Tarea 14

Ricardo Cruz Martínez

19 de enero de 2021

1. *a*) Prueba que el *toro de Clifford*

$$\mathbb{T}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : x_1^2 + x_2^2 = \cdots = x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1\}$$

es una subvariedad de $\mathbb{R}^{2n}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$. ¿Cuál es su codimensión?

Prueba. Hacemos $\Omega = \mathbb{R}^{2n}$ y proponemos

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \text{ dada por}$$
$$\varphi(x_1, ..., x_{2n}) = (x_1^2 + x_2^2, ..., x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2)$$

Donde φ es diferenciable entrada a entrada y es fácil notar que

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \nabla(x_1^2 + x_2^2) \\ \vdots \\ \nabla(x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2x_{2n-1} & 2x_{2n} \end{pmatrix}$$

Y sabemos que $\varphi'(x)$ es lineal y por lo que vimos antes, es diferenciable y su derivada es ella misma, así $\varphi''(x)[y] = \varphi'(x)$ y como la segunda derivada ya es constante en el espacio $\mathcal{L}_3(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^n)$, tenemos que su tercer derivada es nula, por lo que φ es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Claramente Ω es abierto en $\mathbb{R}^{2n}$ y de igual manera, $\mathbb{T} \subseteq \Omega$. Por otra parte, veamos que $\overline{1} = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^n$ es valor regular de φ. Antes, notemos que tenemos la siguiente igualdad entre conjuntos

$$\mathbb{T}^n = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : x_1^2 + x_2^2 = \cdots = x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : \varphi(x) = \overline{1}\}$$

Sean $x = (x_1, ..., x_{2n}) \in \mathbb{T}^n$, $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$

Queremos ver que existe $y = (y_1, ..., y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\varphi'(x)[y] = v$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \varphi'(x)[y] &= \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2x_{2n-1} & 2x_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix} \\ &= 2(x_1y_1 + x_2y_2, ..., x_{2n-1}y_{2n-1} + x_{2n}y_{2n}) \end{aligned}$$

Si hacemos y tal que $y_{2i} = \dfrac{v_i x_{2i}}{2}$ y $y_{2i-1} = \dfrac{v_i x_{2i-1}}{2}$, con $i \in \{1, ..., n\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \varphi'(x)[y] &= 2(x_1y_1 + x_2y_2, ..., x_{2n-1}y_{2n-1} + x_{2n}y_{2n}) \\ &= 2\left(\frac{x_1v_1x_1}{2} + \frac{x_2v_1x_2}{2}, ..., \frac{x_{2n-1}v_nx_{2n-1}}{2} + \frac{x_{2n}v_nx_{2n}}{2}\right) \\ &= (v_1(x_1^2 + x_2^2), ..., v_n(x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2)) \\ &= (v_1, v_2, ..., v_n) = v \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi'(x)$ es sobreyectiva en $\mathbb{T}^n$ y por ende, $\overline{1}$ es valor regular de φ.
Finalmente, concluimos que $\mathbb{T}^n$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^{2n}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ de codimensión n, pues es la dimensión del codominio de φ.

b) Dado $x \in \mathbb{T}^n$, describe el espacio tangente $T_x\mathbb{T}^n$ en x al toro de Clifford.

Solución. Por definición sabemos que

$$T_x\mathbb{T}^n = Ker(\varphi'(x)) = \{y \in \mathbb{R}^{2n} : \varphi'(x)[y] = \overline{0}\}$$

Así, tenemos que se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} y \in Ker(\varphi'(x)) &\Leftrightarrow \varphi'(x)[y] = \overline{0} \\ &\Leftrightarrow 2(x_1y_1 + x_2y_2, ..., x_{2n-1}y_{2n-1} + x_{2n}y_{2n}) = \overline{0} \\ &\Leftrightarrow (x_1y_1 + x_2y_2, ..., x_{2n-1}y_{2n-1} + x_{2n}y_{2n}) = \overline{0} \\ &\Leftrightarrow x_1y_1 + x_2y_2 = 0, ..., x_{2n-1}y_{2n-1} + x_ny_n = 0 \end{aligned}$$

2. Sean $\Sigma := \{\bar{x} = (x_k) \in \ell_2 : \|\bar{x}\|_{\ell_2} = 1\}$ la esfera unitaria en ℓ_2 y $g : \ell_2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(\bar{x}) = x_1$.

a) Prueba que Σ es una subvariedad de ℓ_2 de clase $\mathcal{C}^\infty$. ¿Cuál es su codimensión?

