Tarea 13

Ricardo Cruz Martínez

10 de enero de 2021

Sean V_1, V_2, V, W espacios de Banach.

1. Prueba que toda función $F \in \mathcal{L}(V_1, V_2; W)$ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $V_1 \times V_2$ y calcula su derivada de orden k para todo $k \in \mathbb{N}$.

   Prueba. Sean $u_0, v \in V_1 \times V_2$ con $u_0 = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$.
   Dado que F es bilineal, notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} F(u_0 + v) - F(u_0) &= F((u_1 + v_1, u_2 + v_2)) - F((u_1, u_2)) \\ &= F((u_1, u_2 + v_2)) + F((v_1, u_2 + v_2)) - F((u_1, u_2)) \\ &= F((u_1, u_2)) + F((u_1, v_2)) + F((v_1, u_2)) + F((v_1, v_2)) - F((u_1, u_2)) \\ &= F((u_1, v_2)) + F((v_1, u_2)) + F((v_1, v_2)) \end{aligned}$$

   Así, proponemos $F'(u_0)[x] = F((u_1, x_2)) + F((x_1, u_2))$, con $x = (x_1, x_2)$
   Por otra parte, notemos que

$$F(u_0 + v) - F(u_0) - F'(u_0)[v] = F((v_1, v_2)) = F(v)$$

   Por otra parte, como F es bilineal, por *Proposición 9.26*, $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\|F((v_1, v_2))\|_W}{\|v\|_{v_1 \times V_2}} \leq \frac{c\,\|v_1\|_{V_1}\,\|v_2\|_{V_2}}{\|v\|_{V_1 \times V_2}}$$

   Y como

$$\|v\|_{V_1 \times V_2} = \max_{v_j \in V_j \setminus \{0\}}^{j=1,2} \|v_j\|_{V_j}$$

   Claramente tenemos lo siguiente

$$\|v_1\|_{V_1}\,\|v_2\|_{V_2} \leq \|v\|^2_{V_1 \times V_2}$$

   Así

$$\frac{\|F((v_1, v_2))\|_W}{\|v\|_{v_1 \times V_2}} \leq \frac{c\,\|v\|^2_{V_1 \times V_2}}{\|v\|_{V_1 \times V_2}} = c\,\|v\|_{v_1 \times V_2}$$

   De esto se sigue que

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|F(u_0 + v) - F(u_0) - F'(u_0)[v]\|_W}{\|v\|_{V_1 \times V_2}} \leq \lim_{v \to 0} c\,\|v\|_{V_1 \times V_2} = 0$$

Ahora veamos que $F'(u)[x]$ es lineal.
Sean $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V_1 \times V_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
F'(u_0)[\lambda x + \mu y] &= F'(u_0)[(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2)] \\
&= F((u_1, \lambda x_2 + \mu y_2)) + F((\lambda x_1 + \mu y_1, u_2)) \\
&= \lambda F((u_1, x_2)) + \mu F((u_1, y_2)) + \lambda F((x_1, u_2)) + \mu F((y_1, u_2)) \\
&= \lambda F((u_1, x_2)) + \lambda F((x_1, u_2)) + \mu F((u_1, y_2)) + \mu F((y_1, u_2)) \\
&= \lambda F'(u_0)[x] + \mu F'(u_0)[y]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $F'(u_0)[x]$ es lineal, ahora veamos que es continua; para esto, veamos que es continua en 0
Sean $x = (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2$, $\varepsilon > 0$. Como F es continua y bilineal, por la *Proposición 9.26*, se sigue que

$$\begin{aligned}
\|F'(u_0)[x]\|_W &= \|F((u_1, x_2)) + F((x_1, u_2))\|_W \\
&\leq \|F((u_1, x_2))\|_W + \|F((x_1, u_2))\|_W \\
&\leq c\,\|u_1\|_{V_1}\,\|x_2\|_{V_2} + c\,\|x_1\|_{V_1}\,\|u_2\|_{V_2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Si $\|x\| < \text{mín}\{a, b\}$, con $a = \dfrac{\varepsilon}{2c\,\|v_1\|_{V_1}}$ y $b = \dfrac{\varepsilon}{2c\,\|v_2\|_{V_2}}$
Ya que

$$\begin{aligned}
c\,\|u_1\|_{V_1}\,\|x_2\|_{V_2} + c\,\|x_1\|_{V_1}\,\|u_2\|_{V_2} &\leq c\,\|u_1\|_{V_1}\,\|x\|_{V_1 \times V_2} + c\,\|v_2\|_{V_2}\,\|x\|_{V_1 \times V_2} \\
&< c\,\|v_1\|_{V_1}\,a + c\,\|v_2\|_{V_2}\,b = \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $F'(u_0)[x]$ es continua en todo su dominio.
Ahora, como u_0 fue arbitraria, concluimos que F es diferenciable en todo $V_1 \times V_2$.
Afirmamos que $D_F^2(u) : V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathcal{L}V_2(V_1, V_2; W)$ está dada por $D_F^2(u)[x] = D_F(u) = F'(u)$, observamos que $F'(u) \in \mathcal{L}(V_1, V_1; W)$, así sean $u, v \in V_1 \times V_2$

