# Troisième année — Méthodes mathématiques

Richard Degenne, L3-B

6 octobre 2014

# Table des matières

# Chapitre 1

# Transformée de Laplace

## I Introduction — Définitions

La résolution d'équations différentielles fait intervenir plusieurs opérations appliquées à $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels. Ces opérations sont :

— L'addition ;

— La multiplication ;

— La différentiation.

La transformée de Laplace transforme la différentiation en multiplication, mais modifie l'ensemble $\mathbb{R}$ à l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit la transformation de Laplace, notée $\mathcal{L}$, par

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}$$

où $p$ représente le symbole de Laplace.

$F(p)$ est appelée **image** de $f(t)$. $f(t)$ est appelé **original** de $F(p)$, s'il existe. Il y a trois conditions à l'existence d'un original :

— $f(t)$ doit être causale, c'est-à-dire que $f(t) = 0 \forall t < 0$.

— $f(t)$ doit être définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, sauf en un nombre fini de points de discontinuité de $1^{\text{ère}}$ espèce. [1]

— $f(t)$ doit être à croissance exponentielle, c'est-à-dire que $\exists c, M \mid \forall t > 0, f(t) < M\, e^{ct}$

On rappelle que $t$ est la variable du domaine temporel et $p = \sigma + j\omega$ une variable complexe. Ainsi, si $f(t)$ est majorée par $M\, e^{ct}$ et $\sigma > c$ alors l'exponentielle est négative et l'intégrale converge. On admettra dans la suite de ce cours que ces conditions sont toujours respectées.

1. Une discontinuité est dite de première espèce s'il existe une limite à droite et à gauche.

**Exemple 1.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{1\right\} &= \int_0^{\infty} 1\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{p}\, e^{-pt}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

**Exemple 2.**

$$\mathcal{L}\left\{\cos t\right\} = \int_0^{\infty} \cos t\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

*Ici, le calcul est tout de suite plus compliqué, on peut alors utiliser les propriétés de la transformation de Laplace et des tables de transformées. Ici, on pourrait transformer le cosinus en exponentielle et calculer la transformée de l'exponentielle*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{e^t\right\} &= \int_0^{\infty} e^t\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} e^{-(p-1)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{p-1}
\end{aligned}$$

# II Propriétés

## 1 Linéarité

$$\mathcal{L}\left\{a\, f(t) + b\, g(t)\right\} = a\,\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + b\,\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

## 2 Similitude

$$\begin{aligned}
F(kp) &= \int_0^{\infty} e^{-pkt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} f\left(\frac{\tau}{k}\right)\, e^{-p\tau}\,\mathrm{d}\frac{\tau}{k} \qquad (\tau = kt) \\
&= \frac{1}{k}\,\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{\tau}{k}\right)\right\}
\end{aligned}$$

De même, $\mathcal{L}\left\{f(kt)\right\} = \frac{1}{k}\,F\left(\frac{p}{k}\right)$.

## 3 Translation

### a Du symbole de Laplace $p$

$$
\begin{aligned}
F(p+a) &= \int_0^{\infty} f(t)\,e^{-(p+a)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} e^{-at} f(t)\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}\left\{e^{-at} f(t)\right\}
\end{aligned}
$$

De même, $\mathcal{L}\left\{e^{-at} f(t)\right\} = F(p+a)$.

### b De la variable temporelle $t$

On apelle *retard* toute valeur $\tau > 0$ telle que $f(t-\tau) = 0 \forall t < \tau$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f(t-\tau)\right\} &= \int_0^{\infty} f(t-\tau)\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
\mathcal{L}\left\{f(u)\right\} &= \int_0^{\infty} f(u)\,e^{-p(u+\tau)}\,\mathrm{d}u \qquad (u = t - \tau) \\
&= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(u)\,e^{-pu}\,\mathrm{d}u \\
&= e^{-p\tau} F(p)
\end{aligned}
$$

**Exemple 3** (Les fonctions périodiques)**.** *Soit $f(t)$ une fonction de période $T$. On va ici décomposer la fonction sur chaque période. On définit $f_0(t) = f(t) \forall t \in [0;T]; 0 \forall t \geq T$.*

