# Deuxième année — Méthodes mathématiques

Richard Degenne, L3-B

5 octobre 2014

# Table des matières

# Chapitre 1

# Intégrales générales, ou impropres

## I Définition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle dont les extrémités $a < b$ (pouvant être $\pm\infty$) sont exclues et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $I$. Pour chaque intervalle $[x; y] \in I$, l'intégrale $\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

Si, pour $x$ tendant vers $a$ et $y$ tendant vers $b$, l'intégrale admet une limite finie, alors on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, et, par définition,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a, y\to b} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si la limite est infinie ou s'il n'y a pas de limite, on dit que l'intégrale impropre est divergente.

### 1 Relation de Chasles

Pour $c \in I$, on a

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t \int_c^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Si une intégrale impropre converge, alors toute relation de Chasles formé à partir de cette intégrale converge également. En prenant le cas particulier $c = a$, on peut en déduire que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \begin{array}{l} \iff \lim_{y\to b} \int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe et est fini.} \\ \iff \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ existe et est fini.} \end{array}$$

# II Exemples

**Exemple 1.**

$$\begin{aligned}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= 1 - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

**Exemple 2.**

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} \\ &= 1\end{aligned}$$

**Exemple 3.**

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to+\infty} 1 - \ln(x) \\ &= +\infty\end{aligned}$$

**Exemple 4.**

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t &= [\sin(t)]_0^x \\ &= \sin(x)\end{aligned}$$

*Or,* $\lim_{x\to\infty}\sin(x)$ *n'existe pas. Donc,* $\int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

**Exemple 5.**

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to\infty} [-e^{-t}]_0^x \\ &= \lim_{x\to\infty} 1 - e^{-x} \\ &= 1\end{aligned}$$

**Exemple 6.**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{x\to 0}\left[2\sqrt{t}\right]_x^1 \\ &= 2\end{aligned}$$

# III Propriétés

Si $a$ et $b$ sont des valeurs finies et si $f$ est une fonction continue dans l'un des intervalles $[a;b[$, $]a;b]$ ou $]a;b[$ qui se prolonge par continuité à $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**Exemple 7.**

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

*est convergente.* [1]

Évidemment, les résultats et propriétés valables pour les intégrales classiques (changements de variable, intégration par parties, linéarité,...) restent valables pour les intégrales impropres.

# IV Intégrale absolument convergente

Soit $I$ un intervalle d'extrémités $a$ et $b$ appartenant à $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\backslash \pm\infty$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $g : I \to \mathbb{R}^+$ telle que $\forall t \in I, |f(t)| \leq g(t)$. On a alors

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \implies \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Ainsi, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Toute intégrale imporpre absolument convergente est convergente.

**Remarque 1.** *La réciproque est généralement fausse. Par exemple,* $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ *converge, mais* $\int_0^\infty \left|\frac{\sin(t)}{t}\right|\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

1. *cf.* le développement limité de $\sin(t)$ au voisinage de $t$.

# Chapitre 2

# Séries numériques

## I Convergence d'une série de nombres complexes

### 1 Définitions

Soit $(u_n)$ une suite de nombres complexes. On appelle *somme partielle* d'indice $n$ le nombre $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. On dit que la série de terme général $u_n$ converge lorsque la suite $(S_n)$ converge, autrement dit quand $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^n u_k$ existe et est finie.

On dit que $\lim_{n\to\infty} S_n$ est la somme de la série de terme général $u_n$ et on note $\sum_0^\infty u_n$.

**Exemple 8.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \textit{(La somme se téléscope.)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

*On dit que la série de terme général* $\frac{1}{n(n+1)}$ *converge et que sa somme vaut 1.*

### 2 Condition nécessaire de convergence

Si la série de terme général $u_n$ converge vers $l$, autrement dit si la somme partielle $S_n$ vérifie $\lim_{n\to\infty} S_n = l$, alors il est nécessaire que

$$\lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Si on prend $q \in \mathbb{C}$, la série géométrique de terme général $q^n$ converge dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, $|q| < 1$. À ce moment-là, $\sum_0^\infty = \frac{1}{1-q}$.

