

Лабораторная работа. Комбинаторика.

Задание.

1. Номер вашего варианта равен остатку от деления вашего порядкового номера по списку на 12. Если ваш порядковый номер кратен 12, выполняете 12 вариант.
2. По пункту 4: решить рекуррентное соотношение и программно реализовать вычисление 5 члена числовой последовательности через рекурсию и полученное решение.
3. При разложении степени $(x_1 + x_2 + \dots + x_r)^n$ коэффициенты при произведениях $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_r^{n_r}$, $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, рассчитываются по формуле:
$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$
 (число перестановок с повторениями) и носят название полиномиальных или мультиномиальных коэффициентов. Например, вычислим коэффициент при произведении $a^2 b c$ в разложении $(a + b + c)^4$.
Он равен: $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$.
4. Написать программу генерации перестановок (рекурсивный вариант). Четные номера – реализуют лексикографический порядок генерации. Нечетные номера – реализуют антилексикографический порядок генерации.
5. Написать программу генерации k -элементных подмножеств n -элементного множества в лексикографическом порядке. Вход: k – мощность подмножества, n – мощность множества.

Указание к п.4. В конце лабораторной работы приведен материал по теме.

Варианты заданий.

Вариант 1.

1. Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих 6 000, можно составить, используя только нечетные цифры?
2. Сколькими способами можно выбрать комитет, включающий 6 мужчин и 8 женщин, из группы, состоящей из 12 мужчин и 20 женщин?
3. Пароль на компьютере состоит из шести символов. Первые два из них строчные буквы латинского алфавита (всего 26 букв), а оставшиеся

четыре могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей?

4. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 21$$

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

5. Разложить $(a+b)^6$.

Вариант 2.

1. Сколько существует целых чисел между 0 и 1000, содержащих ровно одну цифру 6?

2. В скачках участвуют десять лошадей. Сколько существует вариантов призовой тройки лошадей?

3. Предстоит выбрать команду четырех игроков в гольф из пяти профессиональных игроков и пяти любителей. Сколько разных команд может состоять из трех профессионалов и одного любителя?

4. Вычислить коэффициенты при произведении a^2b^3c в разложении $(a+b+c)^6$

5. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 6$$

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Вариант 3.

1. Сколькими способами можно выбрать две книги по разным темам, когда на полке находятся 15 книг по информатике, 12 книг по математике и 10 книг по химии?

2. Комитет из 20 членов избирает председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

3. Имеются семь различных шаров, и требуется положить три шара в первую коробку, два шара — во вторую и два шара — в третью коробку. Сколькими способами можно это сделать?

4. Разложить $(a+b)^7$.

5. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -8$$

$$a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Вариант 4.

1. Сколько существует номерных знаков для автомобилей, состоящих из двух латинских букв и последующих четырех цифр?
2. Предположим, что 12 книг, включающих 4 одинаковых учебника по математике, 6 одинаковых учебников по информатике, 2 одинаковых учебника по химии, следует расставить на полке. Сколькими способами это можно сделать?
3. Сколько существует способов разделить 10 человек на две команды по 5 человек для игры в баскетбол?
4. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:
 $a_0 = -3, a_1 = 1$
 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2$
5. Разложить $(a+b)^8$.

Вариант 5

1. Сколько положительных целых чисел, меньших 1001, делятся на 2, 3 или 5?
2. Сколькими способами можно расставить в ряд для фотографирования пять мальчиков и шесть девочек, если ни две девочки, ни два мальчика не должны стоять рядом?
3. В зоомагазине продаются 5 черепах, 7 ящериц и 12 мышей. Сколько существует способов выбрать себе 2 черепахи, 3 ящерицы и 5 мышей?
4. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:
 $a_0 = 2, a_1 = 6$
 $a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}, n \geq 2$
5. Разложить $(a+b)^9$

Вариант 6.

1. Пусть S — множество четырехзначных чисел, в чьей десятичной записи участвуют цифры: 0, 1, 2, 3, и 6, причем 0 на первом месте, естественно, стоять не может. Какова мощность множества S ? Сколько чисел из S в своей десятичной записи не имеют повторяющихся цифр?
2. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов?
3. Сколько существует перестановок элементов 1, 2, ..., n , в которых элемент 1 находится не на своём месте?
4. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:
 $a_0 = 0, a_1 = 5$
 $a_n = 9a_{n-1} - 20a_{n-2}, n \geq 2$
5. Вычислить коэффициенты при произведении $a^2b^3c^2$ в разложении $(a+b+c)^7$

Вариант 7.

