Tarea 11

Ricardo Cruz Martínez

5 de diciembre de 2020

1. Sea $f \in \mathcal{C}^0[0,1]$ tal que

$$\int_0^1 f(x)\, x^n \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Prueba que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.

Demostración. Por el Teorema de Aproximación de Weierstrass, $\exists (p_k)$ una sucesión de polinomios en $[0,1]$ que converge uniformemente a f.
Por otra parte, sea $p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ un polinomio.
Supongamos que $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, p.a. $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$
Notemos que

$$f(x)p(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x) a_i x^i$$

Seguido de esto, por linealidad de la integral y por hipótesis tenemos que

$$\int_0^1 f(x)p(x)dx = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} f(x)a_i x^i dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \int_0^1 f(x)x^i dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 0 = 0$$

De esto último, concluimos que $\displaystyle\int_0^1 f(x)p(x)dx = 0$ para todo polinomio definido en $[0,1]$.
Así

$$\int_0^1 f(x)p_k(x)dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Y como $p_k \longrightarrow f$ uniformemente en $\mathcal{C}^0([0,1])$, se sigue que

$$0 = \lim_{k\longrightarrow\infty} \int_0^1 f(x)p_k(x)dx = \int_0^1 \lim_{k\longrightarrow\infty} f(x)p_k(x)dx = \int_0^1 f(x) \lim_{k\longrightarrow\infty} p_k(x)dx = \int_0^1 f^2(x)dx$$

$\therefore \displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx = 0.$
Además, $f^2(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$, y como f es continua por hipótesis, entonces f^2 también lo es, por lo que concluimos que $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$ $\square$

2. Sea $\mathbb{S}^1 = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$. Prueba que cualquier función continua $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es el límite uniforme de funciones de la forma

$$\varphi(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = a_0 + a_1\cos\theta + b_1\operatorname{sen}\theta + \cdots + a_n\cos n\theta + b_n\operatorname{sen} n\theta$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración. Notemos que $\mathbb{S}^1$ es compacto, pues $\mathbb{S}^1 = fr(B_1(0))$, la cual siempre es cerrada (la frontera de un conjunto siempre es cerrada) en $\mathbb{R}^2$ y claramente es acotada en $\mathbb{R}^2$, así, por el Teorema de Heine-Borel, tenemos que $\mathbb{S}^1$ es compacto en $\mathbb{R}^2$.
Definimos $A = \{\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^1) : \phi(\cos(\theta), sen(\theta)) = a_0 + a_1\cos\theta + b_1\operatorname{sen}\theta + \cdots + a_n\cos n\theta + b_n\operatorname{sen} n\theta, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \theta \in [0, 2\pi), a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$
Donde $A \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^1)$
Veamos que A cumple las hipótesis del Teorema de Stone Weierstrass

a) Sean $\varphi, \eta \in A$, $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$
Queremos ver que $\alpha\varphi + \lambda\eta \in A$
Como $\varphi \in A$, $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\exists a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$ tales que

$$\varphi(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = a_0 + a_1\cos(\theta) + \cdots + a_n\cos(n\theta) + b_n\operatorname{sen}(n\theta)$$

Y como $\eta \in A$, $\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\exists c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots k\}$ tales que

$$\eta(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = c_0 + c_1\cos(\theta) + \cdots + c_k\cos(k\theta) + d_k\operatorname{sen}(k\theta)$$

Además, tenemos que

$$\alpha\varphi(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = \alpha a_0 + \alpha a_1\cos(\theta) + \cdots + \alpha a_n\cos(n\theta) + \alpha b_n\operatorname{sen}(n\theta)$$
$$\lambda\eta(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = \lambda c_0 + \lambda c_1\cos(\theta) + \cdots + \lambda c_k\cos(k\theta) + \lambda d_k\operatorname{sen}(k\theta)$$