**Exemple 9.**

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\end{aligned}$$

Soient $u_n$ et $v_n$ les termes généraux de deux séries convergentes. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda\, u_n + \mu\, v_n = \lambda \sum_{n=0}^\infty u_n + \mu \sum_{n=0}^\infty v_n$$

On en déduit alors que la série de terme général $\lambda\, u_n + \mu\, v_n$ converge également.

# II Séries à termes réels positifs

## 1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels positifs. La série de terme général $u_n$ converge si, et seulement si,

$$\exists M > 0 \mid \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k < M \iff \sum k = 0^\infty u_k < +\infty$$

En effet, la suite composée des sommes partielles d'une suite à termes positifs est croissante. Dans la mesure où toute suite croissante majorée converge, on peut affirmer que si la suite des sommes partielles est majorée, alors elle converge vers $\sup\left(\{\sum_{k=0}^n u_k, n \in \mathbb{N}\}\right)$.

## 2 Critère de comparaison

Soient $u_n$ et $v_n$ les termes généraux de deux séries à termes positifs tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 < u_n < v_n$.

Si $\sum_{n=0}^\infty v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^\infty u_n$ converge également et $\sum_{n=0}^\infty u_n \leq \sum_{n=0}^\infty v_n$.

Inversement, si $\sum n = 0^\infty u_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^\infty v_n$ diverge également.

**Exemple 10.** $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ *converge car on a* $\frac{1}{n^2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$*, qui est convergente.*

**Exemple 11.** $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ *diverge car on a* $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$*, qui diverge.*

## 3 Critère d'Alembert

Soit $(u_n)$ une suite de réels positifs telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

— Si $q < 1$, alors la série converge;

— Si $q > 1$, alors la série diverge;

— Si $q = 1$, on ne peut pas se prononcer.

**Exemple 12.**

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n}{2^n} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

*On a $q < 1$, donc la série de terme général $\frac{n}{2^n}$ converge.*

**Exemple 13.**

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2^n}{2!} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

*On a $q < 1$, donc la série de terme général $\frac{2^n}{n!}$ converge.*

## 4 Comparaison d'une série et d'une intégrale

Soit $f : [1; +\infty] \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et décroissante. On a alors l'équivalences suivante,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Un corollaire de ce théorème est que la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

## III Séries absolument convergentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Une série est dite absolument convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge. De plus, on en peut en déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge également, mais la réciproque est généralement fausse.

**Remarque 2** (Cas des séries alternées)**.** *Soit* $(u_n)$ *une suite de nombres réels alternativement positifs et négatifs. Si la suite* $(|u_n|)$ *est décroissante et si* $\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0$*, alors* $\sum_{n=0}^{\infty}$ *est convergente.*

# Chapitre 3

# Transformée de Laplace

## I Intégrale de Laplace

### 1 Définition

Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et supposée nulle pour tout $t < 0$.[1] On appelle transformée de Laplace de $f$ la fonction $F$ définie par

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

où $p$ est une variable complexe.

On écrit $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, ou bien $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p)$. On dit que $F(p)$ est l'image de $f(t)$ et que $f(t)$ est l'originial de $F(p)$.

**Remarque 3.** *$F(p)$ est bien à valeur dans $\mathbb{C}$ bien que $f(t)$ soit à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

### 2 Conditions d'existence

La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ n'existe que si $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On est alors amené à définir deux conditions sur $f$ pour s'assurer de l'existence de sa transformée de Laplace :

- Elle doit être continue par morceau sur tout intervalle $[0; t_0]$ de $\mathbb{R}$ ;
- Elle doit être d'ordre exponentiel à l'infini, c'est-à-dire respecter la relation suivante

$$\exists M > 0, \alpha \in \mathbb{R} \mid |f(t)| < M\, e^{\alpha t}$$

1. On parle alors de fonction causale.

# II Transformée de Laplace des fonctions usuelles

## 1 Échelon unité

L'échelon unité est la fonction $\Gamma$ définie sur $\mathbb{R}$ comme suit,

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ 1 & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

