Deuxième année — Méthodes mathématiques

Richard Degenne, L3-B

28 septembre 2014

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales générales, ou impropres

I Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle dont les extrémités $a < b$ (pouvant être $\pm\infty$) sont exclues et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur I. Pour chaque intervalle $[x; y] \in I$, l'intégrale $\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

Si, pour x tendant vers a et y tendant vers b, l'intégrale admet une limite finie, alors on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et, par définition,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a, y\to b} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si la limite est infinie ou s'il n'y a pas de limite, on dit que l'intégrale impropre est divergente.

1 Relation de Chasles

Pour $c \in I$, on a

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t \int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si une intégrale impropre converge, alors toute relation de Chasles formé à partir de cette intégrale converge également. En prenant le cas particulier $c = a$, on peut en déduire que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \begin{array}{l} \iff \lim_{y\to b} \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe et est fini.} \\ \iff \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe et est fini.} \end{array}$$

II Exemples

Exemple 1.

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= 1-\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemple 3.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to+\infty} 1-\ln(x) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Exemple 4.

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t &= [\sin(t)]_0^x \\ &= \sin(x)\end{aligned}$$

Or, $\lim_{x\to\infty}\sin(x)$ *n'existe pas. Donc,* $\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

Exemple 5.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to\infty}[-e^{-t}]_0^x \\ &= \lim_{x\to\infty} 1-e^{-x} \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemple 6.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to 0}\left[2\sqrt{t}\right]_x^1 \\ &= 2\end{aligned}$$

III Propriétés

Si a et b sont des valeurs finies et si f est une fonction continue dans l'un des intervalles $[a;b[$, $]a;b]$ ou $]a;b[$ qui se prolonge par continuité à $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 7.

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

est convergente. [1]

Évidemment, les résultats et propriétés valables pour les intégrales classiques (changements de variable, intégration par parties, linéarité,...) restent valables pour les intégrales impropres.

IV Intégrale absolument convergente

Soit I un intervalle d'extrémités a et b appartenant à $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\backslash \pm\infty$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $g : I \to \mathbb{R}^+$ telle que $\forall t \in I, |f(t)| \leq g(t)$. On a alors

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Ainsi, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Toute intégrale imporpre absolument convergente est convergente.

Remarque 1. *La réciproque est généralement fausse. Par exemple,* $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ *converge, mais* $\int_0^\infty \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

1. *cf.* le développement limité de $\sin(t)$ au voisinage de t.

Chapitre 2

Séries numériques

I Convergence d'une série de nombres complexes

1 Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres complexes. On appelle *somme partielle* d'indice n le nombre $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. On dit que la série de terme général u_n converge lorsque la suite (S_n) converge, autrement dit quand $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ existe et est finie.

On dit que $\lim_{n\to\infty} S_n$ est la somme de la série de terme général u_n et on note $\sum_0^\infty u_n$.

Exemple 8.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \textit{(La somme se téléscope.)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

On dit que la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ converge et que sa somme vaut 1.

2 Condition nécessaire de convergence

Si la série de terme général u_n converge vers l, autrement dit si la somme partielle S_n vérifie $\lim_{n\to\infty} S_n = l$, alors il est nécessaire que

$$\lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Si on prend $q \in \mathbb{C}$, la série géométrique de terme général q^n converge dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, $|q| < 1$. À ce moment-là, $\sum_0^\infty = \frac{1}{1-q}$.

Exemple 9.

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\end{aligned}$$

Soient u_n et v_n les termes généraux de deux séries convergentes. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda\, u_n + \mu\, v_n = \lambda \sum_{n=0}^\infty u_n + \mu \sum_{n=0}^\infty v_n$$

On en déduit alors que la série de terme général $\lambda\, u_n + \mu\, v_n$ converge également.

II Séries à termes réels positifs

1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Soit (u_n) une suite de nombres réels positifs. La série de terme général u_n converge si, et seulement si,

$$\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k < M \iff \sum k = 0^\infty u_k < +\infty$$

En effet, la suite composée des sommes partielles d'une suite à termes positifs est croissante. Dans la mesure où toute suite croissante majorée converge, on peut affirmer que si la suite des sommes partielles est majorée, alors elle converge vers $\sup\left(\{\sum_{k=0}^n u_k, n \in \mathbb{N}\}\right)$.

2 Critère de comparaison

Soient u_n et v_n les termes généraux de deux séries à termes positifs tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n < v_n$.

Si $\sum_{n=0}^\infty v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^\infty u_n$ converge également et $\sum_{n=0}^\infty u_n \leq \sum_{n=0}^\infty v_n$.

Inversement, si $\sum n = 0^\infty u_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^\infty v_n$ diverge également.

Exemple 10. $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ *converge car on a* $\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$*, qui est convergente.*

Exemple 11. $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge car on a* $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$*, qui diverge.*

3 Critère d'Alembert

Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

— Si $q < 1$, alors la série converge ;
— Si $q > 1$, alors la série diverge ;
— Si $q = 1$, on ne peut pas se prononcer.

Exemple 12.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n}{2^n} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a $q < 1$, donc la série de terme général $\frac{n}{2^n}$ converge.

