишем в виде

$$4)\ \text{Л} = \text{б} \implies \text{Н} = \text{с}.$$

Предположим, что Николаев кассир. Воспользовавшись первым и четвёртым утверждениями, получим

$$\text{Н} = \text{к} \implies \text{М} = \text{с} \implies \text{Л} = \text{б} \implies \text{Н} = \text{с}.$$

Одновременно и кассиром, и секретарём Николаев быть не может, значит, наше предположение о том, что Николаев кассир, не верно.

Теперь предположим, что Николаев секретарь. Воспользовавшись вторым и третьим утверждениями, получим

$$\text{Н} = \text{с} \implies \text{М} = \text{б} \implies \text{М} \neq \text{к} \implies \text{Л} \neq \text{к} \implies \text{Н} = \text{к}.$$

Мы опять получили противоречие, значит, секретарём Николаев тоже не является. Следовательно, Николаев — бухгалтер.

Теперь определим, кем работает Михайлов. Рассмотрим третье утверждение. Если Михайлов не кассир, то и Львов не кассир. В этом случае кассиром должен быть Николаев, но он бухгалтер. Получается, что Михайлов — кассир.

Львову остаётся последняя из трёх профессий — секретарь.

Ответ. Николаев — бухгалтер, Михайлов — кассир, Львов — секретарь.

Задача 9

$\boxed{5\text{-}6}$ а) В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

Идея. Решать задачу с помощью таблицы.

Указание. По вертикали вписать названия сосудов, а по горизонтали — названия жидкостей. Проставлять минусы в те клетки таблицы, которые точно не подходят, т. е. отбрасывать заведомо неподходящие варианты.

Решение. Из условия следует, что вода и молоко не в бутылке, поэтому в таблице напротив них ставим минусы в первой строке.

	молоко	лимонад	квас	вода
бутылка	–			–
стакан				
кувшин				
банка				

Сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, значит, лимонад и квас — не в кувшине. Ставим два минуса в третью строку.

	молоко	лимонад	квас	вода
бутылка	–			–
стакан				
кувшин		–	–	
банка				

В банке не лимонад и не вода. Ставим два минуса в последнюю строку.

	молоко	лимонад	квас	вода
бутылка	–			–
стакан				
кувшин		–	–	
банка		–		–

Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. Значит, молоко не в стакане и не в банке. Ставим два минуса в первый столбец.

	молоко	лимонад	квас	вода
бутылка	–			–
стакан	–			
кувшин		–	–	
банка	–	–		–

Так как в каждой строке и в каждом столбце должно стоять по одному плюсу, то можем поставить по плюсу в первый столбец и последнюю строку.

	молоко	лимонад	квас	вода
бутылка	–			–
стакан	–			
кувшин	+	–	–	
банка	–	–	+	–

Так как плюсов в строке и столбце не более одного, то можем дополнить третью строку и третий столбец минусами.

	молоко	лимонад	квас	вода
бутылка	–		–	–
стакан	–		–	
кувшин	+	–	–	–
банка	–	–	+	–

В первой строке и четвёртом столбце должно быть по одному плюсу, проставляем их на пустые места.

	молоко	лимонад	квас	вода
бутылка	–	+	–	–
стакан	–		–	+
кувшин	+	–	–	–
банка	–	–	+	–

В результате получаем ответ.
Ответ. Молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, вода в стакане.

Задача 10

6 В летний лагерь приехали отдыхать три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из следующих фамилий: Иванов, Семёнов, Герасимов. Миша — не Герасимов. Отец Володи — инженер. Володя учится в 6 классе. Герасимов учится в 5 классе. Отец Иванова — учитель. Какая фамилия у каждого из трёх друзей?

Идея. Решать задачу с помощью таблицы.
Указание. По вертикали вписать имена, а по горизонтали — фамилии. Проставлять минусы в те клетки таблицы, которые точно не подходят, т. е. отбрасывать заведомо неподходящие варианты.

Решение. Из условия следует, что Миша не Герасимов, поэтому в соответствующей клетке таблицы ставим минус.

	Иванов	Семёнов	Герасимов
Миша			–
Володя			
Петя			

Отец Володи — инженер, отец Иванова — учитель, следовательно, Володя не Иванов. В соответствующей клетке таблицы ставим минус.

	Иванов	Семёнов	Герасимов
Миша			–
Володя	–		
Петя			

Володя учится в 6 классе, Герасимов учится в 5 классе, следовательно, Володя не Герасимов. В соответствующей клетке таблицы ставим минус.

	Иванов	Семёнов	Герасимов
Миша			–
Володя	–		–
Петя			

Так как в каждой строке и в каждом столбце должно стоять по одному плюсу, то можем поставить по плюсу в третий столбец и вторую строку.

	Иванов	Семёнов	Герасимов
Миша			–
Володя	–	+	–
Петя			+

Получается, что Петя — Герасимов, Володя — Семёнов. Для Миши остаётся единственный оставшийся вариант — Иванов.
Ответ. Петя — Герасимов, Володя — Семёнов, Миша — Иванов.

Задача 11

6-7 а) Три друга — Владимир, Игорь и Сергей преподают математику, физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Калуги. Владимир работает не в Рязани, Игорь — не в Туле, туляк преподаёт литературу, рязанец — не физику, Игорь — не математику. Какой предмет и в каком городе преподаёт каждый из них?

Идея. Решать задачу с помощью таблиц.
Указание. Сначала заполнить таблицу, содержащую информацию о предметах и городах. По вертикали вписать предметы, а по горизонтали — города. Проставлять минусы и плюсы в соответствии с условием задачи.
Указание. Составить таблицу, содержащую информацию об именах и городах. По вертикали вписать имена, а по горизонтали — города. Проставлять минусы и плюсы в соответствии с условием задачи.

Р е ш е н и е. Согласно условию задачи туляк преподаёт литературу, а рязанец — не физику, поэтому в соответствующей клетке таблицы ставим плюс и минус.

	Тула	Рязань	Калуга
Математика			
Физика		–	
Литература	+		

Так как в каждой строке и каждом столбце должно стоять только по одному плюсу, то проставляем минусы в остальных ячейках первого столбца и последней строки.

	Тула	Рязань	Калуга
Математика	–		
Физика	–	–	
Литература	+	–	–

Так как во второй строке и во втором столбце должно стоять по одному плюсу, то ставим в оставшиеся свободные позиции по плюсу.

	Тула	Рязань	Калуга
Математика	–	+	
Физика	–	–	+
Литература	+	–	–

Таким образом мы определили, какой предмет преподаётся в каком городе. Теперь определим, в каком городе кто из друзей преподаёт, т. е. заполним следующую таблицу:

	Тула	Рязань	Калуга
Владимир		–	
Игорь	–		
Сергей			

Здесь мы учли то, что Владимир работает не в Рязани, а Игорь — не в Туле.

Согласно условию задачи Игорь не преподаёт математику. Из предыдущей таблицы следует, что математика преподаётся в Рязани, значит, Игорь не из Рязани, и во втором столбце мы можем в соответствующей ячейке поставить минус.

	Тула	Рязань	Калуга
Владимир		–	
Игорь	–	–	
Сергей			

Так как в каждой строке и каждом столбце должно стоять по одному плюсу, то проставляем плюсы в пустых ячейках второго столбца и второй строки.

	Тула	Рязань	Калуга
Владимир		–	
Игорь	–	–	+
Сергей		+	

Владимиру остаётся оставшийся вариант — Тула. Собрав всю информацию вместе, получим ответ.
Ответ. Владимир преподаёт литературу в Туле, Игорь — физику в Калуге, Сергей — математику в Рязани.

Задача 12

6 а) Три школьных товарища купили в буфете 14 пирожков. Коля купил в 2 раза меньше Вити, а Женя — больше Коли, но меньше Вити. Сколько пирожков купил каждый товарищ?

Идея. Действовать перебором.
Указание. Сначала предположить, что Коля купил один пирожок, потом предположить, что два, и т. д.

Решение. Рассмотрим все возможные варианты для числа пирожков у Коли.

Если Коля купил 1 пирожок, то Витя — 2 пирожка, а Женя — $14 - 1 - 2 = 11$ пирожков. Это противоречит тому, что Женя купил пирожков меньше, чем Витя.

Если Коля купил 2 пирожка, то Витя — $2 \cdot 2 = 4$ пирожка, а Женя — $14 - 2 - 4 = 8$ пирожков. Это также противоречит тому, что Женя купил пирожков меньше, чем Витя.

Если Коля купил 3 пирожка, то Витя — $2 \cdot 3 = 6$ пирожков, а Женя — $14 - 3 - 6 = 5$ пирожков. Это удовлетворяет условию задачи.

Если Коля купил 4 пирожка, то Витя — $2 \cdot 4 = 8$ пирожков, а Женя — $14 - 4 - 8 = 2$ пирожка. Это противоречит тому, что Женя купил пирожков больше, чем Коля.

Дальнейшее увеличение числа пирожков у Коли приведёт к тому, что число пирожков у Коли и Вити превзойдёт 14 купленных пирожков.

Единственный возможный вариант является ответом к задаче.
Ответ. Витя — 6, Женя — 5, Коля — 3.

Задача 13

7 а) В рождественских подарках Кролика, Тигры и других обитателей Леса было 55 хлопушек — у каждого не меньше двух. Тигра сразу же использовал свои хлопушки на то, чтобы узнать, едят тигры хлопушки или не едят. А все остальные сберегли свои хлопушки, и на следующий день каждый подарил половину своих хлопушек Кролику на день рождения. От этого число хлопушек у Кролика увеличилось в 10 раз. Сколько хлопушек продегустировал Тигра?

Идея. Действовать перебором.
Указание. Сначала предположить, что у Кролика было две хлопушки, потом предположить, что три, и т. д.

Решение. Рассмотрим различные варианты числа хлопушек у Кролика. У каждого было не менее двух хлопушек, значит, минимальное число хлопушек у Кролика — два.

Если у Кролика было две хлопушки, то стало $10 \cdot 2 = 20$, значит, ему подарили 18 хлопушек. Так как каждый дарил половину своих хлопушек, то у дарящих было 36 хлопушек. Получается, что у Тигры было $55 - 2 - 36 = 17$ хлопушек.

Если у Кролика было три хлопушки, то стало $10 \cdot 3 = 30$, значит, ему подарили 27 хлопушек. Так как каждый дарил половину своих хлопушек, то у дарящих было 54 хлопушки. Получается, что у Тигры было $55 - 3 - 54 = -2$ хлопушки, а такого не может быть.

Дальнейшее увеличение числа хлопушек у Кролика приведёт к дальнейшему уменьшению числа хлопушек у Тигры, следовательно, оно не имеет смысла.

Единственным возможным вариантом остаётся вариант, когда у Кролика 2 хлопушки, а у Тигры 17 хлопушек.
Ответ. 17.

Задача 14

5-6 В некотором доме живут только супружеские пары с маленькими детьми, причём бездетных семей нет, у каждого мальчика есть сестра и мальчиков больше, чем девочек. Может ли оказаться, что в этом доме взрослых больше, чем детей?

Идея. Сравнить число матерей с числом дочерей, а число отцов с числом сыновей.
Указание. Сначала показать, что дочерей не меньше, чем матерей, потом — что сыновей не меньше, чем отцов.

Решение. Так как у каждого мальчика есть сестра и бездетных семей нет, то в каждой семье есть дочь. Значит, дочерей не меньше, чем матерей.

Так как мальчиков больше, чем девочек, то мальчиков больше, чем отцов. Суммарно получается, что детей больше, чем взрослых.
Ответ. Не может.

Задача 15

7 а) На встрече собрались участники двух туристических походов (некоторые из них участвовали в обоих походах). В первом походе было 60% мужчин, а во втором — 75%. Докажите, что на встречу пришло не меньше мужчин, чем женщин.

Идея. Рассмотреть самый неблагоприятный вариант и показать, что даже в этом случае мужчин не меньше, чем женщин.
Указание. Доля женщин от всех участников встречи будет наибольшей в случае, когда в двух походах участвовали только мужчины.

Решение. Заметим, что доля женщин на собрании тем больше, чем меньше доля женщин среди участников двух походов. Максимальной доля женщин на собрании будет в случае, когда в двух походах участвовали только мужчины и ни один мужчина не участвовал только в одном походе. Пусть в двух походах участвовало x человек и все они были мужчинами.

Так как в первом походе мужчины составляли 60%, то всего в первом походе было $x : 0,6$ человек и женщин среди них было

$$x : 0,6 - x = \frac{5x}{3} - x = \frac{2x}{3}.$$

Так как во втором походе мужчины составляли 75%, то всего во втором походе было $x : 0,75$ человек и женщин среди них было

$$x : 0,75 - x = \frac{4x}{3} - x = \frac{x}{3}.$$

Получается, что в этом случае число женщин на собрании равно

$$\frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = x,$$

т. е. равно числу мужчин. Если же в оба похода ходили не только мужчины, либо среди мужчин есть те, кто ходил только в один поход, то число женщин на собрании будет меньше числа мужчин. Следовательно, в любом случае мужчин на собрании не меньше, чем женщин.

Задача 16

[6-7] а) Жюри составляет варианты олимпиады для 5, 6, 7, 8, 9 и 10 классов (по одному для каждого класса). Члены жюри договорились, что в каждом варианте должно быть семь задач, ровно четыре из которых не встречаются ни в одном другом варианте. Какое максимальное число задач можно включить в такую олимпиаду?

Идея. Для того чтобы число задач было максимальным, повторяющиеся задачи должны встречаться минимальное число раз.
Указание. Отдельно подсчитать число неповторяющихся задач и число задач, которые повторяются два раза.

Решение. В каждом из шести вариантов ровно четыре задачи, которые не встречаются ни в одном другом варианте. Следовательно, число неповторяющихся задач равно $6 \cdot 4 = 24$.

Оставшиеся три задачи (в каждом из шести вариантов) встречаются ещё в каком-то варианте. Для того чтобы общее число задач было максимальным, повторяющиеся задачи должны встречаться минимальное число раз, т. е. ровно два раза. В этом случае число повторяющихся задач равно $6 \cdot 3 : 2 = 9$.

В итоге получаем $24 + 9 = 33$ задачи.
Ответ. 33 задачи.

Задача 17

[6-7] а) В таблице 10×10 расставлены натуральные числа. В каждой строке подчеркнули наибольшее натуральное число (или одно из наибольших, если таковых несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчёркнутые числа подчёркнуты два раза. Докажите, что все числа в таблице равны.

Идея. Сначала показать, что равны между собой все подчёркнутые числа.
Указание. Рассмотреть числа, стоящие в одной строке и в одном столбце с двумя подчёркнутыми числами.

Решение. Заметим, что в каждой строке и каждом столбце подчёркнуто только одно число.

Рассмотрим два подчёркнутых числа, стоящих в разных строках и разных столбцах. Пусть это числа a и b. Возьмём число c, стоящее в одной строке с числом a и в одном столбце с числом b. Так как a — наибольшее число в своей строке, то $a \geqslant c$. А так как b — наименьшее число в своём столбце, то $c \geqslant b$. Получаем, что

$$a \geqslant c \geqslant b \implies a \geqslant b.$$

Теперь возьмём число d, стоящее в одной строке с числом b и в одном столбце с числом a. Так как b — наибольшее число в своей строке, то $b \geqslant d$. А так как a — наименьшее число в своём столбце, то $d \geqslant a$. Получаем, что

$$b \geqslant d \geqslant a \implies b \geqslant a,$$

откуда следует, что $a = b$, т. е. все подчёркнутые числа равны между собой.

Заметим также, что любое произвольно выбранное число таблицы не больше максимума по своей строке и не меньше минимума по своему столбцу. А так как все подчёркнутые числа равны между собой, то и выбранное нами число принимает то же значение, что и все подчёркнутые числа.

Задача 18

$\boxed{6\text{-}7}$ В кладовой лежит 300 сапог — по 100 сапог 40-го, 41-го и 42-го размеров, причём левых и правых поровну — по 150 штук. Докажите, что из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 пар (в каждой паре левый и правый сапоги одного размера).

Идея. Обозначить через x, y и z количества тех сапог 40-го, 41-го и 42-го размеров, которых меньше, чем сапог на другую ногу, и показать, что $x + y + z \geqslant 50$.

Указание. Составить уравнение на x, y и z с учётом того условия, что левых и правых поровну — по 150 штук.

Решение. Пусть x, y и z — это количества тех сапог 40-го, 41-го и 42-го размеров, которых меньше, чем на другую ногу. Тогда из всех 300 сапог можно будет составить ровно $x + y + z$ пар. Покажем, что

$$x + y + z \geqslant 50.$$

Заметим, что не может быть такой ситуации, когда левых сапог каждого размера больше, чем правых, поскольку всего левых и правых поровну — по 150 штук. Следовательно, в каких-то размерах больше левых сапог, а в каких-то — правых.

Пусть у 40-го и 41-го размеров меньше левых сапог, у 42-го меньше правых. В этом случае число левых сапог 40-го размера равно x, число левых сапог 41-го размера равно y, а число левых сапог 42-го размера равно $100 - z$.

Так как всего левых сапог 150 штук, то

$$x + y + (100 - z) = 150,$$

откуда

$$x + y - z = 50 \implies x + y + z \geqslant 50,$$

значит, из имеющихся сапог можно составить по крайней мере 50 пар.

Задача 19

$\boxed{5\text{-}6}$ Митя, Толя, Сеня, Юра и Костя пришли в музей и встали в очередь. Если бы Митя встал посередине очереди, то он оказался бы между Сеней и Костей, а если бы Митя встал в конце очереди, то рядом с ним мог быть Юра, но Митя встал впереди всех своих товарищей. Кто за кем стоит?

Идея. Используя условие задачи, определить местоположение относительно друг друга четырёх человек — Толи, Сени, Юры и Кости.

Указание. Сначала определить, на каком месте стоит Юра, потом Сеня и Костя.

Решение. Если бы Митя встал в конце очереди, то рядом с ним мог быть Юра, значит, Юра стоит последним.

Если бы Митя встал посередине очереди, то он оказался бы между Сеней и Костей, значит, среди четырёх человек (Толя, Сеня, Юра и Костя) Сеня и Костя находятся посередине. Так как Юра среди них последний, то первым среди них является Толя.

Получается, что до того, как к ним подошёл Митя, ребята стояли в следующем порядке:

Толя, Сеня, Костя, Юра или Толя, Костя, Сеня, Юра.

Расположив Митю впереди всех своих товарищей, получим два варианта ответа.

Ответ. Митя, Толя, Сеня, Костя, Юра или Митя, Толя, Костя, Сеня, Юра.

Задача 20

$\boxed{6\text{-}7}$ На столе лежат четыре карточки, на которых сверху написано: А, Б, 4, 5 (о том, что на обратных сторонах, ничего не известно). Какое наименьшее количество карточек и какие именно надо перевернуть, чтобы проверить, верно ли утверждение: «Если на одной стороне карточки написано чётное число, то на другой стороне карточки — гласная буква»?

Идея. Проверить, переворачивание каких карточек может опровергнуть наше утверждение.

Указание. Для каждой из карточек рассмотреть различные варианты того, что может быть написано на обратной стороне.

Решение. 1) Рассмотрим карточку с буквой А. Если на обратной стороне написано чётное число, то это не опровергает наше утверждение. Если на обратной стороне написано что-то другое, то это также не опровергает наше утверждение. Поэтому первую карточку можно и не переворачивать.

2) Рассмотрим карточку с буквой Б. Если на обратной стороне написано чётное число, то наше утверждение неверно. Значит, для того чтобы проверить является ли наше утверждение верным, эту карточку надо перевернуть.

3) Рассмотрим карточку с числом 4. Если на обратной стороне написана согласная буква, то наше утверждение неверно. Значит, эту карточку надо перевернуть.

4) Рассмотрим карточку с числом 5. Если на обратной стороне написано чётное число, то наше утверждение неверно. Значит, эту карточку тоже надо перевернуть.

Ответ. Три карточки (Б, 4 и 5).

Задача 21

6-7 Предположим, что справедливы следующие утверждения:

1) Среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами.

2) Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли отсюда, что не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

Идея. Рассмотреть владельца телевизора, не являющегося маляром.

Указание. Проанализировать: купается ли владелец телевизора, не являющийся маляром, в бассейне каждый день или нет.

Решение. Так как среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами, то существует владелец телевизора, не являющийся маляром.

Люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров. Значит, если бы он каждый день купался в бассейне, то у него не было бы телевизора. Но телевизор у него есть, значит, он не каждый день купается в бассейне. Следовательно, не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне.

Ответ. Да.

Задача 22

7 Три стрелка, Сергеев, Борисов и Воробьёв, сделали по шесть выстрелов по одной мишени и выбили поровну очков. Известно, что Сергеев за первые три выстрела выбил 43 очка, а Борисов первым выстрелом выбил 3 очка. Сколько очков за каждый выстрел выбил каждый стрелок, если в 50 было одно попадание, в 25 — два, в 20 — три, в 10 — три, в 5 — два, в 3 — два, в 2 — два, в 1 — три?

Идея. Определять очки, которые достались каждому из стрелков, последовательно: сначала разобраться с тем, про кого имеется больше всего информации, затем с тем, про кого меньше.

Указание. Найти суммарное количество очков каждого стрелка и количество его выстрелов.

Решение. Сначала определим, по сколько очков выбили стрелки. Так как в 50 было одно попадание, в 25 — два, в 20 — три, в 10 — три, в 5 — два, в 3 — два, в 2 — два, в 1 — три, то всего было выбито

$$50 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 20 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 =$$
$$= 50 + 50 + 60 + 30 + 10 + 6 + 4 + 3 = 213,$$

значит, каждый из стрелков выбил $213 : 3 = 71$ очко. При этом число выстрелов у каждого равно 6.

Сергеев за первые три выстрела выбил 43 очка. Если одно из этих попаданий 25, то на другие два приходится 18 очков, что невозможно. Если все три попадания меньше 20 (а значит, не превосходят 10), то в сумме будет не больше 30. Значит, хотя бы одно из попаданий равно 20, а на другие два приходится 23, что возможно только в случае 20 и 3. Получается, что у Сергеева есть три выстрела: 20, 20 и 3. На оставшиеся три выстрела приходится $71 - 43 = 28$ очков. Из предложенных значений 28 можно представить в виде суммы трёх чисел только следующим образом: $25 + 2 + 1$ или $20 + 5 + 3$. Заметим, что второй вариант не подходит, так как в этом случае Борисову не достанется выстрел в 3 очка. В результате получается, что Сергеев выбил $25 + 20 + 20 + 3 + 2 + 1$ очко.

Теперь задача свелась к следующей: каждый из двух стрелков выбил по 71 очку, совершив по 6 выстрелов. При этом в 50 было одно попадание, в 25 — одно, в 20 — одно, в 10 — три, в 5 — два, в 3 — одно, в 2 — одно, в 1 — два, причём 3 выбил Борисов. Сколько очков за каждый выстрел выбил каждый стрелок?

Рассмотрим стрелка, который выбил 50. На оставшиеся 5 выстрелов остаётся 21 очко, значит, выстрелов по 25 и 20 очков не было. Если не было ни одной 10, то из оставшихся значений 21 очко не набирается. Значит, хотя бы один выстрел в 10 очков был. В этом случае на оставшиеся 4 выстрела приходится 11 очков. Это возможно только в случае 5, 3, 2 и 1. В результате получается, что Борисов (ведь именно у него должно быть 3 очка) выбил $50+10+5+3+2+1$ очков.

Все оставшиеся очки достались Воробьёву. Получается, что он выбил $25+20+10+10+5+1$ очков.

Ответ. Сергеев $(25 + 20 + 20 + 3 + 2 + 1)$; Борисов $(50+10+5+3+2+1)$; Воробьёв $(25+20+10+10+5+1)$.

Задача 23

5-7 Николай с сыном и Иван с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько и его сын, а Иван — втрое больше, чем его сын. Всего было поймано 35 рыб. Сколько рыб поймал Иван и как звали его сына, если известно, что Иван — самый старший из рыбаков?

Идея. Определить количество рыбаков.

Указание. Использовать чётность/нечётность числа пойманных рыб.

Решение. Николай поймал столько же рыб, сколько и его сын, значит, вдвоём они поймали чётное число рыб. Иван поймал втрое больше, чем его сын, значит, вдвоём они поймали чётное число рыб. Всего было поймано нечётное число рыб, следовательно, рыбаков нельзя разделить на две пары: отец+сын и отец+сын. Получается, что один из них является и отцом, и сыном.

Иван — самый старший из рыбаков, значит, он отец для среднего по возрасту и дедушка для самого младшего. Николай поймал столько же рыб, сколько и его сын, значит, Николай — средний по возрасту, и именно он является сыном Ивана.

Если Николай и его сын поймали по x рыб, то Иван поймал $3x$. Всего было поймано 35 рыб, значит,

$$x+x+3x=35 \iff 5x=35 \iff x=7,$$

следовательно, Иван поймал $3x=3\cdot 7=21$ рыбу.

Ответ. Иван поймал 21 рыбу, его сына звали Николай.

2. Истинные и ложные высказывания. Рыцари, лжецы, хитрецы

Задача 1

5 а) Истинно или ложно высказывание: «Нет правил без исключения»? (Данное высказывание также является правилом.)

Идея. Предположить, что данное правило истинно, и получить противоречие.

Решение. Если правило «Нет правил без исключения» истинно, то для этого правила есть исключение, а именно должно существовать правило, в котором нет исключений. Получаем, что правило «Нет правил без исключения» ложно.
Ответ. Ложно.

Задача 2

5 а) В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько груздей и сколько рыжиков в корзине?

Идея. Определить максимальное количество груздей и максимальное количество рыжиков и сравнить сумму этих величин с количеством грибов в корзине.

Решение. Так как среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, то груздей не может быть 12 и более, их максимум 11.

Так как среди любых 20 грибов хотя бы один груздь, то рыжиков не может быть 20 и более, их максимум 19.

Если груздей меньше 11 или рыжиков меньше 19, то в корзине будет меньше чем 30 грибов. Значит, груздей ровно 11, а рыжиков ровно 19 штук.
Ответ. 11 груздей и 19 рыжиков.

Задача 3

6-7 Племя людоедов поймало Робинзона Крузо. Вождь сказал: «Мы бы рады отпустить тебя, но по нашему закону ты сначала должен произнести какое-нибудь утверждение. Если оно окажется истинным, мы съедим тебя. Если оно окажется ложным, тебя съест наш лев». Помогите Робинзону.

И д е я. Робинзон должен произнести утверждение, которое не будет истинным и не будет ложным.

Р е ш е н и е. Например, Робинзон может сказать: «Меня съест ваш лев». Покажем, что это утверждение не может оказаться истинным и не может оказаться ложным.

Если это утверждение истинно, то Робинзона должны съесть людоеды, но тогда его не съест лев и утверждение окажется ложным.

Если это утверждение ложно, то Робинзона должен съесть лев, но тогда это утверждение окажется истинным.

Так как утверждение не оказалось истинным, то Робинзона не съедят людоеды. Так как утверждение не оказалось ложным, то Робинзона не съест лев.

О т в е т. Робинзон должен сказать: «Меня съест ваш лев».

Задача 4

5 а) Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном — просо, в другом — мак, а в третьем — ещё не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них приклеила таблички: «Мак», «Просо», «Смесь». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная запись. Ученик Феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зёрнышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?

И д е я. Понять, в каком случае можно определить содержимое всего мешка по одному зёрнышку.

У к а з а н и е. Перебрать все возможные варианты.

Р е ш е н и е. Если Золушка достанет из мешка с табличкой «Мак» маковое зёрнышко, то, значит, в этом мешке находится смесь. Но если это зёрнышко будет просо, то нельзя определить, все ли зёрна в этом мешке одинаковы или это смесь.

Аналогичная ситуация и с мешком с надписью «Просо».

Если же Золушка возьмёт зёрнышко из мешка с надписью «Смесь», то там все зёрна точно будут одинаковыми.

Если зёрнышко окажется маковым, то в этом мешке мак, в мешке с надписью «Мак» будет просо, а в мешке с надписью «Просо» будет смесь. Если же Золушка вынет просо,

то, значит, в этом мешке просо, в мешке с надписью «Просо» будет мак, а в мешке с надписью «Мак» будет смесь.
Ответ. Золушка взяла зёрнышко из мешка с надписью «Смесь».

Задача 5

5 В Стране чудес проводилось следствие по делу об украденной муке. На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, в которых указали на вора, но эти показания по каким-то причинам не были записаны. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трёх подсудимых и что только он дал правдивые показания. Кто украл муку?

Идея. Предположить, что Мартовский Заяц вор, и посмотреть, что из этого вытекает.
Указание. Так как правдивые показания дал только вор, то вор указал на себя.

Решение. Если бы вором был Мартовский Заяц, то он указал бы на себя, значит, Мартовский Заяц не вор. Так как только вор сказал правду, то Мартовский Заяц солгал, значит, Болванщик не вор.

Остаётся единственный возможный вариант: Соня — вор.
Ответ. Соня.

Задача 6

6-7 На суде каждый из троих подсудимых обвинял одного из двух других. Оказалось, что первый был единственным, кто говорил правду. Если бы каждый стал обвинять другого из оставшихся (но не себя), то второй был бы единственным, кто сказал правду. Кто виновен?

Идея. Показать, что первый и второй невиновны.

Решение. Первый подсудимый обвинил одного из двух других и был единственным, кто говорил правду. Следовательно, первый подсудимый не виновен, а виновен второй или третий.

Второй подсудимый обвинил одного из двух других и сказал неправду. Если бы второй стал обвинять другого из оставшихся (но не себя), то второй был бы единственным, кто сказал правду. Следовательно, второй подсудимый не виновен.

Получается, что виновен третий.
Ответ. Третий подсудимый.

Задача 7

6-7 а) Инопланетяне сообщили жителям Земли, что в системе их звезды три планеты — А, Б, В. Они живут на второй планете. Далее передача сообщения ухудшилась из-за помех, но было принято ещё два сообщения, которые, как установили учёные, оказались оба ложными:

1. А — не третья планета от звезды.
2. Б — вторая планета.

Как называется планета, на которой живут инопланетяне?

Идея. Сначала определить, какая из планет является третьей, потом — второй.

Решение. Утверждение о том, что А — не третья планета, является ложным, значит, А — третья планета.

Утверждение о том, что Б — вторая планета, является ложным, значит, В — вторая планета.
Ответ. В.

Задача 8

6-7 а) Три брата имеют звания: капитан, старшина и сержант. Из трёх утверждений: «Алексей — старшина», «Владимир — не старшина», «Семён — не сержант» лишь одно верное. Является ли Семён старшиной?

Идея. Предположить, что Семён является старшиной, и посмотреть, приведёт ли это предположение к противоречию.

Решение. Если Семён — старшина, то утверждение «Владимир — не старшина» истинно, а «Алексей — старшина» — ложно. Так как истинно только одно утверждение, то утверждение «Семён — не сержант» ложно, значит, Семён — сержант. Но мы предположили, что Семён — старшина. Противоречие. Следовательно, Семён — не старшина.
Ответ. Нет.

Задача 9

6-7 Четыре человека, А, Б, В и Г, сделали следующие утверждения:
А: «Б, В и Г — мужчины».
Б: «А, В и Г — женщины».
В: «А и Б солгали».
Г: «А, Б и В сказали правду».
Сколько из них на самом деле сказали правду?

Идея. Проверить, может ли быть истинным утверждение Г.
Указание. Утверждения А и Б одновременно истинными быть не могут.

Решение. Поскольку человек не может одновременно быть и мужчиной, и женщиной, как минимум одно из утверждений А и Б ложно. Следовательно, утверждение Г не может быть истинным.

Если Б сказал правду, то тогда получается, что А и В солгали. В этом случае правду сказал только один из четырёх человек.

Если Б солгал, то тогда хотя бы один из А и В сказал правду. Так как оба они сказать правду не могли, то получается, что и в этом случае один из четырёх человек сказал правду.
Ответ. Один.

Задача 10

6-7 а) Ученицы Мария, Нина, Ольга и Поля участвовали в лыжных соревнованиях и заняли I–IV места. На вопрос, кто какое место занял, они дали 3 разных ответа:

«Ольга заняла I место, Нина — II»;
«Ольга — II, Поля — III»;
«Мария — II, Поля — IV».

Отвечавшие при этом признали, что одна часть каждого ответа верна, а другая — неверна. Какое место заняла каждая из учениц?

Идея. Посмотреть, какая информация (имя или место) чаще всего встречается в утверждениях, и рассмотреть различные варианты, связанные с этой информацией.
Указание. Предположить, что утверждение о том, что Нина заняла II место, истинно, и определить истинность-ложность остальных утверждений.

Решение. В данных шести утверждениях трижды встречается место II, поэтому перебор удобно начать именно с этих утверждений.

Если «Нина — II» истинно, то «Ольга — II» и «Мария — II» — ложны. Так как одна часть каждого ответа верна, а другая — неверна, то утверждения «Поля — III» и «Поля — IV» оба истинны, что невозможно.

Получается, что утверждение «Нина — II» — ложно, а «Ольга заняла I место» — истинно. В этом случае утверждение «Ольга — II» — ложно, а «Поля — III» истинно. Тогда в последнем ответе «Мария — II» истинно, а «Поля — IV» — ложно.
Ответ. Ольга — I, Мария — II, Поля — III, Нина — IV.

В задачах 11–21 дело происходит на острове, где живут рыцари (они всегда говорят правду) и лжецы (они всегда лгут).

Задача 11

5 Человек говорит: «Я лжец». Является ли он жителем острова?

Идея. Предположить, что этот человек житель острова, и перебрать все возможные варианты.
Указание. Определить, что сказал бы про себя рыцарь и что — лжец.

Решение. Рыцарь сказал бы про себя правду: «Я рыцарь». Лжец сказал бы про себя неправду: «Я рыцарь». То есть любой житель острова сказал бы, что он рыцарь. Следовательно, человек, сказавший: «Я лжец», не является жителем острова.
Ответ. Нет.

Задача 12

5-6 а) Путешественник дважды задал рыцарю один и тот же вопрос и получил разные ответы. Приведите пример такого вопроса.

Идея. Задать вопрос, ответ на который меняется со временем.
Ответ. Любой вопрос, ответ на который меняется со временем, например: «Сколько сейчас времени?» Или такой вопрос: «Это первый вопрос, который я вам задаю?»

Задача 13

6-7 а) Какой вопрос вы задали бы жителю острова, чтобы узнать, живёт ли у него дома ручной крокодил?

Идея. Использовать то, что отрицание ложного высказывания есть правдивое высказывание.
Указание. Заставить лжеца солгать дважды.

Решение. Если у лжеца спросить, живёт ли у него дома ручной крокодил, то он ответит неправду. Если же у него спросить: «Что бы вы ответили, если бы вас спросили, живёт ли у вас дома ручной крокодил?», то он даст ответ, противоположный лживому, т. е. правдивый.

Ответ. Например, такой: «Что бы вы ответили, если бы вас спросили, живёт ли у вас дома ручной крокодил?»

Задача 14

6-7 а) Островитянин A в присутствии островитянина B говорит: «По крайней мере один из нас — лжец». Кто такой A и кто такой B?

Идея. Перебрать все возможные варианты.

Указание. Сначала предположить, что A рыцарь, и посмотреть, кем в этом случае может являться B. Потом предположить, что A лжец, и посмотреть, кем в этом случае может являться B.

Решение. Если A рыцарь, то его высказывание «По крайней мере один из нас — лжец» истинно. Следовательно, B лжец.

Если A лжец, его высказывание «По крайней мере один из нас — лжец» ложно. Следовательно, они оба рыцари, что в этом случае неверно.

Ответ. A — рыцарь, B — лжец.