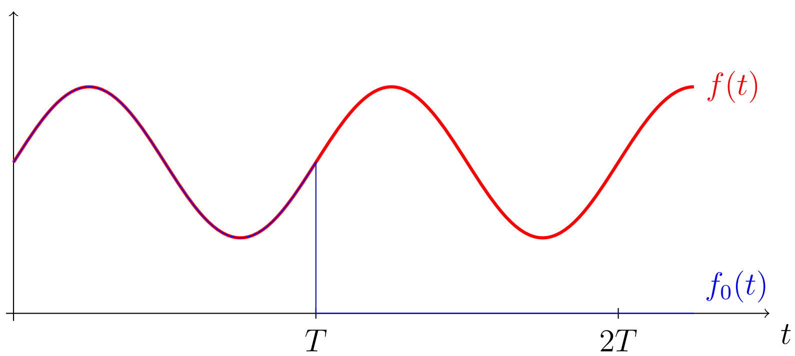


Figure 1.1 – Décomposition d'une fonction périodique

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} &= \mathcal{L}\left\{f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2T) + \cdots\right\} \\
&= \mathcal{L}\left\{f_0(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{f_0(t-T)\right\} + \mathcal{L}\left\{f_0(t-2T)\right\} + \cdots \\
&= F_0(p) + e^{-pT}F_0(p) + e^{-2pT}F_0(p) + \cdots \\
&= (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \cdots)F_0(p) \\
&= \frac{1}{1-e^{-pT}}F_0(p)
\end{aligned}
$$

*Pour les fonctions périodiques usuelles, il faut plutôt utiliser une table de transformée plutôt que cette méthode.*

# 4 Dérivation

## a De l'original

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} &= \int_0^\infty \dot{f}(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[f(t)\, e^{-pt}\right]_0^\infty - \int_0^\infty f(t) \times (-p)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= pF(p) - f(0^+)
\end{aligned}
$$

On a donc bien transformé la différentiation du domaine temporel en multiplication dans le domaine symbolique. De manière générale, on écrit

$$
\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n F(p) - p^{n-1}f(0^+) - p^{n-2}\dot{f}(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)
$$

## b De l'image

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial p} &= \frac{\partial}{\partial p}\left(\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \int_0^\infty f(t)\frac{\partial(e^{-pt})}{\partial p}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\infty t\, f(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\
&= -\mathcal{L}\left\{t\, f(t)\right\}
\end{aligned}
$$

De même, $\mathcal{L}\left\{t\, f(t)\right\} = -\frac{\partial F}{\partial p}$.

**Exemple 4.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{t\right\} &= \mathcal{L}\left\{1 \times t\right\} = -\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2}\\
\mathcal{L}\left\{t^2\right\} &= \mathcal{L}\left\{t \times t\right\} = \frac{1}{p^3}\\
\mathcal{L}\left\{t^n\right\} &= \frac{1}{p^{n+1}}
\end{aligned}$$

## 5 Comportement asymptotique

Le but ici est de déterminer le comportement de $f(t)$ à partir de $F(p)$ sans avoir à effectuer la transformation inverse.

— Si $f(t)$ est une fonction, alors $\lim_{p\to\infty} = 0$.
— Si $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\lim_{p\to 0} = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$.

### a Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} f(t) &= \lim_{p\to\infty} pF(p)\\
\lim_{t\to\infty} f(t) &= \lim_{p\to 0^+} pF(p) \qquad \text{(uniquement si } f(t) \text{ converge)}
\end{aligned}$$

## 6 Produit de convolution

Le produit de convolution est une opération notée $*$ définie par

$$f(t) * g(t) = \int_0^\infty f(\tau)\, g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

### a Dans le domaine temporel

Le produit de convolution de deux fonctions temporelles est utilisé en automatique pour définir l'effet d'une fonction de transfert sur un signal d'entrée. Le passage dans le domaine de Laplace simplifie cette opération, puisqu'on a la propriété suivante :

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = F(p)\, G(p)$$

### b Dans le domaine symbolique

À l'inverse, si une fonction temporelle peut s'écrire comme le rpoduit de deux fonctions $f$ et $g$, alors

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\,g(t)\right\} = F(p) * G(p)$$

# III Inversion de la transformée

Pour réaliser la transformée de Laplace inverse se calcule généralement à partir d'une table, mais il faut pour cela que la transformée de Laplace soit une application bijective, c'est-à-dire qu'à une fonction temporel ne corresponde qu'une unique image et qu'à une fonction symbolique ne corresponde qu'un unique original. On l'admettra ici, mais c'est le cas.

