

离散数学

命题逻辑

谓词逻辑

- 概念**
 - 论域：能够表达判断的语句，并带有具有确定的真值的谓词述句
 - 表示
 - 重言式
 - 类型
 - 矛盾式
 - 量词的语义
 - 可满足式：至少有一组或真值指派
 - 归结归约的定义
 - 命题变元
 - 命题公式
 - 公式的正确翻译
- 命题**
 - 等价的和蕴含式的概念
 - 常用的等价式和蕴含式
 - 命题公式
 - 命题公式类型：除了取反不变 其他皆变。V：T 不变 A与A' 互变
- 范式**
 - 大项
 - 性质
 - n个变元的析取式
 - 全体大项的合取式为F
 - 任意两个大项的析取式为T
 - 小项
 - 性质
 - n个变元的合取式
 - 全体小项的析取式为T
 - 任意两个不同的小项的合取式为F
 - 主析取范式
 - 主合取范式
 - 成真指派
 - 成真指派表
- 命题逻辑的推理方法**
 - 直接证明
 - 真值表法
 - 间接证明
 - 反证法

很重要：一般证明题用蕴含反证法证明命题的有效性用PT法

谓词逻辑

- 谓词——划分客体性质的词
 - 全称量词
- 量词——存在量词
 - 存在唯一量词 $\exists!$
- 个体域——命题变元论述的范围
- 谓词公式——合式公式的概念
 - 翻译

集合与关系

集合和元素

- 概念
 - 全集
 - 空集
 - 幂集 —— 幂集为 2^n —— $P(A)$
 - 势 —— 势就是集合的元素个数
 - 有限集
 - 无限集
- 关系
 - 相等
 - 包含
 - 真包含
- 表示
 - U
 - \cap
 - 差 —— 相对补
- 运算
 - 绝对补 —— \bar{A} —— 就是补集
 - 对偶律 —— $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- 文氏图 —— 应用
 - N 组
 - 笛卡儿积 —— 概念
 - 性质

序偶 (元组)

- 概念
- 表示方法
 - 集合
 - 关系矩阵
 - 关系图
- 域
 - 定义域
 - 值域
- 二元关系的性质
 - 自反
 - 反自反
 - 对称
 - 反对称
 - 传递

二元关系

- 基本集合运算
- 集合关系 —— 类似于传递
- 关系的运算
 - 逆关系 —— R^{-1} 就是把 $a \rightarrow b$ 全改成 $b \rightarrow a$
 - 复合关系 —— 自反的闭 —— $R \cup R^+$
 - 闭包运算
 - 自反的闭 —— $R \cup R^+$
 - 对称的闭 —— $R \cup R^{-1}$
 - 传递的闭 —— $R \cup R^2 \cup R^3 \dots$ 到 R^N 为空集的时候

要素划分法 —— 划分一定是要要素 要素不一定是划分

- 自反的、反自反的、对称的、反对称和传递的
- 等关系 $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$
- 全域关系 $E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \} = A \times A$
- 特点
 - 自反 —— 有 a 在集合就有 $\langle a, a \rangle$
 - 对称 —— 有 $\langle a, b \rangle$ 在里边, 那么就要有 $\langle b, a \rangle$
 - 传递 —— 有 $\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle$ 那么就要有 $\langle a, c \rangle$
- 等价类 $[a]_R$ —— 集合中 的元 y 要 $a \in A$ 并且 aRy
- 等价关系
 - 传递关系 R —— 由 R 的所有有序对构成的集合
 - 与划分的应用
 - 等价关系的数量就和集合的划分是一样的 —— 就是有几个划分 就有几个等价关系
 - 一个划分就可以被称作为一个自反、对称、传递的关系

特殊的二元关系

通过划分确定等价关系

例 2.139 设 R 为实数集 R 上的 $\text{card}(a) \in P(A) \mid \exists B \subseteq P(A) \text{ 且 } |B| = a \text{ 且 } B \subseteq R$ 关系并确定划分。