Задача 15

6-7 а) Из трёх жителей К, М и Р острова двое сказали:

К: «Мы все лжецы».

М: «Один из нас рыцарь».

Кто из жителей К, М и Р рыцарь и кто лжец?

Идея. Сначала определить, кем является К, затем определить каким может быть количество лжецов и рыцарей.

Решение. Заметим, что рыцарь не мог сказать «Мы все лжецы», значит, К — лжец. Получается, что высказывание «Мы все лжецы» ложно и лжецов может быть двое или один.

Если рыцарей двое, то М рыцарь и его высказывание «Один из нас рыцарь» истинно, чего в этом случае не может быть.

Если рыцарь только один, то высказывание М верно и он как раз является рыцарем. Следовательно, Р является лжецом.

Ответ. М — рыцарь, К и Р — лжецы.

Задача 16

6-7 Некоторые жители острова заявили, что на острове чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечётным?

Идея. Показать, что одно утверждение сделано рыцарями, а другое — лжецами.
Указание. Установить наличие и рыцарей, и лжецов.
Указание. Использовать то, что все рыцари должны были ответить на вопрос о количестве рыцарей или о количестве лжецов одинаково.

Решение. Если на острове находятся только рыцари, то утверждение о нечётности количества лжецов истинно, т. е. лжецы на острове есть.

Если на острове одни лжецы, то информация о чётном числе рыцарей неверна, т. е. число рыцарей нечётно и рыцари на острове присутствуют.

Заметим, что рыцари и лжецы по-разному ответят на один и тот же вопрос, следовательно, одно утверждение сделано рыцарями, а другое — лжецами.

Переберём возможные варианты. Если первое утверждение сделано рыцарями, а второе — лжецами, то рыцарей чётное число и лжецов тоже чётное число.

Если первое утверждение сделано лжецами, а второе — рыцарями, то рыцарей нечётное число и лжецов тоже нечётное число.

В обоих случаях общее число жителей острова будет чётным.
Ответ. Нет.

Задача 17

6-7 Путешественник прибыл в город на острове, в котором каждый лжец, отвечая на вопрос «Сколько...?», называет число, на 2 больше или на 2 меньше, чем правильный ответ, а каждый рыцарь отвечает верно. Путешественник встретил двух аборигенов и спросил у каждого, сколько рыцарей и лжецов проживает в городе. Первый ответил: «Если не считать меня, то 1001 лжец и 1002 рыцаря», а второй: «Если не считать меня, то 1000 лжецов и 999 рыцарей». Сколько лжецов и рыцарей в городе? Кем оказались первый и второй аборигены?

Идея. Перебрать все варианты и отобрать непротиворечивые.
Указание. Показать, что один из них рыцарь, другой — лжец.

Решение. Так как путешественники ответили по-разному, то они не могут одновременно являться рыцарями или лжецами, т. е. один из них рыцарь, другой лжец.

Если первый — рыцарь, а второй — лжец, то ответ «Если не считать меня, то 1001 лжец и 1002 рыцаря» правдивый, а «Если не считать меня, то 1000 лжецов и 999 рыцарей» ложный. В этом случае лжецов в городе 1001, а рыцарей 1003. Но тогда число рыцарей, названное лжецом, отличается от истинного на $1003 - 999 = 4$, что противоречит условию.

Если первый — лжец, а второй — рыцарь, то ответ «Если не считать меня, то 1001 лжец и 1002 рыцаря» ложный, а «Если не считать меня, то 1000 лжецов и 999 рыцарей» правдивый. В этом случае рыцарей в городе 1000 и лжецов тоже 1000. Это согласуется с тем, что лжец называет число, отличающееся на 2 от истинного.
Ответ. Первый — лжец, второй — рыцарь. В городе 1000 лжецов и 1000 рыцарей.

Задача 18

6-7 Четыре жителя острова разговаривают между собой:
Беня (Вене): Ты лжец.
Женя (Бене): Сам ты лжец.
Сеня (Жене): Да они оба лжецы. Впрочем, и ты тоже.
Кто из них лжец, а кто рыцарь?

Идея. Перебрать все варианты и отобрать непротиворечивые.
Указание. Перебор начать с предположения о том, что Сеня рыцарь.

Решение. Так как Сеня выдал наибольшее количество информации, то перебор начнём с него.

Если Сеня — рыцарь, то согласно его высказываниям трое остальных жителей острова лжецы. Но тогда высказывание Бени о том, что Веня — лжец, истинно. Противоречие. Значит, Сеня лжец.

Так как Сеня — лжец, то ложны его высказывания «Да они оба лжецы» (о Вене и Бене) и «Впрочем, и ты тоже» (о Жене). Получается, что хотя бы один среди Вени и Бени является рыцарем, а Женя точно рыцарь.

Так как Женя — рыцарь, то его высказывание истинно, следовательно, Беня — лжец. Но Беня сказал о Вене, что тот лжец, значит, Веня — рыцарь.
Ответ. Веня и Женя — рыцари, а Беня и Сеня — лжецы.

Задача 19

6-7 В городе Счастья на острове лжецов и рыцарей живут 200 человек. Каждый житель города поклоняется одному из трёх богов — богу Солнца, богу Луны или богу Земли. Каждому жителю города задали три вопроса:

1) Поклоняетесь ли вы богу Солнца?
2) Поклоняетесь ли вы богу Луны?
3) Поклоняетесь ли вы богу Земли?

На первый вопрос отрицательно ответили 60 человек, на второй — 120 человек и на третий — 130 человек. Сколько лжецов на острове?

Идея. Определить количество отрицательных ответов у рыцарей и у лжецов.
Указание. Рыцарь ответил отрицательно на два вопроса, лжец — на один.
Указание. Выразить число отрицательных ответов через число рыцарей и число лжецов.

Решение. Заметим, что каждый рыцарь дал отрицательный ответ на два вопроса, а каждый лжец — на один. Поэтому суммарное количество отрицательных ответов равно удвоенному числу рыцарей плюс число лжецов, т. е. всему населению острова плюс число рыцарей.

Поскольку отрицательных ответов было $60 + 120 + 130 = 310$, а жителей 200, на острове живёт $310 - 200 = 110$ рыцарей и $200 - 110 = 90$ лжецов.
Ответ. 90 лжецов.

Задача 20

6-7 а) Каждый из 7 сидящих за круглым столом сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Кто за столом?

Идея. Сделать предположение об одном из них и, двигаясь по порядку, определять правдивость соседей.
Указание. Начинать удобно с рыцаря, так как тогда точно известно, кто его соседи.

Решение. Рассмотрим случай, когда среди сидящих за столом есть хотя бы один рыцарь. Назовём его первым. Он сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь», значит, рядом с ним сидит рыцарь, которого назовём вторым. Второй сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь», значит, третьим должен быть лжец. Третий сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь», значит, четвёртым будет рыцарь. Действуя аналогичным образом, получаем, что пятым будет рыцарь, шестым — лжец, седьмым — рыцарь. В результате рядом с первым оказываются два рыцаря (второй и седьмой), что противоречит высказыванию первого рыцаря: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Значит, за столом одни лжецы.
Ответ. Все лжецы.

Задача 21

[7] Однажды 50 жителей острова сели за круглый стол и каждый сказал про своего соседа справа, рыцарь тот или лжец. При этом жители, сидящие на 1-м, 3-м, ..., 49-м местах, сказали «Рыцарь», а сидящие на 2-м, 4-м, ..., 48-м местах — «Лжец». Что мог сказать житель, сидящий на 50-м месте? (Места занумерованы по кругу, начиная с некоторого.)

Идея. Сделать предположение о первом из них и, двигаясь по порядку, определять правдивость соседей.
Указание. Рассмотреть два случая, когда первый является рыцарем и когда лжецом.

Решение. Рассмотрим случай, когда первый — рыцарь. Он сказал, что рядом с ним сидит рыцарь, которого назовём вторым. Второй сказал, что рядом лжец, значит, третьим должен быть лжец. Третий сказал, что рядом рыцарь, значит, четвёртым будет лжец. Действуя аналогичным образом, получаем, что пятым и шестым будут рыцари, седьмым и восьмым — лжецы и т. д. В результате на 49-м и 50-м местах будут рыцари и 50-й сказал, что рядом с ним (т. е. первый) рыцарь.

Если первый — лжец, то второй тоже лжец, третий — рыцарь, четвёртый — рыцарь и т. д. В этом случае 50-й будет лжецом и он скажет, что рядом с ним (т. е. первый) находится рыцарь.

Следовательно, в любом случае 50-й скажет, что сосед справа — рыцарь.
Ответ. «Рыцарь».

В задачах 22–24 среди аборигенов появляются хитрецы — они иногда говорят правду, иногда лгут.

Задача 22

5 а) Из трёх жителей К, М и Р отдалённого района острова один является рыцарем, другой — лжецом, а третий — хитрецом. Они произнесли следующие утверждения:

К: «Я хитрец».
М: «Это правда».
Р: «Я не хитрец».

Кем в действительности являются К, М и Р?

Идея. Сделать предположение о первом из них и, двигаясь по порядку, определять правдивость остальных.
Указание. Рассмотреть два случая, когда К является хитрецом и когда лжецом.

Решение. Заметим, что рыцарь не может назвать себя хитрецом, значит, К либо хитрец, либо лжец.

Если К хитрец, то М сказал правду, значит, он рыцарь. В этом случае получается, что Р — лжец и он сказал правду, чего не может быть.

Если К — лжец, то М соврал, значит, он хитрец. В этом случае получается, что Р — рыцарь и он сказал правду. Это ничему не противоречит.
Ответ. К — лжец, М — хитрец, Р — рыцарь.

Задача 23

6-7 а) Двое людей, К и М, о которых известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо хитрец, утверждают:
К: «М — рыцарь».
М: «К — не рыцарь».
Докажите, что по меньшей мере один из них говорит правду и является хитрецом.

Идея. Рассмотреть два случая, когда К сказал правду и когда К солгал.

Решение. Если К сказал правду, то получается, что М — рыцарь, а К — хитрец, сказавший правду.

Если К сказал неправду, то получается, что М — не рыцарь, сказавший правду. В обоих случаях выходит, что хитрец сказал правду.

Задача 24

7 За круглым столом сидели рыцари. Каждый рыцарь посадил за стол между собой и ближайшим рыцарем слева своих пажей. При этом оказалось, что у всех рыцарей одинаковое число пажей и за столом сидят 12 человек. Известно, что рыцари всегда говорят правду, а пажи могут как сказать правду, так и солгать. Король обошёл всех по кругу и задал каждому из них вопрос: «Кто сидит слева от вас?» Первый и девятый ответили: «Паж». Третий, седьмой, восьмой, десятый, одиннадцатый и двенадцатый ответили: «Рыцарь». Ответы остальных король не расслышал. Определите, сколько рыцарей сидело за столом.

Идея. Определить, кем являются те, кто сказал, что слева от него сидит рыцарь.

Указание. Показать, что два рыцаря рядом сидеть не могут.

Указание. Определить, кем являются третий, седьмой, восьмой, десятый, одиннадцатый и двенадцатый.

Указание. Определить, кем является девятый.

Решение. Каждый рыцарь посадил за стол между собой и ближайшим рыцарем слева своих пажей. При этом оказалось, что у всех рыцарей одинаковое число пажей. Если два рыцаря сидят рядом, то пажей нет ни у одного из рыцарей, что не так. Следовательно, рыцарь не мог сказать, что слева от него сидит рыцарь. Получается, что третий, седьмой, восьмой, десятый, одиннадцатый и двенадцатый — пажи.

Проанализируем, каким может быть число рыцарей. Единственным рыцарь быть не может, так как по условию задачи «за столом сидели рыцари». Если рыцарей двое или трое, то у каждого соответственно по 5 или 3 пажей. Эти два варианта пока ничему не противоречат. Если рыцарей 4, то у каждого по двое пажей, что противоречит тому, что подряд сидят три пажа (десятый, одиннадцатый и двенадцатый).

Таким образом, возможными остаются только два варианта: рыцарей двое и у каждого по 5 пажей или рыцарей трое и у каждого по 3 пажа.

Для того чтобы отсечь один из этих вариантов, определим, кем является девятый.

Предположим, что девятый является пажом. Тогда получается, что подряд сидят 6 пажей (с седьмого по двенадцатый). Поскольку рыцарей как минимум два, между ними должны располагаться ещё как минимум шесть пажей, что невозможно, так как за столом всего 12 человек. Значит, девятый — рыцарь.

Теперь вернёмся к вопросу о количестве рыцарей. Если их двое, то они должны сидеть друг напротив друга. Так как девятый — рыцарь, то в этом случае рыцарем должен быть и третий, а он, как мы уже выяснили ранее, паж. Следовательно, рыцарей трое, а именно: девятый, первый и пятый. Ответ. 3.

3. Переправы и задачи на переливание

Задача 1

[5] а) Трое учеников пошли на рыбалку, взяв с собой лодку, выдерживающую нагрузку до 100 кг. Смогут ли ученики перебраться с берега на остров, если их массы равны 40 кг, 50 кг, 70 кг?

Идея. Рассмотреть различные возможные варианты.
Указание. Определить, кто должен ехать в первую поездку на остров.
Указание. Определить, кто должен вернуть лодку назад после первой поездки и кто должен поехать во вторую поездку на остров.

Решение. Для удобства назовём того, кто весит больше всех, тяжёлым (он не сможет плыть в лодке с кем-то ещё), а двух остальных — лёгкими (они смогут плыть в лодке вдвоём).

В первую поездку должны поехать двое, иначе будет некому вернуть лодку обратно. Значит, первыми едут два лёгких. Возвращаться вдвоём им смысла нет, так как тогда ничего не изменится: они будут все втроём на том же берегу. Следовательно, один лёгкий должен вернуться обратно.

Во вторую поездку одному лёгкому плыть нет смысла, так как тогда повторится ситуация, когда двое лёгких находятся с лодкой на острове. Следовательно, во вторую поездку на остров должен поехать тяжёлый, а лёгкий должен вернуть потом лодку на берег.

В третью поездку на остров поедут оба лёгких. В результате все ученики окажутся на острове.
Ответ. Смогут.

Задача 2

[5-7] Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 мин, мама — за 2 мин, малыш — за 5 мин, а бабушка — за 10 мин. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Смогут ли они перейти мост за 17 мин? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Перебрасывать фонарик через реку нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя.)

Идея. Для того чтобы время движения самых медленных пешеходов не складывалось, они должны идти вместе.

Указание. Определить, какая пара должна перейти мост в нужную сторону первой, а какая — второй и кто должен возвращать фонарик обратно.

Решение. Если малыш и бабушка не пойдут вместе, то времена их движения сложатся и на переход мамы с папой останется $17 - (5 + 10) = 2$ минуты, и это без учёта того, что кто-то должен вернуться, чтобы передать фонарик. Получается, что малыш должен переходить мост вместе с бабушкой.

Заметим, что возвращаться для передачи фонарика надо не самому медленному пешеходу. Поэтому первой парой должны пойти мама с папой, а второй — малыш с бабушкой. Передать им фонарик должен папа, причём самому ему придётся вернуться и остаться. Потом за ним должна вернуться мама и вместе они последними перейдут мост в нужную сторону.

Теперь подсчитаем время:

2 минуты (мама с папой туда),
1 минута (папа обратно),
10 минут (малыш с бабушкой туда),
2 минуты (мама обратно),
2 минуты (мама с папой туда).

Итого $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ минут.
Ответ. Да.

Задача 3

5-7 Барон Мюнхгаузен и его слуга Томас подошли к реке. На берегу они обнаружили лодку, способную перевезти лишь одного человека. Тем не менее они переправились через реку и продолжили путешествие. Могло ли так быть?

Идея. Рассмотреть все возможные варианты расположения барона Мюнхгаузена и его слуги Томаса относительно реки и все возможные варианты их переправы через реку.

Решение. Если барон со слугой находятся на одном берегу реки, то на другой берег может переправиться только один из них. Для того чтобы переправился второй, первый должен вернуть лодку, а следовательно, вернуться сам, и тогда они снова вместе с лодкой окажутся на том же месте.

Если же барон со слугой находятся на разных берегах реки, то сначала тот из них, на чьём берегу обнаружилась лодка, должен переправиться на противоположный берег, а потом на приплывшей лодке второй из них должен перебраться через реку.

Ответ. Да, если они подошли к реке с разных берегов.

Задача 4

5-7 В лодке, вмещающей только двух человек, через реку должны переправиться три миссионера и три людоеда. Миссионеры боятся остаться в меньшинстве. Смогут ли они переправиться?

Идея. Перебирать последовательно все возможные варианты переправы, отсекая заведомо неподходящие.
Указание. Первыми отправить миссионера и людоеда.

Решение. Для того чтобы проиллюстрировать задачу, обозначим каждого миссионера буквой М, людоеда буквой Л, а реку обозначим знаком тире. Изначально три миссионера и три людоеда находились по одну сторону от реки, т. е.

$$\text{МММЛЛЛ}-,$$

в итоге мы хотим получить расположение

$$-\text{МММЛЛЛ}.$$

1. Если в первую переправу поедут миссионер с людоедом, то миссионеры не останутся в меньшинстве ни на первом берегу, ни на втором. Вернуть лодку на первый берег людоед не может, так как в этом случае на первом берегу миссионеры окажутся в меньшинстве, что нас не устраивает. Значит, после первой переправы лодку назад должен возвращать миссионер. В результате первая переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$\text{МММЛЛЛ}- \implies \text{ММЛЛ}-\text{МЛ} \implies \text{МММЛЛ}-\text{Л}.$$

2. После этого на первом берегу окажется 3 миссионера и 2 людоеда, а на втором — 1 людоед. Определим того, кто на этот раз может переправиться на другой берег. Двух миссионеров отправлять нельзя, так как в этом случае на первом берегу миссионеры останутся в меньшинстве. Миссионера и людоеда нельзя, так как в этом случае на втором берегу миссионеры будут в меньшинстве. Следовательно, отправить придётся двух людоедов. Перегонять лодку обратно придётся людоеду, поскольку на втором берегу будут только людоеды. В результате вторая переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$\text{МММЛЛ}-\text{Л} \implies \text{МММ}-\text{ЛЛЛ} \implies \text{МММЛ}-\text{ЛЛ}.$$

3. Теперь на первом берегу 3 миссионера и 1 людоед, а на втором — 2 людоеда. Переправить на другой берег людоеда с миссионером мы не можем, так как тогда там миссионеры будут в меньшинстве, значит, отправляем двух миссионеров.

В этом случае на первом берегу останутся миссионер и людоед, а на втором будет 2 миссионера и 2 людоеда. Теперь отправить возвращать лодку кого-то одного уже не получится, так как либо на первом, либо на втором берегу миссионеры будут в меньшинстве. Получается, что отправить обратно можно только миссионера с людоедом. В результате третья переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$\text{ММML–ЛЛ} \Longrightarrow \text{МЛ–ММЛЛ} \Longrightarrow \text{ММЛЛ–МЛ}.$$

Заметим, что теперь ситуация стала совершенно симметричной. Если до последнего манёвра на первом берегу были миссионер с людоедом, а на втором — 2 миссионера и 2 людоеда, то после манёвра наоборот: на первом берегу 2 миссионера и 2 людоеда, а на втором 1 миссионер и 1 людоед. Так как наша исходная задача также была симметричной (все были на первом берегу, а должны оказаться на втором берегу), то нужно выполнить все предыдущие действия в обратном порядке.

4. Сейчас на первом берегу 2 миссионера и 2 людоеда, а на втором 1 миссионер и 1 людоед. Отправим на второй берег двух миссионеров, а лодку возвращать поручим людоеду:

$$\text{ММЛЛ–МЛ} \Longrightarrow \text{ЛЛ–МММЛ} \Longrightarrow \text{ЛЛЛ–МММ}.$$

5. Двух людоедов отправим на второй берег, а лодку возвращать поручим миссионеру:

$$\text{ЛЛЛ–МММ} \Longrightarrow \text{Л–МММЛЛ} \Longrightarrow \text{МЛ–ММЛЛ}.$$

6. Последней поездкой отправим оставшихся миссионера и людоеда:

$$\text{МЛ–ММЛЛ} \Longrightarrow \text{–МММЛЛЛ}.$$

В результате наших действий все оказались на другом берегу реки.

Ответ. Да.

Замечание. В пункте 5 возвращать лодку можно было и людоеду.

Задача 5

5-7 Могут ли три рыцаря, каждый со своим оруженосцем, переправиться через реку на двухместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев?

Идея. Перебирать последовательно все возможные варианты переправы, отсекая заведомо неподходящие.
Указание. Для того чтобы оруженосцы не оставались с незнакомыми рыцарями, рыцари не должны оставаться в меньшинстве.
Указание. Первыми отправить рыцаря со своим оруженосцем.

Решение. Для того чтобы проиллюстрировать задачу, обозначим рыцарей и их оруженосцев через $Р_1$, $Р_2$, $Р_3$ и $О_1$, $О_2$, $О_3$ соответственно, а реку обозначим знаком тире. Изначально все находились по одну сторону от реки, т. е.

$$Р_1Р_2Р_3О_1О_2О_3-,$$

в итоге мы хотим получить расположение

$$-Р_1Р_2Р_3О_1О_2О_3.$$

1. Если в первую переправу поедет один из рыцарей со своим оруженосцем, то оруженосцы не останутся с незнакомыми рыцарями ни на первом берегу, ни на втором. Вернуть лодку на первый берег оруженосец не может, так как в этом случае на первом берегу оруженосец окажется без своего рыцаря, что нас не устраивает. Значит, после первой переправы лодку назад должен возвращать рыцарь. В результате первая переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$Р_1Р_2Р_3О_1О_2О_3- \implies Р_1Р_2О_1О_2-Р_3О_3 \implies Р_1Р_2Р_3О_1О_2-О_3.$$

2. После этого на первом берегу окажется 3 рыцаря и 2 оруженосца, а на втором берегу — 1 оруженосец. Определим того, кто на этот раз может переправиться на другой берег. Двух рыцарей отправлять нельзя, так как в этом случае на первом берегу рыцари останутся в меньшинстве. Рыцаря и оруженосца нельзя, так как в этом случае на втором берегу рыцари будут в меньшинстве. Следовательно, отправить придётся двух оруженосцев. Перегонять лодку обратно придётся оруженосцу, поскольку на втором берегу будут только оруженосцы. В результате вторая переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$Р_1Р_2Р_3О_1О_2-О_3 \implies Р_1Р_2Р_3-О_1О_2О_3 \implies Р_1Р_2Р_3О_1-О_2О_3.$$

3. Теперь на первом берегу будут 3 рыцаря и 1 оруженосец, а на втором — 2 оруженосца. Переправить на другой берег рыцаря с оруженосцем мы не можем, так как тогда там рыцари будут в меньшинстве, значит, отправляем двух рыцарей. В этом случае на первом берегу останутся рыцарь с оруженосцем, а на втором будет 2 рыцаря и 2 оруженосца. Теперь отправить возвращать лодку кого-то одного уже на получится, так как либо на первом, либо на втором берегу рыцари

окажутся в меньшинстве. Получается, что отправить обратно можно только рыцаря с оруженосцем. В результате третья переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$\mathrm{P_1P_2P_3O_1 - O_2O_3 \implies P_1O_1 - P_2P_3O_2O_3 \implies P_1P_2O_1O_2 - P_3O_3}.$$

Заметим, что теперь ситуация стала совершенно симметричной. Если до последнего манёвра на первом берегу были рыцарь с оруженосцем, а на втором — 2 рыцаря и 2 оруженосца, то после манёвра наоборот: на первом берегу 2 рыцаря и 2 оруженосца, а на втором 1 рыцарь и 1 оруженосец. Так как наша исходная задача также была симметричной (все были на первом берегу, а должны оказаться на втором берегу), то нужно выполнить все предыдущие действия в обратном порядке.

4. Сейчас на первом берегу 2 рыцаря и 2 оруженосца, а на втором 1 рыцарь и 1 оруженосец. Отправим на второй берег двух рыцарей, а лодку возвращать поручим оруженосцу:

$$\mathrm{P_1P_2O_1O_2 - P_3O_3 \implies O_1O_2 - P_1P_2P_3O_3 \implies O_1O_2O_3 - P_1P_2P_3}.$$

5. Двух оруженосцев отправим на второй берег, а лодку возвращать поручим рыцарю:

$$\mathrm{O_1O_2O_3 - P_1P_2P_3 \implies O_3 - P_1P_2P_3O_1O_2 \implies O_3P_3 - P_1P_2O_1O_2}.$$

6. Последней поездкой отправим оставшихся рыцаря с оруженосцем:

$$\mathrm{O_3P_3 - P_1P_2O_1O_2 \implies -P_1P_2P_3O_1O_2O_3}.$$

В результате наших действий все оказались на другом берегу реки.

Ответ. Да.

Задача 6

6-7 Могут ли четыре рыцаря, каждый со своим оруженосцем, переправиться через реку на двухместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев?

Идея. Перебирать последовательно все возможные варианты переправы, отсекая заведомо неподходящие.

Указание. Для того чтобы оруженосцы не оставались с незнакомыми рыцарями, рыцари не должны оставаться в меньшинстве.

Решение. Обозначим рыцарей и их оруженосцев через $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{P_4}$ и $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{O_3}$, $\mathrm{O_4}$ соответственно, а реку обозначим знаком тире. Изначально все находились по одну сторону от реки, т. е.

$$P_1P_2P_3P_4O_1O_2O_3O_4-,$$

в итоге мы хотим получить расположение

$$-P_1P_2P_3P_4O_1O_2O_3O_4.$$

1. Отправляться в первую поездку одному человеку бессмысленно, так как ему придётся возвращать лодку обратно. Значит, в первую поездку надо отправить двоих, один из которых должен вернуться. Заметим, что в любом случае остаться на другом берегу должен оруженосец, иначе на первом берегу рыцари окажутся в меньшинстве. В результате первая переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$P_1P_2P_3P_4O_1O_2O_3O_4- \implies P_1P_2P_3O_1O_2O_3-P_4O_4 \implies$$
$$\implies P_1P_2P_3P_4O_1O_2O_3-O_4.$$

2. После этого на первом берегу окажется 4 рыцаря и 3 оруженосца, а на втором берегу — 1 оруженосец. Определим того, кто на этот раз может переправиться на другой берег. Двух рыцарей отправлять нельзя, так как в этом случае на первом берегу рыцари останутся в меньшинстве. Рыцаря и оруженосца нельзя, так как в этом случае на втором берегу рыцари будут в меньшинстве. Следовательно, отправить придётся двух оруженосцев. Перегонять лодку обратно придётся оруженосцу, поскольку на втором берегу будут только оруженосцы. В результате вторая переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$P_1P_2P_3P_4O_1O_2O_3-O_4 \implies P_1P_2P_3P_4O_1-O_2O_3O_4 \implies$$
$$\implies P_1P_2P_3P_4O_1O_2-O_3O_4.$$

3. Теперь на первом берегу 4 рыцаря и 2 оруженосца, а на втором — 2 оруженосца. Переправить на другой берег рыцаря с оруженосцем мы не можем, так как тогда там рыцари будут в меньшинстве, значит, мы можем отправить либо двух оруженосцев, либо двух рыцарей. Рассмотрим оба случая по отдельности.

а) Если мы отправим двух оруженосцев, то возвращать лодку придётся оруженосцу, так как на втором берегу будут только оруженосцы. А в следующую поездку отправить одного или двух рыцарей мы не сможем, так как в этом случае они окажутся на втором берегу в меньшинстве. Отправлять одного оруженосца тоже смысла нет, так как он только что вернулся оттуда. Получается, что эта ветка тупиковая.

б) Вернёмся к ситуации пункта 3, когда на первом берегу 4 рыцаря и 2 оруженосца, а на втором — 2 оруженосца. Теперь отправим на другой берег двух рыцарей. На первом берегу останутся 2 рыцаря и 2 оруженосца, и на втором будет 2 рыцаря и 2 оруженосца. Отправить возвращать лодку кого-то одного уже не получится, так как либо на первом, либо на втором берегу рыцари окажутся в меньшинстве. Отправлять обратно двух рыцарей смысла нет, они только что оттуда. Единственный возможный вариант: отправить обратно рыцаря с оруженосцем. В результате третья переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$\mathrm{P_1P_2P_3P_4O_1O_2{-}O_3O_4} \implies \mathrm{P_1P_2O_1O_2{-}P_3P_4O_3O_4} \implies$$
$$\implies \mathrm{P_1P_2P_3O_1O_2O_3{-}P_4O_4}.$$

4. Теперь на первом берегу 3 рыцаря и 3 оруженосца, а на втором — 1 рыцарь с оруженосцем. Переправить на другой берег двух оруженосцев мы не можем, так как тогда там рыцари будут в меньшинстве. Отправлять рыцаря с оруженосцем смыла нет, они только оттуда. Если мы отправим двух рыцарей, то на первом берегу рыцари окажутся в меньшинстве, что нас не устраивает. Значит, эта ветка тоже тупиковая и переправу осуществить невозможно.

Ответ. Нет.

Задача 7

6-7 Могут ли четыре рыцаря, каждый со своим оруженосцем, переправиться через реку на трёхместной лодке, если оруженосцы отказываются оставаться с незнакомыми рыцарями без своих хозяев?

Идея. Перебирать последовательно все возможные варианты переправы, отсекая заведомо неподходящие.

Указание. Для того чтобы оруженосцы не оставались с незнакомыми рыцарями, рыцари не должны оставаться в меньшинстве.

Решение. Обозначим рыцарей и их оруженосцев через $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{P_4}$ и $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$, $\mathrm{O_3}$, $\mathrm{O_4}$ соответственно, а реку обозначим знаком тире. Изначально все находились по одну сторону от реки, т. е.

$$\mathrm{P_1P_2P_3P_4O_1O_2O_3O_4{-}},$$

в итоге мы хотим получить расположение

$$\mathrm{{-}P_1P_2P_3P_4O_1O_2O_3O_4}.$$

1. В первую поездку мы хотим отправить троих и одного вернуть вместе с лодкой. Так как рыцари не должны остаться на первом берегу в меньшинстве, то исключены варианты

Р + Р + Р и Р + Р + О. Так как в лодке рыцари также не должны остаться в меньшинстве, то исключён вариант Р + О + О. Получается, что в первую поездку должны отправиться три оруженосца и один из них должен вернуться вместе с лодкой. В результате первая переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$\text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_1\text{О}_2\text{О}_3\text{О}_4- \implies \text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_1-\text{О}_2\text{О}_3\text{О}_4 \implies$$
$$\implies \text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_1\text{О}_2-\text{О}_3\text{О}_4.$$

2. Теперь на первом берегу 4 рыцаря и 2 оруженосца, а на втором — 2 оруженосца. Так как рыцари не должны остаться на первом берегу в меньшинстве, то исключён вариант Р + Р + Р. Так как в лодке рыцари также не должны остаться в меньшинстве, то исключён вариант Р + О + О. Поскольку и на втором берегу рыцари не должны остаться в меньшинстве, исключён вариант Р + Р + О. Получается, что во вторую поездку должны отправиться двое. Пусть это будут два оруженосца. В этом случае обратно лодку переправит тоже оруженосец. В результате вторая переправа (туда-обратно) будет выглядеть так:

$$\text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_1\text{О}_2-\text{О}_3\text{О}_4 \implies \text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4-\text{О}_1\text{О}_2\text{О}_3\text{О}_4 \implies$$
$$\implies \text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_1-\text{О}_2\text{О}_3\text{О}_4.$$

3. После этого на первом берегу окажется 4 рыцаря и 1 оруженосец, а на втором — 3 оруженосца. Теперь можно отправить на другой берег трёх рыцарей, а перегонять лодку обратно придётся рыцарю с оруженосцем:

$$\text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_1-\text{О}_2\text{О}_3\text{О}_4 \implies \text{Р}_1\text{О}_1-\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_2\text{О}_3\text{О}_4 \implies$$
$$\implies \text{Р}_1\text{Р}_2\text{О}_1\text{О}_2-\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_3\text{О}_4.$$

4. Теперь на первом берегу 2 рыцаря и 2 оруженосца и на втором — 2 рыцаря и 2 оруженосца. Двух рыцарей можно отправить на другой берег, а перегонять лодку обратно можно отправить оруженосца:

$$\text{Р}_1\text{Р}_2\text{О}_1\text{О}_2-\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_3\text{О}_4 \implies \text{О}_1\text{О}_2-\text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_3\text{О}_4 \implies$$
$$\implies \text{О}_1\text{О}_2\text{О}_3-\text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_4.$$

5. И наконец, три оруженосца отправляются на другой берег:

$$\text{О}_1\text{О}_2\text{О}_3-\text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_4 \implies -\text{Р}_1\text{Р}_2\text{Р}_3\text{Р}_4\text{О}_1\text{О}_2\text{О}_3\text{О}_4.$$

В результате наших действий все оказались на другом берегу реки.

Ответ. Да.

Задача 8

6-7 Четыре рыцаря, каждый со своим оруженосцем, должны переправиться через реку на двухместной лодке. Посреди реки есть остров, на котором можно высаживаться. Спрашивается, смогут ли они совершить эту переправу так, чтобы ни на берегах, ни на острове, ни в лодке ни один оруженосец не находился в обществе чужих рыцарей без своего хозяина?

Идея. Сначала трёх оруженосцев переправить на остров, а одного — на другой берег. Потом всех рыцарей переправить на другой берег. Затем с острова перевезти всех оруженосцев на другой берег.
Указание. Для того чтобы оруженосцы не оставались с незнакомыми рыцарями, рыцари не должны оставаться в меньшинстве.

Решение. Обозначим рыцарей и их оруженосцев через $Р_1$, $Р_2$, $Р_3$, $Р_4$ и $О_1$, $О_2$, $О_3$, $О_4$ соответственно, а реку обозначим знаком тире. Изначально все находились по одну сторону от реки, т. е.

$$Р_1Р_2Р_3Р_4О_1О_2О_3О_4-,$$

в итоге мы хотим получить расположение

$$-Р_1Р_2Р_3Р_4О_1О_2О_3О_4.$$

1. Сначала пусть первый оруженосец по очереди перевезёт трёх остальных оруженосцев на остров и вернётся обратно. В результате мы получим:

$$Р_1Р_2Р_3Р_4О_1О_2О_3О_4- \implies Р_1Р_2Р_3Р_4О_1-.$$

2. Теперь переправим всех с первого берега на второй. Сначала первый рыцарь перевезёт своего оруженосца и вернёт лодку на первый берег. Затем первый рыцарь перевезёт второго рыцаря, который, вернувшись обратно, перевезёт по очереди третьего и четвёртого рыцарей. В результате мы получим:

$$Р_1Р_2Р_3Р_4О_1- \implies -Р_1Р_2Р_3Р_4О_1.$$

3. После этого первый оруженосец может по очереди перевезти всех оруженосцев с острова на второй берег.

Ответ. Да.

Задача 9

6-7 а) По длинному узкому каналу один за другим идут три парохода. Навстречу им — ещё три парохода. Канал такой узкий, что два парохода в нём разойтись не могут, но на канале есть залив, в котором может поместиться один пароход. Могут ли разойтись пароходы?

Идея. Сначала разработать план действий для того, чтобы один пароход мог поменяться местами со всеми встречными пароходами, а потом применить это несколько раз.

Решение. Для того чтобы разойтись одному пароходу со всеми встречными пароходами, ему надо зайти в залив, а всем встречным проплыть мимо. Так разойдётся пароход, идущий первым налево, с пароходами, идущими направо.

Действуя аналогичным образом, второй и третий пароходы, идущие налево, могут разойтись со всеми пароходами, идущими направо. При этом пароходы, идущие направо, должны будут два раза возвращаться левее залива, чтобы пропустить в залив второй и третий пароходы, идущие налево.
Ответ. Могут.