Sin perder generalidad, supongamos que $k \leq n$, por lo que de lo anterior tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}(\alpha\varphi + \lambda\eta)(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = (\alpha a_0 + \lambda c_0) + (\alpha a_1 + \lambda c_1)\cos(\theta) + \cdots + (\alpha a_k + \lambda c_k)\cos(k\theta) \\ + (\alpha b_k + \lambda d_k)\operatorname{sen}(k\theta) + \alpha a_{k+1}\cos((k+1)\theta) + \alpha b_{k+1}\operatorname{sen}((k+1)\theta) + \cdots \\ + \alpha a_n\cos(n\theta) + \alpha b_n\operatorname{sen}(n\theta)\end{aligned}$$

Y notemos que $\alpha\varphi + \lambda\eta \in A$

b) Sean $\varphi, \eta \in A$
Queremos ver que $\varphi\eta \in A$
Como $\varphi \in A$, $\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\exists a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots, n\}$ tales que

$$\varphi(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = a_0 + a_1\cos(\theta) + \cdots + a_n\cos(n\theta) + b_n\operatorname{sen}(n\theta)$$

Y como $\eta \in A$, $\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\exists c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \cdots k\}$ tales que

$$\eta(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = c_0 + c_1 \cos(\theta) + \cdots + c_k \cos(k\theta) + d_k \operatorname{sen}(k\theta)$$

Nuevamente, sin perder generalidad, supongamos que $n \leq k$

De Variable Compleja 1, sabemos que las funciones sen, cos definidas en los complejos, son una generalización de estas mismas funciones pero en los reales, donde

$$\operatorname{sen}(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \qquad \text{y } \cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$$

Veamos que ocurre cuando multiplicamos $\operatorname{sen}(j\theta)\cos(k\theta)$ con $j, k \in \{1, \cdots n\}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(j\theta)\cos(k\theta) &= \frac{(e^{ij\theta} - e^{-ij\theta})(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta})}{4i} \\
&= \frac{e^{i(j+k)\theta} - e^{i(-j+k)\theta} + e^{i(j-k)\theta} - e^{-i(j+k)\theta}}{4i} \\
&= \frac{e^{i(j+k)\theta} - e^{-i(j+k)\theta}}{4i} + \frac{e^{i(j-k)\theta} - e^{-i(j-k)\theta}}{4i} \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{sen}((j+k)\theta) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}((j-k)\theta)
\end{aligned}$$

Ahora, veamos que da cuando multiplicamos $\operatorname{sen}(j\theta)\operatorname{sen}(k\theta)$ con $j, k \in \{1, \cdots n\}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(j\theta)\operatorname{sen}(k\theta) &= \frac{(e^{ij\theta} - e^{-ij\theta})(e^{ik\theta} - e^{-ik\theta})}{(2i)(2i)} \\
&= \frac{-e^{i(j+k)\theta} + e^{i(-j+k)\theta} + e^{i(j-k)\theta} - e^{-i(j+k)\theta}}{4} \\
&= -\frac{e^{i(j+k)\theta} + e^{-i(j+k)\theta}}{4} + \frac{e^{i(-j+k)\theta} + e^{-i(-j+k)\theta}}{4} \\
&= -\frac{1}{2}\cos((j+k)\theta) + \frac{1}{2}\cos((-j+k)\theta)
\end{aligned}$$

Y finalmente veamos que da cuando multiplicamos $\cos(j\theta)\cos(k\theta)$ con $j, k \in \{1, \cdots n\}$

$$\begin{aligned}
\cos(j\theta)\cos(k\theta) &= \frac{(e^{ij\theta} + e^{-ij\theta})(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta})}{4} \\
&= \frac{e^{i(j+k)\theta} + e^{i(-j+k)\theta} + e^{i(j-k)\theta} + e^{-i(j+k)\theta}}{4} \\
&= \frac{e^{i(j+k)\theta} + e^{-i(j+k)\theta}}{4} + \frac{e^{i(-j+k)\theta} + e^{-i(-j+k)\theta}}{4} \\
&= \frac{1}{2}\cos((j+k)\theta) + \frac{1}{2}\cos((-j+k)\theta)
\end{aligned}$$