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|F'(u+v) - F'(u) - F'(v)\|_{\mathcal{L}(v_1, V_2; W)}}{\|v\|_{V_1 \times V_2}} = \lim_{v \to 0} \frac{\|0\|_{\mathcal{L}(V_1, V_2; W)}}{\|v\|_{V_1 \times V_2}} = 0$$

Y como u fue arbitraria, F' es diferenciable en $V_1 \times V_2$ y su derivada es F'.
Por lo tanto, $D_F^2[x] = F'(u)$ que claramente es lineal y continua.
Como $F'(u)$ es constante en $\mathcal{L}_2(V_1, V_2; W)$, claramente $D_F^3(u)[x] = 0_{\mathcal{L}_2(V_1, V_1; W)}$ además es lineal y super continua.
De esto último, sabemos que en cualquier espacio, las constantes son de clase $\mathcal{C}^\infty$ y por ende F es de clase $\mathcal{C}^\infty$, además $D_F^k[x] = 0_{\mathcal{L}_{k-1}(V_1, V_2; W)} \quad \forall k \geq 3$

2. Sea $F \in \mathcal{L}_2(V, \mathbb{R})$ una función simétrica (es decir, $F[v_1, v_2] = F[v_2, v_1]$ para cualesquiera $v_1, v_1 \in V$). Prueba que la función

$$Q : V \to \mathbb{R}, \qquad Q(v) = \tfrac{1}{2} F[v, v],$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y calcula todas sus derivadas.

Prueba. Sean $u, v \in V$.

Notemos que

$$
\begin{aligned}
Q(u+v)-Q(u) &= \frac{1}{2}F[u+v,u+v]-\frac{1}{2}F[u,u] \\
&= \frac{1}{2}F[u,u]+\frac{1}{2}F[u,v]+\frac{1}{2}F[v,u]+\frac{1}{2}F[v,v]-\frac{1}{2}F[u,u] \\
&= \frac{1}{2}F[u,v]+\frac{1}{2}F[u,v]+\frac{1}{2}F[v,v] \\
&= F[u,v]+\frac{1}{2}F[v,v]
\end{aligned}
$$

Así, proponemos $Q'(u)[x]=F[u,x]$ y tenemos que se cumple lo siguiente

$$Q(u+v)-Q(u)-Q'(u)[v]=\frac{1}{2}F[v,v]$$

Y dado que F es bilineal, $\exists c\in\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{|F[v,v]|}{2}\le\frac{c\left\|v\right\|_V^2}{2}$$

Por lo que tenemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{v\to 0}\frac{|Q(u+v)-Q(u)-Q'(u)[v]|}{\left\|v\right\|_V} &= \lim_{v\to 0}\frac{|F[v,v]|}{2\left\|v\right\|_V} \\
&\le \lim_{v\to 0}\frac{c\left\|v\right\|_V^2}{2\left\|v\right\|_V}=\lim_{v\to 0}\frac{c}{2}\left\|v\right\|_V=0
\end{aligned}
$$

Ahora veamos que $Q'(u)[x]$ es lineal
Sean $x,y\in V,\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
Q'(u)[\lambda x+\mu y] &= F[u,\lambda x+\mu y] \\
&= F[u,\lambda x]+F[u,\mu y] \\
&= \lambda F[u,x]+\mu F[u,y] \\
&= \lambda Q'(u)[x]+\mu Q'(u)[y]
\end{aligned}
$$

Y por lo tanto $Q'(u)[x]$ es lineal. Ahora veamos que es continua; para esto veamos que es continua en 0. Sea $x\in V$ y sea $\varepsilon>0$

$$|Q'(u)[x]|=|F[u,x]|\le c_1\left\|u\right\|_V\left\|x\right\|_V<\varepsilon \text{ si } \left\|x\right\|_V<\frac{\varepsilon}{c_1\left\|u\right\|_V}$$

Así, $Q'(u)[x]$ es la función que buscamos.
Ahora, análogo al ejercicio anterior, proponemos $D_Q^2(u)[x]=Q'(u)$, donde claramente se cumple que

$$\lim_{v\to 0}\frac{\left\|Q'(u+v)-Q'(u)-Q'(v)\right\|_{\mathcal{L}(V,\mathbb{R})}}{\left\|v\right\|_V}=0$$

Donde claramente $Q'(u)$ es lineal y continua.
Y como $Q'(u)$ es constante en $\mathcal{L}_2(V,\mathbb{R})$, tenemos que $D_Q^3(u)[x]$ es cero en $\mathcal{L}_2(V,\mathbb{R})$ y de esto último, Q es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $D_Q^k(u)[x]=0\quad\forall k\ge 3$

3. Sea $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y simétrica. Definimos $\varphi : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi(u) := \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b K(x,y)u(x)u(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

a) Prueba que φ es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y calcula todas sus derivadas. (*Sugerencia:* Usa el ejercicio anterior).

