Tarea 12

Ricardo Cruz Martínez

3 de enero de 2021

1. Prueba que la función $\varphi : \mathcal{C}^0[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(u) := \int_0^1 u^2$$

es diferenciable y calcula su derivada.

Prueba. Sean $u, v \in \mathcal{C}^0([0,1])$, afirmamos que

$$\lim_{v \to 0} \frac{\left| \varphi(u+v) - \varphi(u) - \int_0^1 2uv \right|}{\|v\|_\infty} = 0$$

En efecto

$$\begin{aligned}
0 \leq \lim_{v \to 0} \frac{\left| \varphi(u+v) - \varphi(u) - \int_0^1 2uv \right|}{\|v\|_\infty} &= \lim_{v \to 0} \frac{\left| \int_0^1 (u+v)^2 - \int_0^1 u^2 - \int_0^1 2uv \right|}{\|v\|_\infty} \\
&= \lim_{v \to 0} \frac{\left| \int_0^1 u^2 + 2uv + v^2 - 2uv \right|}{\|v\|_\infty} = \lim_{v \to 0} \frac{\left| \int_0^1 v^2 \right|}{\|v\|_\infty} \qquad (1) \\
&\leq \lim_{v \to 0} \frac{\int_0^1 \left| v^2 \right|}{\|v\|_\infty} = \lim_{v \to 0} \frac{\int_0^1 v^2}{\|v\|_\infty}
\end{aligned}$$

Ahora, como $\varphi(v) = \|v\|_2^2 \leq \|v\|_\infty^2$, tenemos que

$$\lim_{v \to 0} \frac{\int_0^1 v^2}{\|v\|_\infty} = \lim_{v \to 0} \frac{\|v\|_2^2}{\|v\|_\infty} \leq \lim_{v \to 0} \frac{\|v\|_\infty^2}{\|v\|_\infty} = \lim_{v \to 0} \|v\|_\infty = 0 \qquad (2)$$

Así, de (1) y (2), tenemos que

$$\lim_{v \to 0} \frac{\left| \varphi(u+v) - \varphi(u) - \int_0^1 2uv \right|}{\|v\|_\infty} = 0$$

Finalmente veremos que $f(v) := \displaystyle\int_0^1 2uv$ es lineal y continua.
Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $v, w \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

$$f(\lambda u + \mu w) = \int_0^1 2u(\lambda v + \mu w) = \lambda \int_0^1 2uv + \mu \int_0^1 2uw = \lambda f(v) + \mu f(w)$$

Así, tenemos que f es lineal.
Dado que f es lineal y está definida en espacios normados, por la *Tarea 3*, basta ver que f es continua en 0.
Sea $\varepsilon > 0$
Queremos ver que $\exists \delta > 0$ tal que si $\|v\|_\infty < \delta$, entonces $|f(v)| < \varepsilon$.
Proponemos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\|u\|_1}$

$$\begin{aligned} |f(v)| &= \left| \int_0^1 2uv \right| \leq \int_0^1 |2uv| = 2\int_0^1 |u|\,|v| \leq 2\int_0^1 |u|\,\|v\|_\infty = 2\|v\|_\infty \int_0^1 |u| < 2\delta\,\|u\|_1 \\ &= \frac{2\varepsilon\,\|u\|_1}{2\,\|u\|_1} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore f$ es continua en 0, y por ende, f es continua.
Por lo que podemos concluir que φ es diferenciable y su derivada es f

2. **Definición.** Un subconjunto A de un espacio métrico X es **conexo** si para cualesquiera $x, y \in A$ existe una trayectoria de x a y en A.

   Prueba que, si Ω es un subconjunto abierto y conexo de un espacio de Banach V, $\varphi : \Omega \to W$ es diferenciable en Ω y $\varphi'(u) = 0$ para todo $u \in \Omega$, entonces φ es constante en Ω.