解 由例 2.138 知 $R = \{ \langle 0, \{ \rangle \}, \langle 1, \{ \{ \rangle \} \rangle, \langle 2, \{ \{ \{ \rangle \} \} \rangle, \langle 3, \{ \{ \{ \{ \rangle \} \} \} \rangle, \dots \}$ 。

由于关系 R 中 $\langle a, b \rangle$ 有且只有 b 与 a 有势相同故一起。

由于关系 $R = \{a, b\}$ 所以说就是把所有势相同的放在一起

函数

```

graph LR
    A[序关系] --- B[偏序关系]
    A --- C[全序关系]
    A --- D[良序关系]
    B --- E[自反]
    B --- F[反对称]
    B --- G[传递]
    E --- H["有元素集合  $A$ "]
    F --- I["有  $a, b$  在  $A$  里面, 如果有  $a < b$  成立, 那么有  $b < a$  一定不成立"]
    G --- J["有  $a < b < c$  那么就有  $a < c$ "]
    C --- K[极大元]
    C --- L[极小元]
    C --- M[最大元]
    C --- N[最小元]
    K --- O["没有比它元素可以更大"]
    L --- P["没有比它元素可以更小"]
    M --- Q["在极小元的基础上"]
    N --- R["在极大元的基础上"]
    D --- S[上界]
    D --- T[下界]
    D --- U[上确界]
    D --- V[下确界]
    S --- W["大于等于它的子集"]
    U --- X["小于等于它的子集"]
    D --- Y["上界中最小的"]
    D --- Z["下界中最大的"]
    C --- AA[全序关系]
    C --- AB[良序关系]
    AA --- AC["每一个元素都是有关的"]
    AB --- AD["非空集合都有最小元素"]
  
```

```

graph LR
    A[集合] --- B[集合的表示]
    A --- C[集合的性质]
    A --- D[集合的运算]
    B --- E[列举法]
    B --- F[描述法]
    B --- G[韦恩图]
    C --- H[确定性]
    C --- I[互异性]
    D --- J[并集]
    D --- K[交集]
    D --- L[补集]
  
```

集合

- 集合的表示
 - 列举法
 - 描述法
 - 韦恩图
- 集合的性质
 - 确定性
 - 互异性
- 集合的运算
 - 并集
 - 交集
 - 补集

函数

区别

相等

一对一 —— 每个输入都有一个输出

双射 —— 每个输出都有至少一个输入

满射 —— 每个输出 没有多余的

性质

定义

函数 —— 一一对应 —— 一个值的域是另一个值的定义域

定义&性质

一个函数 是什么?

满射吗?

多少个输入?

代数系统

[illegible]

贝尔基特群 8×8 群 双变群 $(a\ b)(c\ d)(a\ b)(c\ d)$
 模群群 群中的每个元素都是由一个 a 的 m 次幂生成的 $a^{-1} = a^{m-1}$
 群 没有变元
 若 $ab \in Q$ 那么存在唯一 x 使得 $a^m x = b$
 消去律在 Q 中成立
 群中的每一行/列都是 Q 的置换
 群中的么元在子群中也适用
 子群 H 的 证明
 B是有群群 运算 "在B中"就是 Q 的子群
 B中的任意元素 a, b 有 $a^{-1}b^{-1}$ 也属于 B 也是
 封闭
 证明群的方法 可结合
 么元
 逆元

—

[illegible]

例題

1. 2. (5分) 在一个聚会上有 15 个人，这 8 个人中的每个人
都认识
至少 6 个人。问：是否可能，如果这 8 个人步行一下街，
恰好 3 个人同时见面？问：是否可能，如果这 8 个人
所走过的路是