Prueba. Definimos la siguiente función

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \|x\|_{\ell_2}^2$$

Donde $\Omega = \ell_2$, que claramente es abierto.
En clase vimos que

$$\varphi'(x)[y] = 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

que claramente es lineal, y como la derivada de una función lineal es ella misma, se tiene que $D^2_\varphi(x) = \varphi'(x)[y]$ y como $\varphi'(x)[y]$ es constante en $\mathcal{L}_2(\ell_2, \mathbb{R})$, así $D^3_\varphi \equiv 0$ y de esto φ es de clase $\mathcal{C}^\infty$.
Por otra parte, notemos que

$$\Sigma = \{v \in \ell_2 : \|v\|_{\ell_2} = 1\} = \{v \in \ell_2 : \|v\|_{\ell_2}^2 = 1\} = \{v \in \ell_2 : \varphi(v) = 1\}$$

Además se cumple que $\Sigma \subseteq \Omega = \ell_2$
Veamos que 1 es valor regular de φ.
Sea $x \in \Sigma$

$$\varphi'(x)[x] = 2\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = 2\,\|x\|_{\ell_2}^2 > 0$$

La última desigualdad se da a raíz de que $\|x\|_{\ell_2}^2 = 1 > 0$, ahora, como $\varphi'(x)$ es una transformación lineal con codominio $\mathbb{R}$, donde sabemos que $dim(\mathbb{R}) = 1$ y como la imágen de $\varphi'(x)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}$, entonces hay dos posibilidades, ó $Im(\varphi'(x)) = \{0\}$ ó $Im(\varphi'(x)) = \mathbb{R}$, pero ya vimos que $\varphi'(x)(x) \neq 0$, por lo que $Im(\varphi'(x)) = \mathbb{R}$ y por ende $\varphi'(x)$ es sobreyectiva, por lo que 1 es valor regular de φ.
Finalmente, concluimos que Σ es una subvariedad de ℓ_2 de clase $\mathcal{C}^\infty$ de codimensión 1, pues es la dimensión del codominio de φ.

b) Encuentra todos los puntos críticos de g en Σ, y di si algunos de ellos son máximos o mínimos locales de g en Σ.

Solución. Buscamos los puntos $u \in \Sigma$ tales que $g'(u)v = 0 \quad \forall v \in T_u\Sigma$, donde

$$T_u\Sigma = Ker\varphi'(u) = \{v \in \ell_2 : \varphi'(u)v = 0\}$$

Ahora, es fácil ver que g es lineal y continua, por lo que $g'(u) = g$, pues la derivada de una función lineal es ella misma.
Por otra parte, sea $u \in \Sigma$ y $v \in T_u\Sigma$, entonces

$$g'(u)v = 0 \Leftrightarrow g(v) = 0 \Leftrightarrow v_1 = 0$$

Por lo que los puntos críticos $u \in \Sigma$ que buscamos son aquellos que cumplen que

$$Ker\varphi'(u) \subseteq A := \{w \in \ell_2 : w_1 = 0\}$$

Sea $u = (u_1, u_2, ...) \in \Sigma$ con $u_i \neq 0$ para alguna $i > 1$, por lo que tenemos dos casos

Caso 1.- $u_1 = 0$
Consideremos $x \in \ell_2$ tal que $x = (1, 0, 0, ...)$, donde claramente se cumple que

$$\varphi'(u)[x] = 2\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k = 0$$

Sin embargo $x \notin A$, por lo que si $u_1 = 0$, entonces u no puede ser punto crítico de g.