Задача 10

5 Продавец получил для продажи несколько пачек конвертов по 100 конвертов в каждой. 10 конвертов он отсчитывает за 10 секунд. За сколько секунд сообразительный продавец может отсчитать 70 конвертов? 90 конвертов?

Идея. Разделить все конверты на две кучки и отсчитать меньшую из них.

Решение. Так как отсчитать 30 конвертов быстрее, чем 70, то удобнее от 100 конвертов отсчитать 30 конвертов, тогда число оставшихся конвертов будет равняться 70. И сама процедура займёт 30 секунд.

Если же надо отсчитать 90 конвертов, то от ста надо отсчитать 10. В этом случае число оставшихся конвертов будет равняться 90, а процедура займёт 10 секунд.
Ответ. За 30 секунд; за 10 секунд.

Задача 11

5-6 а) Карлсон очень любил сладкое. Налив себе в стакан сметаны, он добавил туда варенья из банки, но как только он перемешал сметану и варенье, то понял, что хочет есть одно варенье. Недолго думая, он перелил в банку столько варенья со сметаной, сколько взял из банки варенья. После перемешивания Карлсон задумался: чего же получилось больше — сметаны в банке с вареньем или варенья в стакане со сметаной? А как думаете вы?

Идея. Определить, как связано количество сметаны, перелитой из стакана со сметаной, с количеством варенья, перелитого из банки с вареньем.
Указание. Использовать то, что в результате переливаний объёмы жидкостей в ёмкостях остались теми же, что и до переливаний.

Решение. Так как в итоге в банке осталось столько же жидкости, сколько и было, то варенья из неё в стакан было перелито столько же, сколько в банку было перелито сметаны. Получается, что количество сметаны в банке с вареньем равно количеству варенья в стакане со сметаной.
Ответ. Сметаны в банке с вареньем окажется столько же, сколько и варенья в стакане со сметаной.

Задача 12

5-6 От полного стакана кофе я отпил половину и долил столько же молока. Затем отпил третью часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Наконец, я отпил шестую часть получившегося кофе с молоком и долил столько же молока. Только после этого я выпил всё до конца. Чего в итоге я больше выпил: молока или кофе?

Идея. Подсчитать количество выпитого кофе и количество выпитого молока.
Указание. Определить количество доливаемого молока, исходя из того, что оно равно количеству выпитой смеси кофе с молоком.

Решение. Согласно условию задачи сначала долили полстакана молока, затем третью часть стакана, потом одну шестую часть стакана молока. Следовательно, всего молока долили

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1 \quad \text{стакан.}$$

Так как изначально кофе был тоже один стакан, то в итоге был выпит один стакан кофе и один стакан молока.
Ответ. Поровну.

Задача 13

5 а) Как с помощью двух бидонов вместимостью 5 л и 8 л отлить из молочной цистерны 7 л молока? Молоко разрешается выливать обратно в цистерну.

Идея. Составить соответствующие уравнения в целых числах. Указание. Обозначить через x количество переливаний, связанных с 5-литровым бидоном, через y — количество переливаний, связанных с 8-литровым бидоном. Приравнять количество перелитого молока семи литрам.

Решение. Запишем равенство: $7 = x \cdot 5 - y \cdot 8$. Легко подбираются значения $x = 3$ и $y = 1$. Теперь опишем словами наши действия.

- Наполним 5-литровый бидон.
- Перельём молоко из него в 8-литровый бидон.
- Снова наполним 5-литровый бидон и дополним из него 8-литровый бидон. В 5-литровом бидоне останется 2 литра молока. Таким образом мы отлили из цистерны 2 литра. Осталось набрать ещё 5 литров 5-литровым бидоном.
- Выльем молоко из 8-литрового бидона в цистерну и перельём в него молоко из 5-литрового бидона. В 8-литровом бидоне окажется 2 литра молока.
- Наберём 5-литровый бидон и перельём из него молоко в 8-литровый. Там станет ровно 7 литров молока.

Для наглядности занесём все наши действия в таблицу.

5-л	8-л
5	0
0	5
5	5
2	8
2	0
0	2
5	2
0	**7**

Ответ. $7 = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 8$.

Задача 14

$\boxed{5}$ а) Как, имея два сосуда вместимостью 5 л и 7 л, налить из водопроводного крана 6 л?

Идея. Составить соответствующие уравнения в целых числах. Указание. Обозначить через x количество переливаний, связанных с 7-литровым сосудом, через y — количество переливаний, связанных с 5-литровым сосудом. Приравнять количество перелитой воды шести литрам.

Решение. Запишем равенство: $6 = x \cdot 7 - y \cdot 5$. Легко подбираются значения $x = 3$ и $y = 3$. Теперь опишем словами наши действия.

- Наполним семилитровый сосуд и перельём воду из него в пятилитровый сосуд. В семилитровом сосуде останется 2 литра воды. После этого выльем воду из пятилитрового сосуда и перельём в него содержимое семилитрового сосуда.
- Ещё раз наполним семилитровый сосуд и дополним из него пятилитровый сосуд. В семилитровом сосуде останется 4 литра. После этого выльем воду из пятилитрового сосуда и перельём в него содержимое семилитрового сосуда.
- И ещё раз наполним семилитровый сосуд и дополним из него пятилитровый сосуд. В семилитровом сосуде останется 6 литров.

Ответ. $6 = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 5$ или $6 = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7$.

Задача 15

6-7 Можно ли, пользуясь девятилитровым и двенадцатилитровым сосудами, отмерить 4 л воды из озера?

Идея. Составить соответствующие уравнения в целых числах.
Указание. Обозначить через x количество переливаний, связанных с 12-литровым сосудом, через y — количество переливаний, связанных с 9-литровым сосудом. Приравнять количество перелитой воды четырём литрам.

Решение. Запишем равенства: $4 = x \cdot 12 - y \cdot 9$ и $4 = y \cdot 9 - x \cdot 12$. Заметим, что правая часть этих равенств делится на три, а левая не делится на три. Следовательно, эти уравнения не имеют решений в целых числах.
Ответ. Нельзя.

Задача 16

6-7 а) Как, пользуясь сосудами в 7 л и 12 л, набрать 1 л воды из озера?

Идея. Составить соответствующие уравнения в целых числах.
Указание. Обозначить через x количество переливаний, связанных с 12-литровым сосудом, через y — количество переливаний, связанных с 7-литровым сосудом. Приравнять количество перелитой воды одному литру.

Решение. Запишем равенство: $1 = x \cdot 12 - y \cdot 7$. Легко подбираются значения $x = 3$ и $y = 5$. Теперь опишем словами наши действия.

- Наполним 12-литровый сосуд и перельём из него воду в 7-литровый. В 12-литровом сосуде останется 5 литров воды.
- Выльем из 7-литрового сосуда воду и перельём 5 литров из 12-литрового сосуда в 7-литровый сосуд.
- Наполним 12-литровый и дополним из него 7-литровый доверху. В 12-литровом сосуде останется 10 литров.
- Выльем из 7-литрового сосуда воду и перельём в него воду из 12-литрового сосуда. В 12-литровом сосуде останется 3 литра.
- Выльем из 7-литрового сосуда воду и перельём в него 3 литра из 12-литрового сосуда.
- Наполним 12-литровый и дополним из него 7-литровый доверху. В 12-литровом сосуде останется 8 литров.
- Выльем воду из 7-литрового сосуда и дольём его водой из 12-литрового сосуда. В 12-литровом сосуде останется 1 литр.

Для наглядности занесём все наши действия в таблицу.

12-л	7-л
12	0
5	7
5	0
0	5
12	5
10	7
10	0
3	7
3	0
0	3
12	3
8	7
8	0
1	7

Ответ. $1 = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7$.

Задача 17

[6-7] Можно ли, имея два полных десятилитровых бидона молока и пустые четырёхлитровую и пятилитровую кастрюли, отмерить по 2 л молока в каждую кастрюлю?

Идея. Разбить задачу на две: сначала отмерить 2 литра молока в 5-литровую кастрюлю, затем отмерить 2 литра молока в 4-литровую кастрюлю.

Указание. Сначала решить первую задачу: имея полный 10-литровый бидон молока и пустые 4-литровую и 5-литровую кастрюли, отмерить 2 л молока в 5-литровую кастрюлю.
Указание. Обозначить через x количество переливаний, связанных с 5-литровой кастрюлей, а через y — количество переливаний, связанных с 4-литровой кастрюлей. Приравнять количество перелитого молока двум литрам.
Указание. После этого решить вторую задачу: имея полный 10-литровый бидон, пустую 4-литровую кастрюлю и 10-литровый бидон с 8 л молока, отмерить 2 л молока в 4-литровую кастрюлю.

Решение. Так как ёмкостей в задаче много, то разобьём задачу на две, в каждой из которых будет задействовано только три ёмкости.

Сначала попробуем отмерить 2 литра молока в 5-литровую кастрюлю, используя только 4-литровую кастрюлю и один 10-литровый бидон как ёмкость (неважно какого объёма), откуда наливается молоко.

Запишем равенство: $2 = x \cdot 5 - y \cdot 4$. Заметим, что подходят $x = 2$ и $y = 2$. Это значит, что из 10-литрового бидона мы дважды должны наполнить 5-литровую кастрюлю и дважды вылить в бидон молоко из 4-литровой кастрюли. Опишем наши действия словами.

- Наполним 5-литровую кастрюлю и перельём из неё молоко в 4-литровую кастрюлю, молоко из которой выльем обратно в бидон.
- Затем оставшийся 1 литр перельём из 5-литровой кастрюли в 4-литровую, а 5-литровую наполним из бидона.
- Потом дополним 4-литровую кастрюлю из 5-литровой. В результате в 5-литровой кастрюле останется 2 литра молока.
- Перелив содержимое 4-литровой кастрюли в бидон, получим пустую 4-литровую кастрюлю, 2 литра молока в 5-литровой кастрюле и 8 литров молока в 10-литровой кастрюле.

Для наглядности занесём результаты наших действий в таблицу.

4-л	5-л	10-л
0	0	10
0	5	5
4	1	5
0	1	9
1	0	9
1	5	4
4	2	4
0	**2**	8

Теперь отмерим 2 литра молока в 4-литровую кастрюлю. При этом 5-литровую кастрюлю использовать уже не будем, а второй бидон с 10 л молока задействуем. Заметим, что если мы дополним первый 10-литровый бидон доверху (т. е. двумя литрами) из 4-литровой кастрюли (если мы её предварительно наполним), то в 4-литровой кастрюле останется как раз 2 литра молока. Занесём наши действия в таблицу

4-л	10-л	10-л
0	8	10
4	8	6
2	10	6

Таким образом, мы получили по 2 литра молока в 4-литровой и 5-литровой кастрюлях.
Ответ. Можно.

Задача 18

5 а) Имеются двое песочных часов: на 7 минут и на 11 минут. Каша должна вариться 15 минут. Как сварить кашу, переворачивая часы минимальное число раз?

Идея. Составить соответствующее равенство, связывающее числа 7, 11 и 15.

Решение. Заметим, что $15 = 2 \cdot 11 - 7$. Перепишем это равенство в виде $15 = (11 - 7) + 11$ и опишем наши действия.

- Переворачиваем одновременно песочные часы.
- В тот момент, когда в 7-минутных часах закончится песок, в 11-минутных часах останется песка ровно на 4 минуты, начинаем варить кашу.
- Когда в 11-минутных часах закончится песок (прошло 4 минуты с момента начала варки каши), переворачиваем их.
- Когда во второй раз закончится песок в 11-минутных часах — каша готова.

Ответ. $15 = 11 - 7 + 11$.

4. Задачи на взвешивание

Задача 1

5 Имеются чашечные весы без гирь и 3 одинаковые по внешнему виду монеты. Одна из монет фальшивая — она легче настоящих. Можно ли за одно взвешивание определить фальшивую монету?

Идея. Сравнить вес двух монет и определить, какая именно из трёх монет является фальшивой.
Указание. Рассмотреть случаи, когда монеты весят одинаково и не одинаково.

Решение. Положим на каждую из чашек весов по одной монете. Если эти монеты весят не одинаково, то фальшивой является та, которая легче. Если же монеты на весах весят одинаково, то фальшивой является третья монета.
Ответ. Да.

Задача 2

5-6 Из восьми внешне совершенно одинаковых монет 7 — золотых, одна — фальшивая, несколько легче остальных. Требуется при помощи не более чем двух взвешиваний на чашечных весах, не пользуясь гирями, определить фальшивую монету. Можно ли это сделать?

Идея. Разделить монеты на три кучки.
Указание. Рассмотреть случаи, когда две кучки весят одинаково и не одинаково.

Решение. Разложим монеты на три кучки: две по 3 монеты и одну из двух монет.

Сначала сравним вес двух равных кучек. Рассмотрим возможные варианты.

1. Если эти две кучки весят одинаково, то фальшивая монета в третьей кучке. Тогда, сравнив вес двух монет из третьей кучки, мы определим фальшивую монету.

2. Если две кучки имеют различный вес, то фальшивая монета в более лёгкой кучке, и ещё за одно взвешивание (см. пред. задачу) мы сможем определить фальшивую монету.

Ответ. Да.

Задача 3

5-7 Из 81 монеты одна фальшивая, она легче остальных. Можно ли при помощи четырёх взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая? Сколько потребуется взвешиваний для 80 монет? А сколько потребуется взвешиваний для n монет (n — произвольное число)?

Идея. Разделить монеты на три кучки. Определить, в какой из них находится фальшивая монета, и эту кучку разделить опять на три кучки и т. д.
Указание. Рассмотреть случаи, когда две кучки весят одинаково и не одинаково.

Решение. Разложим монеты на три равные кучки по 27 монет каждая.

Сначала сравним вес двух кучек. Если они весят одинаково, то фальшивая монета в третьей кучке. Если нет, то фальшивая монета в более лёгкой кучке. Таким образом, за одно взвешивание мы можем определить, в какой из трёх кучек находится фальшивая монета.

Теперь разделим эту кучку на три равные кучки по 9 монет и повторим процедуру. Определив кучку с фальшивой монетой, разделим её на три кучки (по 3 монеты) и за одно взвешивание определим кучку с фальшивой монетой.

Теперь из трёх монет мы за одно взвешивание определим фальшивую монету. В результате нам потребовалось 4 взвешивания.

Если монет было бы 80, то их надо было бы разбить на три кучки так: две кучки по 27 и одну с 26 монетами. Определить, в какой из них находится фальшивая монета, и т. д. В итоге нам также потребовалось бы 4 взвешивания.

Заметим общую закономерность.

- Если количество монет не превосходит 3, то нужно 1 взвешивание.

  Если количество монет больше 3, но не превосходит 3^2, то нужно 2 взвешивания.
- Если количество монет больше 3^2, но не превосходит 3^3, то нужно 3 взвешивания.
- Если количество монет больше 3^3, но не превосходит 3^4, то нужно 4 взвешивания.

Получаем, что, действуя аналогичным образом при количестве монет, равном n, где $3^{k-1} < n \leqslant 3^k$, мы произведём k взвешиваний.
Ответ. Да; 4; k, где $3^{k-1} < n \leqslant 3^k$.

Задача 4

6 Среди девяти монет две фальшивые. Определите фальшивые монеты за четыре взвешивания на двух чашечных весах без гирь, если известно, что обе фальшивые монеты весят одинаково, причём они тяжелее настоящих.

Идея. Разделить монеты на три кучки и сравнить вес двух из них.
Указание. Рассмотреть три кучки по 3 монеты.
Указание. Найти одну монету, отличающуюся по весу от двух других равных по весу монет, можно за одно взвешивание.

Решение. Разделим монеты на три кучки по 3 монеты в каждой. Сравним вес двух кучек.

Если они весят одинаково, то либо в каждой из них по одной фальшивой монете, либо обе фальшивые монеты в третьей кучке. Вторым взвешиванием сравним вес первой и третьей кучки. Если первая кучка тяжелее, то в третьей нет фальшивых монет, а в первой и второй — по одной фальшивой монете. В этом случае мы за одно взвешивание можем найти более тяжёлую монету в первой кучке (см. задачу № 1) и ещё за одно — во второй. Если же первая кучка легче третьей, то обе фальшивые монеты находятся в третьей кучке и за одно взвешивание мы можем определить более лёгкую монету из третьей кучки. Оставшиеся две более тяжёлые монеты и будут фальшивыми. В итоге в каждом из этих случаев нам понадобится не более чем 4 взвешивания.

Если же первые две кучки весят не одинаково, то в более тяжёлой есть как минимум одна фальшивая монета, а в более лёгкой все монеты настоящие. Сравним вес более тяжёлой кучки с весом ранее не взвешенной кучки. Если они весят одинаково, то в каждой из них по одной фальшивой монете, определить которую мы можем за одно взвешивание (см. задачу № 1). Если же более тяжёлая из первых двух кучек тяжелее третьей кучки, то в ней две фальшивые монеты и одна настоящая и определить более лёгкую монету мы можем за одно взвешивание. В итоге в каждом из этих случаев нам понадобится также не более чем 4 взвешивания.

Задача 5

7 Среди семи монет имеются две фальшивые монеты (одинакового между собой веса, но легче настоящих). Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь понадобится, чтобы выделить обе фальшивые монеты?

Идея. Разделить монеты на три кучки и сравнить вес двух из них.
Указание. Рассмотреть две кучки по 3 монеты и одну из одной монеты.
Указание. Найти одну монету, отличающуюся по весу от двух других равных по весу монет можно за одно взвешивание.

Решение. Разделим монеты на три кучки — две из трёх монет и одну из одной монеты. Сравним вес двух кучек из трёх монет. Если они весят одинаково, то в каждой из них по одной фальшивой монете, найти которую в каждой из двух кучек мы можем за одно взвешивание. Итого в этом случае нам понадобится три взвешивания.

Если же кучки весят не одинаково, то в более лёгкой есть как минимум одна фальшивая монета, а в более тяжёлой все монеты настоящие. Сравним вес настоящей монеты из тяжёлой кучки с весом ранее не взвешенной монеты. Если они весят одинаково, то последняя монета настоящая, а в более лёгкой кучке две фальшивые монеты, определить которые мы можем за одно взвешивание. Итого в этом случае нам понадобится три взвешивания. Если же последняя монета окажется легче настоящей монеты, то она фальшивая. В этом случае в лёгкой кучке одна фальшивая монета, определить которую мы можем за одно взвешивание. Следовательно, и в этом случае мы обойдёмся тремя взвешиваниями.
Ответ. Три.

Задача 6

5-6 а) Имеются чашечные весы без гирь и три одинаковые по внешнему виду монеты. Одна из монет фальшивая, причём неизвестно, легче она настоящих монет или тяжелее (настоящие монеты одного веса). Сколько надо сделать взвешиваний, чтобы определить фальшивую монету?

Идея. Рассмотреть случаи, когда две монеты весят одинаково и когда не одинаково.

Решение. Сначала сравним вес двух монет.

Если они весят одинаково, то третья монета фальшивая.

Если они имеют различный вес, то одна из них фальшивая, а третья монета — настоящая. Сравнив вес настоящей монеты с одной из двух других, определим фальшивую монету. Если вес настоящей монеты совпал с весом другой монеты, то другая монета тоже настоящая, а оставшаяся — фальшивая.

Если вес настоящей монеты не совпал с весом другой монеты, то эта другая монета — фальшивая.

В любом случае нам понадобилось не более двух взвешиваний.
Ответ. 2.

б) Решите эту же задачу (пункт «а») в случае, когда имеется 4 монеты.

Идея. Рассмотреть случаи, когда две монеты весят одинаково и когда не одинаково.

Решение. Сначала сравним вес двух монет. Рассмотрим два возможных варианта.

1. Если первая и вторая монеты весят одинаково, то обе они настоящие, а фальшивой монетой является либо третья монета, либо четвёртая. Теперь сравним первую и третью монеты. Если они весят одинаково, то обе они настоящие, а фальшивой является четвёртая монета. Если же первая и третья монеты весят не одинаково, то третья монета — фальшивая.

2. Если первая и вторая монеты имеют различный вес, то одна из них фальшивая, а третья и четвёртая монеты — настоящие. Сравним вес первой и третьей монет. Если они весят одинаково, то обе они настоящие, а вторая монета — фальшивая. Если первая и третья монеты весят не одинаково, то первая монета — фальшивая.

В любом случае нам понадобилось не более двух взвешиваний.
Ответ. 2.

Задача 7

6-7 Имеется 101 монета. Среди них 100 одинаковых настоящих монет и одна фальшивая, отличающаяся от них по весу. Необходимо выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая. Можно ли это сделать с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь?

Идея. Разделить монеты на три кучки и сравнить вес двух из них.
Указание. Рассмотреть две кучки по 50 монет и одну из одной монеты.

Решение. Разделим монеты на три кучки — две из 50 монет и одну из одной монеты. Сравним вес двух кучек по 50 монет каждая. Если они имеют равный вес, то оставшаяся монета фальшивая. В этом случае, сравнив вес фальшивой монеты с любой другой, мы определим, легче фальшивая монета, чем настоящая, или тяжелее.

Если же кучки имеют различный вес, то фальшивая монета в одной из этих кучек, а оставшаяся монета настоящая. Разделим пополам одну из кучек, например тяжёлую, и сравним вес двух получившихся кучек из 25 монет каждая. Если эти кучки весят одинаково, то фальшивая монета в лёгкой кучке из 50 монет и, следовательно, фальшивая монета легче настоящих. Если же кучки из 25 монет имеют различный вес, то среди них есть фальшивая монета и, следовательно, фальшивая монета тяжелее, чем настоящая.
Ответ. Да.

Задача 8

6-7 Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить хотя бы одну настоящую монету из 5 одинаковых по внешнему виду монет, если известно, что среди этих монет 3 настоящие и 2 фальшивые, одна из которых легче, а другая тяжелее настоящих монет?

Идея. Использовать то, что равный вес имеют только настоящие монеты.
Указание. Сначала сравнить вес двух монет, потом двух других монет. Перебрать возможные варианты.

Решение. Возьмём две монеты. Если они весят одинаково, то они обе настоящие и свою задачу мы выполнили.

Если они весят не одинаково, то как минимум одна из них фальшивая. Затем взвешиваем две другие монеты. Если они весят одинаково, то они обе настоящие и свою задачу мы выполнили. Если они весят не одинаково, то среди них как минимум одна фальшивая. Так как фальшивых монет всего две, то получается, что в первой паре монет одна фальшивая и во второй паре монет одна фальшивая. Следовательно, пятая монета точно настоящая.
Ответ. Можно.

Задача 9

7 Имеется 7 внешне одинаковых монет, среди которых 5 настоящих (все одинакового веса) и 2 фальшивые (одинакового между собой веса, но легче настоящих). Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выделить 3 настоящие монеты?

Идея. Разделить монеты на три кучки и сравнить вес двух из них.
Указание. Сделать две кучки по 3 монеты и одну из одной монеты.

Решение. Возьмём две кучки из трёх монет каждая.

Если они весят не одинаково, то в одной из них есть фальшивая монета, а в другой нет. Та кучка, которая оказалась тяжелее, состоит из трёх настоящих монет.

Если же кучки весят одинаково, то в каждой из них по одной фальшивой монете, а невзвешенная монета — настоящая. Значит, нам осталось найти две настоящие монеты. Сравним вес двух монет из первой кучки. Если они весят одинаково, то они обе настоящие и мы нашли три настоящие монеты. Если одна из них тяжелее, то она — настоящая, а вторая — фальшивая. Так как фальшивая монета в первой кучке одна, то третья монета из первой кучки настоящая и в этом случае мы тоже нашли три настоящие монеты.
Ответ. Можно.

Задача 10

7 а) Имеется 6 внешне одинаковых монет, среди которых 4 настоящие (все одинакового веса) и 2 фальшивые (обе легче настоящих, но различного веса). Можно ли с помощью трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь найти обе фальшивые монеты?

Идея. Использовать то, что равный вес имеют только настоящие монеты.
Указание. Разделить монеты на три пары и сравнить веса монет в каждой паре.

Решение. Разобьём все монеты на три пары и произведём в каждой из них по одному взвешиванию. Заметим, что хотя бы в одной паре обе монеты должны оказаться настоящими.

Рассмотрим возможные варианты для двух других пар: либо в обеих парах монеты окажутся разного веса, либо только в одной из них.

В первом случае в каждой из этих пар ровно по одной фальшивой монете, это более лёгкие монеты.

Во втором случае получается, что обе фальшивые монеты находятся в той паре, монеты которой имеют разный вес.
Ответ. Можно.

Задача 11

6-7 Имеется 10 мешков монет. Известно, что в одном из них монеты фальшивые. Настоящая монета весит 10 грамм, а фальшивая — 9 грамм. Как при помощи одного взвешивания на весах с делениями определить мешок с фальшивыми монетами?

Идея. Если из двух мешков взять одинаковое количество монет, то нельзя будет определить, в каком мешке были фальшивые монеты.
Указание. Взять из разных мешков разные кучки.

Решение. Возьмём из первого мешка одну монету, из второго две, из третьего три и т. д. и сравним полученный вес с тем весом, который должен был получиться, если бы все монеты были настоящими. Если вес меньше на 1 грамм, то фальшивая монета — из первого мешка, если вес меньше на 2 грамма, то — из второго и т. д.
Ответ. Взять из первого мешка 1 монету, из второго — 2 и т. д.

Задача 12

6-7 а) Имеется 4 гири с маркировками 1 г, 2 г, 3 г и 4 г. Одна из них дефектная: более лёгкая или более тяжёлая, чем указано. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь узнать, какая из гирь дефектная, и при этом определить, легче она или тяжелее, чем на этой гире указано?

Идея. Составить все возможные равенства из данных чисел (используя только сложение), сравнить веса соответствующих гирек, перебрать все возможные варианты получившихся равенств и неравенств.
Указание. Сравнить вес двух гирек с маркировками 1 г и 2 г с весом гири 3 г. Сравнить вес двух гирек с маркировками 1 г и 3 г с весом гири 4 г.

Решение. Произведём два взвешивания:

$$1\text{ г} + 2\text{ г} \bigvee 3\text{ г} \quad \text{и} \quad 1\text{ г} + 3\text{ г} \bigvee 4\text{ г}.$$

Рассмотрим все возможные варианты дефектных гирек и получающиеся равенства и неравенства при этих двух взвешиваниях.

Получаем, что

$$\begin{array}{lcl} 1\text{ г лёгкая} & \Longrightarrow & (<,<),\\ 1\text{ г тяжёлая} & \Longrightarrow & (>,>),\\ 2\text{ г лёгкая} & \Longrightarrow & (<,=),\\ 2\text{ г тяжёлая} & \Longrightarrow & (>,=),\\ 3\text{ г лёгкая} & \Longrightarrow & (>,<),\\ 3\text{ г тяжёлая} & \Longrightarrow & (<,>),\\ 4\text{ г лёгкая} & \Longrightarrow & (=,>),\\ 4\text{ г тяжёлая} & \Longrightarrow & (=,<). \end{array}$$

Так как во всех восьми случаях результаты взвешиваний получаются разными, то по ним можно однозначно определить дефектную гирьку, а также легче или тяжелее она настоящей.
Ответ. Можно.

Задача 13★

7 Есть сто монет достоинством 1, 2, 3, ..., 100 пиастров. Среди них не более 20 фальшивых, т. е. таких, что их вес в граммах не равен их достоинству. Можно ли при помощи чашечных весов без гирь определить, фальшива ли монета достоинством в 10 пиастров?

Идея. Составить равенства из данных чисел (используя только сложение) таким образом, чтобы число 10 встречалось в них много раз, а остальные числа — мало.
Указание. Прибавлять к 10 различные числа и рассматривать получившиеся равенства и неравенства.

Решение. Рассмотрим следующие равенства:

$$\begin{array}{rrcr} 1+10=11, & 2+10=12, & \ldots, & 9+10=19,\\ 20+10=30, & 21+10=31, & \ldots, & 29+10=39,\\ 40+10=50, & 41+10=51, & \ldots, & 49+10=59,\\ 60+10=70, & 61+10=71, & \ldots, & 69+10=79,\\ 80+10=90, & 81+10=91, & \ldots, & 89+10=99. \end{array}$$

Число 10 встречается здесь 49 раз, число 100 не встречается ни разу, а все остальные числа встречаются ровно по одному разу. Произведём 49 соответствующих этим равенствам взвешиваний.

Заметим, что если при взвешивании участвует только одна фальшивая монета, то равенство нарушается. Если же фальшивых монет две или три, то равенство может и сохраниться.

Так как фальшивых монет у нас максимум 20, то в случае если монета в 10 пиастров настоящая, нарушается не более 20 равенств.

Если же монета в 10 пиастров фальшивая, то не нарушаться могут только те равенства, которые содержат две или три фальшивые монеты, а таких равенств у нас может быть не более 19.

Получается, что если нарушается не более 20 равенств, то монета 10 пиастров настоящая, а если не менее 30 равенств, то фальшивая.
Ответ. Можно.

Задача 14

6-7 Имеется три предмета попарно различных масс. Всегда ли можно с помощью чашечных весов без гирь двумя взвешиваниями расположить все эти предметы в порядке возрастания массы?

Идея. Перебрать все возможные варианты двух взвешиваний и все возможные варианты расположения предметов.

Решение. Если мы хотим произвести только два взвешивания, то сначала нам придётся сравнить вес двух предметов, а затем одного ещё не взвешенного и одного из тех, которые уже взвесили.

1. Рассмотрим случай, когда сначала мы взвешиваем два предмета, а потом сравниваем вес более лёгкого из них с третьим предметом.

Если третий оказался ещё легче, то мы можем расположить эти предметы в порядке возрастания весов: третий, более лёгкий из первых двух, более тяжёлый из первых двух.

Если же третий не оказался легче, то для сравнения веса третьего и более тяжёлого из первых двух предметов нам понадобится ещё одно взвешивание.

2. Теперь рассмотрим случай, когда сначала мы взвешиваем два предмета, а потом сравниваем вес более тяжёлого из них с третьим предметом. Здесь нам понадобится ещё одно взвешивание, если третий оказался легче.

Получается, что, как бы мы ни проводили взвешивания, всегда можно придумать случай, при котором двух взвешиваний будет недостаточно.
Ответ. Не всегда.

Задача 15

6-7 а) Имеется четыре предмета попарно различных масс. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти самый тяжёлый и самый лёгкий предметы?

Идея. Так как массы предметов различны, нет смысла сравнивать вес кучек из нескольких предметов.
Указание. Сначала разделить предметы на пары и в каждой из них определить более лёгкий и более тяжёлый предметы.

Решение. Разобьём предметы на пары и найдём более лёгкий предмет в каждой паре. Заметим, что самый лёгкий предмет должен находиться среди двух отобранных, поэтому, произведя ещё одно взвешивание с этими предметами, мы найдём самый лёгкий предмет. Самый тяжёлый должен находиться среди двух других предметов и, произведя ещё одно взвешивание, мы найдём самый тяжёлый предмет.
Ответ. 4.

Задача 16

6-7 Имеется 68 монет, различных по весу. За 100 взвешиваний на чашечных весах без гирь найдите самую тяжёлую и самую лёгкую монеты.

Идея. Сначала сформировать два множества монет, в одном из которых гарантированно находится самая тяжёлая монета, а в другом — самая лёгкая монета. Затем в первом множестве монет найти самую тяжёлую монету, а во втором — самую лёгкую.
Указание. Разбить все монеты на пары, в каждой из которых определить лёгкую и тяжёлую монеты.

Решение. Возьмём пару монет, взвесим их и более тяжёлую определим в первую кучку, а более лёгкую — во вторую. Возьмём вторую пару монет и поступим аналогичным образом. В результате 34 взвешиваний мы получим две кучки: в первой гарантированно находится самая тяжёлая монета, во второй — самая лёгкая.

За 33 взвешивания мы можем определить самую тяжёлую монету из 34 монет первой кучки и ещё за 33 взвешивания — самую лёгкую монету из 34 монет второй кучки.

Итого мы уложились в $34 + 33 + 33 = 100$ взвешиваний.

Задача 17

6-7 а) Имеется 32 камня попарно различных масс. Докажите, что за 35 взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить самый тяжёлый и второй по массе камни.

Идея. Самый тяжёлый камень сравнивался по весу со вторым по тяжести.

Указание. Сначала найти самый тяжёлый камень из всех камней, а потом найти самый тяжёлый из тех, с которыми сравнивался вес самого тяжёлого камня.

Решение. Разобьём все камни на пары, в каждой паре найдём более тяжёлый камень и отложим его в отдельную кучку. На это понадобится 16 взвешиваний.

Теперь разобьём на пары камни из этой кучки, найдём в каждой паре более тяжёлый камень и отложим его в новую кучку. На это уйдёт 8 взвешиваний.

Проделав эту процедуру ещё три раза, мы найдём самый тяжёлый камень. На это нам понадобится $16+8+4+2+1 = 31$ взвешивание.

Так как самый тяжёлый камень обязательно сравнивался по весу со вторым по тяжести, то второй находится среди пяти камней, с которыми первый оказывался в парах.

Для того чтобы определить самый тяжёлый камень из этих пяти камней, нам понадобится 4 взвешивания.

Суммарно на всё уйдёт $31+4=35$ взвешиваний.

Задача 18

6-7 Имеются две красные, две жёлтые и две зелёные гири. В каждой паре одна из гирь немного легче другой. Все три тяжёлые гири весят одинаково. Все три лёгкие гири тоже весят одинаково. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах определить, какая из гирь в каждой паре тяжелее?

Идея. Взвешивать гири парами, т. е. по две на каждой чаше весов.

Указание. Гири одного из цветов положить на разные чашки весов.

Решение. Для удобства пронумеруем гири каждого из цветов: $К_1$, $К_2$, $Ж_1$, $Ж_2$, $З_1$, $З_2$. Произведём первое взвешивание:

$$К_1 + Ж_1 \bigvee К_2 + З_1.$$

Если $К_1 + Ж_1 = К_2 + З_1$, то вторым взвешиванием сравним $К_1 \bigvee К_2$. В случае $К_1 < К_2$ получаем, что $Ж_1 > З_1$. Следовательно, гири $К_1$, $Ж_2$, $З_1$ — лёгкие, а остальные — тяжёлые. В случае если $К_1 > К_2$, то наоборот.

Теперь рассмотрим случай, когда при первом взвешивании чашки весов не уравновесились. Пусть для определённости $К_1 + Ж_1 < К_2 + З_1$. В этом случае $К_1 < К_2$ и $Ж_1 \leqslant З_1$. Произведём второе взвешивание:

$$К_1 + К_2 \bigvee Ж_1 + З_1.$$

Если $К_1 + К_2 = Ж_1 + З_1$, то гири $Ж_1$ и $З_1$ разного веса и, с учётом $Ж_1 \leqslant З_1$, получаем, что $Ж_1 < З_1$. Следовательно, гири $К_1$, $Ж_1$, $З_2$ — лёгкие, а остальные — тяжёлые.

Если же $К_1 + К_2 < Ж_1 + З_1$, то гири $Ж_1$ и $З_1$ обе тяжёлые. Следовательно, гири $К_1$, $Ж_2$, $З_2$ — лёгкие, а остальные — тяжёлые.

Таким образом, за два взвешивания мы всегда можем определить, какая из гирь в каждой паре тяжелее.
Ответ. Да.

Задача 19

5-7 а) В ящике 25 кг гвоздей. Можно ли с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

Идея. С помощью чашечных весов мы можем разделить общий вес пополам.
Указание. Сначала разделить пополам вес $(25 + 1)$ кг на две равные кучки, затем разделить пополам одну из получившихся кучек.