题外话：这个题是图论问题，可以用图论知识解决。但这里我们只讨论它的 combinatorial 部分。即：是否存在一个 15 个元素的集合 S ，以及 S 的一个子集 T ，使得 T 中的每个元素都包含至少 6 个 S 中的元素，且 T 中的元素两两不相交。

解：假设存在这样的集合 S 和子集 T 。设 $T = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ ，其中 T_i 是 S 的一个子集，且 T_i 中的元素两两不相交。由于 T 中的每个元素都包含至少 6 个 S 中的元素，所以 $|T_i| \geq 6$ 。因此， $|T| \geq 6k$ 。另一方面，由于 T 中的元素两两不相交，所以 $|T| \leq 15$ 。因此， $6k \leq 15$ ，即 $k \leq 2$ 。如果 $k=1$ ，那么 T 中只有一个元素，它包含至少 6 个 S 中的元素，这是可能的。如果 $k=2$ ，那么 T 中有两个元素，每个元素都包含至少 6 个 S 中的元素，且这两个元素两两不相交。这是不可能的，因为 $|S| = 15$ ，而 $|T_1| + |T_2| \geq 12$ ，所以 $|T_1| = |T_2| = 6$ ，且 $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ 。因此， T 中只能有一个元素。

因此，答案是：不可能。


```

    graph LR
      Root[图论] --- Section1[欧拉图]
      Root --- Section2[哈密尔顿图]
      Root --- Section3[平面图]
      Root --- Section4[树]

      Section1 --- Concept1[概念]
      Concept1 --- Content1[只过一次边 一次仅过一次]
      Section1 --- Criterion1[判定定理]
      Criterion1 --- Content1a[无向图]
      Content1a --- Content1a1[有欧拉回路]
      Content1a1 --- Content1a2[连通 & 奇度数的节点是 0/2 个]
      Content1a1 --- Content1a3[有欧拉回路]
      Content1a3 --- Content1a4[均为偶度数的节点]
      Criterion1 --- Content1b[有向图]
      Content1b --- Content1b1[有单向欧拉回路]
      Content1b1 --- Content1b2[连通 & 有且仅有两个节点。除了源节点入度 < 出度]
      Content1b1 --- Content1b3[有单向欧拉回路]
      Content1b3 --- Content1b4[那两个节点。一个出度 > 入度 + 1 另一个 +1]
      Content1b1 --- Content1b5[有单向欧拉回路]
      Content1b5 --- Content1b6[全部节点入度 = 出度]

      Section2 --- Concept2[概念]
      Concept2 --- Content2[只过一次边 一次仅过一次]
      Section2 --- Criterion2[判定定理]
      Criterion2 --- Content2a[哈密尔顿回路存在]
      Content2a --- Content2a1[G 的节点数为 n 若每一对节点度数之和 + n - 1 则存在]
      Criterion2 --- Content2b[哈密尔顿回路存在]
      Content2b --- Content2b1[G 的节点数为 n 若每一对节点度数之和 + n - 1 则存在]
      Criterion2 --- Content2c[哈密尔顿图判定]
      Content2c --- Content2c1[删去一个点重连如果 W(G-Vi) < Vi-1 则删除]

      Section3 --- Concept3[概念]
      Concept3 --- Content3[面的次数]
      Content3 --- Content3a[面 = 2 边]
      Section3 --- Formula3[欧拉公式]
      Formula3 --- Content3b[节点 - 边 + 面 = 2]
      Content3b --- Content3b1[V + F + 2]
      Formula3 --- Content3c[推论 当节点数 n 边数 e 面数 f]
      Content3c --- Content3c1[V = 2, e = 3, f = 6]
      Section3 --- K33 K5
      K33 K5 --- Content3d[K5 是一个全图]
      Section3 --- Criterion3[平面图判定]
      Criterion3 --- Content3e[Kuratowski 定理]
      Content3e --- Content3e1[两顶点可以插入在任意节点插入或删掉任意节点而不变得结构同构]
      Content3e1 --- Content3e2[那两个圈在边上是同构的]
      Criterion3 --- Content3f[面 - 2 下看能不能不交叉]
      Content3f --- Content3f1[同层 / 内同层 一反面的插入边为 2 的边让两个面同构]

      Section4 --- Concept4[概念]
      Concept4 --- Content4a[无向树]
      Content4a --- Content4a1[生成树]
      Content4a1 --- Content4a2[生成子图是个树]
      Content4a --- Content4a3[最小生成树 - Kruskal]
      Content4a3 --- Content4a4[如果有 n 个节点 找 n-1 条边]
      Content4a3 --- Content4a5[找边的过程中]
      Content4a5 --- Content4a6[我权数最小的边与边不能构成圈]
      Concept4 --- Content4b[有向树]
      Content4b --- Content4b1[根数]
      Content4b1 --- Content4b2[完全 M 叉树]
      Content4b2 --- Content4b3[树高为 t]
      Content4b2 --- Content4b4[分枝数 1]
      Content4b2 --- Content4b5[M^t - 1 = 1]
      Content4b1 --- Content4b6[N 叉树]
      Content4b6 --- Content4b7[最优树]
      Content4b7 --- Content4b8[前缀码]
      Content4b8 --- Content4b9[前面的序列不是后面序列的子集]
      Content4b1 --- Content4b10[例题]
      Content4b10 --- Content4b11[例题]
      Content4b10 --- Content4b12[分枝数 1]
      Content4b10 --- Content4b13[M^t - 1 = 1]
      Content4b10 --- Content4b14[例题]
  