Soient $f_1(t)$ et $f_2(t)$ ayant respectivement pour transformée $F_1(p)$ et $F_2(p)$. Si on a

$$\exists p_0 \mid \forall p \geq p_0, F_1(p) = F_2(p)$$

alors on a $f_1 = f_2$, sauf peut-être aux points de discontinuité.

**Exemple 5.** *Nous savons déjà que $\mathcal{L}\left\{\Gamma(t)\right\} = \frac{1}{p}$. On peut dès lors affirmer*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = \begin{cases} 0 & \forall t < 0 \\ \alpha & \textit{arbitraire pour } t = 0 \\ 1 & \forall t > 0 \end{cases}$$

*On note que la transformée inverse ne permet pas de donner les valeurs de la fonction temporelle en ses points de discontinuité. Il faut les fixer arbitrairement.*

La résolution d'une transformée inverse peut se faire à l'intégrale dite de Mellin-Fourier :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\,e^{pt}\,\mathrm{d}p$$

Il s'agit d'une intégrale à variable complexe dont le domaine d'intégration est délimité dans le plan complexe par la droite $\Re(z) = c$ et fermée à gauche de manière à contenir toutes les singularités [2] de $F(p)$.

2. Par *singularité*, on parle ici des pôles, racines du dénominateur de la fraction rationnelle que constitue $F(p)$.

# 1 Théorème des résidus

Soit un point isolé $a$ de la fonction $F(p)$. On peut représenter $F(p)$ autour de $a$, dans un cercle de centre $a$ et de rayon arbitrairement petit, par sa série de Laurent. On appelle résidu de $F(p)$ en $a$ le coefficient $r$ de $(p-a)^{-1}$, noté $r_{-1}(a)$ du développement en série de Laurent de $F(p)$. Il a pour expression

$$r_{-1}(a) = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma F(p)\,\mathrm{d}p$$

où $\Gamma$ est une courbe fermée du plan complexe entourant la singularité $a$ (et uniquement cette singularité) et est parcourue dans le sens direct.

**Théorème** Soit $F(p)$ une fonction uniforme et holomorphe[3] à l'intérieure et sur la frontière $\mathcal{C}$ d'un domaine $\mathcal{D}$, sauf en un nombre fini de points $a, b, \ldots, l$ qui sont les pôles ou des points singuliers. On peut écrire

$$\int_\mathcal{C} F(p)\,\mathrm{d}p = 2\pi j\big(r_{-1}(a) + r_{-1}(b) + \cdots + r_{-1}(l)\big)$$

**Exemple 6.**

$$\int_{cercle} e^{-2p}\,\mathrm{d}p = 0$$

*En effet, la fonction ne présente aucun pôle.*

On cherche, à partir de ce théorème, à calculer les résidus.

**Exemple 7.** *Soit $F(p) = G(p)\frac{1}{(p-a)^n}$. $a$ est un pôle d'ordre $n$ pour $F(p)$. On va donc calculer son résidu $r_{-1}(a)$. Pour alléger la notation, on notera dans les calculs suivants $r_{-1}$.*

$$\begin{aligned}
G(p) &= (p-a)^n\,F(p)\\
F(p) &= r_{-n}(p-a)^{-n} + r_{-(n-1)}(p-a)^{-(n-1)} + \cdots + r_{-1}(p-a)^{-1} + r_0 + r_1(p-a) + \cdots\\
G(p) &= r_{-n} + r_{-(n-1)}(p-a) + \cdots + r_{-1}(p-a)^{n-1} + r_0(p-a)^n + \cdots
\end{aligned}$$

3. Terminologie équivalente de *continue et dérivable* dans le domaine des fonctions complexes.

*On dérive $n-1$ fois et on pose $p=a$.*

$$r_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial\, p^{n-1}}(p-a)^n\, F(p)\right)_{p=a}$$

Appliquons le théorème des résidus à la transformée de Laplace inverse. Pour cela, on reprend l'intégrale de Mellin-Fourier :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)\, e^{pt}\, \mathrm{d}p \\ &= \sum_{\text{résidus}} F(p)\, e^{pt} \end{aligned}$$

**Exemple 8.** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+a}{p^2}\right\}$

*Cette fonction ne présente qu'un seul pôle en $p=0$, d'ordre 2.*

$$\begin{aligned} r_{-1}(0) &= \frac{1}{(2-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\, p}p^2\frac{p+a}{p^2}e^{pt}\right)_{p=0} \\ &= \frac{1}{(2-1)!}\left(e^{pt} + (p+a)t\, e^{pt}\right)_{p=0} \\ &= 1 + at \end{aligned}$$