Demostración. Sea $x \in \Omega$.
Primero veamos que φ es constante en cualquier bola con centro en x y radio δ contenida en Ω.
Por hipoótesis, Ω es abierto, así $\exists \delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subseteq \Omega$.
Como $B(x,\delta)$ es convexa $(*)$, $\forall y \in B(x,\delta)$, se tiene que

$$(1-t)x + ty \in B(x,\delta) \quad \forall t \in [0,1]$$

Una vez dicho esto, tenemos la hipótesis del *Corolario 9.17*, con lo que tenemos lo siguiente

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_W \leq \sup_{t\in[0,1]} \|\varphi'(u_t)\|_{\mathcal{L}(V,W)} \|x - y\|_V$$

Donde $u_t = (1-t)x + ty$, y como $B(x,\delta) \subseteq \Omega \Rightarrow \varphi'(u_t) = 0$ (esto último se cumple por hipótesis).
$\therefore \|\varphi'(u_t)\|_{\mathcal{L}(V,W)} = 0$
Por lo que tenemos que $\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_W \leq 0$, y por propiedades de la norma, se sigue $\|\varphi(y) - \varphi(x)\|_W = 0$, de esto concluimos $\varphi(y) = \varphi(x) \quad \forall y \in B(x,\delta)$.
Por otra parte, como φ es diferenciable en Ω, entonces φ es continua (esto se sigue de la *proposición 9.11* probada en clase).
Sea $x_0 \in \Omega$.
Definimos $H = \{z \in \Omega : f(z) = f(x_0)\}$, claramente $H \subseteq \Omega$.

Afirmamos que H es abierto en Ω.
Sea $x \in H \subseteq \Omega$, como Ω es abierto, $\exists \delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq \Omega$, y por lo mencionado al inicio, se sigue que $\varphi(y) = \varphi(x_0) \quad \forall y \in B(x, \delta)$.
$\therefore B(x, \delta) \subseteq H$.
De esto tenemos que $H \subseteq int(H)$, por lo que H es abierto en Ω.
Por otra parte, afirmamos que H también es cerrado.
Veamos que $\Omega \setminus H$ es abierto, más aún, veremos que $\Omega \setminus H = \emptyset$
Donde $\Omega \setminus H = \{z \in \Omega : \varphi(z) \neq \varphi(x_0)\}$, supongamos por contradicción que $\Omega \setminus H \neq \emptyset$.
Así $\exists \bar{x} \in \Omega \setminus H \Rightarrow \varphi(\bar{x}) \neq \varphi(x_0)$ y como Ω es abierto, tenemos que $\exists \delta > 0$ tal que $B(\bar{x}, \delta) \subseteq \Omega$ y por lo mencionado al inicio, tendríamos que $\forall y \in B(\bar{x}, \delta) \quad \varphi(y) \neq \varphi(x_0)$, lo que claramente contradice el hecho de que φ es continua.
De esto último se sigue que $\Omega \setminus H = \emptyset$.
$\therefore H$ es cerrado.
Y con esto, hemos probado que φ es constante en cualquier bola.
Finalmente, como Ω es conexo y H es abierto y cerrado, tenemos que $H = \Omega$, además $H \neq \emptyset$, ya que $x_0 \in H$, de esto se sigue que φ es constante $(**)$. $\square$

Justificaciones

$(*)$ Sea W un espacio métrico normado no vacío.
Sea $x \in W$, entonces dada $\delta > 0$, $B(x, \delta)$ es convexa.

Prueba. Sea $y \in B(x, \delta)$, así $\|x - y\| < \delta$.
Para la demostración anterior, solo nos basta ver que

$$(1-t)x + ty \in B(x, \delta) \quad \forall t \in [0, 1].$$

Sea $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \|(1-t)x + ty - x\|_W &= \|(1-t-1)x + ty\|_W = \|-tx + ty\|_W \\ &= |t| \, \|y - x\|_W \leq \|x - y\|_W < \delta \end{aligned}$$

$\therefore (1-t)x + ty \in B(x, \delta)$

$(**)$ Como Ω es conexo, entonces no existen $U, V \subseteq \Omega$ (abiertos o cerrados) tales que $U \cap V = \emptyset$ y $\Omega = U \cup V$, ya que hay una trayectoria que une a cualesquiera dos puntos.
Una vez dicho esto, veamos que si Ω es conexo, entonces los únicos conjuntos abiertos y cerrados en Ω son Ω y $\emptyset$.