```

图论

- 欧拉图**
 - 概念：只过一次边 一次仅过一次
 - 判定定理
 - 无向图
 - 有欧拉回路：连通 & 奇度数的节点是 0/2 个
 - 有欧拉回路：均为偶度数的节点
 - 有向图
 - 有单向欧拉回路：连通 & 有且仅有两个节点。除了源节点入度 < 出度
 - 有单向欧拉回路：那两个节点。一个出度 > 入度 + 1 另一个 +1
 - 有单向欧拉回路：全部节点入度 = 出度
- 哈密尔顿图**
 - 概念：只过一次边 一次仅过一次
 - 判定定理
 - 哈密尔顿回路存在：G 的节点数为 n 若每一对节点度数之和 + n - 1 则存在
 - 哈密尔顿回路存在：G 的节点数为 n 若每一对节点度数之和 + n - 1 则存在
 - 哈密尔顿图判定：删去一个点重连如果 $W(G-V_i) < V_i - 1$ 则删除
- 平面图**
 - 概念
 - 面的次数：面 = 2 边
 - 欧拉公式
 - 节点 - 边 + 面 = 2 $V + F + 2$
 - 推论 当节点数 n 边数 e 面数 f $V = 2, e = 3, f = 6$
 - K33 K5
 - K5 是一个全图
 - 平面图判定
 - Kuratowski 定理：两顶点可以插入在任意节点插入或删掉任意节点而不变得结构同构。那两个圈在边上是同构的
 - 面 - 2 下看能不能不交叉：同层 / 内同层 一反面的插入边为 2 的边让两个面同构
- 树**
 - 概念
 - 无向树
 - 生成树：生成子图是个树
 - 最小生成树 - Kruskal：如果有 n 个节点 找 n-1 条边
 - 找边的过程中：我权数最小的边与边不能构成圈
 - 有向树
 - 根数
 - 完全 M 叉树：树高为 t
 - 分枝数 1
 - $M^t - 1 = 1$
 - N 叉树：最优树
 - 前缀码：前面的序列不是后面序列的子集
 - 例题：例题
 - 分枝数 1
 - $M^t - 1 = 1$
 - 例题
- 定义**：无回路连通图
- 性质**
 - 等价：连通无回路
 - 定理：一个树 至少有 n 片树叶
 - 边 = 节点 - 1

[illegible]