1. Вычислить максимальное количество чисел, которые можно представить в шестнадцатеричной системе четырехразрядным числом.
2. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов и среди полос одна обязательно должна быть красной.
3. Сколькими способами можно распределить 15 студентов по 3-м учебным группам по 5 студентов в каждой?
4. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:
 $a_0 = 2 \quad a_1 = 5$
 $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \quad n \geq 2$
5. Вычислить коэффициенты при произведении $a^3b^3c^2$ в разложении $(a+b+c)^8$

Вариант 8.

1. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки (по пятибалльной системе), если известно, что никто не получил оценки “неудовлетворительно”?
2. Хоккейная команда насчитывает 18 игроков, 11 из них входит в основной состав. Подсчитайте количество возможных составов.
3. Сколько различных «слов» можно получить из слова «абракадабра»? Сколько из них начинается на букву «к»?
4. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:
 $a_0 = 2 \quad a_1 = 1$
 $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad n \geq 2$
5. Вычислить коэффициенты при произведении $a^4b^3c^2$ в разложении $(a+b+c)^9$

Вариант 9.

1. Сколько существует вариантов ответа на тест из 30 вопросов, если на каждый вопрос требуется ответ да или нет?
2. Сколько положительных целых чисел, меньших 1001, делятся на 2, 3 или 7?
3. Сколькими способами можно расставить в ряд для фотографирования пять мальчиков и пять девочек, если ни две девочки, ни два мальчика не должны стоять рядом?

4. Вычислить коэффициенты при произведении $a^4 b^3 c^3$ в разложении $(a+b+c)^{10}$
5. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:
 $a_0 = 4 \quad a_1 = 2$
 $a_n = -a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$

Вариант 10.

1. Позывные американских радиостанций состоят из трех или четырех букв и начинаются с k или w . Сколько существует различных позывных?
2. Сколько целых чисел между 1 и 2003 делится на 5, 7 или 11?
3. К несчастью, судья на выставке цветов не разбирается в орхидеях. Если он выбирает победителей случайным образом среди 18 участниц, то сколько имеется способов вручить первый, второй и третий приз?
4. Разложить $(a+b)^{10}$.
5. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:
 $a_0 = -3 \quad a_1 = 1$
 $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 2$

Вариант 11.

1. Сколько существует способов разместить цифры $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ так, чтобы первая цифра была больше единицы, а последняя — меньше семи?
2. Сколько разных «слов» можно получить из слова «АБРАКАДАБРА»? Сколько из них начинаются с буквы «К»?
3. Вы покупаете пять рождественских открыток в магазине, который может предложить четыре разных типа приглянувшихся вам открыток. Как много наборов из пяти открыток Вы можете купить?
4. Разложить $(a+b)^6$.
5. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:
 $a_0 = 2 \quad a_1 = 8$
 $a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n \geq 2$

Вариант 12.

1. Жюри из 5 женщин и 7 мужчин должно быть выбрано из списка в 8 женщин и 11 мужчин. Сколько можно выбрать различных жюри?
2. Сколько разных «слов» можно получить из слова «КОЛОБОК»?
3. Решить линейное однородное рекуррентное соотношение 2-го порядка:
 $a_0 = 2 \quad a_1 = 5$
 $a_n = 7a_{n-1} - 12a_{n-2}, \quad n \geq 2$

4. Разложить $(a+b)^7$.

5. Сколько существует возможностей $p^!$ для присуждения первого, второго и третьего мест семнадцати участникам соревнований по икебанае?

Генерация перестановок (описание алгоритма)

Пусть задано множество $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Взаимно однозначное соответствие (биекция) $f: A \rightarrow A$ называется *подстановкой* на A . Подстановку удобно задавать таблицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

Например, если $A = \{1, 2, 3\}$, то подстановка f_1 может быть задана таблицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

В таблице подстановки нижняя строка (значение функции) является перестановкой элементов верхней строки (значение аргумента). И так как элементы верхней строки принято располагать по возрастанию, то верхнюю строку можно не указывать – и определять подстановку одной нижней строкой. Таким образом, подстановки взаимно однозначно соответствуют перестановкам.

Генерацию перестановок можно производить в лексикографическом или в антилексикографическом порядке. Рассмотрим алгоритм генерации перестановок в лексикографическом порядке (нерекурсивный вариант).