Caso 2.- $u_1 \neq 0$
Ahora consideremos $x \in \ell_2$, donde $x_1 = 1$, $x_i = \frac{-u_1}{u_i}$ y $x_j = 0$ para toda $j \neq i$, por lo que tenemos lo siguiente

$$\varphi'(u)[x] = 2\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k = u_1 - \frac{u_1 u_i}{u_i} = 0$$

Por lo que $x \in Ker(\varphi'(u))$, pero $x \notin A$, por lo que si u tiene esa forma, tampoco puede ser punto crítico de g

Por lo que únicamente $u = (\pm 1, 0, 0, ...)$, donde claramente $u \in \Sigma$. Veamos que, en efecto, son puntos críticos de g
Tomemos $u = (1, 0, 0, ...)$ y $x \in T_u\Sigma$

$$\varphi'(u)[x] = 0 \Leftrightarrow 2\sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Por lo que tenemos que $x \in A$ además de que u es, en efecto, un punto crítico de g y de manera análoga se sigue que $u = (-1, 0, 0, ...)$ es también un punto crítico de g.
Ahora veamos cual de ellos es máximo o mínimo local de g en T.
Dado $u \in \Sigma$, se tiene que $g(u) \in [-1, 1]$, pues $u_1^2 \leq \|u\|_{\ell_2}^2 = 1$, por lo que ya tenemos las desigualdades deseadas, pues $-1 = g(u_1) \leq g(u) \leq g(u_2) = 1 \quad \forall u \in \Sigma$, donde $u_1 = (-1, 0, 0, ...)$ y $u_2 = (1, 0, 0, ...)$, por lo que u_1 es mínimo de g en Σ y u_2 es máximo de g en Σ.

3. Sea $\mathcal{T}$ el *toro de revolución* en $\mathbb{R}^3$ que se obtiene al rotar el círculo

$$\mathcal{S} = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : (x-a)^2 + y^2 = r^2\}, \qquad 0 < r < a,$$

alrededor del eje y.

a) Prueba que $\mathcal{T}$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^\infty$. ¿Cuál es su codimensión?

Prueba. consideremos la siguiente función

$$\varphi : \Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{EjeY\} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ dada por}$$
$$\varphi(x,y,z) = (\sqrt{x^2+z^2} - a)^2 + y^2 - r^2$$

Donde claramente φ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ al ser composición de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$, además Ω es abierto en $\mathbb{R}^3$, pues como $\mathbb{R}^3$ es un espacio normado y el Eje Y es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión finita, por el ejercicio 5.38 que probamos en la tarea 5, el Eje Y es cerrado en $\mathbb{R}^3$, por lo que su complemento $\mathbb{R}^3 \setminus \{EjeY\}$ es abierto.
Por otra parte, de cálculo 3 sabemos que

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \varphi(x,y,z) = 0\}$$

Además se tiene que $T \subseteq \Omega$, ya que por como de definió el sólido, nunca vamos a tocar el Eje Y.
Afirmamos que 0 es valor regular de φ, para esto, tenemos lo siguiente, dado $x \in T$,$x = (x,y,x)$, $z = (a,b,c)$

$$\begin{aligned}\varphi'(x)[z] &= \nabla\varphi(x) \cdot z \\ &= \left(\frac{2xa(\sqrt{x^2+z^2} - a)}{\sqrt{x^2+z^2}}, 2yb, \frac{2zc(\sqrt{x^2+z^2} - a)}{\sqrt{x^2+z^2}} \right)\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos por propiedades del producto punto que dado $\lambda \in \mathbb{R}$ siempre existen $u, v \in \mathbb{R}^3$ tales que $u \cdot v = \lambda$ con $u \neq \overline{0}$ (pues si $u = (u_1, u_2, u_3)$, basta tomar $v = (\frac{\lambda}{u_1}, \frac{\lambda}{u_2}, \frac{\lambda}{u_3})$).
Además, claramente $x \neq \overline{0}$, pues $\overline{0} \notin T$, por lo que $\varphi'(x)$ no es la transformación que manda todo al cero, así, por lo mencionado antes $\exists z \in \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi'(x)[z] = \lambda$, con lo que concluimos que $\varphi'(x)$ es sobreyectiva y por ende 0 es valor regular de φ.
finalmente concluimos que T es una subvariedad de $\mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^\infty$ de codimensión igual a 1.