*Donc, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+a}{p^2}\right\} = 1 + at$.*

## 2 Développement en série de l'image

On peut décomposer la fonction symbolique $F(p)$ en une série de fonction. On écrit

$$F(p) = \sum_{n\geq 0} a_n\, F_n(p)$$

On peut alors retrouver la transformée de Laplace inverse :

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n\, \mathcal{L}^{-1}\left\{F_n(p)\right\}$$

**Exemple 9.** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2-a^2}\right\}$

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{p}{p^2\left(1-\frac{a^2}{p^2}\right)} \\
&= \frac{1}{p}\left(1+\frac{a^2}{p^2}+\frac{a^4}{p^4}+\cdots\right) \\
&= \frac{1}{p}+\frac{a^2}{p^3}+\frac{a^4}{p^5}+\cdots \\
f(t) &= 1+\frac{a^2t^2}{2!}+\frac{a^4t^4}{4!}+\cdots \\
&= \cosh(at)
\end{aligned}$$

On utilise rarement cette méthode pour réaliser une transformation de Laplace inverse, mais on peut aisément retrouver des développements limités.

# Chapitre 2

# Transformée en $\mathcal{Z}$

Dans ce chapitre, on notera $\mathcal{Z}$ l'opération de transformation et $z$ la variable symbolique utilisée.

## I Introduction

La transformation de Laplace permet de traiter le cas des fonctions continues. Cependant, on peut être amené à traiter des varaibles discrètes, comme c'est le cas lorsque l'on se retrouve face à des équations de récurrence, définies par $x_k = f(x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots)$. Résoudre ce genre d'équations revient à trouver l'ensemble $\{x_k\}$ des solutions.

**Exemple 10.**

$$\begin{cases} x_{k+1} = A\,x_k + b_k \\ k \geq 0, x_0 \ \textit{connu} \end{cases}$$

*On commance par résoudre le système homogène, en négligeant le terme constant.*

$$x_1 = A\,x_0$$
$$x_2 = A^2\,x_0$$
$$x_k = A^k\,x_0$$

*On résout ensuite le système non-homogène :*

$$x_1 = A\,x_0 + b_0$$
$$x_2 = A^2\,x_0 + A\,b_0 + b_1$$
$$x_k = A^k\,x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A^i\,b_{k-(1+i)}$$

La transformée en $\mathcal{Z}$ a pour but de ne pas avoir à effectuer le calcul de la série.

# II Définitions

Soit une suite $\left\{x_k\right\}$ définie $\forall k \geq 0$. On définit la série $\mathcal{Z}\left\{x_k\right\}$ par

$$\mathcal{Z}\left\{x_k\right\} = \sum_{k\geq 0} x_k\, z^{-k}$$

avec $z \in \mathbb{C}$.

On suppose que la suite $\left\{x_k\right\}$ est à croissance exponentielle.

**Exemple 11.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{1\right\} = \sum_{k\geq 0} 1 \times z^{-k} &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots \\
&= \frac{1}{1-z^{-1}} \\
&= \frac{z}{z-1}
\end{aligned}$$

**Exemple 12.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{e^{-kT}\right\} &= \mathcal{Z}\left\{e^{-t}\right\} \qquad (t = kT, \textit{on parle d'échantillonnage.}) \\
&= \sum_{k\geq 0} e^{-kT}\, z^{-k} \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(z\, e^{t}\right)^{-k} \\
&= \frac{z\, e^{T}}{z\, e^{T} - 1}
\end{aligned}$$

**Exemple 13.**

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{k\right\} &= \sum_{k\geq 0} k\, z^{-k} \\
&= 0 + z^{-1} + 2z^{-2} + \cdots
\end{aligned}$$

*On ne connaît aucun développement limité de cette forme-ci. On utilise donc les propriétés et des tables de la transformée en $\mathcal{Z}$ pour les fonctions plus compliquées.*

# III Propriétés

## 1 Linéarité

$$\mathcal{Z}\left\{a\,x_k + b\,y_k\right\} = a\,X(z) + b\,Y(z)$$

## 2 Retard

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{x_{k-1}\right\} &= \sum_{k\geq 0} x_{k-1}\,z^{-k} \\
&= \sum_{k\geq 0} x_{k-1}\,z^{-(k-1)} \times z^{-1} \\
&= z^{-1} \sum_{k\geq 0} x^k\,z^{-k} \\
&= z^{-1}\,X(z)
\end{aligned}$$

$z^{-1}$ est appelé opérateur de retard de la transformée en $\mathcal{Z}$. D'une manière générale, on peut écrire

$$\mathcal{Z}\left\{x_{k-r}\right\} = z^{-r}\,X(z)$$

## 3 Avance

Bien que la notion d'avance n'aie aucune réalité physique [1], elle peut être particulièrement utile d'un point de vue purement mathématique.