Для того чтобы перебрать все объекты из некоторого множества, полезно их некоторым образом **упорядочить**, и научиться по объекту находить **следующий** за ним. Как можно упорядочить перестановки? Представим себе, что элементы нашей перестановки – это буквы. Тогда получившиеся из этих букв слова-перестановки можно упорядочить по алфавиту, как это делают в словаре. Такой порядок на множестве объектов называется *лексикографическим*. Вот как будет выглядеть упорядоченный набор перестановок из 3-х объектов:

123 132 213 231 312 321

(сначала идут все перестановки, начинающиеся с цифры 1, затем – с цифры 2, затем – с цифры 3).

Пусть нам дана некоторая перестановка. Как найти следующую за ней? Для того чтобы получить следующую перестановку, нам необходимо увеличить число на некоторой позиции. При этом необходимо оставить неизменными как можно больший начальный кусок перестановки. Найдем в

перестановке самое правое число, которое можно увеличить, не меняя числа слева от него. Это означает, что мы должны заменить его одним из чисел, стоящих справа от него. То есть, справа от него должно стоять число, большее него.

Рассмотрим, для примера, перестановку $7\ 3\ 4\ 6\ 5\ 2\ 1$. Самое правое число, справа от которого есть большее число – это 4. Мы можем заменить ее либо на 5, либо на 6 (числа, большие 4 и стоящие справа от 4). Ясно, что нужно менять на наименьшее возможное, поскольку перестановка $7\ 4\ 5\dots$ идет "по алфавиту" раньше, чем $7\ 4\ 6\dots$ Итак, меняем местами 4 и 5: $7\ 3\ 5\ 6\ 4\ 2\ 1$. Выделенную жирным часть мы трогать больше не будем.

Теперь нам нужно получить самую первую (в алфавитном порядке) перестановку, которая начинается на $7\ 3\ 5$. Для этого все остальные числа нам нужно расположить в порядке возрастания: $1\ 2\ 4\ 6$. Задачу упрощает то, что до этого они уже были расположены в порядке убывания, и нам достаточно просто перевернуть "хвост" перестановки.

Итак, алгоритм генерации следующей перестановки состоит из 4-х шагов:

1. Просматриваем перестановку справа налево и ищем число, меньшее своего правого соседа:

$7\ 3\ \underline{4} < 6 > 5 > 2 > 1$

2. Опять просматриваем перестановку справа налево и ищем самое первое число, которое больше выбранного нами на первом шаге

$7\ 3\ \underline{4} < 6 > \underline{5} > 2 > 1$

3. Меняем местами два найденных числа:

$7\ 3\ \underline{5}\ 6\ \underline{4}\ 2\ 1$

4. "Переворачиваем" "хвост" перестановки:

$7\ 3\ \underline{5}\ \underline{1\ 2\ 4\ 6}$

Если на первом шаге мы не сможем найти числа, удовлетворяющего условию, то это означает, что наша перестановка – последняя в списке: $7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$.

Приведем программу реализации данного алгоритма.

//-----

```
#pragma hdrstop
```

```
//-----
```

```
#include <stdio.h>
```

```
#include <conio.h>
```

```
#include <stdlib.h>
```

```
#pragma argsused
```

```
int main(int argc, char* argv[])
```

```
{
```

```
    int* mn;
```

```
    int k,i,j,m,a;
```

```
    printf("vvedite kolichestvo elementov\n");
```

```
    scanf("%d",&k);
```

```
    mn=(int*)malloc(k*sizeof(int));
```

```
    k--;
```

```
    for(i=0;i<=k;i++) printf(" %d",mn[i]=i+1);
```

```
    printf("\n");
```

```
    for(i=k;i>0;i--)
```

```
    {
```

```
        if(mn[i]>mn[i-1])
```

```
        {
```

```
            m=i;
```

```
            for(i=k;i>=m;i--)
```

```
            {
```

```
                if(mn[i]>mn[m-1])
```

```
                {
```

```
                    a=mn[m-1];
```

```
                    mn[m-1]=mn[i];
```

```
                    mn[i]=a;
```



```
    for(j=k,i=m;j>i;j--,i++)  
    {  
        a=mn[i];  
        mn[i]=mn[j];  
        mn[j]=a;  
    }  
    for(i=0;i<=k;i++) printf(" %d",mn[i]);  
    printf("\n");  
    break;  
}  
}  
}  
}  
getch();  
return 0;  
}  
//-----
```