Решение. Положим на одну чашу весов гирьку в 1 кг и разложим все гвозди так, чтобы весы уравновесились. Тогда на одной чаше весов будет 12 кг гвоздей, а на другой — 13 кг. Разделив пополам кучку из 12 кг, получим две кучки в 6 кг. Соединив кучку из 13 кг с кучкой из 6 кг, получим 19 кг гвоздей.
Ответ. Можно.

Задача 20

5-6 а) Разместите на трёх грузовиках 7 полных бочек, 7 бочек, наполненных наполовину, и 7 пустых бочек так, чтобы на всех грузовиках был одинаковый по массе груз.

Идея. Распределить всё таким образом, чтобы на каждом грузовике оказалось одинаковое число бочек и одинаковое количество груза.

Решение. Подсчитаем суммарное содержимое груза в бочках: 7 целых и 7 половинок. Если разделить это поровну, то на каждом грузовике должно оказаться 3 целых и 1 половина содержимого груза одной бочки.

Разместим на первом и втором грузовиках по три полные бочки, по одной, заполненной наполовину, и по три пустых.

Тогда для третьего грузовика останутся одна полная бочка, пять бочек, заполненных наполовину, и одна пустая бочка.
Ответ. На первом и втором грузовиках по три полные бочки, по одной, заполненной наполовину, и по три пустых; на третьем — одна полная бочка, пять бочек, заполненных наполовину, и одна пустая бочка.

Задача 21

5 Школьники Петя и Вася взвесили свои портфели на весах. Весы показали 3 кг и 2 кг. Когда же они поставили на весы оба портфеля, весы показали 6 кг. «Как же так? — удивился Петя. — Ведь $2 + 3$ не равняется 6». На что Вася ответил: «Разве ты не видишь, что у весов сдвинута стрелка?» Сколько же весят портфели на самом деле?

Идея. При каждом взвешивании истинный вес отличается от полученного на одно и то же число килограммов.

Решение. Назовём то количество килограммов, на которое отличается полученный вес от истинного при каждом взвешивании, погрешностью. Тогда 3 кг — это вес портфеля Пети плюс (или минус) погрешность, а 6 кг — это вес двух портфелей плюс (или минус) погрешность. Получается, что если мы из 6 кг вычтем 3 кг, то получим вес второго портфеля без погрешности. Следовательно, Васин портфель весит 3 кг. Так как весы при взвешивании Васиного портфеля показали 2 кг, то погрешность взвешивания равна 1 кг, и Петин портфель на самом деле весит 3 кг + 1 кг = 4 кг.
Ответ. 3 кг и 4 кг.

Задача 22

7 На суде в качестве вещественного доказательства предъявлено 14 монет. Суд знает, что фальшивые монеты весят одинаково и настоящие монеты весят одинаково, но фальшивые монеты легче настоящих. Эксперт обнаружил, что монеты с 1-й по 7-ю фальшивые, а с 8-й по 14-ю настоящие. Может ли он доказать это за три взвешивания на чашечных весах без гирь?

Идея. Взвешивать монеты таким образом, чтобы на чашах было одинаковое количество монет, но на одной из них ровно на одну настоящую монету больше, чем на другой.
Указание. Первым взвешиванием определить одну настоящую монету и одну фальшивую, вторым — ещё две настоящие

и две фальшивые, а третьим взвешиванием — оставшиеся четыре настоящие и четыре фальшивые монеты.

Решение. Для удобства пронумеруем настоящие и фальшивые монеты.

Первым взвешиванием определим одну настоящую и одну фальшивую монеты:

$$Н_1 > Ф_1.$$

Произведём второе взвешивание:

$$Ф_1 + Н_2 + Н_3 > Н_1 + Ф_2 + Ф_3.$$

Это взвешивание должно убедить судей в том, что монеты $Н_2$ и $Н_3$ — настоящие, а $Ф_2$ и $Ф_3$ — фальшивые, поскольку в любом другом случае это неравенство выполняться не может.

Осталось определиться с остальными монетами. Произведём третье взвешивание:

$$Ф_1+Ф_2+Ф_3+Н_4+Н_5+Н_6+Н_7 > Н_1+Н_2+Н_3+Ф_4+Ф_5+Ф_6+Ф_7.$$

Это взвешивание должно убедить судей в том, что монеты $Н_4$, $Н_5$, $Н_6$ и $Н_7$ — настоящие, а $Ф_4$, $Ф_5$, $Ф_6$ и $Ф_7$ фальшивые, поскольку в любом другом случае это неравенство выполняться не может.

Ответ. Да.

Задача 23

6-7 а) За сколько вопросов можно наверняка отгадать целое число, заключённое между 1 и 64, если на вопросы отвечают только «да» и «нет»?

Идея. Придумать такой вопрос, чтобы после получения ответа на него количество возможных вариантов уменьшалось в два раза.

Решение. Если спросить, находится ли загаданное число в первой половине данных чисел, расположенных по возрастанию, то при положительном ответе число возможных вариантов сузится до первой половины данных чисел, а при отрицательном — до второй. То есть число вариантов в любом случае уменьшится в два раза, т. е. до 32.

Если спросить, находится ли загаданное число в первой половине уже отобранных чисел, расположенных по возрастанию, то при положительном ответе число возможных вариантов сузится до первой половины отобранных чисел, а при отрицательном — до второй. То есть число вариантов в любом случае уменьшится ещё в два раза, т. е. до 16.

Задав ещё раз такой вопрос, уменьшим количество возможных вариантов до 8, затем до 4, затем до 2 и, наконец, до одного варианта.

В итоге нам понадобится задать 6 вопросов.

Ответ. За 6 вопросов.

Задача 24

6-7 Разложите по семи кошелькам 127 рублёвых монет так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков (другими словами, отдав содержимое одного или нескольких кошельков).

Идея. Любое число можно представить в виде сумм степеней двойки.

Указание. Набирать суммы последовательно, начиная с 1 рубля.

Решение. Так как мы должны иметь возможность отдать 1 р., то один из кошельков должен быть с 1 р.

Во второй кошелёк положим 2 р. Для того чтобы набрать 3 р., мы можем использовать два первых кошелька.

В третий кошелёк положим 4 р. Теперь мы можем набрать любое количество рублей до 7 р. включительно.

В четвёртый кошелёк положим 8 р. Теперь мы можем набрать любое количество рублей до 15 р. включительно.

В пятый кошелёк положим 16 р. Теперь мы можем набрать любое количество рублей до 31 р. включительно.

В шестой кошелёк положим 32 р. Теперь мы можем набрать любое количество рублей до 63 р. включительно.

В седьмом кошельке останется 64 р. И мы сможем набрать любое количество рублей до 127 р. включительно.

Таким образом, мы представили число 127 в виде суммы $1+2+4+8+16+32+64$ и любое число, меньшее 127, можно представить в виде суммы нескольких слагаемых из этого набора.

Ответ. $127 = 1+2+4+8+16+32+64$.

Задача 25

6-7 а) Какие веса должны иметь четыре гири, чтобы с их помощью на чашечных весах можно было взвесить любое число килограммов от 1 до 40? (Гири можно класть на обе чашки весов.)

Идея. Так как разрешается класть гири и к взвешиваемому грузу, то любой вес можно выразить с помощью степеней тройки.
Указание. Набирать суммы последовательно, начиная с 1 кг.

Решение. Самая маленькая гиря должна весить 1 кг, чтобы мы смогли взвесить 1 кг.

Так как нам разрешается класть гири на разные чаши весов, то следующую по величине гирю мы можем взять весом не 2 кг, а 3 кг. В этом случае мы можем набрать любой вес от 1 кг до 4 кг, поскольку $3 - 1 = 2$, а $3 + 1 = 4$.

Теперь выберем гирю максимального веса, с помощью которой можно получить 5 кг. Это будет гиря весом в 9 кг, так как $5 = 9 - 4$. Заметим, что с помощью уже выбранных гирь весом в 1, 3 и 9 кг мы можем получить любой вес до 13 кг включительно.

Теперь выберем гирю максимального веса, с помощью которой можно получить 14 кг. Это будет гиря весом в 27 кг, так как $14 = 27 - 13$. Заметим, что с помощью уже выбранных гирь весом в 1, 3, 9 и 27 кг мы можем получить любой вес до 40 кг включительно.

Таким образом, мы представили число 40 в виде суммы $1 + 3 + 9 + 27$ и любое число, меньшее 40, можно представить в виде сумм и разностей нескольких слагаемых из этого набора.
Ответ. Например, 1, 3, 9 и 27 кг.

Задача 26

6-7 В гостиницу приехал путешественник. У него была лишь серебряная цепочка из 7 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он расплачивался одним звеном цепочки.

а) Какое звено цепочки надо распилить, чтобы прожить в гостинице 7 дней и ежедневно расплачиваться с хозяином? (Хозяин может давать сдачу звеньями, полученными ранее.)

Идея. Представить число 7 в виде суммы трёх слагаемых, с помощью которых можно набрать любое число от 1 до 7.
Указание. Сделать распил таким образом, чтобы можно было набрать 1, 2 и 4 звена.

Решение. Распиленное звено уже само по себе даёт нам возможность расплатиться за 1 день, поэтому специально отсоединять одно звено не надо. Для того чтобы расплатиться за два дня, отсоединим два звена, т. е. распилим третье звено.

В результате у нас будут кусочки цепочки, состоящие из одного, двух и четырёх звеньев, которыми можно набрать любое число звеньев от 1 до 7.
Ответ. Третье.

б)★ Сколько звеньев пришлось бы распилить, если бы путешественник жил в гостинице 100 дней и имел цепочку из 100 звеньев?

Идея. Представить число 100 в виде минимального числа слагаемых, с помощью которых можно набрать любое число от 1 до 100, с учётом того, что каждый распил добавляет одно одинокое звено.
Указание. Попробовать сначала обойтись одним распилом, затем двумя и т. д.

Решение. Сначала покажем, что одним распилом не обойтись. Сделав один распил, мы получим одно одинокое звено. Для того чтобы расплатиться за два дня, нам придётся отсоединить два звена, т. е. распилить третье звено. В итоге получим следующее разбиение числа 100 на слагаемые:

$$100 = 2 + 1 + 97.$$

Видно, что с помощью этих слагаемых мы не сможем получить большинство чисел от 1 до 100 (например, число 4).

Попробуем обойтись двумя распилами. Сделав два распила, мы получим два одиноких звена. Ими мы можем расплатиться за два дня, а для того, чтобы заплатить за три, нам придётся отсоединить три звена, т. е. распилить четвёртое звено. В результате этими звеньями (два одиноких и кусок в три звена) мы сможем расплатиться за 5 дней. Для того чтобы расплатиться за 6 дней, вторым распилом нам придётся отсоединить кусок в 6 звеньев. Этими кусками цепочки $(3+1+6+1)$ мы сможем расплатиться уже за 11 дней. В итоге получим следующее разбиение числа 100 на слагаемые:

$$100 = 3 + 1 + 6 + 1 + 89.$$

Видно, что с помощью этих слагаемых мы не сможем получить большинство чисел от 1 до 100 (например, число 12).

Теперь попробуем обойтись тремя распилами. Сделав три распила, мы получим три одиноких звена. Ими мы можем расплатиться за три дня, а для того, чтобы заплатить за 4 дня, нам придётся отсоединить кусок в 4 звена, т. е. распилить пятое звено. В результате этими кусками цепочки (3 одиноких звена и кусок в 4 звена) мы сможем расплатиться за 7 дней. Для того чтобы расплатиться за 8 дней, вторым распилом нам придётся отсоединить кусок в 8 звеньев. Этими кусками цепочки $(4+1+8+1+1)$ мы сможем расплатиться уже за 15 дней.

Для того чтобы расплатиться за 16 дней, третьим распилом нам придётся отсоединить кусок в 16 звеньев. Этими кусками цепочки $(4+1+8+1+16+1)$ мы сможем расплатиться уже за 31 день. В итоге получим следующее разбиение числа 100 на слагаемые:

$$100 = 4+1+8+1+16+1+69.$$

Видно, что с помощью этих слагаемых мы не сможем получить некоторые из чисел от 1 до 100 (например, число 32).

Теперь попробуем обойтись четырьмя распилами. Сделав 4 распила, мы получим 4 одиноких звена. Ими мы можем расплатиться за 4 дня, а для того, чтобы заплатить за 5 дней, нам придётся отсоединить кусок в 5 звеньев, т. е. распилить шестое звено. В результате этими кусками цепочки (4 одиноких звена и кусок в 5 звеньев) мы сможем расплатиться за 9 дней. Для того чтобы расплатиться за 10 дней, вторым распилом нам придётся отсоединить кусок в 10 звеньев. Этими кусками цепочки $(5+1+10+1+1+1)$ мы сможем расплатиться уже за 19 дней.

Для того чтобы расплатиться за 20 дней, третьим распилом нам придётся отсоединить кусок в 20 звеньев. Этими кусками цепочки $(5+1+10+1+20+1+1)$ мы сможем расплатиться уже за 39 дней.

Для того чтобы расплатиться за 40 дней, четвёртым распилом нам придётся отсоединить кусок в 40 звеньев. Этими кусками цепочки $(5+1+10+1+20+1+40+1)$ мы сможем расплатиться уже за 79 дней. В итоге получим следующее разбиение числа 100 на слагаемые:

$$100 = 5+1+10+1+20+1+40+1+21.$$

Теперь, если нам понадобится расплатиться за 21 день, мы отдадим кусок цепочки из 21 звена. А так как из оставшегося набора кусков цепочки мы можем набрать любое число звеньев от 1 до 79, то получается, что мы можем набрать любое число звеньев от 1 до 100.

Ответ. Четыре.

Задача 27

6-7 Имеется 4 рубля монетами 1 коп., 2 коп., 5 коп., 10 коп. Докажите, что этими монетами можно набрать 3 рубля.

Идея. Набрать 1 рубль, тогда из 4 рублей останутся как раз 3 рубля.

Указание. Попробовать набрать 1 рубль монетами одного номинала.

Решение. Попробуем набрать 1 рубль монетами по 10 коп. Если выходит, то задача решена, если нет, то получается, что 10-копеечных монет меньше чем на рубль.

Тогда попробуем набрать 1 рубль монетами по 5 коп. Если выходит, то задача решена, если нет, то получается, что 5-копеечных монет тоже меньше чем на рубль.

Затем попробуем набрать 1 рубль монетами по 2 коп. Если выходит, то задача решена, если нет, то получается, что 2-копеечных монет тоже меньше чем на рубль.

Так как всего у нас 4 рубля, то оставшихся монет (т. е. по 1 коп.) у нас больше чем на 1 рубль, следовательно, именно ими мы и можем набрать 1 рубль.

Задача 28

$\boxed{7}$ Имеется 6 одинаковых с виду гирек массой 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г соответственно. На гирьках сделали надписи: 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г и 6 г. Можно ли двумя взвешиваниями на чашечных весах без других гирек проверить, что нет неправильных надписей?

Идея. Разделить все гирьки на кучки и убедиться в том, что в каждой кучке находятся гирьки с соответствующими надписями (возможно в другом порядке).

Указание. Рассмотреть кучки: $1 + 2 + 3$, $4 + 5$ и 6.

Решение. Произведём первое взвешивание:

$$1 + 2 + 3 \bigvee 6.$$

Если равенство выполняется, то гирька с надписью 6 г — настоящая, поскольку только число 6 можно представить в виде суммы трёх чисел из заданного набора. Кучка из гирек с надписями 1, 2 и 3 действительно состоит из таких гирек (возможно в другом порядке), поскольку число 6 можно представить в виде суммы трёх слагаемых только с помощью этих чисел. Следовательно, кучка из 4 и 5 тоже состоит из гирек с весами 4 и 5 (возможно в другом порядке).

Произведём второе взвешивание:

$$1 + 6 < 3 + 5.$$

Гирька с надписью 6 — настоящая, а гирьки с надписями 3 и 5 мы взяли из первой и второй кучек соответственно. Если бы они не соответствовали своим надписям, то вес правой чашки весов был бы меньше или равен 7 и тогда бы неравенство не выполнялось, так как на левой чашке весов находится как минимум 7 г. Получается, что гирька с надписью 1 г тоже настоящая, так как иначе на левой чашке было бы больше или равно 8 г.

Следовательно, надписи на гирьках 1 г, 3 г, 4 г, 5 г и 6 г соответствуют весу гирек. Для оставшейся гирьки весом 2 г остаётся единственный вариант надписи 2 г, значит, её надпись тоже соответствует действительности.
Ответ. Да.

Задача 29★

7 Из двенадцати монет одна фальшивая, отличная по весу от настоящих монет. Можно ли при помощи трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая?

Идея. Если при одном взвешивании равных по количеству монет кучек монета находится в более лёгкой кучке, а при другом взвешивании — в более тяжёлой кучке, то эта монета не может быть фальшивой.
Указание. Сначала разбить все монеты на три равные кучки и сравнить вес двух из них.

Решение. Для удобства пронумеруем все монеты. Произведём первое взвешивание:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \bigvee M_5 + M_6 + M_7 + M_8.$$

Здесь возможно два варианта.

1) Если весы находятся в равновесии, то фальшивая монета в третьей кучке и мы должны найти её за два взвешивания. Для этого сравним две монеты из этой кучки между собой. Если они весят одинаково, то фальшивая среди оставшихся двух монет и найти её можно за одно взвешивание, сравнив одну из двух подозрительных монет с настоящей. Если же две взятые из третьей кучки монеты весят не одинаково, то определить из них фальшивую можно, сравнив одну из них с настоящей.

2) Теперь рассмотрим случай, когда первые две кучки весят не одинаково. Пусть для определённости

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 < M_5 + M_6 + M_7 + M_8.$$

В этом случае фальшивая монета среди них, а в третьей кучке монеты настоящие.

Произведём второе взвешивание:

$$M_1 + M_2 + M_5 \bigvee M_3 + M_4 + M_6.$$

Здесь возможно два варианта.

1. Если они весят одинаково, то фальшивая монета среди M_7 и M_8, сравнив одну из них с настоящей монетой, мы поймём, какая именно из монет фальшивая.

2. Теперь рассмотрим случай, когда кучки весят не одинаково.

Первый случай:

$$M_1 + M_2 + M_5 < M_3 + M_4 + M_6.$$

Заметим, что M_5 при первом взвешивании лежала на более тяжёлой чаше весов, а при втором — на более лёгкой, следовательно, она не может быть фальшивой.

Из тех же соображений фальшивыми не могут быть монеты M_3 и M_4. Получается, что либо M_1 или M_2 — лёгкие фальшивые монеты, либо M_6 — тяжёлая фальшивая монета. Для того чтобы определить фальшивую монету, достаточно сравнить M_1 и M_2. Если они весят одинаково, то M_6 фальшивая, если нет, то фальшивой является более лёгкая из них.

Второй случай:

$$M_1 + M_2 + M_5 > M_3 + M_4 + M_6.$$

Заметим, что M_6 при первом взвешивании лежала на более тяжёлой чаше весов, а при втором — на более лёгкой, следовательно, она не может быть фальшивой.

Из тех же соображений фальшивыми не могут быть монеты M_1 и M_2. Получается, что либо M_3 или M_4 — лёгкие фальшивые монеты, либо M_5 — тяжёлая фальшивая монета. Для того чтобы определить фальшивую монету, достаточно сравнить M_3 и M_4. Если они весят одинаково, то M_5 фальшивая, если нет, то фальшивой является более лёгкая из них.

Таким образом, за три взвешивания мы всегда можем определить фальшивую монету.

Ответ. Да.

Задача 30★

$\boxed{7}$ Из 13 монет одна фальшивая, отличная по весу от настоящих монет. Можно ли при помощи трёх взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая?

Идея. Разбить все монеты на три кучки и постараться частично использовать результат предыдущей задачи.

Указание. Сравнить две кучки по 4 монеты каждая.

Решение. Для удобства пронумеруем все монеты. Произведём первое взвешивание:

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \bigvee M_5 + M_6 + M_7 + M_8.$$

Здесь возможно два варианта.

1) Если первые две кучки весят не одинаково, то фальшивая монета среди них, а в третьей кучке монеты настоящие. Найти в этом случае фальшивую монету из восьми мы можем так же, как в предыдущей задаче в пункте 2).

2) Если весы находятся в равновесии, то фальшивая монета в третьей кучке и мы должны найти её за два взвешивания. Для этого сравним три монеты из этой кучки с тремя монетами из первой кучки.

Рассмотрим все три возможных варианта.

1. Если они весят одинаково, то фальшивая монета среди двух оставшихся от третьей кучки и, сравнив одну из них с настоящей монетой, мы поймём, какая именно из монет фальшивая.

2. Если три настоящие монеты легче трёх монет из третьей кучки, то фальшивая монета находится среди трёх монет третьей кучки и она тяжелее настоящих. Третьим взвешиванием сравним вес двух монет из этих трёх подозрительных. Если они весят одинаково, то третья — фальшивая. Если они весят не одинаково, то фальшивая та, которая тяжелее.

3. Если три настоящие монеты тяжелее трёх монет из третьей кучки, то фальшивая монета находится среди трёх монет третьей кучки и она легче настоящих. Третьим взвешиванием сравним вес двух монет из этих трёх подозрительных. Если они весят одинаково, то третья — фальшивая. Если они весят не одинаково, то фальшивая та, которая легче.

Таким образом, за три взвешивания мы всегда можем определить фальшивую монету.

Ответ. Да.

5. Принцип крайнего

Задача 1

5-6 Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разного размера и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает громко барабанить. Какое наибольшее число зайчат сможет начать барабанить?

Идея. В качестве крайнего рассмотреть зайчонка с самым маленьким барабаном.
Указание. Рассмотреть случай, когда самый маленький барабан и самые маленькие палочки достались одному зайчонку.

Решение. Зайчонок, которому достанется самый маленький барабан, не будет барабанить, поэтому все семь зайчат одновременно барабанить не будут.

Также не будет барабанить зайчонок, которому достались самые маленькие палочки.

Если самый маленький барабан и самые маленькие палочки достались одному зайчонку, то он один не будет барабанить, а все остальные будут, поскольку у каждого из них и барабан больше, чем у этого зайчонка, и палочки длиннее.
Ответ. 6 зайчат.

Задача 2

5-6 В турнире по волейболу, прошедшем в один круг, 20 процентов всех команд не выиграли ни одной игры. Сколько было команд?

Идея. Определить максимальное количество команд, не выигравших ни одной игры.
Указание. В турнире каждая команда сыграла ровно по одной игре со всеми остальными командами.

Решение. В качестве крайней рассмотрим команду, которая не выиграла ни одной игры. Все остальные команды выиграли хотя бы одну игру, поскольку играли с этой крайней командой. Значит, крайняя команда одна и она составляет 20 процентов всех команд. Следовательно, команд всего 5.
Ответ. 5.

Задача 3

[6-7] а) Дано шесть натуральных чисел. Все они различны и дают в сумме 22. Найти эти числа и доказать, что других нет.

Идея. Рассмотреть минимальные значения шести различных чисел.
Указание. Проанализировать то, как может отличаться набор с суммой в 22 от минимального набора.

Решение. Минимальные значения шести различных натуральных чисел — это 1, 2, 3, 4, 5, 6. В сумме они дают 21. Значит, в искомом наборе одно из чисел должно быть на 1 больше, а остальные должны быть такими же.

Заметим, что, увеличив одно из первых пяти чисел на 1, мы должны увеличить и следующие за ним числа. А так как нам нужно увеличить только одно число, то надо, чтобы оно было последним. Так мы получим единственный подходящий нам набор 1, 2, 3, 4, 5, 7.
Ответ. 1, 2, 3, 4, 5, 7.

Задача 4

[6-7] Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

Идея. В качестве крайнего рассмотреть самое большое число.
Указание. Определить, какое число может стоять рядом с самым большим числом.

Решение. Пусть рядом с числом 16 стоит число x, тогда $x + 16$ должно являться квадратом натурального числа. Так как $1 \leqslant x \leqslant 15$, то

$$17 \leqslant x + 16 \leqslant 31.$$

В этом промежутке находится только один квадрат натурального числа, а именно 5^2. Следовательно, у числа 16 может быть только один сосед $x = 9$ и числа от 1 до 16 нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

Теперь докажем, что числа от 1 до 16 можно записать в строку так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа. Для этого достаточно привести пример:

$$16,\ 9,\ 7,\ 2,\ 14,\ 11,\ 5,\ 4,\ 12,\ 13,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 1,\ 8.$$

Ответ. 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.

Задача 5

6-7 а) Можно ли расставить по кругу все целые числа от -7 до 7 (включая нуль) так, чтобы у каждого числа произведение двух его соседей было неотрицательным? Если да — приведите пример, если нет — объясните почему.

Идея. Проанализировать знаки чисел, расположенных через один.
Указание. Перенумеровать числа, начиная с нуля, и рассмотреть знаки чисел с чётными и нечётными номерами.

Решение. Пронумеруем все числа, начиная с нуля:

$$a_1, a_2, \ldots, a_{15}, \quad a_1 = 0.$$

Так как у каждого числа произведение двух его соседей должно быть неотрицательным, то числа с чётными номерами должны быть одного знака. То есть числа $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{14}$ либо все положительные, либо все отрицательные.

Из аналогичных соображений числа с номерами a_3, a_5, a_7, ..., a_{15} также одного знака. Согласно условию задачи у нас есть и положительные, и отрицательные числа, значит, знак чисел a_3, a_5, a_7, ..., a_{15} противоположен знаку чисел с чётными номерами.

Если же расположить все числа на окружности, то рядом с числом $a_1 = 0$ окажутся числа a_2 и a_{15}, которые имеют разные знаки, и получится, что произведение двух соседей числа a_1 отрицательно, что противоречит условию. Следовательно, расставить по кругу все целые числа от -7 до 7 (включая нуль) так, чтобы у каждого числа произведение двух его соседей было неотрицательным, нельзя.
Ответ. Нет.

Задача 6

6-7 По окружности записаны 30 чисел. Каждое из этих чисел равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 200. Найти эти числа.

Идея. В качестве крайнего рассмотреть самое большое число.
Указание. Так как каждое число равно модулю разности двух чисел, то все числа неотрицательны.

Решение. Пусть A — самое большое из чисел на окружности, если таких чисел несколько, то возьмём любое из них. Занумеруем все числа по часовой стрелке, начиная с $a_1 = A$.

Согласно выбору a_1 получим

$$a_1 \geqslant a_2, \quad a_1 \geqslant a_3.$$

Согласно условию задачи $a_1 = |a_2 - a_3|$. Из неотрицательности чисел следует, что

$$|a_2 - a_3| \leqslant \max\{a_2, a_3\}.$$

Для того чтобы не возникло противоречия с тем, что a_1 — самое большое число, последнее неравенство должно обратиться в равенство:

$$|a_2 - a_3| = \max\{a_2, a_3\}.$$

Это возможно только в том случае, когда одно из чисел a_2 или a_3 равно нулю. Так как $a_1 = |a_2 - a_3|$, то другое число должно быть равно A. В итоге мы получим тройку подряд идущих чисел $A, A, 0$ или $A, 0, A$.

Так как $a_2 = |a_3 - a_4|$, то в каждом из этих случаев $a_4 = A$. Рассуждая подобным образом, получим, что последовательность 30 чисел состоит из десяти троек $A, A, 0$ или $A, 0, A$. Поскольку сумма всех чисел равна 200,

$$20A = 200 \quad \Longleftrightarrow \quad A = 10.$$

На окружности это будет выглядеть так: два подряд идущих числа 10, один 0, затем два подряд идущих числа 10, один 0 и т. д.

Ответ. $10, 10, 0, \ldots, 10, 10, 0$.

Задача 7

(6-7) а) Можно ли расставить на окружности 100 натуральных чисел так, чтобы каждое из них было либо суммой, либо разностью соседних?

Идея. В качестве крайнего рассмотреть нечётное число и исследовать остальные числа на чётность/нечётность.

Указание. Соседями нечётного числа должны быть числа разной чётности.

Указание. Если нечётных чисел нет, то все числа можно поделить на два.

Решение. Заметим, что сумма и разность двух чисел одинаковой чётности (либо оба числа чётны, либо оба нечётны) является чётным числом.

Пусть среди заданных чисел есть хотя бы одно нечётное число. Поскольку каждое из чисел является либо суммой, либо разностью соседних, соседями этого нечётного числа будут числа разной чётности, т. е. одно из них чётное, другое нечётное. Рассмотрим два подряд идущих нечётных числа: справа и слева от них должны стоять чётные числа. А соседями эти чётных чисел могут являться только два нечётных числа. Получаем, что порядок расположения чисел может быть только таким:

$$\ldots\ \text{Ч Н Н Ч Н Н Ч Н Н Ч}\ \ldots$$

Получается, что в этом случае все числа разбиваются на тройки, состоящие из двух нечётных чисел и одного чётного числа. Но это невозможно, поскольку всего 100 чисел, а 100 на три не делится.

Если же на окружности нет нечётных чисел, то можно свести задачу к предыдущей, рассмотрев в два раза меньшие числа. Если среди полученных чисел опять не окажется нечётных чисел, то можно проделать эту процедуру несколько раз, пока хотя бы одно из чисел не получится нечётным.
Ответ. Нельзя.

Задача 8

7 а) Можно ли расставить натуральные числа от 1 до 1978 в строку так, чтобы любые два числа, стоящие рядом, и любые два числа, расположенные через одно, были взаимно просты?

Идея. Рассмотреть чётные числа.
Указание. Два чётных числа не являются взаимно простыми.
Указание. Найти максимальное количество чётных чисел среди трёх подряд идущих в полученной расстановке чисел.

Решение. Предположим, что нам удалось расставить натуральные числа от 1 до 1978 в строку так, чтобы любые два числа, стоящие рядом, и любые два числа, расположенные через одно, были взаимно просты.

Рассмотрим первую тройку чисел. В ней может быть только одно чётное число, иначе нарушается условие задачи, так как два чётных числа (не взаимно простых) будут располагаться либо рядом, либо через одно.

Рассмотрим вторую тройку чисел. В ней также может быть лишь максимум одно чётное число.

Все числа от 1 до 1978 можно разбить на 659 троек и одно отдельно стоящее число. Значит, чётных чисел максимум может быть $659 + 1 = 660$ штук. Но реально среди данных 1978 чисел чётными являются 989 чисел. Противоречие, следовательно, предложенного в условии задачи расположения данных чисел не существует.
Ответ. Нет.

Задача 9

6-7 В клетках шахматной доски стоят натуральные числа так, что каждое равно среднему арифметическому своих соседей. Сумма чисел, стоящих в углах доски, равна 16. Найдите число, стоящее на поле $e2$.

Идея. Рассмотреть самое большое число.
Указание. Среднее арифметическое нескольких чисел не превосходит каждое из этих чисел.

Решение. Рассмотрим самое большое число. Если их несколько, то рассмотрим одно из них. Так как это число является средним арифметическим своих соседей, то оно не может быть больше, чем каждое из них, следовательно, оно равно всем им. Получается, что каждое из соседних чисел также является самым большим и также равно всем своим соседям и т. д. В результате получим, что все числа на шахматной доске равны между собой.

Поскольку сумма чисел, стоящих в углах доски, равна 16, каждое из них равно 4. Значит, все числа равны 4 и число, стоящее на поле $e2$, равно 4.
Ответ. 4.

Задача 10

6-7 а) Отряд пионеров выстроен прямоугольником. В каждой шеренге отмечается самый высокий, и из этих пионеров выбирается самый низкий. В каждом ряду отмечается самый низкий, и из них выбирается самый высокий. Какой из этих двух пионеров выше?[1)]

Идея. Рассмотреть пионера, стоящего в той же шеренге, что и самый низкий из высоких, и в том же ряду, что и самый высокий из низких.

Решение. Пусть рост самого низкого из самых высоких пионеров равен A, а рост самого высокого из самых низких равен B.

Пусть рост пионера, стоящего в той же шеренге, что и пионер с ростом A, и в том же ряду, что и пионер с ростом B, равен C. Заметим, что $A > C$ и $C > B$, следовательно, $A > B$,

[1)] Имеется в виду, что два указанных пионера — самый высокий из низких и самый низкий из высоких — должны быть разными. В шеренге стоят плечом к плечу, в ряду стоят в затылок друг другу.

т. е. самый низкий из высоких выше самого высокого из низких.
Ответ. Самый низкий из высоких выше.

Задача 11

6-7 У Пети всего 28 одноклассников. У каждых двух из 28 различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

Идея. Рассмотреть двух одноклассников: того, у которого больше всего друзей, и того, у которого меньше всего друзей.
Указание. Перебрать все возможные варианты числа друзей у Петиных одноклассников.

Решение. 1) Пусть в классе каждый из ребят с кем-то дружит. Проанализируем, сколько друзей может быть у Петиных одноклассников. Так как у каждого из них различное число друзей, то это будут числа

$$1, 2, 3, \ldots, 28.$$

Заметим, что у самого дружелюбного 28 друзей, т. е. он дружит со всеми, включая Петю. А самый недружелюбный дружит только с одним человеком, самым дружелюбным. Следовательно, самый недружелюбный не дружит с Петей.

Если исключить из рассмотрения самого дружелюбного и самого недружелюбного, то у Пети останется 26 одноклассников, у которых на 1 меньше друзей, чем было (поскольку мы не рассматриваем самого дружелюбного). Следовательно, у оставшихся 26 Петиных одноклассников будет по-прежнему различное число друзей и это будут числа

$$1, 2, 3, \ldots, 26.$$

Здесь также самый дружелюбный дружит с Петей, а самый недружелюбный нет.

Подобную процедуру мы можем проделать 14 раз, и в каждой из 14 пар исключённых из рассмотрения один из одноклассников дружит с Петей, а другой нет.

В этом случае получается, что у Пети ровно 14 друзей.

2) Если же в классе есть человек, который ни с кем не дружит, то не будет и человека, который дружит со всеми. Так как у каждого из Петиных одноклассников различное число друзей, то это будут числа

$$0, 1, 2, \ldots, 27.$$

Так же как и в прошлом случае, последовательно исключая самого дружелюбного и самого недружелюбного, получим

14 пар учеников, в каждой из которых один из одноклассников дружит с Петей, а другой нет.

В этом случае также получается, что у Пети ровно 14 друзей.

Ответ. 14.

Задача 12

6-7 а) Пятизначное число назовём *неразложимым*, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

Идея. Рассмотреть самые маленькие из чисел указанного вида.

Указание. Среди ста подряд расположенных чисел есть число, делящееся на сто.

Решение. Самое маленькое трёхзначное число — это 100. Произведение двух таких чисел даёт самое маленькое пятизначное число:

$$100 \cdot 100 = 10\,000.$$

Следующее по величине трёхзначное число — это 101. Поэтому следующее за числом 10 000 разложимое число — это

$$10\,100 = 100 \cdot 101.$$

Получается, что между числами 10 000 и 10 100 нет разложимых чисел и все 99 чисел, расположенные между ними, являются неразложимыми.

Заметим, что каждое сотое пятизначное число оканчивается на два нуля, значит, его можно представить в виде произведения трёхзначного числа и числа 100. Следовательно, больше чем 99 неразложимых чисел подряд расположено быть не может.

Ответ. 99.

Задача 13

6-7 Из двухсот чисел: 1, 2, 3, 4, ..., 200 произвольно выбрали сто одно число. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

Идея. Рассмотреть нечётные числа этого множества.

Указание. Представить каждое число в виде произведения нечётного числа на степень двойки.

Решение. Среди указанных двухсот чисел ровно сто нечётных чисел. Так как каждое число можно представить в виде произведения нечётного числа на степень двойки, то среди выбранных чисел (их 101) будут два числа с одинаковым нечётным множителем. Следовательно, большее из них будет делиться на меньшее.

Задача 14

6-7 В одной из школ в течение года 20 раз проводился литературный кружок. На каждом занятии присутствовало ровно пять школьников, причём никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза. Докажите, что всего на кружке побывало не менее 20 школьников.