Prueba. Supongamos por contradicción que existe $\emptyset \neq A \subsetneq \Omega$, donde A es abierto y cerrado, por ende $\Omega \setminus A$ es abierto y como $a \cap (\Omega \setminus A) = \emptyset$ y se tiene que $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A)$ con A y $\Omega \setminus A$ abiertos, lo cual es absurdo, pues Ω es conexo.

3. Considera la función

$$\varphi : \ell_1 \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(\overline{x}) := \|\overline{x}\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|.$$

Prueba que φ es Gâteaux-diferenciable en $\overline{x} = (x_k)$ si y sólo si $x_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Calcula la derivada de Gâteaux $\mathcal{G}\varphi(\overline{x})$ en ese caso.

Prueba. $\Rightarrow$) Supongamos que φ es Gâteaux-diferenciable en $\bar{x} = (x_k)$.

Queremos ver que $x_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Supongamos por contradicción que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_0} = 0$.

Por hipótesis, φ es Gâteaux-diferenciable en $\bar{x}$, por lo que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\bar{x}+t\bar{v}) - \varphi(\bar{x})}{t} \text{ existe } \forall v \in \ell_1$$

En particular si tomamos $\bar{v} := v_k = \begin{cases} 1 & si \quad k = k_0 \\ \\ 0 & si \quad k \neq k_0 \end{cases}$, claramente $\bar{v} \in \ell_1$, además tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{x}+t\bar{v}) - \varphi(\bar{x}) &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k + tv_k| - \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{k_0-1} |x_k| + |tv_{k_0}| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |x_k + tv_k| - \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{k_0-1} |x_k| + |t| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |x_k| - \sum_{k=1}^{\infty} x_k \\
&= \sum_{k=1}^{k_0-1} |x_k| + |t| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |x_k| - \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \\
&= \sum_{k=1}^{k_0-1} |x_k| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |x_k| - \sum_{k=1}^{k_0-1} |x_k| - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |x_k| + |t| \\
&= |t|
\end{aligned}$$

$\therefore \varphi(\bar{x}+t\bar{v}) - \varphi(\bar{x}) = |t|$.

Por ende, tenemos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\bar{x}+t\bar{v}) - \varphi(\bar{x})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

Sin embargo, notemos lo siguiente

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{-t}{t} = \lim_{t\to 0^-} -1 = -1$$
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{|t|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = \lim_{t\to 0^+} 1 = 1$$

Por lo que $\lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$ no existe, lo cual es absurdo.

$\therefore x_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Leftarrow$) Supongamos que $x_k \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Queremos probar que φ es Gâteaux-diferenciable en $\bar{x} = (x_k)$.

Sea $\bar{v} \in \ell_1$

Afirmamos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\bar{x}+t\bar{v}) - \varphi(\bar{x})}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} f(v_k)$$

Donde $f(v_k) = \begin{cases} v_k & si \quad x_k > 0 \\ \\ -v_k & si \quad x_k < 0 \end{cases}$

Ahora, como $\bar{v} \in \ell_1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$ converge.

Además, de cálculo 2, sabemos que si $\sum_{k=1}^{\infty} |f(v_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} f(v_k)$ también converge.

Sea $\varepsilon > 0$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$ converge, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=N}^{\infty} |v_k| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora, dada $n < N$, x_n es positiva ó negativa

Caso 1) $x_n > 0$

Si $x_n > 0 \Rightarrow \exists \delta_n > 0$ tal que $x > 0 \quad \forall x \in B(x_n, \delta_n)$, así tenemos que

$$|x_k + tv_k| = x_k + tv_k \text{ si } |t| < \frac{\delta_n}{|v_k|}$$

Por ende

$$|x_k + tv_k| - |x_k| = x_k + tv_k - x_k = tv_k$$

Caso 2) $x_n < 0$

Si $x_n < 0 \Rightarrow \exists \delta_n > 0$ tal que $x < 0 \quad \forall x \in B(x_n, \delta_n)$, así