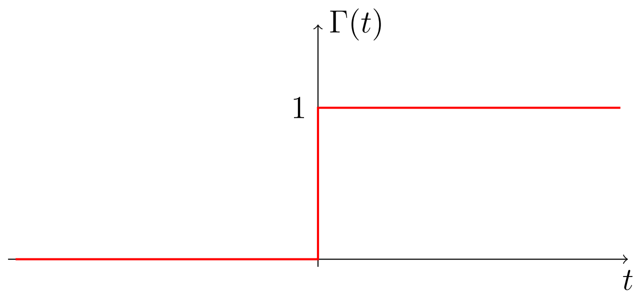


FIGURE 3.1 – Échelon unité

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\Gamma(t)\right\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} \times 1 \, \mathrm{d}t \\
&= \lim_{T\to\infty} \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^T \\
&= \lim_{T\to\infty} \left|e^{-pt}\right| \\
&= \lim_{T\to\infty} \left|e^{\Re(p)t}\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{L}\left\{\Gamma(t)\right\}$ existe et $\mathcal{L}\left\{\Gamma(t)\right\} = \frac{1}{p}$.

## 2 Impulsion de Dirac

**Remarque 4.**

$$\forall \varepsilon > 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) = 1$$

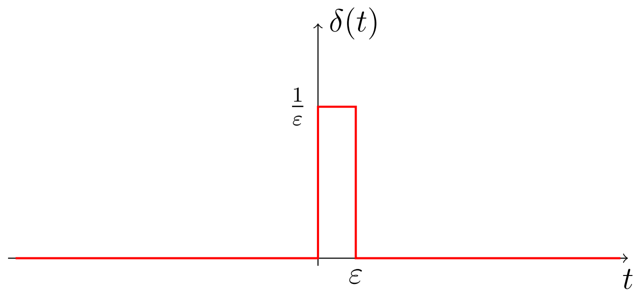


FIGURE 3.2 – Fonction créneau

La famille de fonction des $\delta_\varepsilon$ est appelée créneau. Cependant, lorsque $\varepsilon$ tend vers 0, on parle d'impulsion de Dirac, notée $\delta$, et sert à représenter en physique des évènements on des actions ayant lieu sur un temps très court. On écirt d'ailleurs abusivement

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \neq 0 \\ \infty & \text{pour } t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\delta_\varepsilon\right\} &= \int_0^\infty \delta_\varepsilon(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-e^{-pt}}{p\,\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-e^{-pt}}{p\,\varepsilon} = 1$$

Donc, $\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}$ existe et $\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\} = 1$.

## 3 Fonction puissance

Soit un entier naturel $n$. On pose alors $f(t) = t^n\,\Gamma(t)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty t^n\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{e^{-pt}}{p}t^n\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{n}{p}t^{n-1}\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{n}{p}\int_0^{n-1} e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n!}{p^n}\int_0^\infty 1\times e^{-pt}\,\mathrm{d}(t) \qquad \text{(On intègre par parties } n \text{ fois.)} \\
&= \frac{n!}{p^n}\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^\infty
\end{aligned}
$$

Donc, $\mathcal{L}\{t^n\}$ existe et $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

## 4 Fonction exponentielle

On pose ici $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(t) = e^{-\alpha t}\,\Gamma(t)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}\right\} &= \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-t(p+\alpha)}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{e^{-t(p+\alpha)}}{p+\alpha}\right]_0^\infty
\end{aligned}
$$

Donc, $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}$ existe et vaut $\frac{1}{p+\alpha}$.

## 5 Fonctions trigonométriques

### a Sinus

On pose $f(t) = \sin(\omega t)\,\Gamma(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\sin(\omega t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2j}(e^{-j\omega t} - e^{j\omega t})\right\} \\
&= \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega t}\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{j\omega t}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right) \\
&= \frac{\omega}{p^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

### b Cosinus

On pose $f(t) = \cos(\omega t)\,\Gamma(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\cos(\omega t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t})\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{-j\omega t}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{j\omega t}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+j\omega} + \frac{1}{p-j\omega}\right) \\
&= \frac{p}{p^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

# III Propriétés

## 1 Linéarité

$$\mathcal{L}\left\{a\,f(t) + b\,g(t)\right\} = a\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\,\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

## 2 Multiplication par un scalaire

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f(t)$ telle que $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(p)$.

$$\mathcal{L}\left\{f(\alpha t)\right\} = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