Идея. Рассмотреть самого активного ученика.
Указание. Разобрать два случая: количество его посещений больше либо равно 5 и меньше чем 5.

Решение. Пусть самый активный ученик посетил хотя бы 5 занятий. Так как никакие два школьника не встречались на кружке более одного раза, то остальные присутствующие на этих пяти занятиях ученики были разными. То есть помимо самого активного ученика на этих пяти занятиях присутствовало $5 \cdot 4 = 20$ учеников. В этом случае на кружке действительно побывало не менее 20 школьников.

Теперь рассмотрим случай, когда самый активный ученик не посетил пяти занятий. Тогда и менее активные ученики посетили как максимум 4 занятия. Так как всего посещений было $20 \cdot 5 = 100$ (5 учеников на 20 занятиях), то количество учеников не может быть меньше чем

$$100 : 4 = 25.$$

Следовательно, в этом случае также на кружке побывало не менее 20 школьников.

Задача 15

6-7 Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причём для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдётся кружок, в котором занимается не менее двух третей всего класса.

Идея. Рассмотреть случай, когда нет такого кружка, куда ходит весь класс, и показать, что тогда кружков ровно три.
Указание. Сначала рассмотреть самый большой кружок.

Решение. Рассмотрим самый большой кружок, назовём его математическим. Если туда ходит весь класс, то всё уже доказано, поэтому рассмотрим случай, когда в самый большой кружок ходят не все.

Рассмотрим ученика, который не ходит в математический кружок, назовём его Петровым. Так как каждый ученик ходит на какой-то кружок, то и Петров ходит на какой-то кружок, назовём этот кружок физическим.

Петров не может ходить в этот кружок вместе со всеми математиками, иначе математический кружок не будет самым многочисленным. Значит, с кем-то из математиков он ходит ещё в один кружок, например литературный (лирики).

Поскольку Петров занимается не более чем в двух кружках, математики не могут заниматься больше ни в каких других кружках. Значит, каждый математик может ещё быть только либо физиком, либо лириком, а Петров является физиком и лириком одновременно.

То, что было сказано про Петрова, можно сказать и про любого другого ученика, который не является математиком: каждый из таких учеников — физик и лирик одновременно (и больше ни в какие кружки не ходит). Следовательно, кружков всего три и каждый ученик ходит ровно в два кружка.

Пусть в классе всего n человек, значит, посещений кружков $2n$. Если в каждом из трёх кружков одинаковое количество учеников, то в каждом из них по $2n/3$. Если же учеников в кружках не поровну, то в самом большом кружке будет заниматься более двух третей всего класса.

Задача 16

6-7 Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причём никакие два из них не собрали одинаковое число грибов. Докажите, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.

Идея. Рассмотреть трёх грибников, собравших больше всего грибов.

Указание. Проанализировать возможное количество грибов у грибника, собравшего наименьшее число грибов из этой тройки.

Решение. Пусть первый грибник собрал a_1 грибов, второй — a_2 и т. д., причём

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7$$

и
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 100.$$
Покажем, что
$$a_5 + a_6 + a_7 \geqslant 50.$$

1) Если $a_5 \geqslant 16$, то $a_6 \geqslant 17$ и $a_7 \geqslant 18$. В этом случае
$$a_5 + a_6 + a_7 \geqslant 16 + 17 + 18 > 50.$$
То есть при $a_5 \geqslant 16$ утверждение доказано.

2) Если же $a_5 \leqslant 15$, то
$$a_4 \leqslant 14, \quad a_3 \leqslant 13, \quad a_2 \leqslant 12, \quad a_1 \leqslant 11$$
и
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 50.$$
Так как всего собрано 100 грибов, то в этом случае
$$a_5 + a_6 + a_7 \geqslant 50,$$
что и требовалось доказать.

Задача 17

7 За круглым столом сидят 25 человек. Им роздано по две карточки. На каждой из 50 карточек написано одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, 25$, причём каждое из чисел встречается дважды. Раз в минуту по сигналу ведущего каждый из сидящих передаёт своему соседу справа ту из своих карточек, на которой написано меньшее число. Если же у кого-то на руках окажутся две карточки с одинаковыми номерами, то процесс заканчивается. Докажите, что это рано или поздно произойдёт.

Идея. Проанализировать процесс оседания на руках игрока карточек с большими числами.
Указание. Рассмотреть сначала игроков с карточкой с самым большим числом, потом с карточкой со вторым по величине числом и т. д.

Решение. Если у кого-то из игроков есть две одинаковые карточки, то процесс игры сразу завершён. Поэтому рассмотрим случай, когда у каждого из игроков карточки с разными числами.

Рассмотрим двух игроков с карточками с числом 25. Так как 25 — самое большое из рассматриваемых чисел, то в течение всей игры эти карточки останутся у этих игроков.

Теперь рассмотрим двух игроков с карточками с числом 24. Если эти два игрока не являются игроками с карточками 25, то карточки с числом 24 не будут передаваться, так как к ним в пару не может прийти карточка с бо́льшим числом. Если же у игрока с карточкой 25 находится и карточка с 24, то он передаст её другому игроку. Заметим, что карточка с 24 может передаваться максимум два раза, а потом она осядет на руках игрока, так как не будет карточек с бо́льшим номером, которые не осели.

Если обе карточки с 24 осели у одного игрока, то процесс завершился. Рассмотрим ситуацию, когда все 4 карточки с номерами 25 и 24 находятся у четырёх разных игроков.

Тогда рассмотрим две карточками с числом 23. Если они у одного игрока, то процесс завершился. Если карточка с 23 находится у игрока с карточкой 25 или 24, то она осядет максимум за 4 хода.

Действуя аналогичным образом, дойдём до карточек с числом 13. Если к этому моменту игра не завершилась, то карточки с числами 25, 24, ..., 14 находятся у 24 различных человек. Заметим, что никто из этих 24 человек выиграть не может, поскольку любая пришедшая к ним карточка будет с меньшим числом и её придётся передать дальше.

Рассмотрим последнего игрока, у которого нет карточки с числами 25, 24, ..., 14, и покажем, что в такой ситуации выиграет именно он.

Так как первые 24 игрока будут только передавать дальше пришедшие к ним карточки, то, если последний игрок не выиграет раньше, к нему придёт карточка с числом 13. Эта карточка осядет у него, так как будет самой большой из передающихся карточек. После этого уже все 25 игроков будут только передавать пришедшие к ним карточки. В результате к последнему игроку придёт вторая карточка с числом 13 и игра завершится.

Задача 18

7 Рассмотрим конечное множество единичных квадратов на плоскости таких, что их стороны параллельны осям координат (квадраты могут пересекаться) и для любой пары квадратов расстояние между их центрами не больше 2. Докажите, что существует единичный квадрат (не обязательно из данного множества) со сторонами, параллельными осям, пересекающийся хотя бы по одной точке с каждым квадратом данного множества.

Идея. Заключить множество центров всех квадратов в квадрат со стороной 2.
Указание. Провести оси координат удобным образом.

Решение. Проведём ось абсцисс через центр самого нижнего квадрата, а ось ординат — через центр самого левого квадрата. Тогда центры всех квадратов будут лежать в большом квадрате с вершинами в точках $(0;0)$, $(2;0)$, $(2;2)$, $(2;0)$.

Расположим единичный квадрат со сторонами, параллельными осям, с центром в точке $(1;1)$. Он будет пересекаться с любым единичным квадратом, центр которого расположен в большом квадрате.

Задача 19

$\boxed{7}$ В клетках доски $n \times n$ произвольно расставлены числа от 1 до n^2. Докажите, что найдутся две такие соседние клетки, имеющие общую вершину или общую сторону, что стоящие в них числа отличаются не меньше чем на $n+1$.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. В качестве крайних рассмотреть клетки с числами 1 и n^2.

Решение. Рассмотрим две фиксированные клетки доски $n \times n$. Двигаясь из одной фиксированной клетки переходами на соседнюю, до второй фиксированной клетки можно добраться не более чем за $n-1$ шагов. Если на каждом из таких шагов разница между числами в соседних клетках будет меньше $n+1$, то разница между числами в двух фиксированных клетках будет строго меньше

$$(n-1)(n+1) = n^2 - 1.$$

Если же в качестве фиксированных клеток взять клетки с числами 1 и n^2, то разница между этими числами будет равна ровно $n^2 - 1$. Следовательно, все соседние числа отличаться менее чем на $n+1$ не могут. То есть найдутся две такие соседние клетки, что стоящие в них числа отличаются не меньше чем на $n+1$.

6. Оценка + пример

Задача 1

5-6 На сковородке помещается два кусочка хлеба. На поджаривание кусочка с одной стороны требуется 1 минута. За какое минимальное количество минут можно обжарить 3 кусочка хлеба с обеих сторон?

Идея. Найти минимально возможное время использования сковородки и привести соответствующий пример.
Указание. Подсчитать время работы сковородки, если на ней будет жариться по два кусочка хлеба в каждый момент времени.

Решение. На поджаривание одного кусочка хлеба с двух сторон требуется две минуты. Значит, на поджаривание трёх кусочков с обеих сторон по отдельности потребовалось бы шесть минут. На сковородке помещается два кусочка хлеба, значит, минимальное время для поджаривания трёх кусочков — три минуты. Приведём пример, на котором эта оценка реализуется:

- первая минута — жарим первый и второй кусочки с одной стороны,
- вторая минута — жарим второй кусочек с обратной стороны и третий кусочек с одной стороны,
- третья минута — жарим третий и первый кусочки с обратных сторон.

Ответ. За 3 минуты.

Задача 2

5-6 Четыре кузнеца должны подковать пять лошадей. Какое наименьшее время они могут затратить на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову пять минут? (Лошадь не может стоять на двух ногах.)

Идея. Наименьшее время работы получится при работе всех кузнецов без перерывов.
Указание. Подсчитать время работы кузнецов и привести пример, когда они работают одновременно.

Решение. У пяти лошадей $5 \cdot 4 = 20$ подков. Если на каждую подкову тратить пять минут, то всего понадобится $20 \cdot 5 = 100$ минут. Так как кузнецов четверо, то, работая без перерывов, они смогут подковать всех лошадей за $100 : 4 = 25$ минут.

Осталось привести пример их работы без простоя. Например, можно сделать так. Первые 5 минут простаивает первая лошадь, а кузнецы подковывают остальных четырёх лошадей. Следующие 5 минут простаивает вторая лошадь и т. д. В результате все четыре кузнеца работают без простоя, а каждая из лошадей простаивает по 5 минут.
Ответ. 25 минут.

Задача 3

5-6 В пять горшочков, стоящих в ряд, Кролик налил три килограмма мёда (не обязательно в каждый и не обязательно поровну). Винни-Пух может взять любые два горшочка, стоящие рядом. Какое наибольшее количество мёда сможет гарантированно съесть Винни-Пух?

Идея. Привести такой пример расположения горшочков с мёдом, что в любых двух соседних горшочках будет ровно 1 кг мёда. Показать, что при любом расположении горшочков с мёдом Винни-Пух точно может получить не менее 1 кг мёда.
Указание. Рассмотреть случай, когда два горшочка пусты, а в остальных мёда поровну.

Решение. Пронумеруем горшочки и заметим, что если в горшочки с номерами 1, 3 и 5 положить по 1 кг мёда, то Винни-Пух, взяв любые два стоящие рядом горшочка, возьмёт один пустой и один с 1 кг.

Теперь покажем, что при любом расположении горшочков с мёдом Винни-Пух точно может получить не менее 1 кг мёда. Если в горшочках с номерами 1 и 2 мёда меньше 1 кг и в горшочках с номерами 3 и 4 мёда меньше 1 кг, то в горшочке с номером 5 мёда не менее 1 кг. В этом случае, выбрав горшочек с номером 5, Винни-Пух получит не менее 1 кг мёда.
Ответ. 1 кг.

Задача 4

5-6 а) Винни-Пух, Сова, Кролик и Пятачок съели 70 бананов, причём каждому досталось хотя бы по одному банану. Винни-Пух съел больше, чем каждый из остальных; Сова и Кролик вместе съели 45 бананов. Сколько бананов съел Пятачок?

Идея. Определить минимально возможное число бананов, съеденных Винни-Пухом.

Указание. Винни-Пух съел бананов больше, чем Сова и Кролик, которые вместе съели 45 бананов.

Решение. Сова и Кролик вместе съели 45 бананов, значит, один из них съел не менее 23 бананов. Так как Винни-Пух съел больше всех, то он съел не менее 24 бананов.

На двоих с Пятачком они съели

$$70 - 45 = 25 \text{ бананов.}$$

Следовательно, Пятачок съел не более одного банана. Поскольку каждому досталось хотя бы по одному банану, Пятачок съел ровно один банан.

Ответ. 1.

Задача 5

5-6 За́мок имеет вид семиугольника, в каждой вершине которого находится сторожевая башня. Каждую из семи стен замка охраняют стражники в башнях, находящихся в концах этой стены. Какое наименьшее количество стражников нужно разместить в башнях, чтобы каждая стена охранялась не менее чем семью стражниками?

Идея. Определить минимально возможное число стражников.

Указание. Подсчитать число взглядов на стены и учесть то, что каждый стражник может смотреть на две стены.

Решение. На каждую из семи стен смотрят не менее чем 7 стражников. Следовательно, всего будет не менее чем $7 \cdot 7 = 49$ взглядов на стены. Каждый стражник может смотреть на две стены, значит, стражников должно быть не менее 25.

Осталось привести пример, подтверждающий, что 25 стражников достаточно.

Можно на башни с номерами 1, 3, 5 разместить по три стражника, а на башни с номерами 2, 4, 6, 7 разместить по четыре стражника. В этом случае каждая стена охраняется не менее чем семью стражниками.

Ответ. 25 стражников.

Задача 6

5-6 а) Каким наибольшим количеством монет в 3 коп. и 5 коп. можно набрать сумму 37 коп.?

Идея. Определить минимально возможное число пятаков.

Указание. Посмотреть, можно ли обойтись вообще без пятаков, одним пятаком, двумя и т. д.

Решение. Заметим, что, чем больше монет в 3 коп. и меньше монет в 5 коп., тем больше общее число монет.

Число 37 не делится на 3, поэтому 37 коп. нельзя набрать только трёхкопеечными монетами. Значит, один пятак точно будет. Оставшиеся 32 коп. также нельзя набрать только трёхкопеечными монетами, значит, необходим ещё один пятак.

При наличии двух пятаков оставшиеся 27 коп. можно набрать трёхкопеечными монетами. Это и будет самый оптимальный вариант, поскольку в любом другом случае количество пятаков будет больше и, следовательно, количество монет — меньше.

Ответ. 11 монет — 9 трёхкопеечных монет и 2 пятака.

Задача 7

5-6 Электронные часы показывают цифры часов и минут (например, 15:30). Какая наибольшая сумма цифр может быть на таких часах?

Идея. Оценить сумму цифр в записи числа часов и в записи числа минут.

Указание. Максимальное число часов на часах — 23, максимальное число минут на часах — 59.

Решение. Наибольшее значение первой цифры — 2, второй — 9, значит, сумма первых двух цифр не может быть больше 11. Сумма равна 11 только при первой цифре 2 и второй цифре 9, но число часов не может быть равным 29. Следовательно, сумма первых двух цифр меньше 11. Сумма, равная 10, достигается на 19 часах.

Наибольшее значение третьей цифры — 5, четвёртой — 9, значит, сумма первых двух цифр не может быть больше 14. Сумма, равная 14, достигается на 59 минутах.

В итоге наибольшая сумма цифр — это $10 + 14 = 24$.

Ответ. 24.

Задача 8

5-6 В верхнем ящике шкафа лежат 5 одинаковых белых перчаток на правую руку и 10 одинаковых белых перчаток на левую руку. В нижнем ящике шкафа лежат 10 одинаковых чёрных перчаток на правую руку и 15 одинаковых чёрных перчаток на левую руку. Содержимое ящиков перемешали и положили в пакет. Какое наименьшее количество перчаток нужно вытащить из пакета наугад (не заглядывая в пакет), чтобы среди них оказалась полноценная пара одноцветных перчаток?

Идея. Сначала привести пример.
Указание. Рассмотреть наихудший вариант.

Решение. Если мы вытащили 10 белых перчаток на левую руку и 15 чёрных перчаток на левую руку, то пары мы ещё не получили. Однако, если мы вытащим ещё одну перчатку, то она будет либо белой на правую руку, либо чёрной на правую руку. В любом случае мы получим пару.

Получается, что даже в наихудшем случае среди 26 перчаток найдётся хотя бы одна пара.
Ответ. 26.

Задача 9

5-6 а) Рома на каждой следующей перемене съедал конфет больше, чем на предыдущей, и за все 5 перемен съел 31 конфету. Сколько конфет он мог съесть на четвёртой перемене, если на первой он съел в три раза меньше, чем на пятой?

Идея. Действовать перебором, оценками отсекая неподходящие варианты.
Указание. Рассмотреть случай, когда Рома на первой перемене съел 1 конфету, 2 конфеты и т. д.

Решение. Из условия задачи получаем, что количества конфет, съеденных Ромой на переменах, — это пять различных натуральных чисел, расположенных по возрастанию, причём последнее число в три раза больше первого и сумма всех чисел равна 31. Рассмотрим возможные варианты.

1) Если на первой перемене Рома съел 1 конфету, то на пятой — 3 конфеты. Между числом 1 и числом 3 нет трёх различных натуральных чисел, значит, этот вариант не подходит.

2) Если на первой перемене Рома съел 2 конфеты, то на пятой — 6 конфет. Между числом 2 и числом 6 расположены числа 3, 4 и 5:

$$2 < 3 < 4 < 5 < 6,$$

но сумма всех пяти чисел равна 20, значит, этот вариант тоже не подходит.

3) Если на первой перемене Рома съел 3 конфеты, то на пятой — 9 конфет. Попробуем расположить между числом 3 и числом 9 три натуральных числа

$$3 < \ldots < \ldots < \ldots < 9$$

таким образом, чтобы сумма всех пяти чисел равнялась 31.

Заметим, что четвёртое число может быть равно либо 6, либо 7, либо 8. Если оно равно 6, то возможен только один вариант:

$$3 < 4 < 5 < 6 < 9,$$

но сумма всех пяти чисел будет равна 27, значит, этот вариант не подходит.

Если четвёртое число равно 7, то, даже рассмотрев максимальные значения остальных чисел:

$$3 < 5 < 6 < 7 < 9,$$

получим, что сумма всех пяти чисел будет равна 30, значит, этот вариант тоже не подходит.

Остаётся единственный вариант, когда четвёртое число равно 8. Это может быть при

$$3 < 5 < 6 < 8 < 9 \quad \text{или} \quad 3 < 4 < 7 < 8 < 9.$$

Покажем, что других вариантов нет.

Если на первой перемене Рома съел 4 конфеты, то на пятой — 12 конфет. Заметим, что, даже рассмотрев минимальные значения остальных чисел, а именно

$$4 < 5 < 6 < 7 < 12,$$

получим сумму

$$4 + 5 + 6 + 7 + 12 = 34 > 31.$$

Если бы на первой перемене Рома съел более 4 конфет, то на всех пяти переменах он бы съел более 34 конфет, а нас это не устраивает.

Следовательно, возможен только один вариант — 8 конфет на четвёртой перемене.

Ответ. 8 конфет.

Задача 10

6-7 Составьте из прямоугольников $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3, \ldots, 1 \times 13$ прямоугольник, каждая сторона которого больше 1.

Идея. Использовать значение площади полученного прямоугольника.

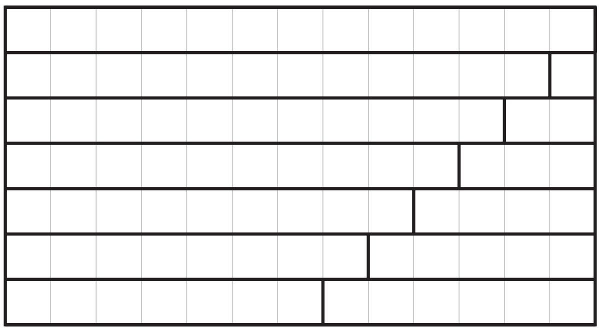
Указание. Найти сумму площадей данных прямоугольников и разложить это число на множители.

Решение. Площадь полученного прямоугольника равна сумме площадей исходных прямоугольников, т. е.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 13 = \frac{1 + 13}{2} \cdot 13 = 7 \cdot 13.$$

Следовательно, новый прямоугольник должен быть размера 7×13. Такой прямоугольник можно составить из семи полосок длиной 13 и толщиной в одну клеточку:

1-я полоска — прямоугольник 1×13,
2-я полоска — прямоугольники 1×12 и 1×1,
3-я полоска — прямоугольники 1×11 и 1×2,
4-я полоска — прямоугольники 1×10 и 1×3,
5-я полоска — прямоугольники 1×9 и 1×4,
6-я полоска — прямоугольники 1×8 и 1×5,
7-я полоска — прямоугольники 1×7 и 1×6.



Ответ. Прямоугольник 7×13.

Задача 11

6-7 а) Какое наибольшее число трёхклеточных уголков можно вырезать из клетчатого квадрата 8×8?

Идея. Получить оценку максимального количества уголков, подсчитав площади фигур.
Указание. При подборе примера удобно использовать то, что из двух уголков можно составить прямоугольник размером 2×3.

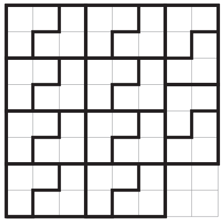
Решение. Заметим, что из квадрата 8×8 нельзя вырезать 22 уголка, поскольку их суммарная площадь была бы больше площади квадрата:

$$3 \cdot 22 > 8 \cdot 8.$$

Покажем, что 21 уголок вырезать можно.

Для удобства сначала разрежем квадрат на прямоугольники размером 2×3, каждый из которых потом можно разрезать на два уголка.

Это можно сделать, например, так:



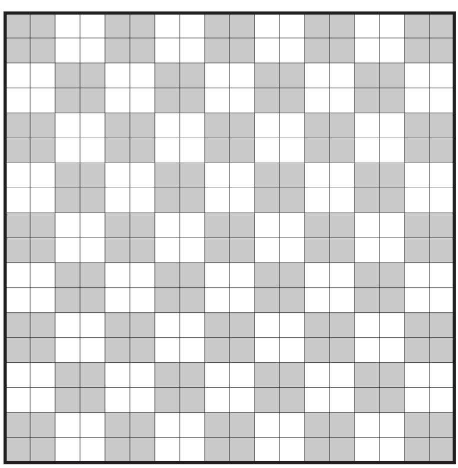
а из оставшегося квадрата размером 2×2 вырезать ещё один уголок.
О т в е т. 21.

Задача 12

6-7 Какое наибольшее количество прямоугольников 1×4 можно вырезать из квадрата 18×18?

И д е я. Получить оценку максимального количества прямоугольников с помощью метода раскраски.
У к а з а н и е. Разбить большой квадрат на квадраты размером 2×2 и раскрасить их в шахматном порядке.
У к а з а н и е. Проанализировать, из скольких клеток 1×1 и какого цвета будет состоять один прямоугольник размером 1×4.

Р е ш е н и е. Если разбить большой квадрат на квадраты размером 2×2 и раскрасить их в шахматном порядке, то любой прямоугольник размером 1×4, вырезанный из этого квадрата, будет состоять из двух белых клеток 1×1 и двух чёрных. Следовательно, в отрезанных прямоугольниках будет поровну белых и чёрных клеток.

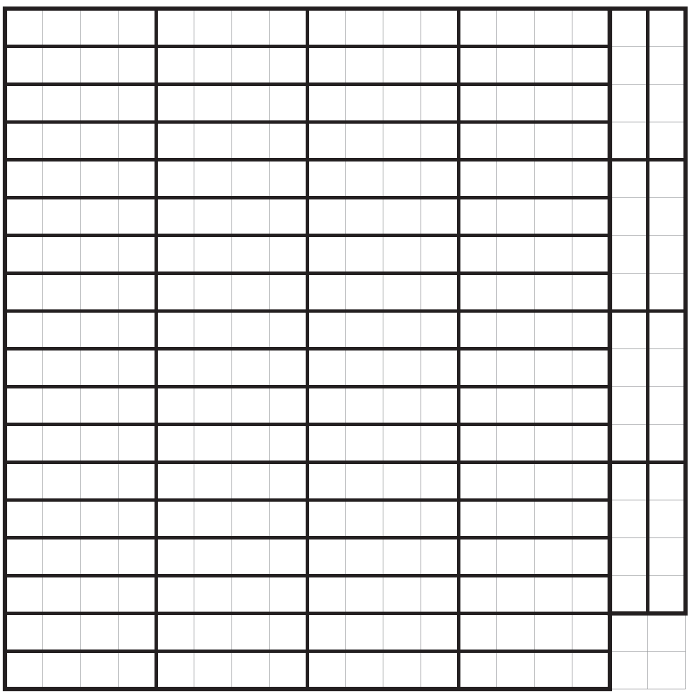


Так как всего у нас 41 квадрат 2×2 чёрного цвета и 40 квадратов 2×2 — белого, то после вырезания прямоугольников останутся как минимум 4 чёрные клетки.

Осталось предъявить вариант, при котором все клетки, кроме четырёх, будут использованы.

Рассмотрим такой способ. Сначала отрежем от исходного квадрата 4 полосы шириной 4 и высотой 18, каждую из которых разрежем на 18 прямоугольников 1×4.

От оставшейся после этого полосы шириной 2 и длиной 18 отрежем 4 прямоугольника шириной 2 и длиной 4, которые, в свою очередь, разрежем на прямоугольники 1×4.

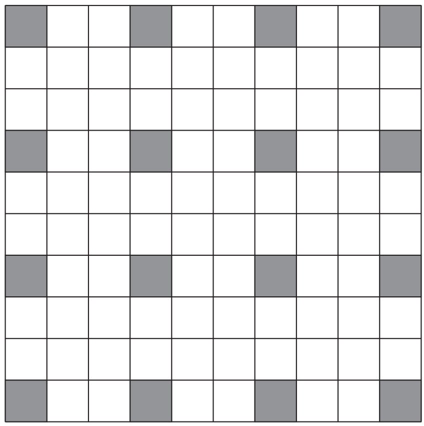


В результате мы получим 80 прямоугольников размером 1×4.
Ответ. 80.

Задача 13

6-7 Квадрат 10×10 хотят покрыть квадратами 3×3 со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата. Каким наименьшим числом квадратов 3×3 можно обойтись?

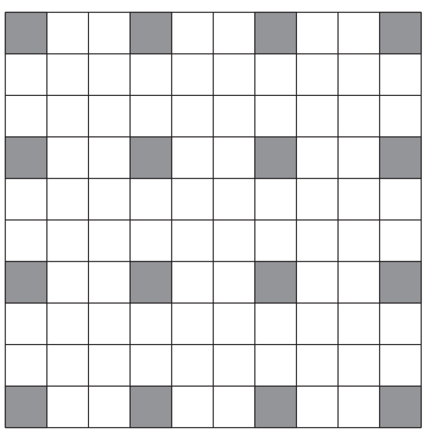
Идея. Получить оценку максимального количества квадратов с помощью метода раскраски.
Указание. Раскрасить клеточки квадрата следующим образом:



Указание. Подсчитать число квадратов 3×3, которыми можно покрыть все чёрные клеточки.

Решение. Так как квадрат 12×12 можно покрыть 16 квадратами 3×3, то 16-ти квадратов хватит для того, чтобы покрыть квадрат 10×10.

Осталось показать, что меньшего количества квадратов 3×3 будет недостаточно.



При указанном способе раскраски квадрата у нас 16 чёрных клеточек. Заметим, что один квадрат 3×3 может покрыть

только одну чёрную клеточку, следовательно, квадратов должно быть как минимум 16.
Ответ. 16.

Задача 14

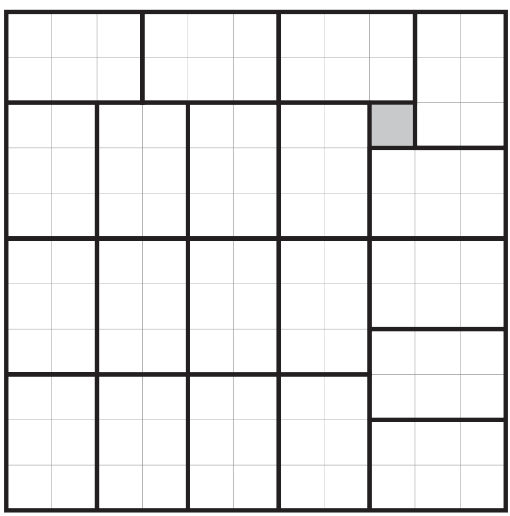
6-7 Какое наибольшее количество кораблей 1×2 можно уложить на доске 10×10 без нарушения правил «морского боя»[1]?

Идея. Свести задачу к укладке прямоугольников размером 2×3.
Указание. Окружить каждый корабль защитным слоем толщиной в полклетки и уложить увеличенные корабли на квадратной доске, тоже увеличенной на полклетки с каждой стороны.

Решение. Если мы увеличим исходный квадрат 10×10 на полклетки с каждой стороны и окружим каждый корабль защитным слоем в полклетки, то задача сведётся к следующей: разместить на доске 11×11 без наложений как можно больше прямоугольников 2×3.

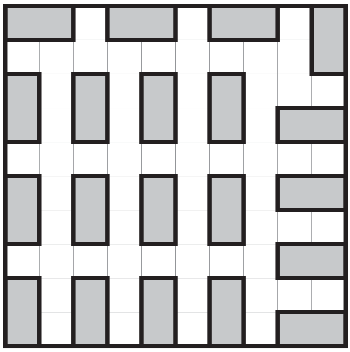
Так как общая площадь поля равна $11 \cdot 11 = 121$, то больше 20 прямоугольников площадью $2 \cdot 3 = 6$ мы разместить не сможем.

Приведём пример, подтверждающий возможность размещения 20 прямоугольников на доске 11×11:



[1] По правилам «морского боя» два корабля не могут соприкасаться ни по стороне, ни по вершине.

Возвращаясь к доске размером 10×10, получаем, что на ней можно уложить максимум 20 кораблей 1×2, например, таким образом:



Ответ. 20.

Задача 15

6-7 Поле для игры в «морской бой» имеет форму квадрата 8×8. На нём стоит один корабль, имеющий форму прямоугольника 1×4. Какое наименьшее количество выстрелов надо сделать, чтобы

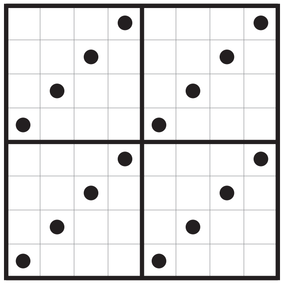
а) ранить корабль;

б) однозначно определить положение корабля?

Идея. Разбить всё поле на прямоугольники 1×4.
Указание. Пример удобно сначала построить в квадрате 4×4, а потом сдвигами продолжить на квадрат 8×8.

Решение. а) Для того чтобы обнаружить корабль размером 1×4, надо чтобы в каждый прямоугольник доски размером 1×4 был произведён хотя бы один выстрел.

Так как доску размером 8×8 можно разбить на 16 прямоугольников размером 1×4, то всего должно быть произведено как минимум 16 выстрелов. Это была оценка, а в качестве примера можно рассмотреть выстрелы по следующим четырём квадратам:



б) После попадания в корабль достаточно ещё одного выстрела, чтобы определить точное местоположение корабля.
Ответ. а) 16; б) 17.

Задача 16

5-6 Какое наименьшее число ладей могут побить всю шахматную доску?

Идея. Определить, сколько ладей могут побить все вертикали (вертикальные полосы 1×8).
Указание. Показать, что минимальное количество ладей равно количеству вертикалей.

Решение. Доска размером 8×8 состоит из восьми вертикалей (вертикальных полос 1×8), поэтому для того, чтобы все вертикали были побиты, в каждой вертикали должна стоять хотя бы одна ладья, значит, ладей должно быть как минимум 8.

Покажем, что восьми ладей достаточно, чтобы побить всю доску. Например, можно разместить все ладьи в верхнем ряду или на главной диагонали.
Ответ. 8 ладей.

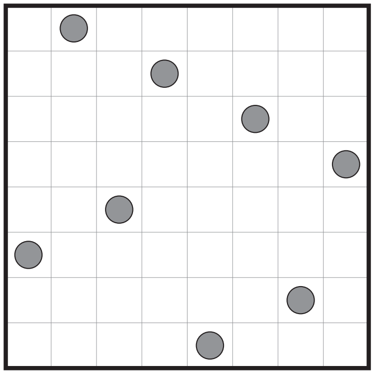
Задача 17

6-7 Какое наибольшее количество ферзей можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга? (Ферзь — фигура, которая бьёт на любое количество клеток по вертикали, горизонтали или диагонали и в любом направлении.)

Идея. Определить, сколько ферзей можно поставить на одну вертикаль.
Указание. Показать, что максимальное количество ферзей равно количеству вертикалей.

Решение. Доска размером 8×8 состоит из восьми вертикалей, а так как на одну вертикаль нельзя поставить более одного ферзя, то более восьми ферзей быть не может.

Приведём пример расположения восьми ферзей на доске так, чтобы они не били друг друга:



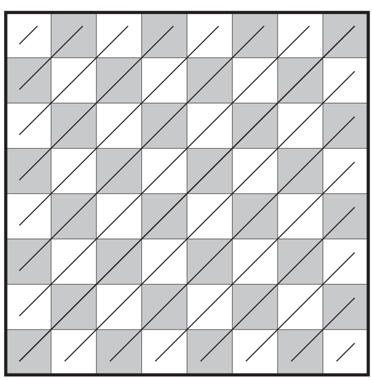
Ответ. 8 ферзей.

Задача 18

6-7 Какое наибольшее количество слонов можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Идея. На каждой диагонали не может стоять более одного слона.
Указание. Рассмотреть диагонали одного из двух видов и попробовать на каждой из них расположить слона.

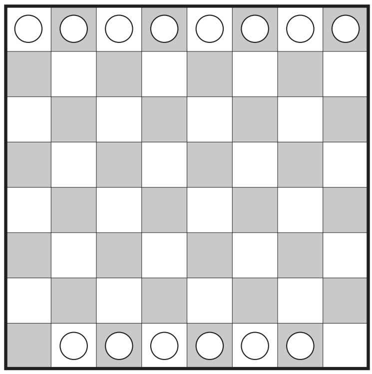
Решение. Заметим, что на шахматной доске всего 15 диагоналей, идущих слева направо снизу вверх:



Так как на одной диагонали не может стоять более одного слона, то слонов не более 15.

Рассмотрим крайние из диагоналей, отмеченных на рисунке. Это две диагонали, каждая из которых состоит из одной клетки, причём эти клетки являются концами большой диагонали, идущей слева направо сверху вниз. Следовательно, в обе эти клетки мы не можем поставить слонов и слонов может быть не более 14.

Приведём пример расстановки 14 слонов: 8 слонов в верхнем ряду и 6 в нижнем посередине:



Ответ. 14.

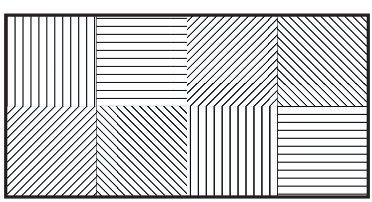
Задача 19

6-7 Какое наибольшее количество коней можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Идея. Разбить квадрат 8×8 на несколько одинаковых прямоугольников, на каждом из которых поставить максимальное количество коней.

Указание. Показать, что на доске 2×4 можно поставить только четырёх коней.

