GBI Tutorium NR: 31

Richrd Feistenauer

10.November 2011

Inhaltsverzeichnis

1. Formale Sprachen
   - Mengen
   - Definition
2. Konkatenation
   - Konkatenation formaler Sprachen
3. Konkatenationsabschluss
   - Der Konkatenationsabschluss
4. Beweisführung
   - Beweise

Mengenoperationen

Definition

- $M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$:Vereinigung
- $M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$:Schnitt
- $M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$:Differenz

Beispiele, Aufgaben

Beispiele

- $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

Beispiele, Aufgaben

Beispiele

- $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
  Kein Element kann in einer Menge "doppelt" vorkommen
- $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

Beispiele, Aufgaben

Beispiele

- $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\}$
  Kein Element kann in einer Menge "doppelt" vorkommen
- $\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4\} = \{1\}$

Aufgaben

- $M \cup \{\} = ?$
- $M \cap \{\} = ?$
- $\{1,2,3\} \cap \{5,6,7\} = ?$

formale Definition

Formale Sprachen

Eine formale Sprache L (Über einem Alphabet A) ist eine Teilmenge : $L \subseteq A^*$

Das heisst: Eine Sprache über einem Alphabet ist eine Teilmenge der Menge aller möglicher Wörter aus Zeichen des Alphabetes

Wichtig!

- *abb* ist ein Wort

formale Definition

Formale Sprachen

Eine formale Sprache L (Über einem Alphabet A) ist eine Teilmenge : $L \subseteq A*$

Das heisst: Eine Sprache über einem Alphabet ist eine Teilmenge der Menge aller möglicher Wörter aus Zeichen des Alphabetes

Wichtig!

- *abb* ist ein Wort
- $\{abb\}$ ist eine formale Sprache die nur aus dem Wort *abb* besteht

formale Definition

Formale Sprachen

Eine formale Sprache L (Über einem Alphabet A) ist eine Teilmenge : $L \subseteq A^*$

Das heisst: Eine Sprache über einem Alphabet ist eine Teilmenge der Menge aller möglicher Wörter aus Zeichen des Alphabetes

Wichtig!

- abb ist ein Wort
- $\{abb\}$ ist eine formale Sprache die nur aus dem Wort abb besteht
- daraus folgt: $\{abb\}^*$ gibt es, abb^* (noch) nicht

Beispiele

Example

Sprache aller gültigen Java-Schlüsselwörter

- Alphabet: $A = \{a, b, c \ldots, z\}$

Example

Beispiele

Example

Sprache aller gültigen Java-Schlüsselwörter

- Alphabet: $A = \{a, b, c \ldots, z\}$
- Sprache: $L = \{class, if, else, int, public, \ldots\}$

Example

Beispiele

Example

Sprache aller gültigen Java-Schlüsselwörter

- Alphabet: $A = \{a, b, c \ldots, z\}$
- Sprache: $L = \{class, if, else, int, public, \ldots\}$

Example

- Alphabet: $A = \{a, b\}$

Beispiele

Example

Sprache aller gültigen Java-Schlüsselwörter

- Alphabet: $A = \{a, b, c \ldots, z\}$
- Sprache: $L = \{class, if, else, int, public, \ldots\}$

Example

- Alphabet: $A = \{a, b\}$
- Sei L die Sprache über A in denen das Teilwort "ab" nirgends vorkommt

Beispiele

Example

Sprache aller gültigen Java-Schlüsselwörter

- Alphabet: $A = \{a, b, c \ldots, z\}$
- Sprache: $L = \{class, if, else, int, public, \ldots\}$

Example

- Alphabet: $A = \{a, b\}$
- Sei L die Sprache über A in denen das Teilwort "*ab*" nirgends vorkommt
- $L = \{a, b\}^* \backslash \{w_1 ab w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$

Beispiele

Example

Sprache aller gültigen Java-Schlüsselwörter

- Alphabet: $A = \{a, b, c \ldots, z\}$
- Sprache: $L = \{class, if, else, int, public, \ldots\}$

Example

- Alphabet: $A = \{a, b\}$
- Sei L die Sprache über A in denen das Teilwort "ab" nirgends vorkommt
- $L = \{a, b\}^* \setminus \{w_1 ab w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$
- Vereinfacht:

Beispiele

Example

Sprache aller gültigen Java-Schlüsselwörter

- Alphabet: $A = \{a, b, c \ldots, z\}$
- Sprache: $L = \{class, if, else, int, public, \ldots\}$

Example

- Alphabet: $A = \{a, b\}$
- Sei L die Sprache über A in denen das Teilwort "ab" nirgends vorkommt
- $L = \{a, b\}^* \backslash \{w_1 ab w_2 | w_1, w_2 \in \{a, b\}^*\}$
- Vereinfacht:
- $L = \{w_1 w_2 | w_1 \in \{b\}^*, w_2 \in \{a\}^*\}$

Produkt von Sprachen

Definition

$L_1 \cdot L_2 = \{w_1 w_2 | w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$

Example

Von gerade eben: formale Sprache aller Wörter über $A = \{a, b\}$ in denen das Teilwort *äb*" nirgends vorkommt:
Kann man jetzt auch so schreiben: $L = \{b\}^*\{a\}^*$

Beispiele

Example

- Sei $L_1 = \{KARTOFFEL, NUDEL\}$

Example

Beispiele

Example

- Sei $L_1 = \{KARTOFFEL, NUDEL\}$
- Sei $L_2 = \{SALAT, AUFLAUF\}$

Example

Beispiele

Example

- Sei $L_1 = \{KARTOFFEL, NUDEL\}$
- Sei $L_2 = \{SALAT, AUFLAUF\}$
- Was ist $L_1 \cdot L_2$?

Example

Beispiele

Example

- Sei $L_1 = \{KARTOFFEL, NUDEL\}$
- Sei $L_2 = \{SALAT, AUFLAUF\}$
- Was ist $L_1 \cdot L_2$? {KARTOFFELSALAT, NUDELSALAT, KARTOFFELAUFLAUF, NUDELAUFLAUF}

Example

Beispiele

Example

- Sei $L_1 = \{KARTOFFEL, NUDEL\}$
- Sei $L_2 = \{SALAT, AUFLAUF\}$
- Was ist $L_1 \cdot L_2$? {KARTOFFELSALAT, NUDELSALAT, KARTOFFELAUFLAUF, NUDELAUFLAUF}

Example

Formale Sprache aller legalen Ganzzahlen:

Beispiele

Example

- Sei $L_1 = \{KARTOFFEL, NUDEL\}$
- Sei $L_2 = \{SALAT, AUFLAUF\}$
- Was ist $L_1 \cdot L_2$? {KARTOFFELSALAT, NUDELSALAT, KARTOFFELAUFLAUF, NUDELAUFLAUF}

Example

Formale Sprache aller legalen Ganzzahlen:

- Alphabet: $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$
- $L_G = A \cdot A^*$
- Was fehlt?

Beispiele

Example

- Sei $L_1 = \{KARTOFFEL, NUDEL\}$
- Sei $L_2 = \{SALAT, AUFLAUF\}$
- Was ist $L_1 \cdot L_2$? {KARTOFFELSALAT, NUDELSALAT, KARTOFFELAUFLAUF, NUDELAUFLAUF}

Example

Formale Sprache aller legalen Ganzzahlen:

- Alphabet: $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$
- $L_G = A \cdot A^*$
- Was fehlt?
- die negativen Zahlen!

Beispiele

Example

- Sei $L_1 = \{KARTOFFEL, NUDEL\}$
- Sei $L_2 = \{SALAT, AUFLAUF\}$
- Was ist $L_1 \cdot L_2$? {KARTOFFELSALAT, NUDELSALAT, KARTOFFELAUFLAUF, NUDELAUFLAUF}

Example

Formale Sprache aller legalen Ganzzahlen:

- Alphabet: $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$
- $L_G = A \cdot A^*$
- Was fehlt?
- die negativen Zahlen!
- besser: $L_G = \{\epsilon, -\} \cdot A \cdot A^*$

Ein letztes Beispiel

- Sei $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$

Ein letztes Beispiel

- Sei $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$
- Sei $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$

Ein letztes Beispiel

- Sei $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$
- Sei $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_1 \cdot L_2 = ?$

Ein letztes Beispiel

- Sei $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}_0\}$
- Sei $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}_0\}$
- $L_1 \cdot L_2 =?$
- $L_1 L_2 = \{a^k b^m \mid k \in \mathbb{N}_0 \wedge m \in \mathbb{N}_0\} = \{a\}^* \{b\}^*$