b) Encuentra los puntos críticos de la función $g(x,y,z) = z$ en $\mathcal{T}$, y di cuáles de ellos son máximos o mínimos locales de g en $\mathcal{T}$.

Solución. Supongamos que $\overline{x} = (x,y,z) \in \mathcal{T}$ es un punto crítico de g en $\mathcal{T}$, así, por el *Teorema de los Multiplicadores de Lagrange*, tenemos que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla g(\overline{x}) = \lambda \nabla\varphi(\overline{x})$$

Por lo que nuestro problema se se resume en resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2\lambda(\sqrt{x^2+z^2} - a)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) &= 0 \\ 2\lambda y &= 0 \\ 2\lambda(\sqrt{x^2+z^2} - a)\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Claramente $\lambda \neq 0$, sino tendríamos de la tercer ecuación que $1 = 0$, lo cual es absurdo. De igual manera $\sqrt{x^2+z^2} - a \neq 0$, pues de la tercera ecuación se desprendería que $1 = 0$, lo cual es absurdo, por lo que nuestro sistema se reduce a lo siguiente

$$2\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) = 0 \tag{1}$$

$$2\lambda\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}-a} \tag{2}$$

De (1) tendríamos que $x = 0$, por lo que (2) se vería de la siguiente manera

$$2\lambda\frac{z}{\sqrt{z^2}} = \frac{1}{\sqrt{z^2}-a} \tag{3}$$

Y como $\overline{x} \in \mathcal{T}$, se cumple que

$$(\sqrt{x^2+z^2}-a)^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Dado que $x = y = 0$, entonces

$$(\sqrt{z^2}-a)^2 = r^2$$

Por lo que (3) se ve de la siguiente manera (notamos que $z \neq 0$ para que tenga sentido que $\overline{x} \in \mathcal{T}$ y usando el hecho que $r > 0$)

$$\frac{4\lambda^2 z^2}{z^2} = \frac{1}{(\sqrt{z^2}-a)^2} \Rightarrow 4\lambda^2 = \frac{1}{r^2} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2r}$$

Caso 1.- $\lambda = \dfrac{1}{2r}$

Sustituyendo en (3), tenemos que

$$\frac{1}{|z|-a} = \frac{z}{r\,|z|}$$

Subcaso 1.1.- $z > 0$

Tendríamos que

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{r} \Rightarrow z - a = r \Rightarrow z = r + a$$

Subcaso 1.2.- $z < 0$

$$\frac{1}{-z-a} = \frac{-1}{r} \Rightarrow z + a = r \Rightarrow z = r - a$$

Caso 2.- $\lambda = \dfrac{-1}{2r}$

Sustituyendo en (3), tenemos que

$$\frac{1}{|z|-a} = \frac{-z}{r\,|z|}$$

Subcaso 2.1.- $z > 0$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{r} \Rightarrow z - a = -r \Rightarrow z = -r + a$$

Subcaso 2.2.- $z < 0$

$$\frac{1}{-z-a} = \frac{1}{r} \Rightarrow -z-a = r \Rightarrow z+a = -r \Rightarrow z = -r-a$$

Por lo que nuestros puntos críticos son 4

$$\begin{aligned} x_1 &= (0,0,r+a) \\ x_2 &= (0,0,r-a) \\ x_3 &= (0,0,-r+a) \\ x_4 &= (0,0,-r-a) \end{aligned}$$