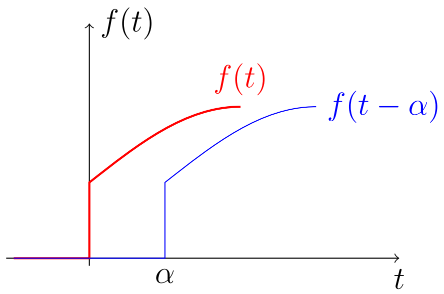


FIGURE 3.3 – Fonction retardée

## 3 Retard

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f(t-\alpha)\right\} &= \int_{\alpha}^{\infty} f(t-\alpha)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-p(x+\alpha)}\, \mathrm{d}x \qquad \text{(On pose } x = t-\alpha\text{)} \\
&= e^{-pa} \int_{0}^{\infty} f(x)\, e^{-px}\, \mathrm{d}x \\
&= e^{-pa}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}
\end{aligned}$$

**Exemple 14** (Les fonctions périodiques)**.** *Soit $f(t)$ une fonction de période $T$. On va ici décomposer la fonction sur chaque période. On définit $f_0(t) = f(t)\forall t \in [0;T]; 0\forall t \geq T$.*

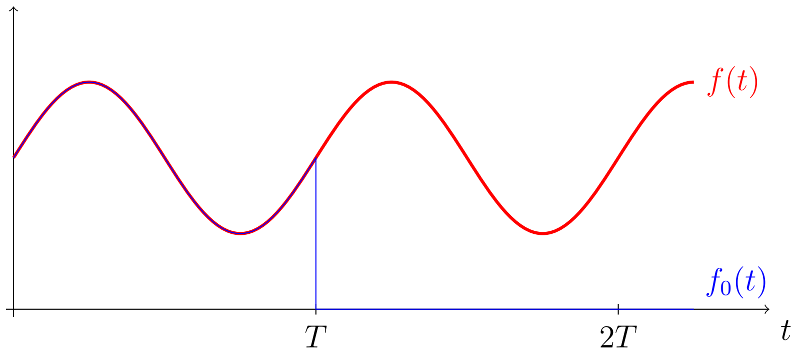


FIGURE 3.4 – Décomposition d'une fonction périodique

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2T) + \cdots\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{f_0(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{f_0(t-T)\right\} + \mathcal{L}\left\{f_0(t-2T)\right\} + \cdots \\
&= F_0(p) + e^{-pT}F_0(p) + e^{-2pT}F_0(p) + \cdots \\
&= (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \cdots)F_0(p) \\
&= \frac{1}{1-e^{-pT}}F_0(p)
\end{aligned}
$$

*Pour les fonctions périodiques usuelles, il faut plutôt utiliser une table de transformée plutôt que cette méthode.*

## 4 Dérivation

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur tout intervalle fermé $[0; t_0 \subset \mathbb{R}^+$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} &= \int_0^\infty \dot{f}(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t \\
&= \left[e^{-pt}f(t)\right]_0^\infty + \int_0^\infty p \times f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Or, par définition, $\lim_{x\to\infty} f(t)\, e^{-pt} = 0$, ce qui implique que $[f(t)\, e^{-pt}]_0^\infty = -f(0^+)$. Donc,

$$
\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\, \Gamma(t)\right\} = p\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0^+)
$$

De manière générale, on a

$$
\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}\dot{f}(0^+) - \cdots - p \times f^{(n-1)}(0^+)
$$

## 5 Primitivation

Soit $\varphi(t) = \int_0^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$ (c'est-à-dire $\dot{\varphi}(t) = f(t)$) et $\varphi(0^+) = 0$.
On peut alors écrire $\mathcal{L}\left\{\dot{\varphi}(t)\right\} = p\mathcal{L}\left\{\varphi(t)\right\}$.
Or, $\dot{\varphi}(t) = f(t)$, d'où

$$
\mathcal{L}\left\{\varphi(t)\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}}{p}
$$

## 6 Théorèmes des valeurs initiale et finale

On peut déterminer le comportement asymptotique d'une fonction $f(t)$ en ne connaissant que sa transformée.