Решение. Заметим, что если поставить на четырёхугольник 2×4 коня, то он будет бить ровно одну клетку этого четырёхугольника. На рисунке одинаковой штриховкой отмечены пары клеток, одна из которых находится под боем у другой.



Следовательно, на этом прямоугольнике можно разместить максимум четырёх коней так, чтобы они не били друг друга.

Весь квадрат 8×8 можно разбить на 8 таких прямоугольников, значит, на всей шахматной доске можно разместить максимум $4 \cdot 8 = 32$ коня.

В качестве примера такого размещения можно поставить 32 коня на чёрные клетки. В этом случае под боем будут белые клетки, на которых ничего не стоит.

Ответ. 32.

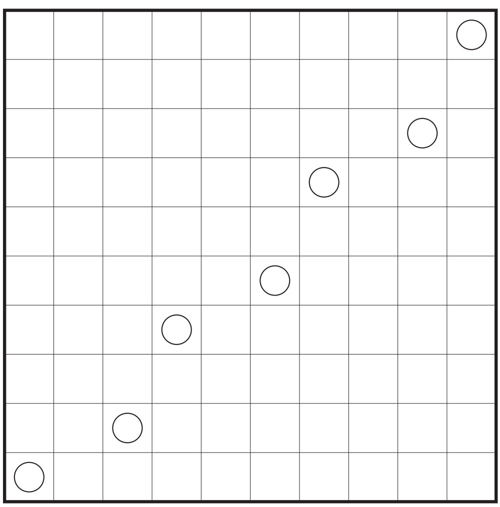
Задача 20

6-7 а) За какое наименьшее количество ходов можно перевести шахматного коня из левой нижней в правую верхнюю клетку доски размером 10×10?

Идея. Сначала построить пример, потом доказать оценку.

Указание. Кратчайшее расстояние между двумя точками — прямая.

Решение. Приведём пример, когда движение коня из левой нижней клетки в правую верхнюю близко к движению по прямой:



Здесь понадобилось 6 ходов. Покажем, что за меньшее число ходов переместиться не удастся.

За один ход конь смещается на три клетки: две — в одну сторону (вверх, вниз, влево или вправо) и одну — в другую.

При переходе из левой нижней в правую верхнюю клетку доски размером 10×10 конь должен сместиться на 18 клеток (9 — вправо, 9 — вверх), поэтому меньше чем за

$$18 : 3 = 6$$

ходов это сделать не удастся.
Ответ. 6.

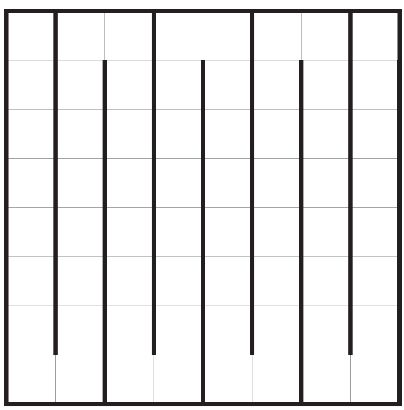
Задача 21

6-7 Вдоль границ клеток шахматной доски положили спички (каждая спичка составляет ровно одну сторону клетки). Какое наименьшее количество спичек необходимо убрать, чтобы ладья могла добраться с любого поля на любое, не перепрыгивая через спички?

Идея. При переходе на новую клеточку надо убрать одну спичку.
Указание. При построении примера обойти все клетки по одному разу.

Решение. Для того чтобы попасть на следующую клеточку, надо убрать одну спичку. Ладье надо попасть на 63 оставшиеся клеточки, значит, надо убрать как минимум 63 спички.

В качестве примера можно рассмотреть следующий вариант:



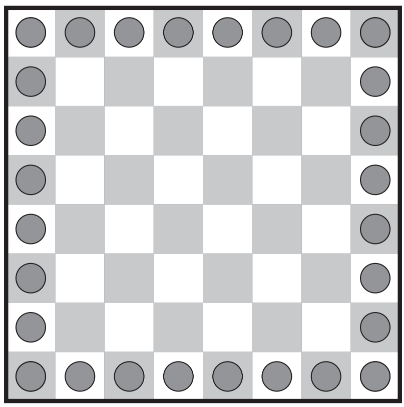
Ответ. 63.

Задача 22

6-7 На шахматной доске расставлены ладьи так, что каждую ладью бьют не более трёх других. Найти наибольшее количество ладей.

Идея. Сначала построить пример, потом доказать оценку.
Указание. Ладья, стоящая на краю доски, находится под боем не более трёх ладей.

Решение. Заметим, что если ладья стоит в углу шахматной доски, то её бьют не более двух ладей, а если с краю, но не в угловой клетке, то — не более трёх. Расставим максимальное число ладей на крайние клетки, получим 28 ладей, каждую из которых бьют не более трёх других ладей:



Покажем, что более 28 ладей разместить нельзя. Рассмотрим расстановку ладей, удовлетворяющую условию задачи. Пусть есть ладья, не стоящая с краю. Рассмотрим 4 направления (относительно этой ладьи): вверх, вниз, вправо и влево. Так как эту выбранную ладью бьют не более трёх других, то не может быть такого, что по всем 4 направлениям находятся другие ладьи. Следовательно, эту ладью можно переместить на край доски по направлению, где нет другой ладьи. При этом новая расстановка будет также удовлетворять условию задачи.

Проделав эту процедуру несколько раз, мы можем переместить всех ладей на крайние клетки. Так как крайних клеток всего 28 штук, то ладей не может быть более 28.
Ответ. 28.

Задача 23

6-7 а) На какое наибольшее число частей можно разрезать тремя прямыми разрезами (перекладывать куски нельзя) колобок?

Идея. Каждый разрез может удвоить число кусков.

Решение. Так как каждый разрез может удвоить число кусков, то максимальное число полученных кусков равно восьми.

Восемь кусков можно получить, если сначала сделать горизонтальный разрез, а потом два вертикальных крест-накрест. Так мы разрежем колобок на 8 равных частей.
Ответ. 8.

Задача 24

6-7 Шоколадка имеет углубления в виде двух продольных и трёх поперечных канавок, по которым её можно разламывать. Какое наименьшее число разломов необходимо, чтобы разломать её на кусочки, не имеющие канавок, если одним разломом можно ломать и несколько кусков, приложив их друг к другу?

Идея. Каждый разлом может удвоить число кусков.
Указание. Подсчитать минимально необходимое число разломов.

Решение. Так как каждый разлом может удвоить число кусков, а в результате мы должны получить 12 кусочков, то трёх разломов недостаточно:

1) после первого разлома станет 2 куска;
2) после второго разлома станет максимум 4 куска;
3) после третьего разлома станет максимум 8 кусков.

Нам нужно получить 12 кусочков, значит, минимально необходимое число разломов — четыре. Осталось привести пример:

- первым разломом разделить шоколадку на два одинаковых куска размером 2×3 и положить их друг на друга;
- второй разлом разделит каждый из этих кусков на куски размером 1×3, также положим их все друг на друга;
- третьим разломом отломим от каждого из них по кусочку размером 1×1;
- четвёртым разломом разломим оставшиеся куски размером 1×2 пополам.

Ответ. Четыре.

Задача 25

6-7 Сумма трёх натуральных чисел (не обязательно различных) равна 100. Из этих чисел можно составить три попарные разности (при вычислении разности из большего числа вычитают меньшее). Какое наибольшее значение может принимать сумма этих попарных разностей?

Идея. Выразить искомую сумму через значения самих трёх данных чисел и, подставив крайние значения, получить оценку.
Указание. Максимальное число не может превосходить 98.

Решение. Пусть даны три числа:

$$a \geqslant b \geqslant c.$$

Сумма трёх разностей будет равна

$$(a-b)+(b-c)+(a-c)=2a-2c.$$

Так как $a+b+c=100$, то $a \leqslant 98$ и, следовательно,

$$2a-2c \leqslant 2\cdot 98-2\cdot 1=194.$$

Это наибольшее значение достигается при $a=98$, $b=c=1$.
Ответ. 194.

Задача 26

6-7 На 22 карточках написаны натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целые значения?

Идея. Рассмотреть пары, в которых одно из чисел является простым.
Указание. Дробь, в которой и числитель, и знаменатель являются простыми числами, несократима.

Решение. Рассмотрим пару, в которой одно из чисел является простым. В этом случае дробь будет сократима, только если простое число стоит в знаменателе. Простые числа 13, 17 и 19 не могут стоять в знаменателе сократимой дроби, поскольку тогда числитель будет больше 22. Значит, сократимая дробь с этими числами может получиться, только если второе число равно 1. Получается, что к одному из этих чисел мы можем поставить в пару 1, а оставшиеся два числа не смогут дать в паре ни с каким числом сократимую дробь. То есть 11 дробей мы получить не сможем.

Осталось привести пример 10 дробей, каждая из которых сокращается до целого числа.

Для того чтобы сократимых дробей было как можно больше, числа 17 и 19 поставим в пару и получим одну несократимую дробь.

Числу 13 поставим в пару 1, получим $13:1=13$.

Из оставшихся чисел можно составить сократимые до целого числа дроби следующим образом:

$$\frac{22}{11}, \frac{20}{10}, \frac{18}{9}, \frac{16}{8}, \frac{14}{7}, \frac{12}{6}, \frac{21}{3}, \frac{15}{5}, \frac{4}{2}.$$

Ответ. Десять дробей.

Задача 27

6-7 Какое наибольшее количество чисел можно выбрать из набора 1, 2, ..., 2007, чтобы сумма любых двух выбранных чисел делилась на 8?

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 8.
Указание. Сумма остатков от деления на 8 любых двух выбранных чисел должна быть кратна 8.

Решение. Рассмотрим набор чисел, в котором сумма любых двух делится на 8.

ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ. Если хотя бы одно из чисел этого набора делится на 8, то все остальные также делятся на 8. Заметим, что каждое восьмое число делится на 8 и сумма двух таких чисел также делится на 8. Всего таких чисел в диапазоне от 1 до 2007 ровно 250:

$$8 \cdot 1,\ 8 \cdot 2, \ldots,\ 8 \cdot n, \ldots,\ 8 \cdot 250.$$

ВТОРОЙ СЛУЧАЙ. Если хотя бы одно из чисел этого набора не делится на 8, то все остальные также не делятся на 8. Рассмотрим два числа a_1 и a_2, не делящиеся на 8. Представим их в виде

$$a_1 = 8n_1 + r_1, \quad a_2 = 8n_2 + r_2, \quad 1 \leqslant r_1, r_2 \leqslant 7.$$

Сумма $a_1 + a_2$ делится на 8, только если $r_1 + r_2 = 8$.

Заметим, что если в нашем наборе есть третье число $a_3 = 8n_3 + r_3$, то должно выполняться $r_1 + r_3 = 8$ и $r_2 + r_3 = 8$. Это возможно, только если $r_1 = r_2 = r_3 = 4$. Осталось подсчитать количество чисел, дающих при делении на 8 остаток 4:

$$4,\ 8 \cdot 1 + 4,\ 8 \cdot 2 + 4, \ldots, 8 \cdot 250 + 4.$$

Всего таких чисел ровно 251.
Ответ. 251.

Задача 28

6-7 а) В гости пришло 10 человек, и каждый оставил в коридоре пару калош. Все пары калош имеют разные размеры. Гости начали расходиться по одному, надевая любую пару калош, в которые они могли влезть, т. е. каждый гость мог надеть пару калош, не меньшую, чем его собственные. В какой-то момент обнаружилось, что ни один из оставшихся гостей не может найти себе пару калош, чтобы уйти. Какое максимальное число гостей могло остаться?

Идея. Сначала привести пример, потом сделать оценку.
Указание. Разделить все калоши на маленькие и большие.

Р е ш е н и е. Расположим все калоши по возрастанию размеров и назовём первые 5 пар маленькими, остальные 5 пар — большими калошами.

Если гости с маленькими размерами ног наденут большие калоши, то останутся гости с большими размерами ног, которые не смогут надеть маленькие калоши. Это пример, когда 5 гостей не смогут найти себе пару калош, чтобы уйти.

Покажем, что не может остаться 6 гостей. Если осталось 6 пар калош, то среди них есть большие. А среди оставшихся шести гостей точно есть гость с маленьким размером ноги, и он может надеть большие калоши и уйти.

Следовательно, максимальное число гостей, которые могли остаться, — это 5.

О т в е т. 5.

Задача 29

6-7 Найдите наибольшее возможное отношение трёхзначного числа $\overline{abc}$ к числу $\overline{ac}+\overline{bc}$.

И д е я. Выразить все числа через цифры и проанализировать значение отношения при различных значениях цифр.

У к а з а н и е. $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

У к а з а н и е. Сначала придумать пример и получить ответ, потом доказать его.

Р е ш е н и е. Запишем отношение в виде дроби следующим образом:

$$\frac{\overline{abc}}{\overline{ac}+\overline{bc}} = \frac{100a+10b+c}{10a+10b+2c}.$$

Так как первая цифра числа не может быть равной нулю, то

$$a, b \in \{1, 2, \ldots, 9\}, \quad c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Рассмотрим случай, когда a принимает самое большое значение, b и c — самые маленькие, т. е. $a = 9$, $b = 1$ и $c = 0$. При этих значениях получим

$$\frac{\overline{abc}}{\overline{ac}+\overline{bc}} = \frac{100a+10b+c}{10a+10b+2c} = \frac{900+10}{90+10} = 9{,}1.$$

Теперь докажем, что при всех возможных значениях будет выполняться оценка

$$\frac{\overline{abc}}{\overline{ac}+\overline{bc}} \leqslant 9{,}1.$$

Приведём это неравенство с помощью элементарных преобразований к очевидному неравенству:

$$\frac{100a + 10b + c}{10a + 10b + 2c} \leqslant 9{,}1;$$

$$100a + 10b + c \leqslant 9{,}1 \cdot (10a + 10b + 2c);$$

$$100a + 10b + c \leqslant 91a + 91b + 18{,}2c;$$

$$9a \leqslant 81b + 17{,}2c.$$

Так как это неравенство выполняется даже при самом большом значении a и самых маленьких значениях b и c, то оно верно и при всех остальных значениях.

Таким образом, пример приведён и оценка доказана.

О т в е т. 9,1.

Задача 30

6-7 В шахматном турнире участвовало 30 человек. Тем, кто набрал не менее 60% возможных очков, присвоили разряд. Какому наибольшему числу участников мог быть присвоен разряд?

И д е я. Подсчитать минимальное количество очков, необходимое для получения разряда, и рассмотреть случай, когда число участников с таким количеством очков максимально.

У к а з а н и е. За выигрыш даётся 1 очко, за ничью — половина очка, за проигрыш — 0 очков.

Р е ш е н и е. Каждый участник турнира должен сыграть с остальными 29 участниками, следовательно, максимально он может набрать 29 очков. Разряд присуждают тому, кто набрал не менее 60% возможных очков, т. е. не менее чем

$$29 \cdot 0{,}6 = 17{,}4.$$

Так как количество очков должно быть кратно половине очка, то минимальное количество очков, необходимое для получения разряда, — это 17,5.

Теперь подсчитаем общее количество очков. Для этого надо подсчитать общее количество игр. Каждый из 30 участников должен сыграть 29 игр, но при умножении 30 на 29 получится, что каждую игру мы посчитали дважды, следовательно, всего игр будет сыграно

$$\frac{30 \cdot 29}{2} = 15 \cdot 29 = 435.$$

А так как

$$435 : 17{,}5 = 24{,}85,$$

то больше 24 разрядников быть не может. Осталось привести пример, когда разряд присудили ровно 24 участникам. Например, 24 участника сыграли по 23 игры вничью между собой и по 6 игр выиграли у остальных шести участников. Получается, что каждый из 24 набрал по

$$\frac{23}{2}+6=17{,}5$$

и, следовательно, получил разряд.

Ответ. 24.

Задача 31

6-7 а) На доске написано 10 двоек. Разрешается стереть любые два числа и записать на доску их сумму или их произведение. Может ли после нескольких таких операций на доске остаться число 1002?

Идея. Использовать то, что произведение двух натуральных чисел, превосходящих 1, всегда не меньше, чем сумма этих же чисел.

Указание. Определить, какое действие было выполнено последним, и перебрать возможные варианты.

Решение. Задачу можно переформулировать так: расставить скобки и заменить звёздочки на знаки сложения и умножения таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$2*2*2*2*2*2*2*2*2*2=1002.$$

Заметим, что произведение двух чётных чисел делится на 4, а число 1002 на 4 не делится. Следовательно, последним действием было сложение и с точностью до перестановки слагаемых возможно только 5 вариантов:

$$2+(2*2*2*2*2*2*2*2*2)=1002,$$
$$(2*2)+(2*2*2*2*2*2*2*2)=1002,$$
$$(2*2*2)+(2*2*2*2*2*2*2)=1002,$$
$$(2*2*2*2)+(2*2*2*2*2*2)=1002,$$
$$(2*2*2*2*2)+(2*2*2*2*2)=1002.$$

Так как произведение двух натуральных чисел, превосходящих 1, всегда не меньше суммы этих же чисел, то для первого варианта справедлива оценка:

$$2+(2*2*2*2*2*2*2*2*2)\leqslant 2+2^9=2+512=514<1002.$$

В оставшихся четырёх случаях каждое из двух слагаемых будет не больше 2^8 и получившееся в результате последнего сложения число будет не больше чем

$$2^8+2^8=256+256=512<1002.$$

Получается, что в любом случае результат не может равняться 1002.
Ответ. Нет.

Задача 32

6-7 В пять 15-литровых вёдер налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается утроить количество воды в любом сосуде, перелив в него воду из другого. Какое наибольшее количество воды можно такими действиями собрать в одном ведре?

Идея. Результат должен делиться на 3.
Указание. Перебрать возможные варианты.

Решение. Нас интересует ведро с наибольшим количеством воды, поэтому последним действием с этим ведром будет добавление в него воды. Так как при добавлении воды в ведро её количество утраивается, то полученное число должно делиться на 3.

Покажем, что 15 литров получить нельзя. Для того чтобы получить 15 литров, надо добавить 10 литров к 5 литрам. Но ни 10, ни 5 литров не могут быть получены на предыдущем шаге, поскольку ни 10, ни 5 не делятся на 3.

Следующий возможный вариант — это 12 литров. Приведём пример, подтверждающий, что это возможно.

- Утроим количество воды во втором ведре, долив в него из 5-го ведра 4 литра. После этого во втором ведре станет 6 литров вместо 2 литров.
- Утроим количество воды в третьем ведре, долив в него из 2-го ведра 6 литров. После этого в третьем ведре станет 9 литров.
- Утроим количество воды в четвёртом ведре, долив в него из 3-го ведра 8 литров. После этого в четвёртом ведре станет 12 литров.

Ответ. 12.

Задача 33

6-7 Назовём набор из 60 гирь *крепким*, если его невозможно разбить на три группы по 20 гирь в каждой так, чтобы массы всех трёх групп были разными. Найдите все крепкие наборы, в которых есть хоть одна гиря массой 1 кг и хоть одна гиря массой 2 кг.

Идея. Действовать перебором, предварительно сузив круг возможных вариантов.
Указание. Показать, что во всём наборе не может быть более двух разных типов гирь.
Указание. Показать, что в каждой из трёх групп не может одновременно быть более двух гирь весом 1 кг и более двух гирь весом 2 кг.

Решение. Покажем, что в крепком наборе из 60 гирь могут быть гири весом только 1 кг и 2 кг. Если бы в наборе была гиря весом a кг, отличным от 1 кг и 2 кг, то все 60 гирь можно было бы разбить на три группы по 20 гирь в каждой так, чтобы массы всех трёх групп были разными. Для этого надо поступить следующим образом: сначала изъять из набора гири весом 1 кг, 2 кг и a кг и разложить оставшиеся 57 гирь на три кучки по 19 гирь. Эти три кучки упорядочить по весу так, чтобы вес следующей был не меньше веса предыдущей, потом к первой кучке добавить самую лёгкую из трёх отложенных гирь, ко второй кучке — среднюю из трёх отложенных гирь, а к третьей кучке — самую тяжёлую из отложенных гирь. В результате получим три кучки по 20 гирь и массы всех трёх кучек будут различными.

Теперь будем перебирать возможные варианты.

1) Если в наборе 1 гиря весом 1 кг, а остальные гири — весом 2 кг, то такой набор будет крепким, так как при разбиении на 3 группы получим две группы из 20 гирь весом 2 кг.

Заметим, что симметричный набор (1 гиря веса 2 кг, а остальные гири — весом 1 кг) также окажется крепким из аналогичных соображений.

2) Если в наборе 2 гири весом 1 кг, а остальные гири — весом 2 кг, то такой набор будет крепким, так как при разбиении на 3 группы возможен только один из двух вариантов: обе гири весом 1 кг попали в одну группу и тогда две другие группы весят одинаково или гири веса 1 кг попали в разные группы и тогда эти группы весят одинаково.

Заметим, что симметричный набор (2 гири весом 2 кг, а остальные гири — весом 1 кг) также окажется крепким из аналогичных соображений.

Покажем, что больше крепких наборов нет. Рассмотрим набор, в котором более двух гирь весом 1 кг и более двух гирь весом 2 кг. Пусть для определённости число гирь весом 1 кг не больше числа гирь весом 2 кг (симметричный случай разбирается аналогично). В этом случае число гирь в 1 кг находится в пределах от 3 до 30.

Положим в первую группу 20 гирь весом 2 кг, а во вторую положим гирь по 1 кг меньше, чем в третью (это мы можем

сделать, поскольку гирь по 1 кг у нас как минимум три). В результате первая группа будет самой тяжёлой, вторая — средней, третья — самой лёгкой. Следовательно, такой набор не будет крепким.
Ответ. Таких наборов всего четыре: 1) 1×1 кг, 59×2 кг; 2) 2×1 кг, 58×2 кг; 3) 58×1 кг, 2×2 кг; 4) 59×1 кг, 1×2 кг.

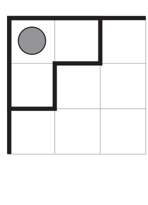
Задача 34

(6-7) На совместной конференции лжецов и правдолюбов в президиум было избрано 32 человека. Их рассадили в 4 ряда по 8 человек. В перерыве каждый из них заявил: «Среди моих соседей есть представители обеих партий». Какое наименьшее количество лжецов могло участвовать в конференции? (Два участника являются соседями, если один из них сидит слева, справа, спереди или сзади от другого.)

Идея. Для получения оценки числа лжецов разбить прямоугольник 4×8 на фигуры, в каждой из которых должен находиться хотя бы один лжец.
Указание. Отдельно рассмотреть фигуры, содержащие граничные и угловые клетки.

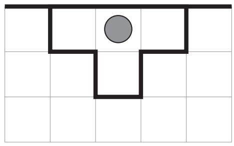
Решение. Представим схему рассадки участников конференции в виде прямоугольника размером 4×8, где чёрными клеточками отмечены места лжецов.

1) Рассмотрим уголок из трёх клеток, находящийся в углу прямоугольника размером 4×8. Если все клетки уголка белые, то у участника-правдолюба, расположенного в самом углу и отмеченного серым кружком на рисунке, оба соседа — правдолюбы, что противоречит условию задачи. Значит, хотя бы одна клетка уголка должна быть чёрной.

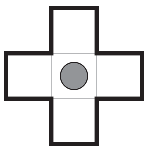


2) Рассмотрим Т-образную фигуру, примыкающую к границе прямоугольника. Все её клетки белыми быть не могут, так как тогда у участника-правдолюба, отмеченного на рисунке серым кружком, все три соседа — правдолюбы, что противоречит

условию задачи. Значит, хотя бы одна клетка этой фигуры должна быть чёрной.

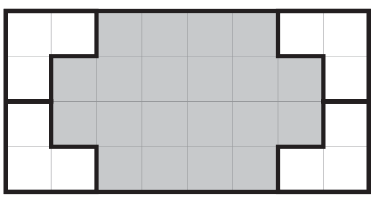


3) Рассмотрим крестообразную фигуру. Все её клетки белыми быть не могут, так как тогда у участника-правдолюба, отмеченного на рисунке серым кружком, все четыре соседа — правдолюбы, что противоречит условию задачи. Значит, хотя бы одна клетка этой фигуры должна быть чёрной.



Посмотрим, сколько таких фигур может поместиться в прямоугольник 4×8. Сначала разместим уголки, свободных клеток останется

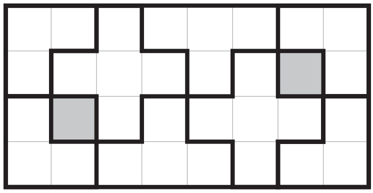
$$4\cdot8-4\cdot3=32-12=20.$$



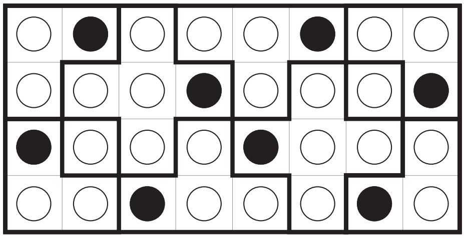
Крестообразных фигур на оставшееся место может поместиться максимум две. Тогда для Т-образных фигур свободных клеток останется

$$20-2\cdot5=10.$$

На 10 клетках можно разместить максимум две Т-образные фигуры из четырёх клеток каждая. Это можно сделать, например, так:



В результате нам удалось разместить в прямоугольнике 8 фигур, у которых как минимум одна клетка должна быть чёрной. Значит, меньше восьми лжецов в президиуме быть не может. Приведём пример, когда лжецов ровно восемь:



Ответ. 8.

7. Принцип Дирихле

Задача 1

5 а) В классе 34 ученика. Докажите, что среди них найдутся по меньшей мере двое, у которых фамилии начинаются с одной и той же буквы.

Идея. Использовать частную формулировку принципа Дирихле.
Указание. Здесь роль кроликов будут играть ученики, а роль клеток — начальные буквы фамилий.

Решение. Предположим, что это не так, т. е. у всех 34 учеников фамилии начинаются с разных букв. Но в алфавите всего 33 буквы, следовательно наше предположение не верно и, значит, в классе есть хотя бы два ученика, у которых фамилии начинаются с одной и той же буквы.

Задача 2

5-6 а) Ведущий и каждый из 30 игроков записывают числа от 1 до 30 в некотором порядке. Затем записи сравнивают: если у игрока и ведущего на одном и том же месте стоят одинаковые числа, то игрок получает очко. Оказалось, что все игроки набрали различное количество очков. Докажите, что чья-то запись совпала с записью ведущего.

Идея. Использовать частную формулировку принципа Дирихле.
Указание. Здесь роль кроликов будут играть игроки, а роль клеток — полученные ими очки.

Решение. Подсчитаем количество возможных вариантов полученных очков.

Если у игрока ни одно из чисел не стоит на своём месте (имеется в виду, на том же месте, что и у ведущего), то игрок получает 0 очков. Если только одно число на своём месте, то 1 очко, и т. д. А если все 30 чисел на своих местах, то игрок получает 30 очков. Заметим, что получить 29 очков нельзя, поскольку если 29 чисел стоят на своих местах, то 30-е число также стоит на своём месте. Поэтому возможно всего 30 вариантов.

Если все 30 игроков набрали различное количество очков, то один из них набрал 30 очков и, значит, его запись полностью совпала с записью ведущего.

Задача 3

[6-7] На шахматной доске стоят 44 ферзя. Докажите, что каждый из них бьёт какого-нибудь другого ферзя.

Идея. Использовать частную формулировку принципа Дирихле.
Указание. Надо выбрать одного ферзя, тогда роль кроликов будут играть остальные ферзи, а роль клеток — клетки, находящиеся не под боем выбранного ферзя.

Решение. Рассмотрим одного из ферзей. У него под боем находится как минимум 21 клетка: 7 — по вертикали, 7 — по горизонтали и как минимум 7 на соответствующих диагоналях.

Получается, что не под боем остаются максимум $64-21-1 = 42$ клетки, а ферзей остаётся 43. Следовательно, хоть одного из них придётся поставить под бой выбранного ферзя.

Задача 4

[6-7] В футбольном чемпионате участвует 30 команд. Докажите, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие к этому моменту одинаковое число матчей.

Идея. Использовать частную формулировку принципа Дирихле.
Указание. Здесь роль кроликов будут играть команды, а роль клеток — количества сыгранных матчей.
Указание. Рассмотреть по отдельности случай, когда есть не игравшая команда и когда нет.

Решение. Подсчитаем количество сыгранных матчей.

Если хотя бы одна из команд не сыграла ни одной игры, то ни у какой команды не может быть 29 сыгранных матчей. В этом случае количество сыгранных матчей может меняться от 0 до 28.

Если каждая команда сыграла хотя бы одну игру, то количество сыгранных матчей может меняться от 1 до 29.

В каждом из этих случаев максимальное число вариантов равно 29, а команд всего 30. Значит, найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.

Задача 5

[5-7] а) Алёша в среду, четверг и пятницу съел всего 7 конфет. Докажите, что хотя бы в один день он съел более двух конфет.

Идея. Использовать общий принцип Дирихле.

Указание. Здесь роль кроликов будут играть конфеты, а роль клеток — дни.

Решение. Предположим, что это не так, т. е. в каждый из трёх дней Алёша съел не более двух конфет. Тогда, поскольку дней всего три, то он съел не более $2 \cdot 3 = 6$ конфет, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и, значит, хотя бы в один день Алёша съел более двух конфет.

Задача 6

$\boxed{5\text{-}7}$ а) В классе 40 учеников. Найдётся ли такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса?

Идея. Использовать общий принцип Дирихле.
Указание. Здесь роль кроликов будут играть ученики, а роль клеток — месяцы.

Решение. Предположим, что такой месяц не найдётся, т. е. в каждом из 12 месяцев день рождения отмечают менее 4 человек. Тогда всего дней рождения будет не более $3 \cdot 12 = 36$ штук, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно и найдётся такой месяц в году, в котором отмечают свой день рождения не меньше чем 4 ученика этого класса.
Ответ. Да.

Задача 7

$\boxed{5\text{-}7}$ У человека на голове не более миллиона волос, в Москве проживает более 10 миллионов человек. Докажите, что найдётся 10 москвичей с одинаковым числом волос.

Идея. Использовать общий принцип Дирихле.
Указание. Здесь роль кроликов будут играть волосы, а роль клеток — москвичи.

Решение. Предположим, что не найдётся 10 москвичей с одинаковым числом волос. Значит, лысых москвичей не более девяти, москвичей с одним волоском — не более девяти, москвичей с двумя волосками — не более девяти, ..., москвичей с миллионом волосков — не более девяти.

Получается, что москвичей всего не более

$$9 \cdot 1\,000\,001,$$

что меньше 10 миллионов. Значит, наше предположение неверно и найдётся 10 москвичей с одинаковым числом волос.

Задача 8

5-7 а) В тёмной кладовой лежат ботинки одного размера: 10 пар чёрных и 10 пар коричневых. Найти наименьшее число ботинок, которое нужно взять из кладовой, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара (левый и правый ботинок) одного цвета (считать, что в темноте нельзя отличить не только цвет ботинка, но и левый от правого).

Идея. Рассмотреть «худший случай».
Указание. Определить максимальное количество одноцветных ботинок, среди которых нет ни одной пары.

Решение. Так как у нас 10 пар чёрных ботинок, то среди 11 чёрных ботинок обязательно найдётся хотя бы одна пара. Значит, в худшем случае мы возьмём 10 чёрных ботинок и среди них не будет пары (например, все правые).

Из аналогичных соображений мы можем взять 10 коричневых ботинок и среди них не будет пары.

Следовательно, в худшем случае мы можем взять 20 ботинок и не обнаружить ни одной пары. Но если мы возьмём ещё один ботинок, то он обязательно образует пару с каким-то из ранее взятых ботинок. Значит, наименьшее число ботинок, которое нужно взять из кладовой, чтобы среди них оказалась хотя бы одна пара, равно 21.
Ответ. 21 ботинок.

Задача 9

5-7 В ящике лежат цветные карандаши: 10 красных, 8 синих, 8 зелёных и 4 жёлтых. В темноте берём из ящика карандаши. Какое наименьшее число карандашей надо взять, чтобы среди них заведомо

а) было не меньше 4 карандашей одного цвета;
б) был хотя бы один карандаш каждого цвета;
в) было не меньше 6 синих карандашей?

Идея. Рассмотреть «худший случай».
Указание. Определить максимальное количество вытащенных карандашей в неподходящем нам случае.

Решение.

а) В худшем случае мы можем вытащить 3 красных карандаша, 3 синих, 3 зелёных и 3 жёлтых. Зато следующий вытащенный карандаш дополнит какой-то набор одноцветных карандашей до четырёх. Значит, надо взять

$$3 + 3 + 3 + 3 + 1 = 13 \text{ карандашей.}$$

б) В худшем случае мы можем вытащить все карандаши кроме самых малочисленных. Зато следующий вытащенный карандаш будет нужного цвета. Значит, надо взять

$$10 + 8 + 8 + 1 = 27 \text{ карандашей.}$$

в) В худшем случае шестой синий карандаш мы вытащим в последний момент, после того как вытащим 10 красных, 8 зелёных, 4 жёлтых и 5 синих карандашей. Значит, надо взять

$$10 + 8 + 4 + 6 = 28 \text{ карандашей.}$$

Ответ. а) 13; б) 27; в) 28.

Задача 10

6-7 В мешке 70 шаров, отличающихся только цветом: 20 красных, 20 синих, 20 жёлтых, остальные — чёрные и белые. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из мешка, не видя их, чтобы среди них было не менее 10 шаров одного цвета?

Идея. Рассмотреть «худший случай».
Указание. Чёрных шаров не может быть не менее 10.

Решение. Подсчитаем количество чёрных и белых шаров:

$$70 - 20 - 20 - 20 = 10.$$

Так как чёрных шаров вместе с белыми ровно 10, то по отдельности чёрных и белых меньше чем по 10.

Значит, в худшем случае мы сначала достанем 9 красных, 9 синих, 9 жёлтых и все чёрные и белые шары. Зато любой следующий шар дополнит до 10 либо красные, либо синие, либо жёлтые шары. Следовательно, надо вынуть

$$9 + 9 + 9 + 10 + 1 = 38 \text{ шаров.}$$

Ответ. 38.

Задача 11

6-7 а) В районе 7 средних школ. На район выделили 20 компьютеров. Докажите, что при любом распределении их между школами найдутся две школы, которые получат одинаковое число компьютеров (может быть, ни одного).

Идея. Использовать последнее утверждение из теоретической части.
Указание. Оценить минимальное число компьютеров, при котором их количества в разных школах будут различными.

Решение. Предположим, что нам удалось так распределить компьютеры, что у всех школ их разное количество. Упорядочим школы по возрастанию количества компьютеров. Тогда у первой школы должно быть не менее нуля компьютеров, у во второй — не менее одного, ..., у седьмой — не менее шести компьютеров. Получается, что всего компьютеров должно быть не менее чем

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 6 = 21.$$

А у нас только 20. Противоречие. Значит, в любом случае найдутся две школы, которые получат одинаковое число компьютеров.

Задача 12

6-7 10 человек собрали вместе 46 грибов, причём известно, что нет двух человек, собравших одинаковое число грибов. Сколько грибов собрал каждый?

Идея. Использовать последнее утверждение из теоретической части.
Указание. Оценить минимальное число грибов, при котором количества их у разных людей будут различными.

Решение. Упорядочим грибников по количеству собранных грибов. Тогда первый собрал не менее нуля, второй — не менее одного, ..., десятый — не менее девяти грибов. Получается, что всего грибов должно быть не менее чем

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45.$$

Значит, один из грибников собрал на 1 гриб больше, чем указанное минимальное количество. А так как увеличение количества собранных грибов у него не должно повлечь увеличения у всех, кто следует за ним, то это последний грибник. То есть он собрал не 9, а 10 грибов.
Ответ. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 грибов.