Donde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{T}$, pues

$$\begin{aligned} \varphi(0,0,r+a) &= (r+a-a)^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0 \\ \varphi(0,0,r-a) &= (|r-a|-a)^2 - r^2 = (-r+a-a)^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0 \\ \varphi(0,0,-r+a) &= (|-r+a|-a)^2 - r^2 = (a-r-a)^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0 \\ \varphi(0,0,-r-a) &= (|-r-a|-a)^2 - r^2 = (r+a-a)^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0 \end{aligned}$$

Ahora, como $\mathcal{T}$ se ve como la curva de nivel cero de la función φ, tenemos que se ve como la gráfica de una función continua, la cual, por Cálculo 3 sabemos que es cerrado, y además es acotada, por lo que $\mathcal{T}$ es compacto en $\mathbb{R}^3$, y por teorema visto en clase, sabemos que una función continua con dominio compacto alcanza sus valores extremos y los candidatos a dichos valores extremos son justamente x_1 y x_4, ya que claramente se cumple que

$$g(x_1) > g(x_i) \quad i = 2,3,4$$

Por lo que concluimos que x_1 es el máximo de g en $\mathcal{T}$ y también se cumple que

$$g(x_4) < g(x_i) \quad i = 1,2,3$$

Por lo que x_4 es el mínimo de g en $\mathcal{T}$.

4. **Teorema de la función inversa**. Sean V, W espacios de Banach, Ω un subconjunto abierto de V, $\varphi : \Omega \to W$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω y $v_0 \in \Omega$. Demuestra que, si $\varphi'(v_0) \in \mathcal{L}(V,W)$ es un isomorfismo de Banach, entonces existen un subconjunto abierto Ω' de W y un subconjunto abierto Ω'' de V tales que $v_0 \in \Omega'' \subset \Omega$, $\varphi(\Omega'') = \Omega'$ y la función

$$\varphi|_{\Omega''} : \Omega'' \to \Omega'$$

es un homeomorfismo cuyo inverso $\psi := (\varphi|_{\Omega''})^{-1} : \Omega' \to \Omega''$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en Ω' y satisface

$$\psi'(\varphi(v_0)) = (\varphi'(v_0))^{-1}.$$

(*Sugerencia*: Aplica el teorema de la función implícita a la función $\theta : W \times \Omega \to W$, $\theta(w,v) := \varphi(v) - w$.)

Demostración. Sean $(w_0, v_0) \in W \times \Omega$ tales que $\theta(w_0, v_0) = 0_W$, además W es abierto en W y Ω es abierto en V por hipótesis.
Como $\partial_2\theta(w_0, v_0) = \varphi'(v_0)$ (al final veremos las respectivas derivadas parciales de θ) y $\varphi'(v_0)$ es un isomorfismo de Banach, entonces tenemos las hipótesis del *Teorema de la Función Implícita*, el cual nos asegura que $\exists \delta, \eta > 0$ tales que $B_W(w_0, \delta) \times B_V(v_0, \eta) \subseteq W \times \Omega$.
Además existe

$$\psi : B_W(w_0,\delta) \longrightarrow V$$

Donde $\psi(w) \in B_V(v_0,\eta) \quad \forall w \in B_W(w_0,\delta)$, ψ es de clase $\mathcal{C}^1$, $\partial_1\theta(w,\psi(w))$ es isomorfismo de Banach y $\theta(w,\psi(w)) = 0 \quad \forall w \in B_W(w_0,\delta)$.
De esto último, si $\theta(w,\psi(w)) = 0$, entonces $\varphi(\psi(w)) - w = 0$ y por ende $\varphi(\psi(w)) = w$, así tenemos que φ es inversa izquierda de ψ y por álgebra superior, tenemos que ψ es inyectiva en $B_W(w_0,\delta)$.
Consideremos

$$\psi : B_W(w_0,\delta) \longrightarrow \psi(B_W(w_0,\delta)) \subseteq B_V(v_0,\eta)$$

