

Deuxième année — Méthodes mathématiques

Richard DEGENNE, L3-B

25 septembre 2014

Table des matières

1	Intégrales générales, ou impropres	2
I	Définition	2
1	Relation de Chasles	2
II	Exemples	3
III	Propriétés	4
IV	Intégrale absolument convergente	4
2	Séries numériques	5
I	Convergence d'une série de nombres complexes	5
1	Définitions	5
2	Condition nécessaire de convergence	5
II	Séries à termes réels positifs	6
1	Condition nécessaire et suffisante de convergence	6
2	Critère de comparaison	6
3	Critère d'Alembert	7
4	Comparaison d'une série et d'une intégrale	7
III	Séries absolument convergentes	8

Chapitre 1

Intégrales générales, ou impropres

I Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle dont les extrémités $a < b$ (pouvant être $\pm\infty$) sont exclues et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur I . Pour chaque intervalle $[x; y] \in I$, l'intégrale $\int_x^y f(t) dt$ est bien définie.

Si, pour x tendant vers a et y tendant vers b , l'intégrale admet une limite finie, alors on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, et, par définition,

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} \int_x^y f(t) dt$$

Si la limite est infinie ou s'il n'y a pas de limite, on dit que l'intégrale impropre est divergente.

1 Relation de Chasles

Pour $c \in I$, on a

$$\int_x^y f(t) dt = \int_x^c f(t) dt + \int_c^y f(t) dt$$

Si une intégrale impropre converge, alors toute relation de Chasles formée à partir de cette intégrale converge également. En prenant le cas particulier $c = a$, on peut en déduire que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt \text{ converge} &\iff \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(t) dt \text{ existe et est fini.} \\ &\iff \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt \text{ existe et est fini.} \end{aligned}$$

II Exemples

Exemple 1.

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^2} dt &= \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x \\ &= 1 - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemple 3.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln(x) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Exemple 4.

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos(t) dt &= [\sin(t)]_0^x \\ &= \sin(x)\end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ n'existe pas. Donc, $\int_0^x \cos(t) dt$ diverge.

Exemple 5.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t} dt &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - e^{-x} \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemple 6.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[2\sqrt{t} \right]_x^1 \\ &= 2\end{aligned}$$

III Propriétés

Si a et b sont des valeurs finies et si f est une fonction continue dans l'un des intervalles $[a; b[,]a; b]$ ou $]a; b[$ qui se prolonge par continuité à $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Exemple 7.

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$$

*est convergente.*¹

Évidemment, les résultats et propriétés valables pour les intégrales classiques (changements de variable, intégration par parties, linéarité, ...) restent valables pour les intégrales impropres.

IV Intégrale absolument convergente

Soit I un intervalle d'extrémités a et b appartenant à $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \setminus \pm \infty$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $\forall t \in I, |f(t)| \leq g(t)$. On a alors

$$\int_a^b g(t) dt \text{ converge} \implies \int_a^b f(t) dt \text{ converge}$$

Ainsi, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge. Toute intégrale impropre absolument convergente est convergente.

Remarque 1. *La réciproque est généralement fausse. Par exemple, $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge, mais $\int_0^\infty \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt$ diverge.*

1. cf. le développement limité de $\sin(t)$ au voisinage de t .

Chapitre 2

Séries numériques

I Convergence d'une série de nombres complexes

1 Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On appelle *somme partielle* d'indice n le nombre $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. On dit que la série de terme général u_n converge lorsque la suite (S_n) converge, autrement dit quand $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k$ existe et est finie.

On dit que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ est la somme de la série de terme général u_n et on note $\sum_0^\infty u_n$.

Exemple 8.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{La somme se téléscopie.}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On dit que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge et que sa somme vaut 1.

2 Condition nécessaire de convergence

Si la série de terme général u_n converge vers l , autrement dit si la somme partielle S_n vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$, alors il est nécessaire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n - S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Si on prend $q \in \mathbb{C}$, la série géométrique de terme général q^n converge dans \mathbb{C} si, et seulement si, $|q| < 1$. À ce moment-là, $\sum_0^\infty = \frac{1}{1-q}$.

Exemple 9.

$$\begin{aligned} \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Soient u_n et v_n les termes généraux de deux séries convergentes. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \sum_{n=0}^\infty u_n + \mu \sum_{n=0}^\infty v_n$$

On en déduit alors que la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge également.

II Séries à termes réels positifs

1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs. La série de terme général u_n converge si, et seulement si,

$$\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k < M \iff \sum_{k=0}^\infty u_k < +\infty$$

En effet, la suite composée des sommes partielles d'une suite à termes positifs est croissante. Dans la mesure où toute suite croissante majorée converge, on peut affirmer que si la suite des sommes partielles est majorée, alors elle converge vers $\sup(\{\sum_{k=0}^n u_k, n \in \mathbb{N}\})$.

2 Critère de comparaison

Soient u_n et v_n les termes généraux de deux séries à termes positifs tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n < v_n$.

Si $\sum_{n=0}^\infty v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^\infty u_n$ converge également et $\sum_{n=0}^\infty u_n \leq \sum_{n=0}^\infty v_n$.

Inversement, si $\sum_{n=0}^\infty u_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^\infty v_n$ diverge également.

Exemple 10. $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ converge car on a $\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$, qui est convergente.

Exemple 11. $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, qui diverge.

3 Critère d'Alembert

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

- Si $q < 1$, alors la série converge ;
- Si $q > 1$, alors la série diverge ;
- Si $q = 1$, on ne peut pas se prononcer.

Exemple 12.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n}{2^n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a $q < 1$, donc la série de terme général $\frac{n}{2^n}$ converge.

Exemple 13.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2^n}{2!} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a $q < 1$, donc la série de terme général $\frac{2^n}{n!}$ converge.

4 Comparaison d'une série et d'une intégrale

Soit $f : [1; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante. On a alors l'équivalences suivante,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(t) dt \text{ converge}$$

Un corollaire de ce théorème est que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

III Séries absolument convergentes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Une série est dite absolument convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge. De plus, on en peut en déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge également, mais la réciproque est généralement fausse.

Remarque 2 (Cas des séries alternées). *Soit (u_n) une suite de nombres réels alternativement positifs et négatifs. Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et si $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est convergente.*