Exemple 13.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2^n}{2!} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a $q < 1$, donc la série de terme général $\frac{2^n}{n!}$ converge.

4 Comparaison d'une série et d'une intégrale

Soit $f : [1; +\infty] \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante. On a alors l'équivalences suivante,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Un corollaire de ce théorème est que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

III Séries absolument convergentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Une série est dite absolument convergente si $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ converge. De plus, on en peut en déduire que $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ converge également, mais la réciproque est généralement fausse.

Remarque 2 (Cas des séries alternées)**.** *Soit* (u_n) *une suite de nombres réels alternativement positifs et négatifs. Si la suite* $(|u_n|)$ *est décroissante et si* $\lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$*, alors* $\sum_{n=0}^{\infty}$ *est convergente.*

Chapitre 3

Transformée de Laplace

I Intégrale de Laplace

1 Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour tout $t < 0$.[1] On appelle transformée de Laplace de f la fonction F définie par

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

où p est une variable complexe.

On écrit $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, ou bien $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$. On dit que $F(p)$ est l'image de $f(t)$ et que $f(t)$ est l'originial de $F(p)$.

Remarque 3. *$F(p)$ est bien à valeur dans $\mathbb{C}$ bien que $f(t)$ soit à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

2 Conditions d'existence

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ n'existe que si $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On est alors amené à définir deux conditions sur f pour s'assurer de l'existence de sa transformée de Laplace :

- Elle doit être continue par morceau sur tout intervalle $[0; t_0]$ de $\mathbb{R}$;
- Elle doit être d'ordre exponentiel à l'infini, c'est-à-dire respecter la relation suivante

$$\exists M > 0, \alpha \in \mathbb{R} \mid |f(t)| < M\, e^{\alpha t}$$

1. On parle alors de fonction causale.

II Transformée de Laplace des fonctions usuelles

1 Échelon unité

L'échelon unité est la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}$ comme suit,

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

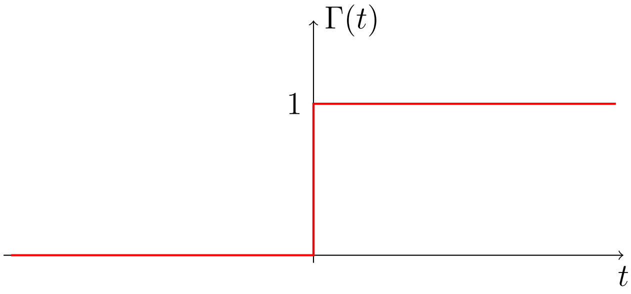

Figure 3.1 – Échelon unité

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\Gamma(t)\right\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \times 1 \,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^T \\
&= \lim_{T\to\infty} \left|e^{-pt}\right| \\
&= \lim_{T\to\infty} \left|e^{\Re(p)t}\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{L}\left\{\Gamma(t)\right\}$ existe et $\mathcal{L}\left\{\Gamma(t)\right\} = \frac{1}{p}$.

2 Impulsion de Dirac

Remarque 4.

$$\forall \varepsilon > 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) = 1$$

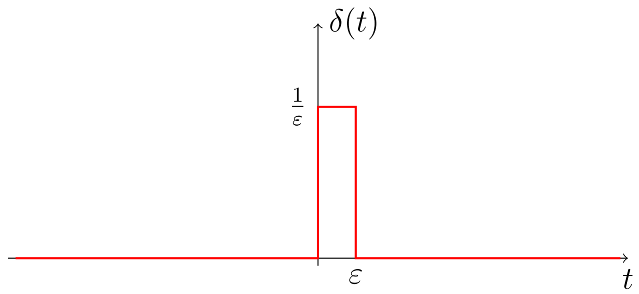

Figure 3.2 – Fonction créneau

La famille de fonction des δ_ε est appelée créneau. Cependant, lorsque ε tend vers 0, on parle d'impulsion de Dirac, notée δ, et sert à représenter en physique des évènements on des actions ayant lieu sur un temps très court. On écirt d'ailleurs abusivement

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0 \\ \infty & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\delta_\varepsilon\right\} &= \int_0^\infty \delta_\varepsilon(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1 - e^{-pt}}{p\,\varepsilon} \\
\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-pt}}{p\,\varepsilon} &= 1
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}$ existe et $\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1$.

3 Fonction puissance

Soit un entier naturel n. On pose alors $f(t) = t^n\,\Gamma(t)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty t^n\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{e^{-pt}}{p} t^n\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{n}{p} t^{n-1}\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{n}{p} \int_0^{n-1} e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= \frac{n!}{p^n} \int_0^\infty 1 \times e^{-pt}\, \mathrm{d}(t) \qquad \text{(On intègre par parties } n \text{ fois.)} \\
&= \frac{n!}{p^n} \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^\infty
\end{aligned}
$$

Donc, $\mathcal{L}\{t^n\}$ existe et $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

4 Fonction exponentielle

On pose ici $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(t) = e^{-\alpha t}\, \Gamma(t)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\} &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-t(p+\alpha)}\, \mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{e^{-t(p+\alpha)}}{p+\alpha}\right]_0^\infty
\end{aligned}
$$

Donc, $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}$ existe et vaut $\frac{1}{p+\alpha}$.

5 Fonctions trigonométriques

a Sinus

On pose $f(t) = \sin(\omega t)\, \Gamma(t)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\sin(\omega t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j}(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t})\right\} \\
&= \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega t}\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{j\omega t}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega}\right) \\
&= \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}
\end{aligned}
$$

b Cosinus

On pose $f(t) = \cos(\omega t)\,\Gamma(t)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\cos(\omega t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t})\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega t}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{j\omega t}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p + j\omega} + \frac{1}{p - j\omega}\right) \\
&= \frac{p}{p^2 + \omega^2}
\end{aligned}
$$

III Propriétés

1 Linéarité

$$
\mathcal{L}\left\{a\,f(t) + b\,g(t)\right\} = a\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\,\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}
$$

2 Multiplication par un scalaire

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(t)$ telle que $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(p)$.

$$
\mathcal{L}\left\{f(\alpha t)\right\} = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{a}\right)
$$

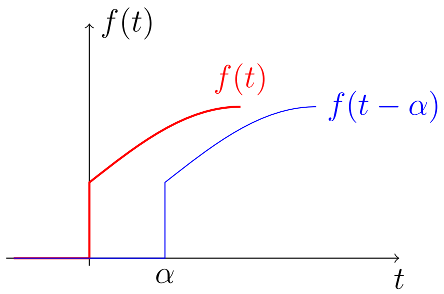

FIGURE 3.3 – Fonction retardée

3 Retard

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-\alpha)\} &= \int_\alpha^\infty f(t-\alpha)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty f(x)\, e^{-p(x+\alpha)}\, \mathrm{d}x \qquad (\text{On pose } x = t-\alpha) \\
&= e^{-pa} \int_0^\infty f(x)\, e^{-px}\, \mathrm{d}x \\
&= e^{-pa} \mathcal{L}\{f(t)\}
\end{aligned}$$

Exemple 14 (Les fonctions périodiques)**.** *Soit $f(t)$ une fonction de période T. On va ici décomposer la fonction sur chaque période. On définit $f_0(t) = f(t) \forall t \in [0;T]; 0 \forall t \geq T$.*

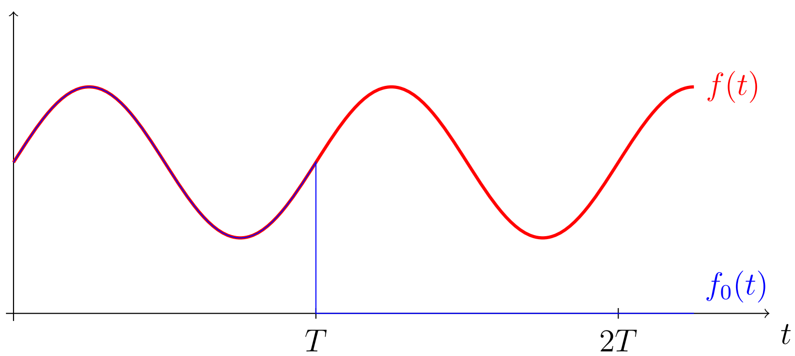

FIGURE 3.4 – Décomposition d'une fonction périodique

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2T) + \cdots\} \\
&= \mathcal{L}\{f_0(t)\} + \mathcal{L}\{f_0(t-T)\} + \mathcal{L}\{f_0(t-2T)\} + \cdots \\
&= F_0(p) + e^{-pT}F_0(p) + e^{-2pT}F_0(p) + \cdots \\
&= (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \cdots)F_0(p) \\
&= \frac{1}{1-e^{-pT}}F_0(p)
\end{aligned}
$$

Pour les fonctions périodiques usuelles, il faut plutôt utiliser une table de transformée plutôt que cette méthode.

4 Dérivation

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur tout intervalle fermé $[0; t_0 \subset \mathbb{R}^+$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} &= \int_0^\infty \dot{f}(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= \left[e^{-pt} f(t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty p \times f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Or, par définition, $\lim_{x\to\infty} f(t)\, e^{-pt} = 0$, ce qui implique que $[f(t)\, e^{-pt}]_0^\infty = -f(0^+)$. Donc,

$$
\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\,\Gamma(t)\right\} = p\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^+)
$$

De manière générale, on a

$$
\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n\mathcal{L}\{f(t)\} - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}\dot{f}(0^+) - \cdots - p \times f^{(n-1)}(0^+)
$$

5 Primitivation

Soit $\varphi(t) = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ (c'est-à-dire $\dot{\varphi}(t) = f(t)$) et $\varphi(0^+) = 0$.
On peut alors écrire $\mathcal{L}\{\dot{\varphi}(t)\} = p\mathcal{L}\{\varphi(t)\}$.
Or, $\dot{\varphi}(t) = f(t)$, d'où

$$
\mathcal{L}\{\varphi(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{p}
$$

6 Théorèmes des valeurs initiale et finale

$$\lim_{p \to \infty} p\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = f(0^+)$$

$$\lim_{p \to 0} p\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = f(\infty)$$