Por ende, cuando hacemos el producto de $\varphi\eta$, como cada término de la multiplicación es de la forma $a_i c_j \cos(i\theta)\cos(j\theta)$, $a_i d_j \cos(i\theta)\operatorname{sen}(j\theta)$, $b_i c_j \operatorname{sen}(i\theta)\cos(j\theta)$ ó $b_i d_j \operatorname{sen}(i\theta)\operatorname{sen}(j\theta)$ con $i \in \{1, \cdots, n\}, j \in \{1, \cdots, m\}$ y donde ya vimos que dichos productos se quedan en A, entonces la suma y multiplicación por escalares también. $\therefore \varphi\eta \in A$.

c) Claramente $\varphi(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = 1 \in A$

d) Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$, $x_1 \neq x_2$

Queremos ver que $\exists \zeta \in A$ tal que $\zeta(x_1) \neq \zeta(x_2)$

Primero, consideremos

$$\beta(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) \text{ y}$$
$$\gamma(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = \cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)$$

Donde claramente $\beta, \gamma \in A$, veamos que para x_1 y x_2 la imagen de estos puntos es distinta bajo alguna de estas dos funciones.

Como $x_1 \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \exists \theta_1 \in [0, 2\pi)$ tal que $x_1 = (\cos(\theta_1), \operatorname{sen}(\theta_2))$, análogamente como $x_2 \in \mathbb{S}^1 \Rightarrow \exists \theta_2 \in [0, 2\pi)$ tal que $x_2 = (\cos(\theta_2), \operatorname{sen}(\theta_2))$.

Por otra parte, dados $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$, si $\beta(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = \beta(\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi))$ y además $\gamma(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = \gamma(\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi))$, tenemos lo siguiente

$$\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) = \cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\varphi) \tag{1}$$
$$\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) = \cos(\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi) \tag{2}$$

De (2), tenemos que

$$\cos(\theta) = \cos(\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi) + \operatorname{sen}(\theta)$$

Y sustituyendo en (1) se sigue que

$$\cos(\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi) + \operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) = \cos(\varphi) + \operatorname{sen}(\varphi)$$
$$\Rightarrow 2\operatorname{sen}(\theta) = 2\operatorname{sen}(\varphi) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\varphi)$$

Ahora sustituyendo esto en (2)

$$\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\varphi) = \cos(\varphi) - \operatorname{sen}(\varphi)$$
$$\Rightarrow \cos(\theta) = \cos(\varphi)$$

Ahora, como $x_1 \neq x_2$, tenemos que $(\cos(\theta_1), \operatorname{sen}(\theta_1)) \neq (\cos(\theta_2), \operatorname{sen}(\theta_2))$, de esto se sigue que $\cos(\theta_1) \neq \cos(\theta_2)$ ó $\operatorname{sen}(\theta_1) \neq \operatorname{sen}(\theta_2)$, con esto último, concluimos que x_1 y x_2 no pueden dar al mismo punto bajo β y γ, por lo que dependiendo el caso, $\zeta = \beta$ ó $\zeta = \gamma$, por lo que $\zeta(x_1) \neq \zeta(x_2)$ y $\zeta \in A$

Por ende, de los incisos *a*), *b*), *c*) y *d*), concluimos que A es denso en $\mathcal{C}^0(\mathbb{S}^1)$ (ya que tenemos las hipótesis del Teorema de Stone-Weierstrass), así, dada una función continua $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, existe una sucesión (φ_k) de funciones en A que converge uniformemente a f en $\mathbb{S}^1$ $\square$

3. Sean V, W, Z espacios de Banach. Demuestra las siguientes dos afirmaciones.

   (a) Si $S \in \mathcal{L}(V, W)$ y $T \in \mathcal{L}(W, Z)$ entonces

$$\|T \circ S\|_{\mathcal{L}(V,Z)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|S\|_{\mathcal{L}(V,W)}.$$

Demostración. Sean $S \in \mathcal{L}(V, W)$, $T \in \mathcal{L}(W, Z)$.