1. Aucun évènement physique ne se produit avant sa cause. Par exemple, une pièce ne chauffera pas avant d'avoir allumé le chauffage.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{x_{k+1}\right\} &= \sum_{k\geq 0} x_{k+1}\, z^{-k} \\
&= \sum_{k\geq 0} x_{k+1}\, z^{-(k+1)} \times z \\
&= z \sum k \geq 1 x^k\, z^{-k} \\
&= z \left( \sum_{k\geq 0} x^k\, z^{-k} - x_0 \right) \\
&= z\, X(z) - z\, x_0
\end{aligned}
$$

Encore une fois, on peut généraliser cette formule à toute avance $r$.

$$
\mathcal{Z}\left\{x_{k+r}\right\} = z^r\, X(z) - z^r\, x_0 - z^{r-1}\, x_1 - \cdots - z\, x_{r-1}
$$

# 4 Comportement asymptotique

## a Théorème de la valeur initiale

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{k\geq 0} x\, z^{-k} \\
&= x_0 + x_1\, z^{-1} + x_2\, z^{-2} + \cdots
\end{aligned}
$$

En posant $z = \infty$, tous les termes sauf le premier s'annulent. On en déduit

$$
\lim_{z\to\infty} X(z) = x_0
$$

## b Théorème de la valeur finale

On va poser ici $e_k = x_k - x_{k-1}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{e_k\right\} &= \mathcal{Z}\left\{x_k - x_{k-1}\right\} \\
&= X(z) - z^{-1}\,X(z) \\
&= (1 - z^{-1})X(z) \\
\mathcal{Z}\left\{e_k\right\} &= \sum_{k\geq 0} e_k\, z^{-k} \\
&= \sum_{k\geq 0}(x_k - x_{k-1})z^{-k} \qquad \text{(La somme se téléscope.)}
\end{aligned}
$$

D'où le théorème

$$
\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)
$$

## 5 Intégration discrète

On peut utiliser la transformée en $\mathcal{Z}$ pour traiter des séries. Soit $\left\{S_k\right\}$ définie par

$$
S_k = \sum_{j=0}^{k} x_j
$$

On va chercher ici à exprimer $\mathcal{Z}\left\{S_k\right\}$ en fonction de $\mathcal{Z}\left\{x_k\right\}$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{S_k\right\} &= \mathcal{Z}\left\{\underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} x_j}_{S_{k-1}} + x_k\right\} \\
&= z^{-1}\,S(z) + X(z) \\
(1 - z^{-1})S(z) &= X(z) \\
S(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}}X(z) \\
&= \frac{z}{z-1}X(z)
\end{aligned}
$$

Inversement, on a $X(z) = S(z) - z^{-1}\,S(z)$.

**Exemple 14.** *On pose $x_k = 1$ et $S_k = k$. On veut trouver $S(z)$. On établit la série liant $x_k$ à $S_k$.*

$$
S_k = \sum_{i=0}^{k}(x_k) - 1
$$

*En effet, en $k=0$, $x_k = 1$ et $S_k = 0$. On reprend la transformée en $\mathcal{Z}$ de 1 vue au début du chapitre et on applique la formule sur l'intégration discrète.*

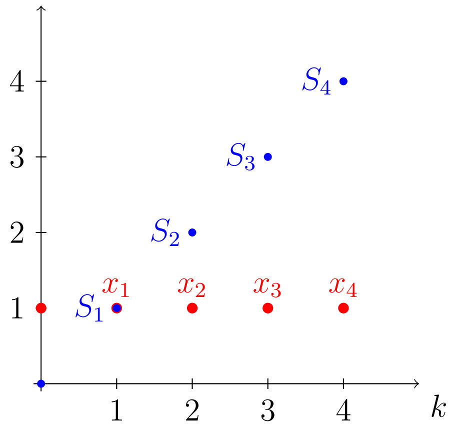


FIGURE 2.1 – Premiers termes de $x_k$ et $S_k$

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{z}{z-1} \times \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