$$\lim_{p \to \infty} p\mathcal{L}\{f(t)\} = f(0^+)$$
$$\lim_{p \to 0} p\mathcal{L}\{f(t)\} = f(\infty)$$

# Chapitre 4

# Produit de convolution

## I Définition

Lorsqu'il existe, on appelle produit de convolution de deux fonctions $f$ et $g$ la fonction $h$ définie par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

**Remarque 5.** *On note $h = f * g$ et on lit* "le produit de convolution de $f$ par $g$" *ou* "$f$ étoile $g$".

## II Propriétés

### 1 Commutativité

Le produit de convolution est commutatif, c'est-à-dire que

$$f * g = g * f$$

### 2 Associativité

Le produit de convolution est associatif, c'est-à-dire que

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

### 3 Distributivité

Le produit de convolution est distributif, c'est-à-dire que

$$f * (g + h) = f * g \; + \; f * h$$

## III Produit de convolution et impulsion de Dirac

On rappelle que l'impulsion de Dirac est la fonction notée $\delta(t)$ définie par un créneau de largeur $\varepsilon \to 0$ et d'amplitude $\frac{1}{\varepsilon} \to \infty$ avec $\varepsilon > 0$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi, on peut dire que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(t)\, f(t) = f(0)$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Par conséquence, $f * \delta = f$. L'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution. On peut également définir une $g$ comme l'inverse de $f$ pour le produit de convolution si $f * g = \delta$.

**Remarque 6.**

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta\big(x - (t - t_0)\big)\,\mathrm{d}x = f(t - t_0)$$

## IV Applications à la physique

On va décrire un système physique au moyen d'un opérateur liant un signal d'entrée à un signal de sortie. On cherche à établir l'expression mathématique de cet opérateur.

On dit qu'un système est continu lorsque l'on peut trouver une équation instantanée ou différentielle avec le temps comme variable indépendante donnant la relation entre les signaux d'entrée et de sortie.

## 1 Système linéaire

Soit $y(t)$ la réponse du système à un signal d'entrée $x(t)$. Le système est dit linéaire si la réponse du système à $\lambda\, x(t)$ est $\lambda\, y(t)$, où $\lambda$ désigne un réel.


FIGURE 4.1 – Système linéaire

## 2 Système invariant

Un système est invariant dans le temps lorsqu'une translation dans le temps de l'entrée $x(t-\tau)$ se traduit par la même translation en sortie du système $y(t-\tau)$.


FIGURE 4.2 – Système invariant

## 3 Système causal

En physique, l'effet ne peut précéder la cause. Un système continu est causal si $y(t_0)$ est indépendant de $x(t_1)$, avec $t_1$ postérieur à $t_0$.

De la même manière, on dire que le système est stable si, pour tout signal d'entrée fini, le signal de sortie est fini.

## 4 Réponse impulsionnelle

On appelle réponse impulsionnelle d'un système le signal de sortie $h(t)$ obtenu lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac.

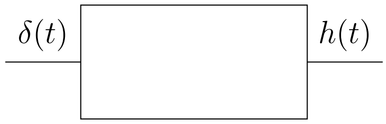


FIGURE 4.3 – Réponse impulsionnelle

## 5 Réponse du système à une entrée quelconque

Un système continu linéaire invariant peut être entièrement décrit par sa réponse impulsionnelle. La connaise de $h(t)$ permet de calculer le signal de sortie correspondant à n'importe quel signal d'entrée $x(t)$.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = x * h$$

## 6 Produit de convolution de fonctions causales

Soient $f$ et $g$ deux fonctions causales.

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\Gamma(t) \times g(t-\tau)\,\Gamma(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t f(t)\, g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

# V Transformée de Laplace du produit de convolution

Soient $f$ et $g$ deux fonctions causales.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} \times \mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_0^\infty e^{-pu} f(u)\,\mathrm{d}u \int_0^\infty e^{-pv} g(v)\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(u+v)} f(u)\, g(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pt} f(t-\tau)\, g(t)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-pt} \underbrace{\int_0^\infty f(t-\tau)\, g(t)\,\mathrm{d}\tau}_{(f*g)(t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f\} \times \mathcal{L}\{g\}$.