Claramente tenemos que se cumplen las siguientes desigualdades

$$\|T(a)\|_Z \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|a\|_W \quad \forall a \in W \quad \forall T \in \mathcal{L}(W, Z) \cdots (1)$$
$$\|S(b)\|_W \leq \|S\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|b\|_V \quad \forall b \in V \quad \forall S \in \mathcal{L}(V, W) \cdots (2)$$

Sea $v \in V$

Por las desigualdades (1) y (2), se tiene que

$$\|T(S(v))\|_Z \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|S(v)\|_W \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|S\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V$$

$\therefore \|T(S(v))\|_Z \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|S\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V \quad \forall v \in V.$

Además, si $v \neq 0_V$, se tiene que

$$\frac{\|T \circ S(v)\|_Z}{\|v\|_V} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|S\|_{\mathcal{L}(V,W)} \quad \forall v \in V, v \neq 0_V$$

De esto último, tenemos que

$$\|T \circ S\|_{\mathcal{L}(V,Z)} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\|T \circ S(v)\|_Z}{\|v\|_V} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|S\|_{\mathcal{L}(V,W)}$$

□

   (b) Si $S_k \to S$ en $\mathcal{L}(V, W)$ y $T_k \to T$ en $\mathcal{L}(W, Z)$, entonces $T_k \circ S_k \to T \circ S$ en $\mathcal{L}(V, Z)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$

Como $S_k \longrightarrow S$, entonces $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$, si $k \geq N_1 \Rightarrow \|S_k - S\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \varepsilon_1$.

Como $T_j \longrightarrow T$, entonces $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j \in \mathbb{N}$, si $j \geq N_2 \Rightarrow \|T_j - T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} < \varepsilon_2$.

Donde $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2\|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)}}$ y $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2\|S_n\|_{\mathcal{L}(V,W)}}$.

Notemos que, como $S_n \longrightarrow S$, entonces S_n está acotada y por ende $\|S_n\|_{\mathcal{L}(V,W)} < \infty$, por lo que tiene sentido como definimos ε_2.

Y de las desigualdades del inicio, se tiene que

$$\|S_k(v) - S(v)\|_W < \varepsilon_1 \|v\|_V \quad \forall k \geq N_1 \quad \forall v \in V \cdots (1)$$
$$\|T_j(w) - T(w)\|_Z < \varepsilon_2 \|w\|_W \quad \forall j \geq N_2 \quad \forall w \in W \cdots (2)$$

Sean $N = \max\{N_1, N_2\}$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ y sea $v \in V$

Queremos ver que $\|T_n \circ S_n(v) - T \circ S(v)\|_Z < \varepsilon \|v\|_V$.

$\|T_n \circ S_n(v) - T \circ S(v)\|_Z \leq \|T_n \circ S_n(v) - T \circ S_n(v)\|_Z + \|T \circ S_n(v) - T \circ S(v)\|_Z$.

Como $S_n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y además $n \geq N \geq N_2$, tenemos que

$$\|T_n \circ S_n(v) - T \circ S_n(v)\|_Z < \varepsilon_2 \|S_n(v)\|_W \leq \varepsilon_2 \|S_n\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V$$

La última desigualdad se desprende de lo mencionado al inicio del inciso a).

Por otra parte, como $n \geq N \geq N_1$, tenemos que

$$\|T \circ S_n(v) - T \circ S(v)\|_Z \leq \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|S_n(v) - S(v)\|_W < \varepsilon_1 \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|v\|_V$$

Por lo que finalmente tenemos que $\forall n \geq N$

$$\begin{aligned}\|T_n \circ S_n(v) - T \circ S(v)\|_Z &< \varepsilon_2 \|S_n\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|v\|_V + \varepsilon_1 \|T\|_{\mathcal{L}(W,Z)} \|v\|_V \\ &= \frac{\varepsilon \|v\|_V}{2} + \frac{\varepsilon \|v\|_V}{2} = \|v\|_V \varepsilon\end{aligned}$$

Así $\|T_n \circ S_n(v) - T \circ S(v)\|_Z < \varepsilon \|v\|_V \quad \forall v \in V$

$\therefore T_n \circ S_n \longrightarrow T \circ S$ $\square$