Donde la última contención se da porque justo habíamos visto que $\psi(w) \in B_V(v_0,\eta) \quad \forall w \in B_W(w_0,\delta)$, y ademas $v_0 \in \psi(B_W(w_0,\delta))$, pues $\psi(w_0) = v_0$.
Con esto, tenemos que ψ es inyectiva y sobreyectiva si tomamos la restricción del codominio que hicimos antes, así ψ es biyectiva y por ende tiene inversa, además, por unicidad, dicha inversa va a coincidir con φ.
De modo que si tomamos $\Omega' = B_W(w_0,\delta) \subseteq W$ que claramente es abierto en W y hacemos $\Omega'' = \psi(B_W(w_0,\delta)) \subseteq \Omega$ que también es abierto en V, ya que ψ es continua con inversa continua y sabemos que las funciones continuas regresan abiertos en abiertos, tenemos que

$$\psi(B_W(w_0,\delta)) = \varphi^{-1}(B_W(w_0,\delta))$$

Por lo que claramente Ω'' es abierto en V.
Finalmente, para que la composición tenga sentido, podemos reescribir los dominios y codominios de la siguiente manera

$$\psi : \Omega' \longrightarrow \Omega'' \text{ y por ende } \varphi : \Omega'' \longrightarrow \Omega'$$

Y claramente se cumple que $\varphi(\Omega'') = \Omega'$
Finalmente,veamos quienes son las derivadas parciales de θ, donde sabemos que

$$\partial_i\theta(w_0,v_0) = \theta'(w_0,v_0) \circ \iota_i \quad i \in \{1,2\}$$

Tenemos que se cumple lo siguiente, dados $(h,k) \in W \times \Omega$

$$\begin{aligned}\theta((w_0,v_0)+(h,k)) - \theta(w_0,v_0) &= \theta((w_0+h, v_0+k)) - \theta(w_0,v_0)\\ &= \varphi(v_0+k) - (w_0+h) - \varphi(v_0) + w_0\end{aligned}$$

Por lo que proponemos $\theta'(w_0,v_0) = \varphi'(v_0) - Id_w$, donde $\varphi'(w_0,v_0)[h,k] = \varphi'(v_0)k - h$, así tenemos que

$$\begin{aligned}&\lim_{h,k\to(0,0)} \frac{\|\theta((w_0,v_0)+(h,k)) - \theta(w_0,v_0) - \varphi'(v_0)k + h\|_W}{\|(h,k)\|_{W\times V}}\\ &= \lim_{h,k\to(0,0)} \frac{\|\varphi(v_0+k) - \varphi(v_0) - \varphi'(v_0)k - h + h\|_W}{\|(h,k)\|_{W\times V}}\\ &= \lim_{h,k\to(0,0)} \frac{\|\varphi(v_0+k) - \varphi(v_0) - \varphi'(v_0)k\|_W}{\|(h,k)\|_{W\times V}}\end{aligned}$$

Si $\|(h,k)\|_{W\times V} = \|h\|_W$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\varphi(v_0) - \varphi(v_0)\|_W}{\|h\|_W} = 0$$

Por otra parte, si $\|(h,k)\|_{W\times V} = \|k\|_V$, entonces

$$\lim_{k\to 0} \frac{\|\varphi(v_0 + k) - \varphi(v_0) - \varphi'(v_0)k\|_W}{\|k\|_V} = 0$$

Por lo que podemos concluir que $\theta'(w_0, v_0) = \varphi'(v_0) - Id_W$ y por lo que mencionamos antes, se sigue $\partial_1\theta(w_0, v_0) = -Id_W$ y $\partial_2\theta(w_0, v_0) = \varphi'(v_0)$.
Y para concluir, por el teorema de la función implícita se cumple que

$$\psi'(w_0) = \frac{-1}{\varphi'(v_0) \circ -Id_W} = \frac{1}{\varphi'(v_0)}$$

Y como $w_0 = \varphi(v_0)$, tenemos que

$$\psi'(\varphi(v_0)) = \frac{1}{\varphi'(v_0)}$$

Concluyendo así la demostración y esta tarea < 3. $\square$