# Chapitre 5

# Transformée de Laplace inverse

## I Définition

Soit $F(p)$ la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$. On appelle transformée de Laplace inverse, ou original, de $F(p)$, la fonction $f(t)$.

On note $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\}$, ou encore $F(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$.

L'existence et l'unicité de l'original ne sont vraies que sous certaines conditions, que l'on admettra vraies pour toute fonction ici.

— La fonction $f$ doit être continue par morceaux pour tout intervalle fermé de $\mathbb{R}^+$.

— La fonction $f$ doit être d'ordre exponentiel à l'infini.

## II Propriétés

### 1 Linéarité

Tout comme la transformée de Laplace, la transformée inverse est linéaire.

$$\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathcal{L}^{-1}\left\{\lambda F + \mu G\right\} = \lambda \mathcal{L}^{-1}\left\{F\right\} + \mu \mathcal{L}^{-1}\left\{G\right\}$$

### 2 Multiplcation par un réel

Soit $f(t)$ l'original de $F(p)$. On pose $ax = t$.

$$\begin{aligned} F(ap) &= \int_0^{\infty} e^{-apx} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-pt} f\left(\frac{t}{a}\right)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(ap)\right\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$$

# 3 Avance – Retard

On pose toujours $f(t)$ comme l'original de $F(p)$.

$$\begin{aligned} F(p+a) &= \int_0^\infty e^{-(p+a)t} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-pt}\big(e^{-at} f(t)\big)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On en conclut que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(p+a)\right\} = e^{-at} f(t)$$

# 4 Dérivation – Primitivation

On va ici exprimer $\frac{\partial F(p)}{\partial p}$ en fonction de $f(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(p)}{\partial p} &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}\big(e^{-pt} f(t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty -t\,e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-pt}\big(-t\,f(t)\big)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On a par conséquent $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\partial F(p)}{\partial p}\right\} = -t\,f(t)$.
Faisons de même avec la primitivation.

$$\begin{aligned} \int_p^\infty F(u)\,\mathrm{d}u &= \int_p^\infty \left(\int_0^\infty e^{-ut} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^\infty \left(\int_p^\infty e^{-ut} f(t)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(t)\left[\frac{e^{-ut}}{-t}\right]_p^\infty\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_p^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

**Remarque 7.**

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F^{(n)}(p)\right\} = (-1)^n\, t^n f(t)$$

## 5 Original d'un produit

Soient $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $G(p) = \mathcal{L}\{g(t)\}$.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\,G(p)\} = (f * g)(t)$$

où $f * g$ désigne le produit de convolution de $f$ par $g$.

**Exemple 15.** *Original de* $\frac{1}{p^2(p+1)}$

*On sait d'après une table de transformée que* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = t$ *et que* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} = e^{-t}$. *On peut alors écrire*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p+1)}\right\} &= \int_0^t x\, e^{-(t-x)}\,\mathrm{d}x \\ &= e^{-t}\int_0^t x\, e^{x}\,\mathrm{d}x \\ &= (t-1) + e^{-t}\end{aligned}$$

# Chapitre 6

# Applications de la transformée de Laplace

## I Applications mathématiques

Soit l'équation différentielle suivante :

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = f(x)$$

La transformée de Laplace et l'exploitation de ses propriétés nous permettent d'écrire que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(x)\} &= Y(p) \\ \mathcal{L}\{\dot{y}(x)\} &= p\,Y(p) - y(0) \\ \mathcal{L}\left\{y^{(n)}(x)\right\} &= p^n\,Y(p) - p^{n-1}y(0) - p^{n-2}\dot{y}(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation, on obtient, par linéarité, l'équation dans le domaine de Laplace suivante :

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_0) Y(p) + \Phi(p) = F(p)$$

où $\Phi(p)$ désigne un polynôme de degré $n-1$. Après avoir isolé $Y(p)$, on obtient

$$Y(p) = \frac{F(p) - \Phi(p)}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}$$

**Exemple 16.** *Résoudre* $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = x\,e^x$, *avec* $y(0) = 1$ *et* $\dot{y}(0) = 0$.

