数图作业 8：二值化分割

自 64　赵文亮　2016011452

2018 年 12 月 19 日

1　引言

图 1 是一张灰度图片，本文将对其进行二值化分割，把其中黑色的圆和椭圆[1]分割出来。

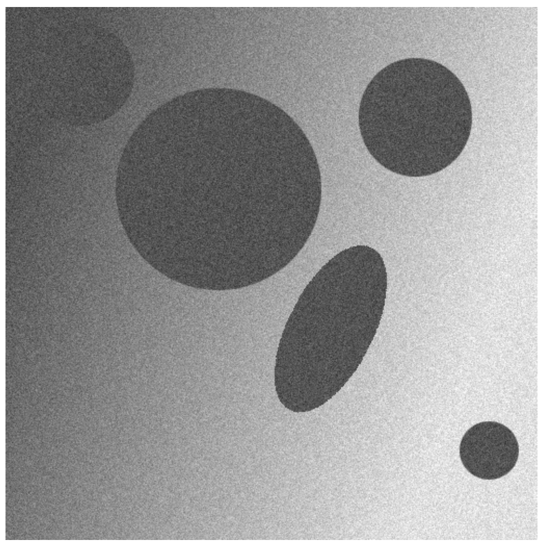


图 1: 原始图像

本文采用的算法流程简述如下。首先对原始图像进行去噪和照明处理，从而更加便于分割；其次使用 Otsu 方法实现图像的二值化分割；最后基于图像特征和先验知识对结果进行优化。

2　图像预处理

从图 1 中可以看出，输入图像中存在噪声，并且照明不均衡，这两个因素给图像的二值化分割带来了极大的不便。本节对输入图像进行去噪，再使用估计的照明函数进行照明调整。

2.1　噪声去除

在数图作业 4 中，我曾经使用 Non-local means 算法实现了去噪 [1]，实验效果非常好。所以本次实验中我仍然采用这个方法。关于 Non-local means 算法的原理我在数图作业 4 中的报告中做过详细介绍[2]，故本文不再赘述。经过去噪处理后的图像如图 2 所示。从中可见，噪声被完美去除，同时图片中的形状非常清晰。