$$|x_k + tv_k| = -x_n - tv_k \text{ si } |t| < \frac{\delta_n}{|v_k|}$$

Por lo tanto

$$|x_k + tv_k| - |x_k| = -x_k - tv_k + x_k = -tv_k$$

Ahora, definimos $\bar{\delta_n} = \frac{\delta_n}{|v_k|}$

Y tomando dicha delta para los valores $n < N$, tenemos que

$$\frac{\sum_{k=1}^{N-1} |x_k + tv_k| - \sum_{k=1}^{N-1} |x_k|}{t} = \frac{\sum_{k=1}^{N-1} tf(v_k)}{t} = \sum_{k=1}^{N-1} f(v_k) \text{ si } |t| < \delta' = \min_{n<m}\{\bar{\delta_n}\}$$

Finalmente, tomando $\delta = \text{mín}\{\delta', 1\}$, si $|t| \leq \delta$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + tv_k| - \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|}{t} - \sum_{k=1}^{\infty} f(v_k) \right| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^{N-1} |x_k + tv_k| - \sum_{k=1}^{N-1} |x_k|}{t} + \frac{\sum_{k=N}^{\infty} |x_k + tv_k| - \sum_{k=N}^{\infty} |x_k|}{t} \right. \\
&\left. - \sum_{k=1}^{N-1} f(v_k) - \sum_{k=N}^{\infty} f(v_k) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{N-1} f(v_k) + \frac{\sum_{k=N}^{\infty} |x_k + tv_k| - \sum_{k=N}^{\infty} |x_k|}{t} - \sum_{k=1}^{N-1} f(v_k) - \sum_{k=N}^{\infty} f(v_k) \right| \\
&= \left| \frac{\sum_{k=N}^{\infty} |x_k + tv_k| - \sum_{k=N}^{\infty} |x_k|}{t} - \sum_{k=N}^{\infty} f(v_k) \right| \\
&\leq \left| \frac{\sum_{k=N}^{\infty} |x_k + tv_k| - \sum_{k=N}^{\infty} |x_k|}{t} \right| + \left| \sum_{k=N}^{\infty} f(v_k) \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{|x_k|}{t} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{|tv_k|}{t} - \sum_{k=N}^{\infty} \frac{|x_k|}{t} \right| + \left| \sum_{k=N}^{\infty} f(v_k) \right| \\
&= \left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{|tv_k|}{t} \right| + \left| \sum_{k=N}^{\infty} f(v_k) \right| \\
&\leq \sum_{k=N}^{\infty} |v_k| + \sum_{k=N}^{\infty} |f(v_k)| = \sum_{k=N}^{\infty} |v_k| + \sum_{k=N}^{\infty} |v_k| \\
&= 2 \sum_{k=N}^{\infty} |v_k| < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(\bar{x} + t\bar{v}) - \varphi(\bar{x})}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} f(v_k)$$

Ahora veamos que $\sum_{k=1}^{\infty} f(v_k)$ es continua.

Sean $a, y \in \ell_1$, donde $a = (a_k), y = (y_k)$.

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} f(a) - \sum_{k=1}^{\infty} f(y) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f(a) - f(y)| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - y_k| = \|a - y\|_{\ell_1}$$

Por lo que la función dada por $\bar{G}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$ es lipschitz continua y por ende, es continua.

Veamos que $\bar{G}$ es lineal. Sean $a, b \in \ell_1, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Caso 1) Si $x_n < 0$

$$\begin{aligned}\bar{G}(\lambda a + \mu b) &= \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda a + \mu b) = \sum_{k=1}^{\infty} -\lambda a - \mu b = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} -a + \mu \sum_{k=1}^{\infty} -b \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} f(a) + \mu \sum_{k=1}^{\infty} f(b)\end{aligned}$$

Caso 2) Si $x_n > 0$

Se hace de manera análoga al caso 1

Así $\bar{G}(\lambda a + \mu b) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} f(a) + \mu \sum_{k=1}^{\infty} f(b) = \lambda \bar{G}(a) + \mu \bar{G}(b)$

$\therefore \bar{G}$ es lineal

$\therefore \varphi$ es Gâteaux-diferenciable y si derivada $\mathcal{G}_{\varphi}(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)$