8. Принцип Дирихле и делимость целых чисел

Задача 1

5-7 а) Доказать, что среди шести любых целых чисел найдутся два, разность которых делится на 5.

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 5.
Указание. Разность чисел делится на 5, только если их остатки при делении на 5 одинаковы.

Решение. При делении числа на 5 может быть только 5 различных остатков $(0, 1, 2, 3, 4)$. Если считать остатки от деления клетками, а числа — кроликами, то будет 5 клеток и 6 кроликов. Значит, по принципу Дирихле найдётся клетка, в которой будет не менее двух кроликов. Получается, что найдутся два числа с одинаковыми остатками и, следовательно, их разность будет делиться на 5.

Задача 2

5-7 Доказать, что из любых трёх натуральных чисел можно найти два, сумма которых делится на 2.

Идея. Рассмотреть возможные варианты чётности/нечётности трёх чисел.
Указание. Сумма двух чисел одинаковой чётности чётна.

Решение. Среди любых трёх натуральных чисел обязательно найдутся два числа одинаковой чётности — либо два чётных числа, либо два нечётных числа.

Так как сумма двух чисел одинаковой чётности чётна, то это и будут два числа, сумма которых делится на 2.

Задача 3

5-7 Сколько можно взять разных натуральных чисел, не бо́льших 10, чтобы среди них не нашлось двух, одно из которых точно вдвое больше другого?

Идея. Рассмотреть числа, которые не могут вместе попасть в итоговый набор.
Указание. Из пары чисел, где одно вдвое больше другого, в итоговый набор может входить только одно из чисел.

Решение. Рассмотрим пары чисел, где одно из них вдвое больше другого:

$$(1;2),\quad (3;6),\quad (4;8),\quad (5;10).$$

При этом для чисел 7 и 9 нет пары. Заметим, что оба числа из каждой пары не могут входить в искомый набор чисел, значит, как минимум 4 числа из первоначального набора надо исключить. Оставить можно, например, 1, 3, 4, 5, 7, 9.
Ответ. Не больше 6 чисел.

Задача 4

6-7 а) Верно ли, что среди семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 3.
Указание. Сумма трёх чисел с одинаковыми остатками при делении на 3 будет делиться на 3.

Решение. При делении на 3 возможны остатки 0, 1, 2. Заметим, что сумма трёх чисел с одинаковыми остатками при делении на 3 будет делится на 3.

Если же чисел с каждым из остатков не более двух, то получается, что всего чисел не более шести. Противоречие. Значит, среди семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3.
Ответ. Верно.

Задача 5

6-7 а) Докажите, что среди степеней двойки есть две, разность которых делится на 1963.

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 1963.
Указание. Разность чисел с одинаковыми остатками будет делиться на 1963.

Решение. Рассмотрим 1964 различных чисел, которые являются степенями двойки. Согласно принципу Дирихле среди них есть два с одинаковыми остатками при делении на 1963. Их разность будет делиться на 1963.

Задача 6

6-7 а) Доказать, что найдётся число вида $11\ldots10\ldots00$, делящееся на 2014.

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 2014 чисел, состоящих только из единиц.
Указание. Разность чисел с одинаковыми остатками будет делиться на 2014.

Решение. Рассмотрим 2015 различных чисел:

$$1, 11, \ldots, \underbrace{11\ldots11}_{2015}.$$

Согласно принципу Дирихле среди них есть два с одинаковыми остатками при делении на 2014. Их разность и есть искомое число.

Задача 7

$\boxed{\text{6-7}}$ Докажите, что среди 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 50.
Указание. Разность квадратов чисел с одинаковыми остатками при делении на 50 будет делиться на 100.

Решение. Рассмотрим остатки данных 52 чисел от деления на 50. Согласно принципу Дирихле среди них есть два одинаковых. То есть среди данных 52 чисел есть два числа, которые можно записать в виде

$$a = 50n + r, \qquad b = 50k + r,$$

где $0 \leqslant r < 50$. Покажем, что разность их квадратов делится на 100:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) = (50n - 50k)(50n + 50k + 2r) = \\ &= 50 \cdot (n-k) \cdot 2 \cdot (25n + 25k + r) = \\ &= 100 \cdot (n-k) \cdot (25n + 25k + r). \end{aligned}$$

Следовательно, среди 52 целых чисел всегда найдутся два, разность квадратов которых делится на 100.

Задача 8

$\boxed{\text{6-7}}$ Доказать, что среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 2013.

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 2013 чисел, состоящих только из единиц.
Указание. Разность чисел с одинаковыми остатками при делении на 2013 будет делиться на 2013.

Решение. Рассмотрим 2014 различных чисел:

$$1, 11, \ldots, \underbrace{11\ldots11}_{2014}.$$

Согласно принципу Дирихле среди них есть два с одинаковыми остатками при делении на 2013. Разность этих чисел делится на 2013 и записывается только единицами и нулями. Отбросив нули (т. е. поделив на 10 в соответствующей степени), мы получим число, записанное только единицами. Причём полученное число будет также делиться на 2013, поскольку у числа 10 и 2013 нет общих делителей.

Задача 9

6-7 Доказать, что существует натуральное число, последние четыре цифры которого 2012 и которое делится на 2013.

Идея. Использовать результат предыдущей задачи.
Указание. Выразить искомое число через число, делящееся на 2013 и записанное только единицами.

Решение. В предыдущей задаче мы показали, что существует число a, записанное только единицами, которое делится на 2013. Пусть в записи этого числа n единиц. Заметим, что число

$$9a + 1 = 9 \cdot 11\ldots11 + 1 = 99\ldots99 + 1 = 100\ldots00$$

будет записываться одной единицей и n нулями, поэтому у числа

$$9a + 1 + 2012$$

последними четырьмя цифрами будут 2012. Кроме того, это число будет делиться на 2013, поскольку

$$9a + 1 + 2012 = 9a + 2013,$$

где a делится на 2013.

Задача 10

6-7 Докажите, что существует степень тройки, оканчивающаяся на 001.

Идея. Для степеней тройки рассмотреть их остатки при делении на 1000.
Указание. Разность чисел с одинаковыми остатками при делении на 1000 будет делиться на 1000.
Указание. Разложить разность степеней тройки на множители и рассмотреть множитель вида степень тройки минус 1.

Решение. Среди 1001 степени тройки по принципу Дирихле найдётся два числа с одинаковыми остатками от деления на 1000. Следовательно, их разность делится на 1000, т. е.

$$3^n - 3^k \vdots 1000, \qquad n > k.$$

После вынесения общего множителя за скобку получим

$$3^k(3^{n-k} - 1) \vdots 1000.$$

Поскольку у первого множителя нет общих делителей с 1000, на 1000 делится второй множитель. Следовательно, число 3^{n-k} и есть искомая степень тройки, оканчивающаяся на 001.

Задача 11

6-7 а) Имеется n целых чисел. Доказать, что среди них всегда найдутся несколько (или, быть может, одно), сумма которых делится на n, если $n = 3$.

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 3 различных сумм и применить принцип Дирихле.
Указание. Для исходных чисел a_1, a_2, a_3 рассмотреть суммы a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$.
Указание. Разность двух сумм исходных чисел будет также являться суммой некоторых исходных чисел.

Решение. Рассмотрим суммы

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3,$$

где a_1, a_2, a_3 — исходные числа. Если хоть одна из них делится на 3, то задача решена. Если нет, то остатки от деления этих сумм на три могут равняться только 1 или 2. Так как сумм всего три, то хотя бы у двух из них одинаковые остатки. Следовательно, их разность делится на 3. А так как разность двух сумм также является суммой некоторых исходных чисел (или одним исходным числом), то эта разность и есть искомая сумма (или одно число), которая делится на 3.

9. Принцип Дирихле и дополнительные соображения

Задача 1

6-7 а) В классе 30 учеников, из них более половины — мальчики. Докажите, что какие-то два мальчика сидят за одной партой. (В классе 15 парт.)

Идея. Разбить учеников на пары и применить принцип Дирихле.
Указание. Роль клеток будут играть пары, а роль кроликов — мальчики.

Решение. Образуем 15 пар, в каждую из которых входят ученики, сидящие за одной партой. Тогда роль клеток будут играть пары, а роль кроликов — мальчики. Поскольку мальчиков более половины, т. е. более 15, то по принципу Дирихле найдётся пара, в которой окажутся 2 мальчика.

Задача 2

6-7 а) На 99 карточках пишутся числа 1, 2, ..., 99. Затем карточки тасуются и раскладываются чистыми сторонами вверх. На чистых сторонах карточек снова пишутся числа 1, 2, ..., 99. Для каждой карточки числа, стоящие на ней, складываются, и 99 полученных сумм перемножаются. Докажите, что в результате получится чётное число.

Идея. Рассмотреть пары чисел, написанных на одной карточке и применить принцип Дирихле, используя соображения чётности-нечётности полученных сумм.
Указание. Произведение целых чисел нечётно, только если все множители нечётны.

Решение. В наборе чисел 1, 2, ..., 99 нечётных чисел на одно больше, чем чётных, следовательно, не получится составить суммы, в которых одно число чётно, а другое — нечётно. Получается, что хотя бы одна из сумм будет чётным числом, и произведение всех сумм также будет чётным.

Задача 3

6-7 Можно ли выбрать 52 различных двузначных числа так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100?

Идея. Решить более общую задачу: показать, что из различных натуральных (не обязательно двузначных) чисел, мень-

ших 100, нельзя выбрать 52 числа так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100.
Указание. Рассмотреть все пары различных натуральных чисел, дающих в сумме 100.

Решение. Заметим, что из пары различных чисел, дающих в сумме 100, только одно число может входить в набор выбранных чисел. Таких пар всего 49:

$$(1;99),\ (2;98),\ (3;97),\ \ldots,\ (49;51),$$

для числа 50 пары нет, поэтому количество различных чисел, среди которых нет двух, дающих в сумме 100, не превосходит 50.
Ответ. Нет.

Задача 4

6-7 а) На 5 полках шкафа расставлены 160 книг, на одной из них — 3 книги. Докажите, что найдётся полка, на которой стоит не менее 40 книг.

Идея. Применить принцип Дирихле к остальным четырём полкам.
Указание. Предположить, что на каждой из остальных полок стоит менее 40 книг, и получить противоречие.

Решение. Так как на 5 полках — 160 книг и на одной из них — 3 книги, то на остальных четырёх полках — 157 книг. Если на каждой из них стоит менее 40 книг, то всего на них не более $39 \cdot 4 = 156$ книг. Противоречие. Значит, найдётся полка, на которой стоит не менее 40 книг.

Задача 5

6-7 Цифры 1, 2, ..., 9 разбили на три группы. Докажите, что произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. Вычислить произведение всех чисел.

Решение. Предположим, что произведение чисел в каждой из трёх групп меньше 72. В этом случае произведение трёх полученных произведений не превосходит числа

$$71^3 = 357\,911.$$

Но произведение чисел во всех группах равно $9! = 362\,880 > 357\,911$. Противоречие. Значит, наше предположение было неверным и произведение чисел в одной из групп не меньше 72.

Задача 6

6-7 Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей.

Идея. Подсчитать количества вариантов числа знакомых и применить принцип Дирихле.
Указание. Если кто-то знаком со всеми, то ни у кого не может быть 0 знакомых.

Решение. В компании из n человек вариантов числа знакомых всего n: от 0 до $n-1$. Однако, если у кого-то $n-1$ знакомых, то ни у кого не может быть 0 знакомых. Поэтому остаётся только $n-1$ вариант: либо от 0 до $n-2$, либо от 1 до $n-1$. Значит, по принципу Дирихле найдутся два человека с одинаковым количеством знакомых.

Задача 7

6-7 а) Кот Базилио пообещал Буратино открыть Великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6×6 из чисел $+1$, -1 и 0 так, чтобы все суммы по строкам, столбцам и большим диагоналям были различны. Помогите Буратино.

Идея. Подсчитать количество возможных вариантов и применить принцип Дирихле.
Указание. Посмотреть, какие значения может принимать каждая сумма.

Решение. Так как в строке, столбце и на диагонали стоят по шесть чисел из набора $-1, 0, 1$, то каждая сумма может принимать значение от -6 до 6. Всего 13 вариантов. А сумм всего 14: шесть — по строкам, шесть — по столбцам и две по большим диагоналям. Следовательно, по принципу Дирихле какие-то две суммы обязательно совпадут.
Ответ. Это невозможно.

Задача 8

6-7 а) В школьной математической олимпиаде принимали участие 9 учеников шестого класса. За каждую решённую задачу ученик получал 2 балла, а за каждую нерешённую задачу с него списывался 1 балл. Всего было предложено 10 задач. Докажите, что среди участников олимпиады из шестого класса было по крайней мере два ученика, набравших одинаковое число баллов. (Считается, что ученик, набравший больше штрафных баллов, чем зачётных, набрал ноль баллов.)

Идея. Подсчитать количество возможных вариантов и применить принцип Дирихле.
Указание. Посмотреть, какие участники могут получить одинаковые баллы.

Решение. Заметим, что некоторые участники, решившие разное число задач, получат одинаковое количество баллов. Например, при решении трёх задач участник в итоге получает ноль баллов, поскольку за три решённые задачи начисляется шесть зачётных баллов, а за нерешённые семь задач — семь штрафных.

Заметим, что ноль балов получат и участники, решившие меньшее число задач.

Участники, решившие более трёх задач, получат в итоге положительное количество баллов, причём у решивших разное количество задач баллы будут разными.

В результате участники, решившие 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 задач, получат различные положительные баллы, а участники, решившие 0, 1, 2, 3 задачи, получат ноль баллов. Получается всего 8 вариантов различных оценок, а участников 9. Следовательно, по принципу Дирихле по крайней мере два ученика наберут одинаковое число баллов.

Задача 9

$\boxed{6\text{-}7}$ Дано 11 различных натуральных чисел, не больших 20. Докажите, что из них можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Идея. Рассмотреть наборы чисел, в каждом из которых в любой паре чисел одно делится на другое.
Указание. Разбить числа от 1 до 20 на 10 таких наборов.

Решение. Разобьём числа от 1 до 20 на наборы, в каждом из которых в любой паре чисел одно делится на другое:

$$\{1,2,4,8,16\},\quad \{3,6,12\},\quad \{5,10,20\},\quad \{7,14\},\quad \{9,18\},$$
$$\{11\},\quad \{13\},\quad \{15\},\quad \{17\},\quad \{19\}.$$

Получается всего 10 наборов, а чисел дано 11 штук. Следовательно, по принципу Дирихле по крайней мере два числа будут входить в один набор, и одно из них будет делиться на другое.

Задача 10

$\boxed{6\text{-}7}$ Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

Идея. Рассмотреть остатки от деления на 5 и использовать принцип Дирихле.
Указание. Доказать, что любые два числа из этих семи дают одинаковый остаток от деления на 5.

Решение. Рассмотрим сумму всех семи данных чисел
$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7.$$
Представим S в виде $S = 5k + r$, где r — остаток от деления на 5.

Так как сумма любых шести чисел делится на 5, то
$$S - a_1 \;\vdots\; 5,$$
следовательно, у числа a_1 остаток отделения на 5 такой же, как у S. Из аналогичных соображений у остальных чисел остаток от деления на 5 совпадает с остатком числа S, т. е.
$$a_1 = 5k_1 + r, \quad a_2 = 5k_2 + r, \quad \ldots, \quad a_7 = 5k_7 + r.$$
Подставив эти выражения в самое первое равенство, получим
$$5k + r = 5(k_1 + k_2 + \ldots + k_7) + 7r, \quad \text{откуда}$$
$$5(k - k_1 - k_2 - \ldots - k_7) = 6r.$$

Заметим, что левая часть равенства делится на 5, значит, и правая часть тоже должна делиться на 5. Так как r может равняться только 0, 1, 2, 3, 4, то это возможно только при $r = 0$. Следовательно, каждое из данных чисел делится на 5.

Задача 11

6-7 Дано 8 различных натуральных чисел, не больших 15. Докажите, что среди их положительных попарных разностей есть три одинаковые.

Идея. Рассмотреть возможные варианты и использовать принцип Дирихле.
Указание. Подсчитать количество разностей и их возможные значения.

Решение. Рассмотрим 8 различных натуральных чисел, принимающих значения от 1 до 15:
$$1 \leqslant a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_8 \leqslant 15.$$
Подсчитаем число возможных положительных разностей:
$$a_8 - a_7, \quad a_8 - a_6, \quad a_8 - a_5, \quad \ldots, \quad a_8 - a_1;$$
$$a_7 - a_6, \quad a_7 - a_5, \quad \ldots, \quad a_7 - a_1;$$
$$\ldots$$
$$a_2 - a_1;$$
всего их получается
$$7 + 6 + 5 + \ldots + 1 = 28 \text{ штук}.$$

Заметим, что положительная разность может принимать значение от 1 до 14, причём 14 можно получить единственным способом: $14 = 15 - 1$. Следовательно, оставшиеся 27 разностей могут принимать значения от 1 до 13.

Если каждое значение принимается не более чем двумя разностями, то всего разностей не более $2 \cdot 13 = 26$, а у нас 27 разностей. Следовательно, среди положительных попарных разностей есть три одинаковые.

Задача 12

6-7 а) В бригаде 7 человек, их суммарный возраст 332 года. Докажите, что из них можно выбрать 3 человека, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. Рассмотреть трёх самых взрослых и оценить возраст остальных.

Решение. Пусть a_i — возраст i-го члена бригады. Можно считать, что
$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_7.$$
Предположим, что суммарный возраст трёх самых старших меньше 142, т. е.
$$a_5 + a_6 + a_7 \leqslant 141,$$
тогда $a_5 \leqslant 141/3 = 47$. Следовательно,
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 4 \cdot 47 = 188, \quad \text{откуда}$$
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_7 \leqslant 188 + 141 = 329,$$
что противоречит условию задачи. Значит, наше предположение было неверным и можно выбрать 3 человека, сумма возрастов которых не меньше 142 лет.

Задача 13

6-7 Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, веса которых равны 370, 372, ..., 468 кг, на семи трёхтонках?

Идея. Определить возможное число камней на одной машине.
Указание. Рассмотреть восемь самых лёгких камней.

Решение. Если мы планируем на семи машинах увезти 50 камней, то хотя бы на одной из машин должно быть не менее восьми камней. Подсчитаем вес восьми самых лёгких камней:
$$370 + 372 + \ldots + 384 = \frac{370 + 384}{2} \cdot 8 = 3016.$$

Получается, что даже самых лёгких 8 камней не поместятся в трёхтонку, следовательно, увезти из каменоломни 50 камней на семи трёхтонках нельзя.
Ответ. Нельзя.

Задача 14

6-7 В классе 13 мальчиков и 6 девочек. Каждый день в течение двух недель они ходили в кино, причём не было двух таких дней, когда в кино ходило бы одинаковое количество детей. Докажите, что найдётся день, когда в кино ходила по крайней мере одна девочка в компании не менее чем восьми мальчиков.

Идея. Рассмотреть самый многолюдный день.
Указание. Показать, что в самый многолюдный день в кино было не менее 14 детей.

Решение. Так как в течение 14 дней в кино ходило разное количество детей, то в какой-то день в кино было как минимум 14 детей. Поскольку мальчиков всего 13, среди этих детей должна оказаться как минимум одна девочка. Так как девочек всего 6, то среди этих детей должно оказаться как минимум 8 мальчиков.

Задача 15

7 Одиннадцать пионеров посещают пять кружков. Докажите, что среди них есть двое, A и B, таких, что все кружки, которые посещает A, посещает и B.

Идея. Рассмотреть наборы множеств кружков, в каждом из которых в любой паре множеств одно из множеств содержит другое.
Указание. Для 11 пионеров надо рассмотреть 10 таких наборов и применить принцип Дирихле.

Решение. Заметим, что различных множеств кружков всего 31 — 5 множеств по одному кружку, 10 множеств по два кружка, 10 множеств по три кружка, 5 множеств по четыре кружка и 1 множество по пять кружков. Пронумеруем кружки и поместим все эти 31 множество в 10 наборов вложенных множеств, т. е. наборов множеств, где каждое следующее множество содержится в предыдущем.

При построении наборов множеств будем руководствоваться следующим принципом. Выбираем самое большое множество и строим последовательность множеств, где каждое следующее получается из предыдущего исключением одного элемента. При этом по возможности исключается последний элемент. Если же при исключении последнего элемента получается уже рассмотренное ранее множество, то исключается предпоследний элемент и т. д.

Самым большим множеством является множество из пяти элементов $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Действуя указанным выше способом, получаем набор вложенных множеств:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \{1, 2, 3, 4\}, \quad \{1, 2, 3\}, \quad \{1, 2\}, \quad \{1\}.$$

Так как множество из пяти элементов только одно, то переходим к рассмотрению множеств из четырёх элементов. Их удобно получать исключением одного элемента из пятиэлементного множества, начиная с конца. Действуя таким образом, получим пять четырёхэлементных множеств: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$.

Одно из этих множеств уже встречалось в первом наборе, поэтому рассмотрим оставшиеся четыре четырёхэлементных множества. Для каждого из них будем получать систему вложенных подмножеств исключением одного элемента, начиная с конца. Если при исключении последнего элемента получается уже рассмотренное ранее множество, то исключается предпоследний элемент и т. д. В результате получим ещё 4 набора вложенных множеств:

$$\begin{array}{llll}
\{1, 2, 3, 5\}, & \{1, 2, 5\}, & \{1, 5\}, & \{5\}; \\
\{1, 2, 4, 5\}, & \{1, 2, 4\}, & \{1, 4\}, & \{4\}; \\
\{1, 3, 4, 5\}, & \{1, 3, 4\}, & \{1, 3\}, & \{3\}; \\
\{2, 3, 4, 5\}, & \{2, 3, 4\}, & \{2, 3\}, & \{2\}.
\end{array}$$

Заметим, что к этому моменту мы использовали все пяти-, все четырёх- и все одноэлементные множества. Так как трёхэлементных множеств всего 10, то нам надо построить ещё пять наборов, в которых самым большим множеством будет трёхэлементное множество. Заметим также, что мы использовали пять из десяти двухэлементных множеств, следовательно, всего нам осталось использовать 5 трёх- и 5 двухэлементных множеств. Действуя указанным выше способом, получим ещё пять наборов:

$$\begin{array}{ll}
\{1, 3, 5\}, & \{3, 5\}; \\
\{1, 4, 5\}, & \{4, 5\}; \\
\{2, 3, 5\}, & \{2, 5\}; \\
\{2, 4, 5\}, & \{2, 4\}; \\
\{3, 4, 5\}, & \{3, 4\}.
\end{array}$$

Так как наборов всего 10, а пионеров 11, то по принципу Дирихле по крайней мере для двух пионеров множества посещаемых ими кружков будут входить в один набор. Следовательно, найдутся два пионера, один из которых посещает все кружки другого.

Задача 16

$\boxed{7}$ В некоторых клетках квадратной таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 25.

Идея. Разбить квадрат на 4 четверти и рассмотреть знаки сумм чисел в этих четвертях.
Указание. В случае разных знаков перемещать один квадрат в другой, смещая его каждый раз на одну клетку.

Решение. Разобьём квадрат на 4 четверти. Сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 100, поэтому если суммы чисел во всех четвертях одного знака, то в какой-то из четвертей сумма чисел не превосходит 25. В этом случае утверждение доказано.

Рассмотрим случай, когда есть две четверти с суммами разного знака. Пусть для определённости сумма чисел левой верхней четверти положительна, а правой верхней четверти — отрицательна.

Обозначим через S_1 сумму чисел квадрата 25×25 левой верхней четверти, через S_2 сумму чисел квадрата 25×25, сдвинутого вправо на одну клетку, через S_3 — квадрата, сдвинутого на две клетки, и т. д.

Поскольку $S_1 > 0$, а $S_{26} < 0$, должны быть две соседние суммы разного знака:

$$S_k > 0, \quad S_{k+1} \leqslant 0.$$

Так как два соседних квадрата перекрываются по прямоугольнику 24×25, то соседние суммы могут отличаться не более чем на 50:

$$S_k - S_{k+1} \leqslant 50.$$

Так как $S_k > 0$, $S_{k+1} \leqslant 0$, то

$$|S_k| + |S_{k+1}| \leqslant 50$$

и хотя бы один из модулей не превосходит 25, что и требовалось доказать.

10. Принцип Дирихле в геометрии

Задача 1

5-7 а) Из точки на плоскости проведены 7 несовпадающих лучей. Докажите, что среди углов, образованных соседними лучами, найдётся угол, величина которого больше 51°.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. Оценить сумму получившихся углов при условии, что все они не больше 51°.

Решение. Стороны семи лучей образуют 7 углов, и если все они не больше 51°, то их сумма будет меньше 360°, поскольку

$$7 \cdot 51 = 355 < 360.$$

Следовательно, среди углов найдётся такой, величина которого больше 51°.

Задача 2

5-7 Запах от цветущего кустика ландышей распространяется в радиусе 20 м вокруг него. Какое минимальное количество цветущих кустиков ландышей необходимо посадить вдоль прямолинейной 400-метровой аллеи, чтобы в каждой её точке пахло ландышем?

Идея. Один ландыш распространяет запах на 20 м в одну сторону аллеи и на 20 м — в другую.
Указание. Поделить аллею на 40-метровые участки.

Решение. Так как каждый ландыш распространяет запах на 40 метров аллеи (20 м в одну сторону аллеи и на 20 м — в другую), то надо посадить

$$400 : 40 = 10 \quad \text{ландышей,}$$

первый — на расстоянии 20 метров от начала аллеи, второй — на расстоянии 40 от первого, третий — на расстоянии 40 метров от второго и т. д. Последний десятый ландыш будет находиться на расстоянии 20 метров от конца аллеи.
Ответ. 10.

Задача 3

6-7 На плоскости дано 5 точек с целыми координатами. Докажите, что середина одного из соединяющих их отрезков также имеет целые координаты.

Идея. Рассмотреть различные варианты чётности-нечётности координат.
Указание. Координаты середины отрезка — среднее арифметическое соответствующих координат.

Решение. Для того чтобы полусумма двух целых чисел была целым числом, сумма чисел должна быть чётной, следовательно, сами числа должны иметь одинаковую чётность (или оба чётные, или оба нечётные). Переберём все варианты чётности-нечётности координат:

1) обе чётны;
2) обе нечётны;
3) первая чётна, вторая нечётна;
4) первая нечётна, вторая чётна.

Из пяти точек как минимум две точки будут одного типа, и середина соединяющего их отрезка будет иметь целые координаты.

Задача 4

6-7 Дано 7 отрезков, длины которых заключены между 0,1 м и 1 м. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три таких, что из них можно составить треугольник.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. Последовательно получать оценки для отрезков исходя из условия, что каждый следующий больше суммы двух предыдущих.

Решение. Расположим длины отрезков по возрастанию и для удобства будем измерять их в дециметрах:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{10} \leqslant 10.$$

Предположим, что не найдётся трёх таких отрезков, из которых можно составить треугольник. Тогда должно выполняться следующее:

$$\begin{aligned}
a_3 &\geqslant a_1 + a_2 \geqslant 1 + 1 = 2,\\
a_4 &\geqslant a_2 + a_3 \geqslant 1 + 2 = 3,\\
a_5 &\geqslant a_3 + a_4 \geqslant 2 + 3 = 5,\\
a_6 &\geqslant a_4 + a_5 \geqslant 3 + 5 = 8,\\
a_7 &\geqslant a_5 + a_6 \geqslant 5 + 8 = 13,
\end{aligned}$$

что противоречит условию задачи. Значит, наше предположение было неверным и найдутся три таких отрезка, что из них можно составить треугольник.

Задача 5

5-7 а) В квадрате 4×4 нарисовано 15 точек. Докажите, что из него можно вырезать квадратик 1×1 метр, не содержащий внутри себя точек.

Идея. Разбить данный квадрат на квадратики 1×1 и применить принцип Дирихле.

Решение. Разобьём данный квадрат на 16 квадратиков со стороной 1. Так как точек всего 15, то хотя бы один квадратик останется без точки внутри.

Задача 6

6-7 а) Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5.

Идея. Разбить данный треугольник на 4 маленьких треугольника и применить принцип Дирихле.
Указание. Провести средние линии.

Решение. Средние линии треугольника разобьют его на 4 равных треугольника со стороной 0,5. По принципу Дирихле хотя бы в один из них попадёт как минимум две точки. А так как сторона этого треугольника равна 0,5, то расстояние между этими точками будет не больше 0,5.

Заметим, что расстояние не может оказаться равным 0,5, так как по условию задачи точки лежат внутри большого треугольника и, следовательно, не могут попасть в вершины маленького.

Задача 7

6-7 а) В квадрате со стороной 5 см размещено 126 точек. Доказать, что среди них существует 6 точек, которые лежат в круге радиуса 1 см.

Идея. Разбить данный квадрат на квадратики 1×1 и применить принцип Дирихле.
Указание. Квадрат размера 1×1 содержится в круге радиуса 1.

Решение. Разобьём данный квадрат на 25 квадратиков со стороной 1. По принципу Дирихле хотя бы в один из них (а значит, и в круг радиуса 1) попадёт не менее 6 точек.

Задача 8

6-7 В квадратном ковре со стороной 10 м моль проела 80 дырок. Докажите, что из него можно вырезать квадратный коврик со стороной 1 м, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки считать точечными.) Дырки а) могут находиться на границе вырезаемого коврика; б) не могут находиться на границе вырезаемого коврика.

Идея. Разрезать ковёр на части и применить принцип Дирихле.
Указание. В случае, когда дырки не могут находиться на границе коврика, размеры получившихся частей должны превосходить размер квадрата 1×1.

Решение.

а) Разрежем ковёр на 100 квадратов. Так как 80 дырок не могут оказаться внутри 100 квадратов, то как минимум 20 квадратов будут без дырки внутри.

б) Разрежем ковёр на квадраты размером $10/9 \times 10/9$. Получим 81 квадрат. Так как 80 дырок не могут оказаться внутри 81 квадрата, то как минимум 1 квадрат будет без дырки внутри. Из него можно вырезать коврик со стороной 1 метр, не содержащий дырок внутри себя и на своей границе.

Задача 9

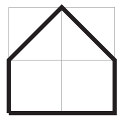
6-7 В прямоугольнике 3×4 расположено 6 точек. Докажите, что среди них найдутся 2 точки, расстояние между которыми не превосходит $\sqrt{5}$.

Идея. Разбить прямоугольник на 5 фигур и применить принцип Дирихле.
Указание. Рассмотреть фигуру, состоящую из двух целых клеточек и двух половинок.

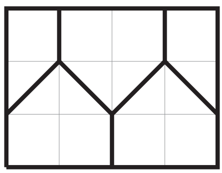
Решение. Если мы разобьём исходный прямоугольник на 5 фигур таких, что у каждой фигуры расстояние между двумя любыми точками не превосходит $\sqrt{5}$, то мы сможем применить принцип Дирихле.

Простейшей такой фигурой является прямоугольник, состоящих из двух клеточек, но исходный прямоугольник состоит из шести таких прямоугольников и мы не можем применить принцип Дирихле.

Дополним прямоугольник из двух клеточек двумя треугольниками по полклеточки:



Любые две точки этой фигуры находятся на расстоянии не больше чем $\sqrt{5}$, а в исходный прямоугольник помещается три целые фигуры и две половины:



В результате нам удалось разбить прямоугольник 3×4 на пять подходящих фигур, и по принципу Дирихле две из шести точек попадут в одну фигуру и расстояние между ними будет не больше чем $\sqrt{5}$.

Задача 10

6-7 Докажите, что правильный треугольник нельзя покрыть двумя меньшими правильными треугольниками.

Идея. Рассмотреть вершины большого треугольника.

Решение. Одним треугольником меньшего размера можно покрыть только одну вершину большого треугольника. Следовательно, для того чтобы покрыть все три вершины большого треугольника, понадобится как минимум три треугольника меньшего размера.

Задача 11

7 Внутри выпуклого пятиугольника расположены две точки. Докажите, что можно выбрать четырёхугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что в него попадут обе выбранные точки.

Идея. Разрезать пятиугольник на две части по прямой, проходящей через две данные точки, и посмотреть, сколько вершин будет располагаться с каждой стороны от прямой.

Решение. Проведём прямую через две данные точки. Она разобьёт плоскость на две полуплоскости, причём хотя бы в одной из полуплоскостей будут находиться три подряд идущие вершины пятиугольника (может быть, одна из точек будет лежать на границе полуплоскости, т. е. на проведённой прямой).

После отрезания треугольника с этими вершинами останется четырёхугольник, внутри которого будут лежать обе данные точки.

Задача 12

7 Докажите, что в любом выпуклом многоугольнике имеется не более 35 углов, меньших 170°.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. Сумма углов n-угольника равна $180^\circ(n-2)$.

Решение. Пусть в некотором n-угольнике число углов, меньших 170°, больше или равно 36. Упорядочив углы по возрастанию, получим

$$\alpha_1 < 170^\circ, \quad \alpha_2 < 170^\circ, \quad \ldots, \quad \alpha_{36} < 170^\circ,$$
$$\alpha_{37} < 180^\circ, \quad \alpha_{38} < 180^\circ, \quad \ldots, \quad \alpha_n < 180^\circ.$$

Так как сумма углов n-угольника равна $180^\circ(n-2)$, то сложив все оценки, получим оценку суммы всех углов:

$$180(n-2) < 170 \cdot 36 + 180(n-36).$$

Преобразуем это неравенство следующим образом:

$$180 \cdot 34 < 170 \cdot 36,$$
$$18 \cdot 10 \cdot 17 \cdot 2 < 17 \cdot 10 \cdot 18 \cdot 2.$$

Поскольку числа равны, наше предположение неверно и в любом выпуклом многоугольнике имеется не более 35 углов, меньших 170°.

Задача 13

6-7 В каждой вершине куба написано число 1 или число 0. На каждой грани куба написана сумма четырёх чисел, написанных в вершинах этой грани. Может ли так оказаться, что все числа, написанные на гранях, различны? Тот же вопрос, если в вершинах написаны числа 1 или -1.

Идея. Подсчитать количество вариантов и применить принцип Дирихле.

Решение. Суммы, написанные на гранях, могут принимать значения от 0 до 4. Это пять возможных вариантов, а граней шесть. По принципу Дирихле хотя бы на двух гранях будут написаны одинаковые числа.

Во втором случае суммы, написанные на гранях, могут принимать значения от -4 до 4. Но поскольку сумма четырёх нечётных чисел является чётным числом, вариантов только пять: -4, -2, 0, 2, 4. Так как граней шесть, то по принципу Дирихле хотя бы на двух гранях будут написаны одинаковые числа.

Ответ. Не может в обоих случаях.

Задача 14

6-7 На плоскости отмечена 101 точка, причём не все они лежат на одной прямой. Через каждую пару отмеченных точек красной ручкой проводится прямая. Доказать, что на плоскости существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.

Указание. Оценить число точек на каждой из проведённых прямых.

Решение. Рассмотрим точку A, через которую проходит максимальное число прямых. Предположим, что через неё проходит $n \leqslant 10$ прямых.

Получаем, что на этих прямых лежат остальные 100 точек, значит, хотя бы на одной прямой точек будет не менее 10 (не считая точку A). Назовём её прямой a. На ней вместе с точкой A точек будет лежать как минимум 11 из нашего набора.

Так как не все точки лежат на одной прямой, то существует точка B, не лежащая на прямой a. Заметим, что через точку B будет проходить как минимум 11 прямых — это будут прямые, проходящие через точку B и точки из исходного набора точек, лежащие на прямой a.

Это противоречит тому, что через A проходит максимальное число прямых и это число меньше 11. Значит, существует точка, через которую проходит не меньше 11 красных прямых.