[1] 由于圆可以看成是椭圆的一种特例（长轴等于短轴时即为圆），后文中使用椭圆来作为统称

[2] https://github.com/thu-jw/Image-denoise-and-edge-detection

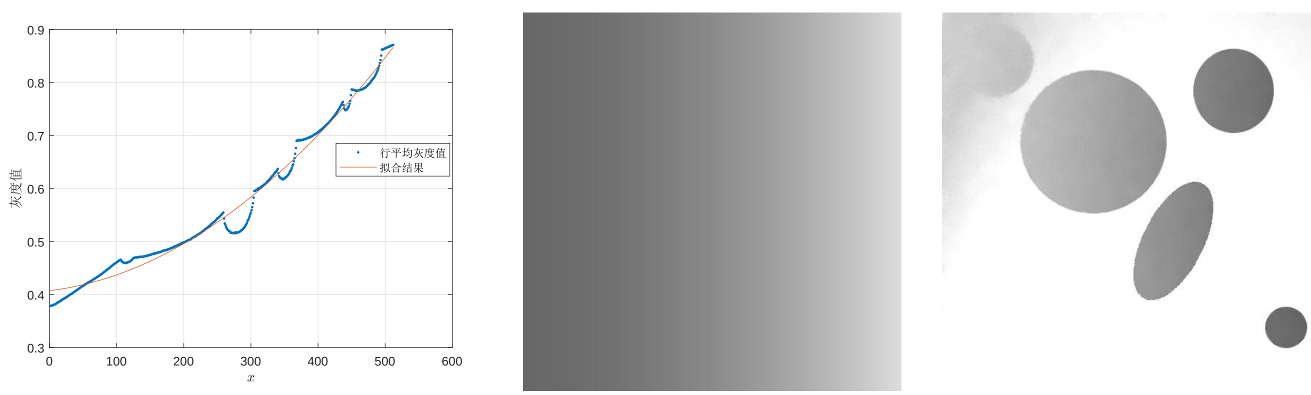
图 2: 去噪后图像

2.2 照明调整

图片中可以明显看到存在不均匀的光照。直观来看，图像左侧的照明较暗，而右侧较亮。如果直接使用全局的二值化分割方法，将得不到很好的结果。为了解决这个问题，本节将大致估计出光照，并对去噪后的图像进行照明调整。根据图像的反射模型，设光强度函数为 $f(x,y)$（灰度值），入射光为 $i(x,y)$，反射系数为 $r(x,y)$，则有

$$f(x,y) = i(x,y)r(x,y) \tag{1}$$

在图 1 中，可以认为黑色的待分割形状的反射系数为 0，而背景的反射系数为 1。从图中可以大致看出，入射光从左到右由暗变亮，故可以假设入射光强度的变化方向为水平。设经过去噪后的图像为 I，对 I 的 y 方向取平均，可以得到图像灰度值随 x 方向的变化情况，如图 3a 中蓝色数据点所示。可以看到蓝色数据点的趋势存在几处凹陷，这正对应这图中黑色的椭圆。对这些数据使用二次曲线拟合，得到图 3a 中红线所示的拟合结果。使用这一结果即可估计入射光 $i(x,y)$，如图 3b 。再利用公式 (1) ，有 $r(x,y) = f(x,y)/i(x,y)$，即可得到图 3c 。从中可见，经过照明调整后，除了图像左上角的小部分区域，其他部分黑白分明，极大地简化了下一步的二值化的分割操作。



(a) 行平均灰度值和拟合结果　(b) 入射光估计结果　(c) 照明调整结果

图 3: 照明调整

3 二值化分割

本文使用 Ostu[2] 方法对经过照明调整后的图像进行二值化分割。首先简述 Ostu 方法的原理。设 $\{0,1,...,L-1\}$ 表示一张 $M\times N$ 的图像的 L 个灰度级，对图像求取归一化后的直方图，其每一分量记作 p_i。则有

$$\sum_{i=0}^{L-1} p_i = 1, \quad p_i \geq 0 \tag{2}$$

设二值化分割的阈值为 k，图像阈值化后得到 C_1 和 C_2，令 P_1 和 P_2 分别表示像素落在 C_1 和 C_2 的概率。即

$$\begin{cases} P_1(k) = \sum_{i=0}^{k} p_i \\ P_2(k) = \sum_{i=k+1}^{L} p_i = 1 - P_1(k) \end{cases} \tag{3}$$

C_1 和 C_2 中的平均灰度为

$$\begin{cases} m_1(k) = \dfrac{1}{P_1 k} \sum_{i=0}^{k} i p_i \\ m_2(k) = \dfrac{1}{P_2 k} \sum_{i=k+1}^{L-1} i p_i \end{cases} \tag{4}$$

整张图像的平均灰度为：

$$m_G = \sum_{i=0}^{L-1} i p_i \tag{5}$$

定义类间方差

$$\sigma_B^2 = \frac{(m_G P_1 - m)^2}{P_1(1-P_1)} \tag{6}$$

其中 m 表示平均灰度的累加值：

$$m(k) = \sum_{i=0}^{k} i p_i \tag{7}$$

我们的目的是找到一个 k，使得 σ_B^2 最大，即

$$k^* = \underset{1\leq k\leq L-1}{\operatorname{argmax}}\, \sigma_B^2(k) \tag{8}$$

经过 Ostu 方法处理后的结果如图 4 所示（此处将椭圆区域置为白色）。可以看到，除了左上角的椭圆外，其他的椭圆分割效果都非常好。

4 结果优化

本节将对椭圆分割的结果进行优化。图 4 中左上角的椭圆分割的效果并不好，这一点也是很正常的。事实上，从原始图像中可以看到，由于光照的影响，左上角的椭圆的与背景颜色十分接近，人眼也很难辨认。所以要想将其提取出来，必须结合一些先验知识，即已知这个图形是椭圆。本节中首先对左上角区域进行处理，去除掉其中离散的点；再对二值化分割结果进行连通域检测，将每个椭圆提取出来；最后基于椭圆的性质对每个椭圆进行重构。

4.1 孤立区域去除

图像左上角的区域情况比较复杂，二值化提取时形成了许多散点。使用一个 3×3 的结构元对图 4 进行腐蚀，得到图 5 的结果，可见左上角大量的散点已经被去除。

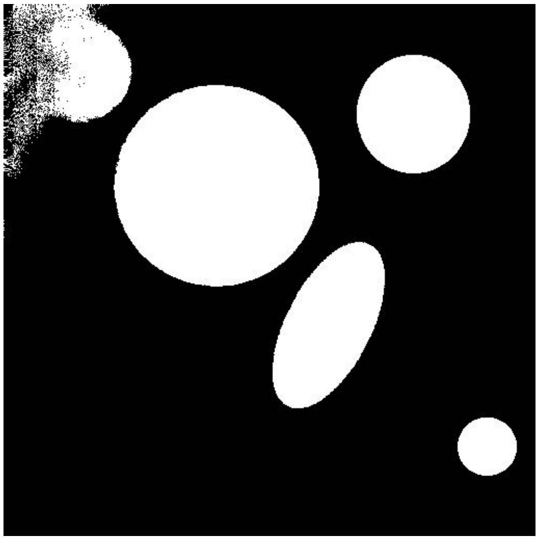


图 4: Ostu 二值化分割结果

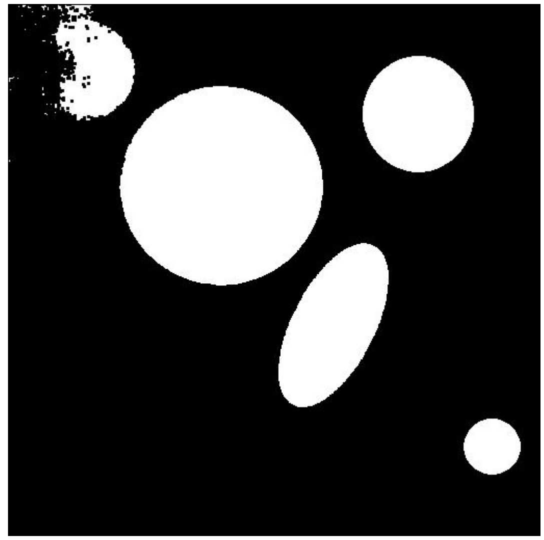


图 5: 孤立区域去除

4.2 椭圆区域提取

在图 5 中进行连通域检测，即可检测出所有的椭圆区域。考虑到其中仍然可能有许多孤立的小区域，每检测到一个连通域后，对其中的像素点计数，只有某联通域中像素点总数大于某个阈值 N 才认为这个区域时椭圆区域。本次实验中取 $N = 100$。同时为了填补区域中的空洞，对每个椭圆区域使用半径为 3 的圆形结构元进行一次闭运算。左上角的椭圆区域提取结果如图 6 所示，可见经过本节的操作后，这个区域的边界变得更加清晰，从而便于下一步的椭圆重构。

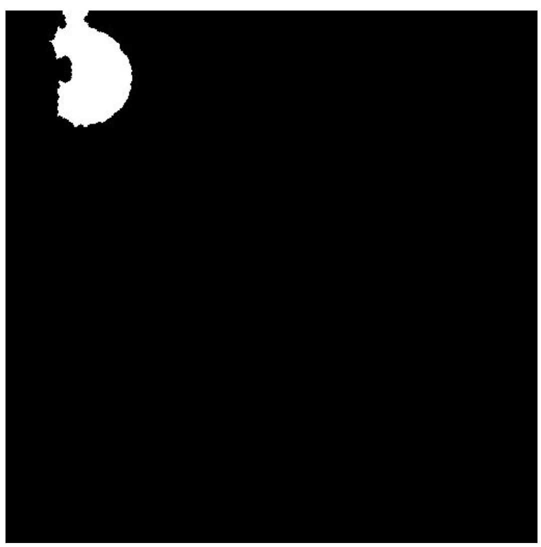


图 6: 左上角椭圆区域提取

4.3 椭圆重构

从之前的过程中我们可以看出，除了左上角的椭圆区域外，其他的区域都已经比较成功地分割，而左上角的椭圆区域在原图中也不明显。所以要想真正实现分割，必须要利用先验知识。本步骤利用了问题中的条件：

图片中的区域均为圆形或椭圆形。从图 6 中可见，左上角的椭圆区域的靠右的一部分有明显的圆弧特征，这就启发我们通过这个特征将其重构。本节将重点描述左上角椭圆区域的重构过程。

平面内二次曲线的一般表达式为：

$$F(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{9}$$

对于椭圆或圆，必有

$$\Delta=B^2-4AC<0 \tag{10}$$

上式隐含了条件 $AC\neq 0$。则不妨设 $C=1$，原方程可以写成

$$Ax^2+Bxy+Dx+Ey+F=-y^2 \tag{11}$$

假设我们已经知道平面内的 n 个点，$(x_1,y_1),\ldots(x_n,y_n)$，则可以使用多元线性回归的方法求出最佳拟合二次曲线。具体来说，令

$$X=\begin{bmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1\\ x_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1\\ x_n^2 & x_ny_n & x_n & y_n & 1 \end{bmatrix}\qquad Y=\begin{bmatrix} -y_1^2\\ -y_2^2\\ \vdots\\ -y_n^2 \end{bmatrix}\qquad \xi=\begin{bmatrix} A\\ B\\ D\\ E\\ F \end{bmatrix} \tag{12}$$

则有关于 ξ 的超定方程：

$$X\xi=Y \tag{13}$$

在最小二乘意义下可以求得 $\xi=X^{+}Y$，其中 X^{+} 为 X 的广义逆。所以目前关键的问题是如何选取数据点。首先对图 6 进行一次腐蚀，再用原图减去腐蚀后的图像得到边界，如图 7 。

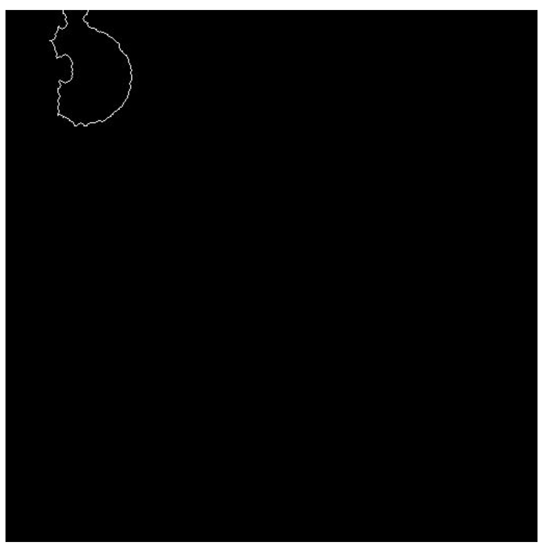


图 7: 左上角椭圆区域边界提取

下面从边界上每次等间隔选取 n 个点（本文中取 $n=6$），并求出最小二乘解 $\xi=[A,B,D\ E\ F]^{\mathrm{T}}$。如果该解对应着椭圆 $\Delta<0$，则称该解有效，并将该解记录下来。若下一次得到的有效的解为 $\hat{\xi}$，则使用下式计算这两个解的距离：

$$d=\sqrt{(\hat{A}-A)^2+\left(\hat{B}-B\right)^2+\left(\frac{\hat{D}-D}{M}\right)^2+\left(\frac{\hat{E}-E}{N}\right)^2+\left(\frac{\hat{F}-F}{MN}\right)^2} \tag{14}$$

其中 M, N 分别为图像的行数和列数，有的项除以 M 或 N 的目的是归一化，让各个系数的影响近似相等。如果 d 足够小，则可以认为 ξ 和 $\hat{\xi}$ 比较接近。本文中以 $d < 1$ 为标准来衡量。若下一次计算的得到的距离为 $\hat{d}$，且 $|d - \hat{d}| < 0.5$，则终止循环，并将 $\hat{\xi}$ 作为最终的解。图 8 展示了上述算法得到的关键点列，并用黄色标出。图 9 显示了该区域重构后得到的椭圆区域。

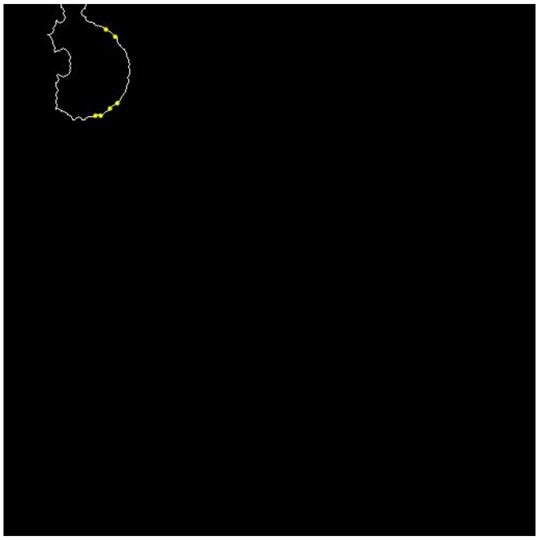


图 8: 左上角椭圆区域关键点提取

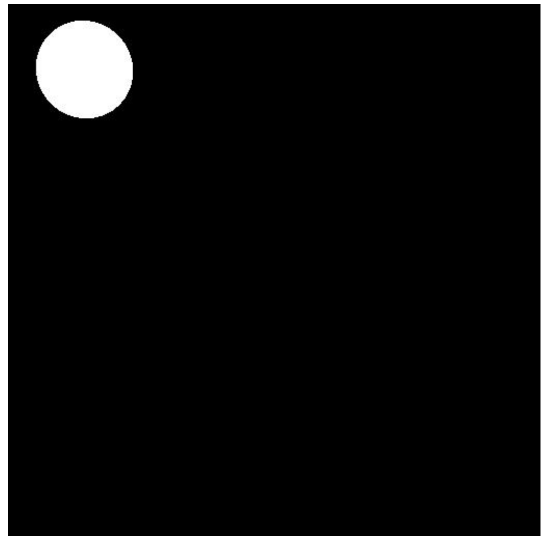


图 9: 左上角椭圆区域重构结果

而对于图中其他的椭圆区域，则可以直接通过简单的等间隔[3]选点来重构。最终的重构结果如图 10 所示。

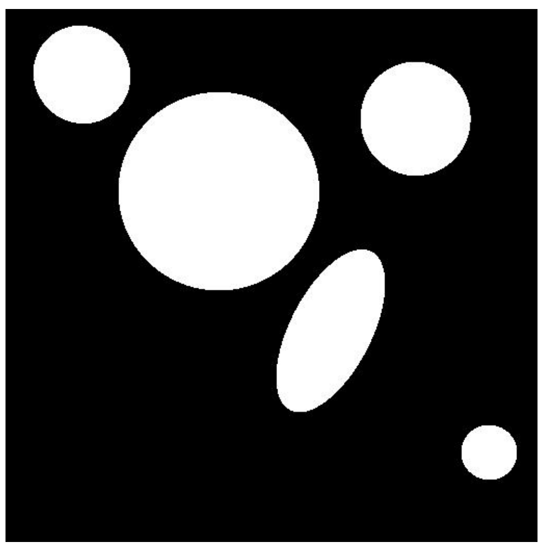
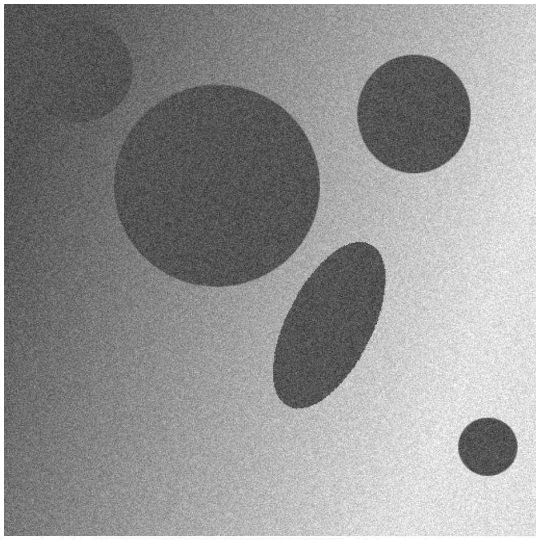


图 10: 重构结果

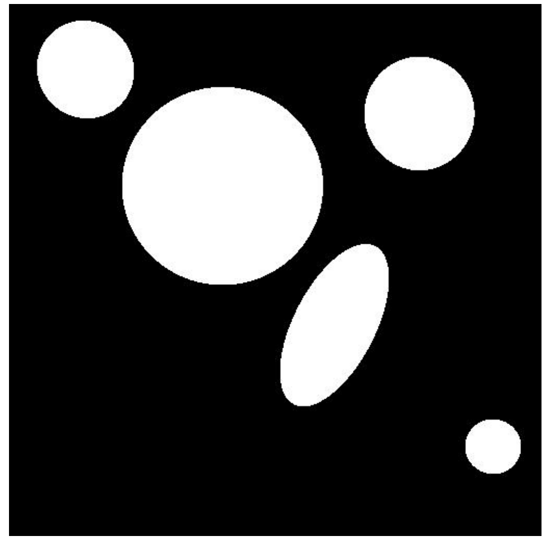
[3]此处指以像素编号等间隔，像素编号按照列优先的顺序来确定

5 实验结果

为了方便对比，此处将原始图像和二值化分割后的结果显示在图 11 中。可以说分割的结果十分完美。此外，为了便于直观显示椭圆重构的过程，我将这个过程制作成了 GIF 格式的动图[4]。



(a) 原始图像



(b) 二值化分割结果

图 11: 二值化分割前后对比

6 总结

本次实验中，我学到了一种效果较好的图像二值化分割方法：Ostu 方法，同时也将之前学过的知识熟练应用（去噪、连通域检测、形态学变换等）。其中最难的部分当属左上角的椭圆区域的检测。我能想到使用二次曲线拟合的方式来解决是基于以下考虑：虽然我们肉眼不能看到左上角椭圆区域的左侧边缘，但是我们能够断定那确实是一个椭圆区域，这一切基于我们的先验知识。将先验知识应用之后，不但成功实现了左上角椭圆区域的分割，也对其他椭圆区域的分割结果进行了优化。

参考文献

[1] A. Buades, B. Coll, and J.-M. Morel, “A non-local algorithm for image denoising,” in *Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005. IEEE Computer Society Conference on*, vol. 2, pp. 60–65, IEEE, 2005.

[2] N. Otsu, “A threshold selection method from gray-level histograms,” *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, vol. 9, no. 1, pp. 62–66, 1979.

[4] 路径为 results/reconstruct_eclipse.gif