Potenzen von Sprachen

Definition

- $L^0 = \{\epsilon\}$
- $L^{i+1} = L^i \cdot L$

Example

Sei $L = \{a\}^*\{b\}^*$

- $L^0 = \{\epsilon\}$

Potenzen von Sprachen

Definition

- $L^0 = \{\epsilon\}$
- $L^{i+1} = L^i \cdot L$

Example

Sei $L = \{a\}^*\{b\}^*$

- $L^0 = \{\epsilon\}$
- $L^1 = \{\epsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa \ldots\}$

Potenzen von Sprachen

Definition

- $L^0 = \{\epsilon\}$
- $L^{i+1} = L^i \cdot L$

Example

Sei $L = \{a\}^*\{b\}^*$

- $L^0 = \{\epsilon\}$
- $L^1 = \{\epsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa \ldots\}$
- $L^2 = \{\epsilon, aabbbaaaaabb, aaabbab, aaaaa, bbbbbb \ldots\}$

Potenzen von Sprachen

Definition

- $L^0 = \{\epsilon\}$
- $L^{i+1} = L^i \cdot L$

Example

Sei $L = \{a\}^*\{b\}^*$

- $L^0 = \{\epsilon\}$
- $L^1 = \{\epsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa \dots\}$
- $L^2 = \{\epsilon, aabbbaaaaabb, aaabbab, aaaaa, bbbbbb \dots\}$
- usw.

Der Konkatenationsabschluss

Definition

- $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$

Example

Der Konkatenationsabschluss

Definition

- $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$
- $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$

Example

Der Konkatenationsabschluss

Definition

- $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$
- $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$

Example

- $L = \{a\}^*\{b\}^*$

Der Konkatenationsabschluss

Definition

- $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$
- $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$

Example

- $L = \{a\}^*\{b\}^*$
- L^* ?

Der Konkatenationsabschluss

Definition

- $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$
- $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$

Example

- $L = \{a\}^*\{b\}^*$
- $L^* \; ? \;\; = \{a, b\}^*$

Der Konkatenationsabschluss

Definition

- $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$
- $L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$

Example

- $L = \{a\}^*\{b\}^*$
- $L^* \ ? \ = \{a, b\}^*$
- "Beweis": Zerhacke beliebiges aber festes $w \in \{a, b\}^*$ an allen Stellen an denen auf ein b ein a folgt. Die entstehenden Teilworte sind aus L

Übung

Beweise

Beweise: $L^* \cdot L = L^+$

Hinweis

Seien A und B zwei Mengen

$A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A \Rightarrow A = B$

Beweis

$L^* \cdot L \subseteq L^+$

Wenn $w \in L^* \cdot L$, dann $w = w_1 w_2$ mit $w_1 \in L^*$ und $w_2 \in L$
Also existiert ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $w_1 \in L^i$
Also $w = w_1 w_2 \in L^i \cdot L = L^{i+1}$
Da $i + 1 \in \mathbb{N}_+$, ist $L^{i+1} \subseteq L^+$, also $w \in L^+$

$L^* \cdot L \supseteq L^+$

Wenn $w \in L^+$, dann existiert ein $i \in \mathbb{N}_+$ mit $w \in L^i$
Da $i \in \mathbb{N}_+$ ist $i = j + 1$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$
Also ist für ein $j \in \mathbb{N}_0$: $w \in L^{j+1} = L^j \cdot L$
Also $w = w_1 w_2$ mit $w_1 \in L^j$ und $w_2 \in L$
Wegen $L^j \subseteq L^*$ ist $w = w_1 w_2 \in L^* \cdot L$

Zusammenfassung

2 Sprachen

- $L_1 = \{a^k b^m | k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge \ k \bmod 2 = 0 \wedge \ m \bmod 3 = 1\}$
- $L_2 = \{a^k b^m | k, m \in \mathbb{N}_0 \wedge \ k \bmod 2 = 1 \wedge \ m \bmod 3 = 0\}$

Aufgabe

Was ist?

- $L = L_1 \cdot L_2$
- $L = L_1 \cap L_2$

Ende

Fragen?!

Unnützes Wissen

Folgendes Gesetz gilt in Texas: Wenn sich zwei Züge an einem Bahnübergang begegnen, müssen beide Züge halten. Jeder der beiden Züge muss so lange stehen bleiben, bis der jeweils andere vorbeigefahren ist.