Задача 15

6-7 На планете в звёздной системе тау Кита суша занимает более половины площади планеты. Докажите, что таукитяне могут прорыть прямой туннель, проходящий через центр планеты и соединяющий сушу с сушей. (Будем считать, что техника у них для этого достаточно развита.)

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. Рассмотреть диаметрально противоположные точки.

Решение. Если напротив каждой точки поверхности суши располагается точка поверхности воды, то получается, что суша занимает такую же площадь, как и вода, но это не так. Значит, существует пара диаметрально противоположных точек, принадлежащих суше, и можно прорыть прямой туннель, проходящий через центр планеты и соединяющий сушу с сушей.

Задача 16

6-7 Квадрат разрезали 18 прямыми, из которых 9 параллельны одной стороне квадрата, а 9 — другой, на 100 прямоугольников. Оказалось, что ровно девять из них — квадраты. Докажите, что среди этих квадратов найдутся два равных между собой.

Идея. Квадраты, лежащие в одной строке (столбце), равны.
Указание. Рассмотреть прямоугольник, не лежащий в тех строках и столбцах, в которых располагаются 9 исходных квадратов.

Решение. Предположим, что все 9 квадратов разные. Так как квадраты, лежащие в одной строке (столбце), равны, то все 9 квадратов лежат в разных строках и разных столбцах. Тогда квадрата не оказалось ровно в одной из десяти строк и ровно в одном из десяти столбцов. Рассмотрим прямоугольник, расположенный в этой строке и этом столбце. Его длина, так же как и ширина, есть разность стороны исходного квадрата и суммы сторон девяти данных квадратов. Следовательно, длина равна ширине и этот прямоугольник является квадратом. Противоречие с тем, что квадратов ровно девять и они все разные. Значит, среди этих девяти квадратов найдутся два равных между собой.

Задача 17

6-7 Не видя написанных на гранях куба чисел от 1 до 6, Лёша утверждает, что

а) у этого куба есть две соседние грани, на которых написаны соседние числа;
б) таких пар соседних граней у куба не меньше двух.

Прав ли он в обоих случаях?

Идея. Подсчитать количество вариантов и применить принцип Дирихле.
Указание. В кубе только противоположные грани не являются соседними.

Решение. Число пар чисел, которые являются соседними, равно пяти — это

$$(1;2),\quad (2;3),\quad (3;4),\quad (4;5),\quad (5;6),$$

а число граней, которые не являются соседними, равно трём: верхняя–нижняя, левая–правая, передняя–задняя.

Следовательно, как минимум две пары соседних чисел будут располагаться не на противоположных гранях.

Задача 18

6-7 Докажите, что у любого многогранника найдутся две грани, которые имеют одинаковое число сторон.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. Рассмотреть грань с самым большим числом вершин.

Решение. Пусть существует такой многогранник, у которого все грани имеют разное число сторон, а значит, и разное число вершин.

Рассмотрим грань с самым большим числом вершин. Пусть у неё n вершин и, следовательно, n сторон. Пронумеруем соседние n граней по убыванию числа сторон.

У первой из них не больше чем $n-1$ сторона,
у второй — не больше чем $n-2$ стороны,
у третьей — не больше чем $n-3$ стороны,
....
у последней — не более одной стороны.

Так как у грани многоугольника должно быть как минимум три стороны, то наше предположение неверно и у любого многогранника найдутся две грани, которые имеют одинаковое число сторон.

11. Принцип Дирихле и окраска плоскости и её частей. Таблицы

Задача 1

5-7 а) Каждая грань куба разделена на четыре равных квадрата, и каждый квадрат окрашен в один из трёх цветов: синий, красный или зелёный так, что квадраты, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько может быть синих, красных и зелёных квадратов?

Идея. Рассмотреть квадраты, примыкающие к вершине куба.
Указание. Квадраты, примыкающие к одной вершине куба, должны быть разноцветными.

Решение. Квадраты, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета, следовательно, к каждой вершине куба примыкают синий, красный и зелёный квадраты. Так как вершин у куба восемь, то синих, красных и зелёных квадратов по восемь.
Ответ. 8, 8 и 8.

Задача 2

6-7 Несколько дуг окружности покрасили в красный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. Рассмотреть диаметрально противоположные точки.

Решение. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности, значит, сумма длин неокрашенных дуг больше половины длины окружности. Если напротив каждой неокрашенной точки лежит окрашенная, то получается, что сумма длин окрашенных дуг тоже больше половины длины окружности, а это не так. Следовательно, есть неокрашенная точка, напротив которой лежит тоже неокрашенная. То есть существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

Задача 3

5-7 Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?

Идея. В квадрате 2×2 может находиться только один король.
Указание. Разбить шахматную доску на квадраты 2×2.

Решение. Если разбить шахматную доску на квадраты 2×2, то в каждый квадрат можно поставить только одного короля. Значит, максимальное число королей $64 : 4 = 16$.

Это максимальное значение достигается при следующей расстановке: в каждом левом верхнем углу квадрата 2×2 поставить короля.
Ответ. 16.

Задача 4

$\boxed{5\text{-}7}$ Какое наибольшее число полей на доске 8×8 можно закрасить в чёрный цвет так, чтобы в любом уголке из трёх полей было по крайней мере одно незакрашенное поле?

Идея. В квадрате 2×2 можно закрасить максимум две клетки.
Указание. Разбить шахматную доску на квадраты 2×2.

Решение. Если разбить шахматную доску на квадраты 2×2, то в каждом квадрате можно закрасить максимум две клетки. Значит, максимальное число закрашенных клеток 32.

Это максимальное значение достигается при обычной шахматной раскраске.
Ответ. 32.

Задача 5

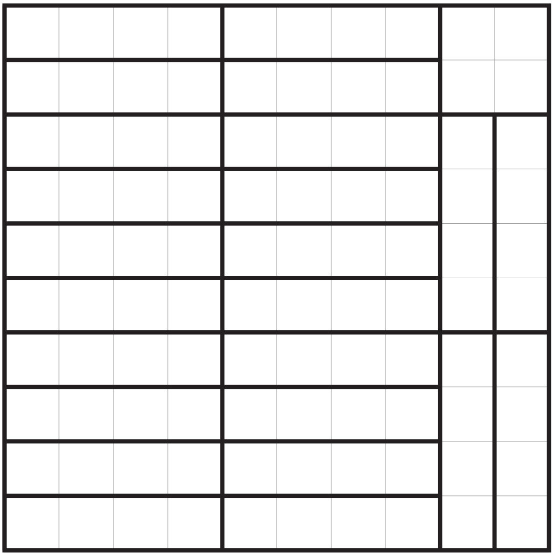
$\boxed{6\text{-}7}$ На поле 10×10 для игры в «Морской бой» стоит один четырёхпалубный корабль. Какое минимальное число выстрелов надо произвести, чтобы наверняка его ранить?

Идея. В каждый прямоугольник доски размером 1×4 должен быть произведён хотя бы один выстрел.

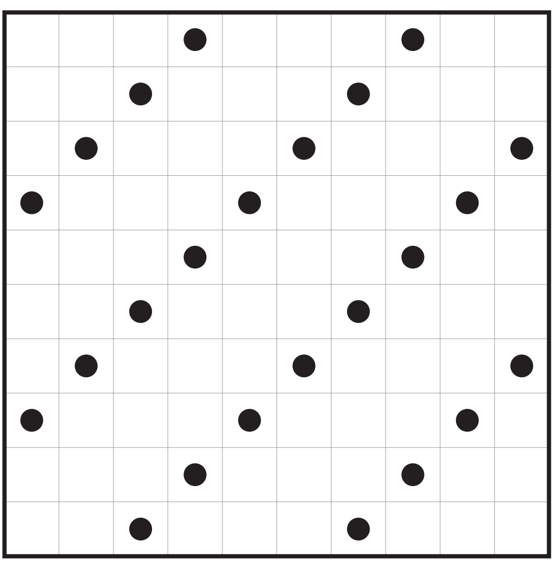
Указание. Расположить на поле максимальное число прямоугольников 1×4.

Решение. Для того чтобы обнаружить корабль размером 1×4, надо чтобы в каждый прямоугольник доски размером 1×4 был произведён хотя бы один выстрел.

Так как на доске размером 10×10 можно поместить 24 прямоугольника размером 1×4, то всего должно быть произведено как минимум 24 выстрела.



Покажем, что 24 выстрелов достаточно для того, чтобы ранить четырёхпалубный корабль. В качестве примера можно рассмотреть выстрелы по следующим квадратам:



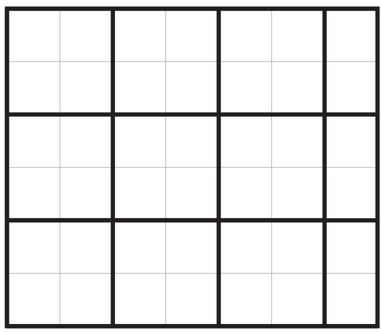
Ответ. 24.

Задача 6

6-7 В прямоугольнике 6×7 закрашены какие-то 25 клеток. Докажите, что можно найти квадрат 2×2, в котором закрашены не менее трёх клеток.

Идея. Разбить прямоугольник на 12 фигур и применить принцип Дирихле.
Указание. Разместить в прямоугольнике максимальное число квадратов 2×2.

Решение. Предположим, что нельзя найти квадрат 2×2, в котором закрашены более двух клеток. Разобьём исходный прямоугольник на 9 квадратов 2×2 и 3 половинки квадрата 2×2.



Так как в каждой из этих 12 фигур не может быть более двух закрашенных клеток, то получается, что всего закрашено не более 24 клеток, а это не так. Следовательно, наше предположение было неверным и найдётся квадрат 2×2, в котором закрашены не менее трёх клеток.

Задача 7

7 В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.

Идея. Рассмотреть самый заполненный ряд и применить принцип Дирихле.
Указание. На самом заполненном ряду сидели как минимум 8 детей.

Решение. На утреннем сеансе 50 детей разместились на 7 рядах. По принципу Дирихле хотя бы в одном из рядов сидели как минимум 8 детей. Так как рядов всего 7, то как минимум двое из этих восьми детей окажутся в одном ряду на вечернем сеансе.

Задача 8

6-7 В клетчатом квадрате 9×9 закрашено 19 клеток. Докажите, что либо найдутся две закрашенные клетки, имеющие общую сторону, либо найдётся незакрашенная клетка, к сторонам которой примыкает не менее двух закрашенных.

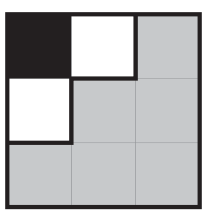
Идея. Разбить квадрат на 9 квадратов 3×3 и применить принцип Дирихле в том квадрате, где больше всего закрашенных клеток.
Указание. Рассмотреть варианты расположения чёрной клетки внутри самого закрашенного квадрата 3×3.

Решение. Разобьём исходный квадрат на 9 квадратов размером 3×3. Так как всего закрашено 19 клеток, то по принципу Дирихле хотя бы в одном из этих квадратов будет как минимум 3 закрашенные клетки.

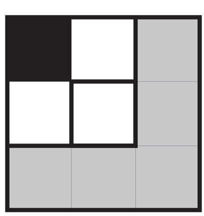
Предположим, что в этом квадрате не найдутся две чёрные (закрашенные) клетки, имеющие общую сторону и не найдётся белая (незакрашенная) клетка, к сторонам которой примыкает не менее двух чёрных.

Рассмотрим варианты расположения чёрной клетки внутри самого закрашенного квадрата 3×3.

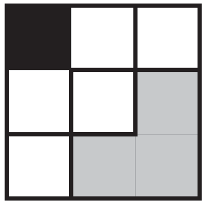
1) Пусть в одном из углов (для определённости в левом верхнем углу) находится чёрная клетка. Тогда ниже и правее точно белые клетки.



Центральная клетка не может оказаться чёрной, так как иначе у двух белых клеток оказались бы чёрные соседи.

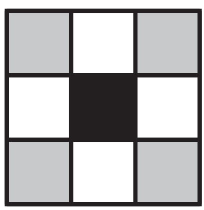


Из этих же соображений клетки, стоящие в левом нижнем и правом верхнем углу, также белые.



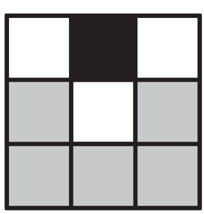
Так как всего в этом квадрате как минимум 3 чёрные клетки, то в оставшемся трёхклеточном уголке их как минимум две. При этом либо две чёрные клетки будут соседями (иметь общую сторону), либо у белой клетки будут два чёрных соседа. То есть в этом случае мы получаем противоречие, показывающее что наше предположение неверно.

2) Пусть в центре квадрата находится чёрная клетка. Так как по предположению к ней не могут примыкать чёрные клетки, то все 4 оставшиеся неугловые клетки белые.

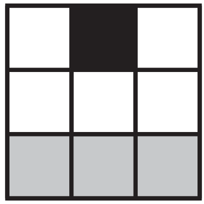


Среди оставшихся четырёх клеток как минимум две чёрные, но этого не может быть, так как в этом случае у белой клетки будет два чёрных соседа.

3) Рассмотрим последний оставшийся случай: чёрная клетка примыкает к границе квадрата и не лежит в углу. Так как по предположению к ней не могут примыкать чёрные клетки, то все 3 её соседа белые.



Оставшиеся две клетки во второй строке не могут быть чёрными, так как иначе у белой клетки в центре будут два чёрных соседа.



Среди оставшихся трёх клеток как минимум две чёрные. При этом либо две чёрные клетки будут соседями (иметь общую сторону), либо у белой клетки будут два чёрных соседа. То есть в этом случае мы тоже получаем противоречие, показывающее что наше предположение неверно.

Следовательно, всегда найдутся либо две закрашенные клетки, имеющие общую сторону, либо найдётся незакрашенная клетка, к сторонам которой примыкает не менее двух закрашенных.

Задача 9

6-7 Клетки квадратной таблицы 15×15 раскрашены в красный, синий и зелёный цвета. Докажите, что найдётся по крайней мере две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

Идея. Предположить противное и получить противоречие.
Указание. Оценить количество клеток каждого цвета при условии, что в разных строках их разное количество.

Решение. Пусть нет двух строк с одинаковым количеством красных клеток. Тогда всего красных клеток в 15 строках не меньше чем

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 14 = 105.$$

Из аналогичных соображений синих клеток тоже не меньше чем 105 и зелёных не меньше чем 105. Всего получается, что в таблице 15×15 не меньше чем $105 \cdot 3 = 315$ клеток, а это не так, их всего $15 \cdot 15 = 225$. Противоречие. Значит, наше предположение неверно и найдётся по крайней мере две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.

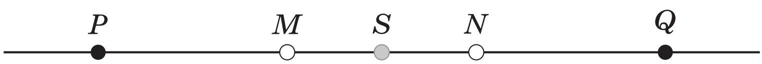
Задача 10

6-7 а) Прямая окрашена в два цвета. Доказать, что на ней найдутся три точки A, B, C, окрашенные в один цвет, такие, что B — середина отрезка AC.

Идея. Построить два отрезка с одноцветными концами и с общей серединой.
Указание. Рассмотреть пару одноцветных точек M,N и две точки P, Q такие, что $PM = MN = NQ$.

Решение. Рассмотрим две одноцветные точки. Для определённости пусть это будут белые точки M и N, где M левее, чем N. Рассмотрим ещё две точки на прямой: P — левее M, Q — правее N, находящиеся на расстоянии MN от точек M и N соответственно.

Если хотя бы одна из точек P и Q белая, то задача решена. Рассмотрим случай, когда точки P и Q чёрные.



Пусть S — середина отрезка MN. Заметим, что S будет серединой и отрезка PQ, поэтому, если S белая, то искомыми одноцветными точками A, B, C будут белые точки M, S, N, а если S чёрная, то — чёрные точки P, S, Q.

Задача 11

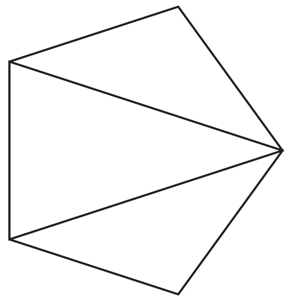
5-7 Плоскость окрашена в два цвета — белый и чёрный, причём имеются точки и белого, и чёрного цвета. Докажите, что всегда найдётся равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета.

Идея. Рассмотреть правильный пятиугольник.
Указание. Любые три вершины правильного пятиугольника являются вершинами равнобедренного треугольника.

Решение. Рассмотрим правильный пятиугольник и три из его пяти вершин. Заметим, что возможно всего два принципиально отличных друг от друга варианта.

1) Если три вершины располагаются подряд, то они являются вершинами тупоугольного равнобедренного треугольника.

2) Если три вершины располагаются не подряд, то они являются вершинами остроугольного равнобедренного треугольника.



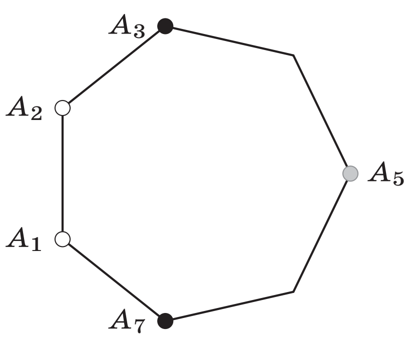
А так как у пятиугольника есть как минимум три одноцветные вершины, то именно они и будут вершинами равнобедренного треугольника с вершинами одного цвета.

Задача 12

6-7 Вершины правильного семиугольника окрашены в два цвета — белый и чёрный. Докажите, что среди них обязательно найдутся три вершины одного цвета, которые являются вершинами равнобедренного треугольника. Верно ли аналогичное утверждение для правильного восьмиугольника?

Идея. Перебрать возможные варианты и либо построить пример, либо показать, что построить пример нельзя.
Указание. Рассмотреть случай, когда рядом располагается пара вершин одного цвета, а соседними с этой парой являются две вершины другого цвета.

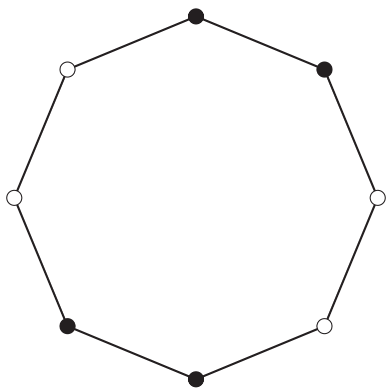
Решение. Так как у семиугольника нельзя раскрасить вершины разным цветом через одну, то найдутся две соседние вершины одного цвета. Для определённости пусть это будут две белые вершины. Пронумеруем вершины семиугольника, начиная с них.



Рассмотрим соседние с ними вершины A_3 и A_7. Если хотя бы одна из них белая, то задача решена. Рассмотрим случай, когда вершины A_3 и A_7 чёрные.

Заметим, что треугольники $A_1A_2A_5$ и $A_3A_7A_5$ являются равнобедренными, поэтому, если A_5 белая, то искомым треугольником будет треугольник $A_1A_2A_5$, а если A_5 чёрная, то $A_3A_7A_5$.

У правильного восьмиугольника не всегда можно найти три вершины одного цвета, которые являются вершинами равнобедренного треугольника. Например, если раскрасить вершины две через две, то утверждение для восьмиугольника будет неверным.



Ответ. Для восьмиугольника неверно.

Задача 13

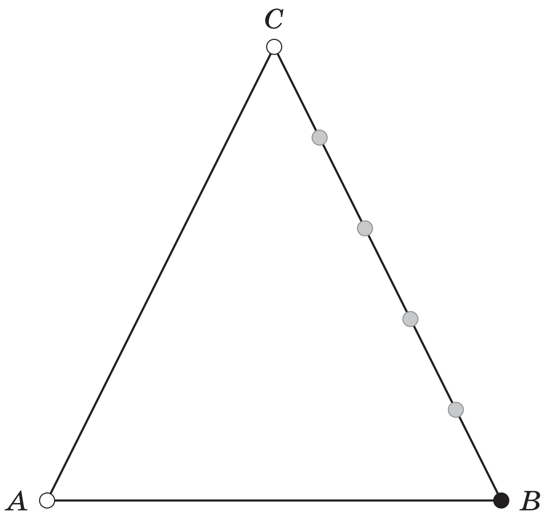
6-7 Плоскость окрашена в два цвета — белый и чёрный, причём имеются точки и того, и другого цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

Идея. Построить отрезок, соединяющий разноцветные точки, и разбить его на отрезки длины 1.

Указание. Построить треугольник, у которого длины двух сторон являются целыми числами.

Решение. Рассмотрим две произвольные точки разного цвета: A — белая, B — чёрная. Построим равнобедренный треугольник ABC такой, что длины отрезков AC и BC равны одному и тому же целому числу.

Точка C либо белая, либо чёрная, значит, один из отрезков AC и BC с концами разного цвета. Пусть для определённости C белая.



Так как длина BC — целое число, то отрезок BC можно разбить на несколько отрезков длины 1. Покажем, что среди них точно есть отрезок с концами разного цвета. Рассмотрим ту точку из точек разбиения отрезка BC, которая ближе всего располагается к точке B. Если она белая, то задача решена, если чёрная, то рассмотрим следующую точку и т. д. Поскольку точка C белая, мы рано или поздно доберёмся до единичного отрезка с разноцветными концами.

Задача 14

6-7 Узлы бесконечного листа клетчатой бумаги раскрашены в два цвета. Доказать, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечении которых лежат точки одного цвета.

Идея. Рассмотреть по несколько узлов в разных горизонталях и применить принцип Дирихле, используя то, что таких наборов конечное число.
Указание. Рассмотреть по три узла в каждой из девяти горизонталей.

Решение. Сначала рассмотрим три узла в одной горизонтали. Так как они покрашены в один из двух цветов, то всего возможно 8 вариантов раскраски этих точек.

Тогда по принципу Дирихле, рассмотрев 9 наборов из трёх узлов, расположенных в 9 горизонталях (друг под другом), мы получим как минимум два одинаковых набора. В каждом из этих наборов будет как минимум два узла одного цвета. Эти четыре точки (две из одного набора и две из другого) и будут искомыми четырьмя точками одного цвета.

Задача 15

6-7 Можно ли внутри треугольника с синими вершинами отметить 10 синих и 20 красных точек так, чтобы никакие три синие точки не лежали на одной прямой и чтобы внутри любого треугольника с синими вершинами была хотя бы одна красная точка?

Идея. Сравнить число красных точек и число синих треугольников.
Указание. При добавлении одной точки внутрь треугольника число треугольников увеличивается на два.

Решение. Рассмотрим исходный треугольник с синими вершинами. Отметим внутри него одну синюю точку и соединим с другими синими точками. Получим вместо одного исходного треугольника три новых маленьких треугольника. То есть количество треугольников увеличилось на два.

Теперь отметим синюю точку внутри одного из маленьких треугольников. Число треугольников также увеличится на два и т. д. После добавления 10 точек число треугольников увеличится на 20, т. е. синих треугольников станет 21.

Поскольку красных точек всего 20, не получится сделать так, чтобы внутри любого треугольника с синими вершинами была хотя бы одна красная точка.
Ответ. Нельзя.

ОТВЕТЫ

1.

1. Наф-Нафу достался домик из камней.
2. Мальчик рыжий, девочка черноволосая.
3. а) Да, сказал.
   б) Нет.
4. 0 или 1000.
5. 3, всех по одному.
6. а) 68.
   б) 60%.
   в) 6.
7. а) Вова в четвёртом классе, Петя в третьем классе, Юра во втором классе, Коля в первом классе.
   б) Олег — лучший художник, Аня — лучший шахматист, Игорь — лучший математик.
8. Николаев — бухгалтер, Михайлов — кассир, Львов — секретарь.
9. а) Молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, вода в стакане.
   б) Вере 5 лет, Боре 8 лет, Ане 13 лет, Гале 15 лет.
   в) Аня, Валя, Галя, Надя соответственно в белом, голубом, зелёном и розовом платьях.
10. Петя — Герасимов, Володя — Семёнов, Миша — Иванов.
11. а) Владимир преподаёт литературу в Туле, Игорь — физику в Калуге, Сергей — математику в Рязани.
    б) Аня в белом платье и белых туфлях, Валя в зелёном платье и синих туфлях, Наташа в синем платье и зелёных туфлях.
    в) Борисов и Васильев — майор и капитан артиллерии, Александров и Григорьев — лейтенанты танковых войск.
12. а) Витя — 6, Женя — 5, Коля — 3.
    б) В двух хлевах будет по 1 козлёнку и 3 гуся, в трёх хлевах — по 2 козлёнка и 1 гусю.
13. а) 17.
    б) 16.

14. Не может.
16. а) 33 задачи.
    б) 1. Нет; 2. Нет.
19. Митя, Толя, Сеня, Костя, Юра или Митя, Толя, Костя, Сеня, Юра.
20. Три карточки (Б, 4 и 5).
21. Да.
22. Сергеев $(25+20+20+3+2+1)$; Борисов $(50+10+5+3+2+1)$; Воробьёв $(25+20+10+10+5+1)$.
23. Иван поймал 21 рыбу, его сына звали Николай.

2.

1. а) Ложно.
   б) Например, «Меня зовут Коля».
2. а) 11 груздей и 19 рыжиков.
   б) Один.
3. Робинзон должен сказать: «Меня съест ваш лев». Это утверждение не истинно и не ложно.
4. а) Золушка взяла зёрнышко из мешка с надписью «Смесь».
   б) В мешке с надписью «крупа» находится сахар, с надписью «вермишель» — крупа, с надписью «крупа или сахар» — вермишель.
   в) Во второй.
5. Соня.
6. Третий подсудимый.
7. а) В.
   б) 6.
8. а) Нет.
   б) Афродита.
9. Один.
10. а) Ольга — I, Мария — II, Поля — III, Нина — IV.
    б) Серёжа — I, Надя — II, Коля — III, Ваня — IV, Толя — V.
    в) Андреев из Онеги; Борисов из Котласа; Васильев из Каргополя; Григорьев из Коряжмы; Данилов из Вельска.
11. Нет.
12. а) Любой вопрос, ответ на который меняется со временем, например: «Сколько сейчас времени?». Или такой вопрос: «Это первый вопрос, который я вам задаю?»
    б) Любой вопрос, на который известен правильный ответ.
    в) Лжецом.

13. а) Например, такой: «Что бы вы ответили, если бы вас спросили, живёт ли у вас дома ручной крокодил?»
    б) Например, такой: «Что бы вы ответили, если бы вас спросили, какой это город?»
14. а) *A* — рыцарь, *B* — лжец.
    б) Один.
15. а) М — рыцарь, К и Р — лжецы.
    б) Р — рыцарь.
16. Нет.
17. Первый — лжец, второй — рыцарь. В городе 1000 лжецов и 1000 рыцарей.
18. Веня и Женя — рыцари, а Беня и Сеня — лжецы.
19. 90 лжецов.
20. а) Все лжецы;
    б) либо все лжецы, либо 3 лжеца и 6 рыцарей.
21. «Рыцарь».
22. а) К — лжец, М — хитрец, Р — рыцарь.
    б) А — рыцарь, В — лжец, С — хитрец
23. б) А — лжец, В — хитрец, С — рыцарь.
24. 3.

3.

1. а) Смогут.
   б) Да.
2. Да.
3. Да, если они подошли к реке с разных берегов.
4. Да.
5. Да.
6. Нет.
7. Да.
8. Смогут.
9. а) Могут.
   б) Да.
   в) Да.
10. За 30 секунд; за 10 секунд.
11. а) Сметаны в банке с вареньем окажется столько же, сколько и варенья в стакане со сметаной.
    б) Одинаково во всех случаях.

12. Поровну.
13. а) $7 = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 8$.
    б) $6 = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 9$.
    в) $4 = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5$.
14. а) $6 = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 5$ или $6 = 4 \cdot 5 - 2 \cdot 7$.
    б) $5 = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 3$ или $5 = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 7$.
    в) $6 = 2 \cdot 8 - 2 \cdot 5$.
    г) $8 = 2 \cdot 9 - 2 \cdot 5$.
15. Нельзя.
16. а) $1 = 3 \cdot 12 - 5 \cdot 7$.
    б) $6 = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 4$.
    в) $5 = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 7$ или $5 = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 3$.
    г) $13 = 6 \cdot 5 - 1 \cdot 17$.
    д) $8 = 8 \cdot 16 - 8 \cdot 15$.
17. Можно.
18. а) $15 = 11 - 7 + 11$.
    б) $9 = 7 - 5 + 7$.

4.

1. Да.
2. Да.
3. Да; 4; k, где $3^{k-1} < n \leqslant 3^k$.
5. Три.
6. а) 2.
   б) 2.
   в) Да.
   г) Да.
7. Да.
8. Можно.
9. Можно.
10. а) Можно.
    б) Можно.
11. Взять из первого мешка монету, из второго — 2 и т. д.
12. а) Можно.
    б) Можно.
13. Можно.
14. Не всегда.
15. а) 4.
    б) 7.

18. Да.
19. а) Можно. б) Можно.
20. а) На первом и втором грузовиках по три полные бочки, по одной, заполненной наполовину, и по три пустых; на третьем — одна полная бочка, пять бочек, заполненных наполовину, и одна пустая бочка.
    б) Например, так: $9+6$, $8+5+2$, $7+4+3+1$.
21. 3 кг и 4 кг.
22. Да.
23. а) За 6 вопросов.
    б) За 10 вопросов.
24. $127 = 1+2+4+8+16+32+64$.
25. а) Например, 1, 3, 9 и 27 кг.
    б) Например, 1, 3, 9, 27 и 81 кг.
26. а) Третье.
    б) Четыре.
28. Да.
29. Да.
30. Да.

5.

1. 6 зайчат.
2. 5.
3. а) 1, 2, 3, 4, 5, 7.
   б) 1, 2, 3, ..., 98, 99, 101.
4. 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.
5. а) Нет.
   б) Нет.
6. 10, 10, 0, ..., 10, 10, 0.
7. а) Нельзя.
   б) Можно, например блоками по 6 чисел 121321.
8. а) Нет.
   б) Нет.
9. 4.
10. а) Самый низкий из высоких выше.
11. 14.
12. а) 99.
    б) 99.

6.

1. За 3 минуты.
2. 25 минут.
3. 1 кг.
4. а) 1.
   б) 1.
5. 25 стражников.
6. а) 11 монет — 9 трёхкопеечных монет и 2 пятака.
   б) 9 монет — 4 трёхкопеечные монеты и 5 пятаков.
7. 24.
8. 26.
9. а) 8 конфет.
   б) 9.
   в) 7, из них 3 девочки.
10. Прямоугольник 7×13.
11. а) 21.
    б) 11.
12. 80.
13. 16.
14. 20.
15. а) 16.
    б) 17.
16. 8 ладей.
17. 8.
18. 14.
19. 32.
20. а) 6.
    б) 6.
21. 63.
22. 28.
23. а) 8.
    б) 7.
24. Четыре.
25. 194.
26. Десять дробей.
27. 251.
28. а) 5.
    б) 7.

29. 9,1.

30. 24.

31. а) Нет.
    б) Нет.

32. 12.

33. Таких наборов всего четыре:
    1) 1×1 кг, 59×2 кг;
    2) 2×1 кг, 58×2 кг;
    3) 58×1 кг, 2×2 кг;
    4) 59×1 кг, 1×2 кг.

34. 8.

7.

1. г) Да.
   д) Да.

2. б) 367.
   в) У пяти учеников.

5. в) Можно.

6. а) Да.
   г) Да.

8. а) 21 ботинок.
   б) 4.
   в) 10 карандашей.

9. а) 13; б) 27; в) 28.

10. 38.

11. г) Нельзя.

12. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 грибов.

8.

3. Не больше 6 чисел.

4. а) Верно.
   б) Нет.

5. б) Можно.

9.

2. б) Да.
3. Нет.
4. б) Верно.
7. а) Это невозможно.
   б) Нельзя.
   в) Не может.
12. в) Да.
13. Нельзя.

10.

2. 10.
7. в) Можно.
13. Не может в обоих случаях.
17. Прав в обоих случаях.

11.

1. а) 8, 8 и 8.
   б) 2500.
3. 16.
4. 32.
5. 24.
12. Для восьмиугольника неверно.
15. Нельзя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агаханов Н. Х., Подлипский О. К.* Математические олимпиады Московской области. — М.: Изд-во МФТИ, 2003. — 224 с.
2. *Бабинская И. Л.* Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975. — 111 с.
3. *Берлов С. Л., Иванов С. В., Кохась К. П.* Петербургские математические олимпиады. — 3-е изд., стереотип. — СПб.: Лань, 2005. — 608 с.
4. *Горбачёв Н. В.* Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004. — 560 с.
5. *Зубелевич Г. И.* Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями) : пособие для учителей 5–8 классов ; под ред. К. П. Сикорского. — 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1971. — 304 с.
6. *Медников Л. Э., Мерзляков А. С.* Математические олимпиады. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. — 136 с.
7. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Лучшие задачи на смекалку. — М.: НТЦ «Университетский» : АСТ-ПРЕСС, 1999. — 304 с.
8. *Петраков И. С.* Математические олимпиады школьников. Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1982. — 96 с.
9. *Спивак А. В.* Тысяча и одна задача по математике : кн. для учащихся 5–7 кл. — 4-е изд. — М.: Просвещение, 2012. — 207 с.
10. *Фарков А. В.* Готовимся к олимпиадам по математике : учебно-методическое пособие. — 5-е изд., стереотип. — М.: Экзамен, 2010. — 158 с.
11. *Фарков А. В.* Математические олимпиады в школе. 5–11 класс. — 2-е изд., испр. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 160 с.
12. *Фомин Д. В.* Санкт-Петербургские математические олимпиады. — СПб.: Политехника, 1994. — 309 с.

13. *Чирский В. Г., Шавгулидзе Е. Т.* Уравнения элементарной математики. Методы решения. — М.: Наука, 1992. — 176 с.

14. *Чубариков В. Н.* Элементы арифметики. — М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2007. — 96 с.

15. LXVII (67-я) Московская математическая олимпиада. Задачи и решения. — М.: Изд-во МЦНМО, 2004. — 24 с.

Федотов Михаил Валентинович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики, заместитель декана по учебной работе факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Область научных интересов: математическая физика, дифференциальные уравнения, численные методы, математические модели нелинейной оптики. Автор более 100 научных и учебно-методических работ.

Организовал и долгое время возглавлял Учебный центр факультета (1998–2014), в состав которого входят подготовительные курсы.

Золотарёва Наталья Дмитриевна — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Преподаватель подготовительных курсов МГУ, член экзаменационной комиссии МГУ. Область научных интересов: адаптивно измельчаемые сетки для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, оценка погрешности численных методов для решения ОДУ.

Является сертифицированным экспертом ГИА-11 по математике. Автор более 50 научных и учебно-методических работ.

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Учебное электронное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Золотарёва Наталья Дмитриевна
Федотов Михаил Валентинович

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА.
ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ.
5–7 КЛАССЫ

Учебно-методическое пособие

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. А. Прокудин*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*
Корректор *И. Н. Панкова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано к использованию 01.06.21.
Формат 145×225 мм

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Серия книг **«ВМК МГУ–школе»** — результат многолетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. В серию входят пособия по алгебре, геометрии, физике и информатике. Все они предназначены для подготовки и успешной сдачи ГИА и ЕГЭ, а также поступления в престижные вузы страны.

Олимпиадная математика — новое направление серии «ВМК МГУ–школе». Его основная задача — научить школьников всех возрастов решать задачи повышенной сложности.

Настоящее пособие предназначено для учащихся 5–7 классов и является третьим в серии пособий по олимпиадным математическим задачам. Выпущены ещё несколько книг для 5–7 классов — по другим разделам математики, также готовятся сборники задач для 8–9 и 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте!