Deuxième année — Méthodes mathématiques

Richard Degenne, L3-B

24 septembre 2014

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales générales, ou impropres

I Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle dont les extrémités $a < b$ (pouvant être $\pm\infty$) sont exclues et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur I. Pour chaque intervalle $[x; y] \in I$, l'intégrale $\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

Si, pour x tendant vers a et y tendant vers b, l'intégrale admet une limite finie, alors on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et, par définition,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a, y \to b} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si la limite est infinie ou s'il n'y a pas de limite, on dit que l'intégrale impropre est divergente.

1 Relation de Chasles

Pour $c \in I$, on a

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t \int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si une intégrale impropre converge, alors toute relation de Chasles formé à partir de cette intégrale converge également. En prenant le cas particulier $c = a$, on peut en déduire que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \begin{array}{l} \iff \lim_{y\to b} \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe et est fini.} \\ \iff \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe et est fini.} \end{array}$$

II Exemples

Exemple 1.

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= 1 - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Exemple 2.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemple 3.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to+\infty} 1 - \ln(x) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Exemple 4.

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t &= [\sin(t)]_0^x \\ &= \sin(x)\end{aligned}$$

Or, $\lim_{x\to\infty} \sin(x)$ *n'existe pas. Donc,* $\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

Exemple 5.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to\infty} [-e^{-t}]_0^x \\ &= \lim_{x\to\infty} 1 - e^{-x} \\ &= 1\end{aligned}$$

Exemple 6.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{x\to 0}\left[2\sqrt{t}\right]_x^1\\ &= 2\end{aligned}$$

III Propriétés

Si a et b sont des valeurs finies et si f est une fonction continue dans l'un des intervalles $[a;b[$, $]a;b]$ ou $]a;b[$ qui se prolonge par continuité à $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 7.

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

est convergente. [1]

Évidemment, les résultats et propriétés valables pour les intégrales classiques (changements de variable, intégration par parties, linéarité,...) restent valables pour les intégrales impropres.

IV Intégrale absolument convergente

Soit I un intervalle d'extrémités a et b appartenant à $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\backslash \pm\infty$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $g : I \to \mathbb{R}^+$ telle que $\forall t \in I, |f(t)| \leq g(t)$. On a alors

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Ainsi, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Toute intégrale imporpre absolument convergente est convergente.

Remarque 1. *La réciproque est généralement fausse. Par exemple,* $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ *converge, mais* $\int_0^\infty \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

1. *cf.* le développement limité de $\sin(t)$ au voisinage de t.