*On peut utiliser cette méthode pour retrouver la transformée de certaines suites usuelles. Posons $T_k = \sum_{j=0}^{k} S_j = \frac{k(k+1)}{2}$. D'après la formule sur l'intégration discrète, on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left\{T_k\right\} &= \frac{z}{z-1} \times \frac{z}{(z-1)^2} \\ &= \frac{z^2}{(z-1)^3} \\ \frac{z^2}{(z-1)^3} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{k^2\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{k\right\} \\ &= \frac{z}{2(z-1)^2} + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left\{k^2\right\} \\ \mathcal{Z}\left\{k^2\right\} &= \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} \end{aligned}$$

## 6 Convolution discrète

On pose $z_k = \sum_{k \geq 0} x_i \, y_{k-i}$.

$$\mathcal{Z}\left\{z_k\right\} = X(z)\,Y(z)$$

# IV Inversion de la transformée

De manière théorique, on appelle transformée inverse en $\mathcal{Z}$ l'opération notée $\mathcal{Z}^{-1}$ définie par

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{X(z)\right\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}} z^{k-1}\,X(z)\,\mathrm{d}z$$

où $\mathcal{C}$ est un cercle du plan complexe centré sur l'origine et contenant toutes les singularités de X(z). Pour résoudre cette intégrale, on utilise le théorème des résidus appliqué à $z^{k-1}\,X(z)$.

**Exemple 15.** $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\right\}$

*La fonction ne présente qu'un pôle d'ordre* $1$ *en* $z=1$*. On va donc calculer le résidu en* $z=1$*.*

$$\begin{aligned} r_{-1}(1) &= \frac{1}{0!}\left(\frac{\partial^0}{\partial z^0} z^{k-1}\,(z-1)^{k-1}\frac{z}{z-1}\right)_{z=1} \\ &= \left[z^k\right]_{z=1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

# Chapitre 3

# Fonctions de matrices

Ce document n'abordera pas la théorie régissant les fonctions de matrices, mais se contentera de décrire la méthode d'application.

L'évaluation d'une fonction de matrice de fait grâce à la formule suivante.

$$f(A) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{\nu_i - 1} \left[ \frac{\partial^j f(\lambda)}{\partial \lambda^j} \right]_{\lambda=\lambda_i} Z_{ij}$$

où

$f$ : La fonction à évaluer

$A$ : Une matrice carrée de dimension $n$

$r$ : Le nombre de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ de $A$

$\nu_i$ : La multiplicité de $\lambda_i$

$Z_{ij}$ : Les matrices constituantes (ou composantes) associées à $A$

**Exemple 16.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. *Calculer* $A^k$.

**Calcul des valeurs propres de $A$.** *On appelle valeurs propres de $A$ les racines du polynôme* $\det(\lambda I - A)$*, où $I$ est la matrice identité.*

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\
\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -3 \\ 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \\
\det(\lambda I - A) &= (\lambda - 1)(\lambda - 2)
\end{aligned}
$$

*On a donc deux valeurs propres, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$, chacune avec un multiplicité de 1.*

**Écriture de $f(A)$.** *Maintenant que l'on connaît les valeurs propres et leurs multiplictés, on peut développer les deux sommes de la formule.*

$$
\begin{aligned}
f(A) &= \left[f(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_1} Z_{10} + \left[f(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_2} Z_{20} \\
&= f(\lambda_1) Z_1 + f(\lambda_2) Z_2
\end{aligned}
$$

**Calcul de $Z_1$ et $Z_2$.** *Dans la mesure où l'égalité établie ci-dessus est vraie pour tout fonction $f$, on va prendre des fonctions judicieuses pour construire un système d'équations permettant de déterminer $Z_1$ et $Z_2$.*

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) = \lambda - 1 &\implies A - I = Z_2 \\
f(\lambda) = \lambda - 2 &\implies 2I - A = Z_1
\end{aligned}
$$

**Application numérique.** *On a donc $f(A) = f(1)(2I - A) + f(2)(A - I)$. Si on pose $f(\lambda) = \lambda^k$, alors on a*

$$
A^k = \begin{pmatrix} 3 \times 2^k - 2 & 3(2^k - 1) \\ -2(2^k - 1) & -2^{k+1} + 3 \end{pmatrix}
$$