*On commence par appliquer à transformée de Laplace au membre gauche de l'équation.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\ddot{y} - 2\dot{y} + y\right\} &= \mathcal{L}\left\{\ddot{y}\right\} + 2\mathcal{L}\left\{\dot{y}\right\} + \mathcal{L}\left\{y\right\} \\ &= (p^2 Y(p) - p\,x - 0) - 2(p\,Y(p) - 1) + Y(p) \\ &= (p^2 + 2p + 1)Y(p) - p + 2\end{aligned}$$

*On transforme ensuite le membre de droite.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{x\,e^x\right\} &= -\left(\frac{1}{p-1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(p-1)^2}\end{aligned}$$

*On peut donc réécrire complètement l'équation dans le domaine de Laplace.*

$$\begin{aligned}(p^2 + 2p + 1)Y(p) - p + 2 &= \frac{1}{(p-1)^2} \\ \iff Y(p) &= \frac{1}{(p-1)^2}\left(\frac{1}{(p-1)^2} + p - 2\right) \\ &= \frac{1}{(p-1)^4} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

*Enfin, on applique la transformée inverse pour retrouver la fonction dans le domaine temporel.*

$$\begin{aligned}y(t) &= e^t \frac{1}{3!} t^3 + e^t - t\,e^t \\ &= e^t\left(\frac{t^3}{6} - x + 1\right)\end{aligned}$$

**Remarque 8.** *Cette méthode se généralise à tous les cas d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et aux systèmes différentiels linéaires.*

# II Applications physiques

On considère un système linéaire invariant.

Dans les systèmes étudiés, $y(t)$ est lié à $x(t)$ par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^k y(t)}{\partial t^n} = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{\partial^k x(t)}{\partial t^n}$$

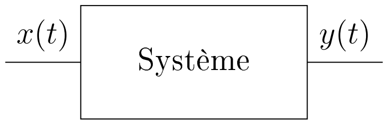


Figure 6.1 – Système linéaire invariant

Quelque soit le signal d'entrée $x(t)$, le signal de sortie sera de la forme $y(p) = x(t) \times h(t)$, soit, dans le domaine de Laplace, $Y(p) = X(p) \times H(p)$.

$H(p)$ est appelée *fonction de transfert* du système, et c'est elle qui le caractérise. On l'exprime sous la forme $H(p) = \frac{X(p)}{Y(p)}$.

**Exemple 17.** *Application à un circuit RC.*

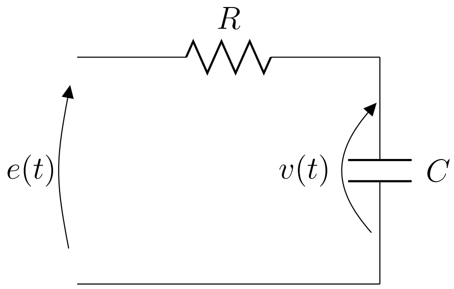


Figure 6.2 – Circuit $RC$

$$
\begin{aligned}
e(t) &= v(t) + RC\frac{\partial\, v(t)}{\partial\, t} \\
E(p) &= V(p) + RC\, p\, V(p) \\
V(p) &= \frac{1}{1+RC}E(p)
\end{aligned}
$$

*On en déduit $H(p)$ puis $h(t)$.*

$$
\begin{aligned}
H(p) &= \frac{1}{1+RC\, p} \\
h(t) &= \frac{1}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned}
$$

**Réponse du système à un échelon** *On pose $e(t) = E$, d'où $E(p) = \frac{E}{p}$.*

$$
\begin{aligned}
V(p) &= H(p) \times E(p) \\
&= \frac{1}{1 + RC\,p} \times \frac{E}{p} \quad = \frac{E}{RC}\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{p + \frac{1}{RC}}\right) \qquad (avec\ a = RC\ \ et\ b = -RC) \\
&= \frac{E}{p} - \frac{E}{p + \frac{1}{RC}}
\end{aligned}
$$

*On peut alors retrouver $v(t)$ avec la transformée de Laplace inverse.*

$$
\begin{aligned}
v(t) &= E\,\Gamma(t) - E\,e^{-\frac{T}{RC}} \\
&= E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\Gamma(t)
\end{aligned}
$$

*On peut de la même manière retrouver la réponse du circuit à tous types de signaux d'entrée.*