Prueba. Definimos $F : (\mathcal{C}^0([a,b]))^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$F[u,v] = \int_a^b \int_a^b K(x,y)u(x)v(y)dxdy$$

Veamos que F es bilineal, para esto, basta ver que es lineal entrada a entrada.
Sean $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b]), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
F[\lambda f + \mu g, v] &= \int_a^b \int_a^b K(x,y)(\lambda f + \mu g)(x)v(y)dxdy \\
&= \int_a^b \int_a^b K(x,y)[\lambda f(x) + \mu g(x)]v(y)dxdy \\
&= \int_a^b \int_a^b [K(x,y)\lambda f(x) + K(x,y)\mu g(x)]v(y)dxdy \\
&= \int_a^b \int_a^b [K(x,y)\lambda f(x)v(y)] + [K(x,y)\mu g(x)v(y)]dxdy \\
&= \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,y)f(x)v(y)dxdy + \mu \int_a^b \int_a^b K(x,y)g(x)v(y)dxdy \\
&= \lambda F[f,v] + \mu F[g,v]
\end{aligned}$$

Así, F es lineal en la primera entrada.
De manera análoga, podemos ver que también lo es en la segunda entrada y por ende F es bilineal.
Ahora veamos que F es continua, nuevamente, para esto solo nos basta ver que F es continua en $(0,0)-$.
Sean $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b])$ y $\varepsilon > 0$, dado que F es bilineal, tenemos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
|F[f,g]| &\leq c \|f\|_\infty \|g\|_\infty \\
&\leq c \|[f,g]\|^2_{[\mathcal{C}^0([a,b])]^2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Si tomamos $\|[f,g]\|_{[\mathcal{C}^0([a,b])]^2} < \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{c+1}}$.
Así, F es continua en $[\mathcal{C}^0([a,b])]^2$.
Por último, veamos que es simétrica, tomamos $u, v \in \mathcal{C}^0([a,b])$.
Queremos ver que $F[u,v] = F[v,u]$, donde K es simétrica.

$$F[u,v] = \int_a^b \int_a^b K(x,y)u(x)v(y)dxdy = \int_a^b \int_a^b K(y,x)v(y)u(x)dxdy = F[v,u]$$

Haciendo el respectivo cambio de variable $x = y$ se tiene la igualdad anterior.
Por ende, ya tenemos las hipótesis del ejercicio 2 de esta tarea, donde $\varphi(u) = \dfrac{1}{2}F[u,u]$ y por ende

$$\varphi'(u)[v] = F[u,v] = \int_a^b \int_a^b K(x,y)u(x)v(y)dxdy$$

Además sabemos que $D^2_\varphi(u)[v] = \varphi'(u)$ y $D^k_\varphi(u)[v] = 0_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathcal{C}^0([a,b]),\mathbb{R})} \quad \forall k \geq 3$

b) Para $k \geq 2$ calcula la expansión de Taylor de grado k de φ alrededor de u_0 y calcula el residuo $r_k(v)$.
Solución. Sea $u_0 \in \mathcal{C}^0([a,b])$.
Del inciso anterior, vimos que $D^k_\varphi = 0 \quad \forall k \geq 3$ y por el teorema de Taylor, tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(u_0+v) &= \varphi(u_0) + D_\varphi(u_0)[v] + \frac{1}{2}D^2_\varphi(u_0)[v,v] \\
&= \varphi(u_0) + \varphi'(u_0)[v] + \frac{1}{2}\varphi''(u_0)[v,v] \\
&= \varphi(u_0) + \varphi'(u_0)[v] + \frac{1}{2}\varphi'(v)[v] \\
&= \frac{1}{2}F[u_0,u_0] + F[u_0,v] + \frac{1}{2}F[v,v] \\
&= \int_a^b \int_a^b K(x,y)u_0(x)u_0(y)dxdy + \int_a^b \int_a^b K(x,y)u_0(x)v(y)dxdy + \\
&\int_a^b \int_a^b K(x,y)v(x)v(y)dxdy
\end{aligned}$$

Y por el inciso anterior y lo que mencionamos al inicio, $r_2(v) = 0$, ya que $D^3_\varphi = 0$