12Lab4_Frequency analysis (of periodic signals)

频率分析（周期性信号的分析）---傅里叶分析

傅里叶定理指出，任何频率为f0的周期性信号 的任何周期性信号都可以通过将频率为f0,2f0,3f0的 "正弦波"(sine waves)相加来精确构建。 等等。将周期性时域信号分割成正弦波称为傅里叶分析。

这个 "傅里叶系列 "中的每个正弦波都有以下特点

- 频率;
- 振幅;
- 相位;
-

$$f0\text{被称为基本频率。}$$

$$2f0, 3f0, 4f0, ect.\text{被称为谐波}$$

The sawtooth signal（锯齿状信号）

锯齿信号的最简单形式定义为

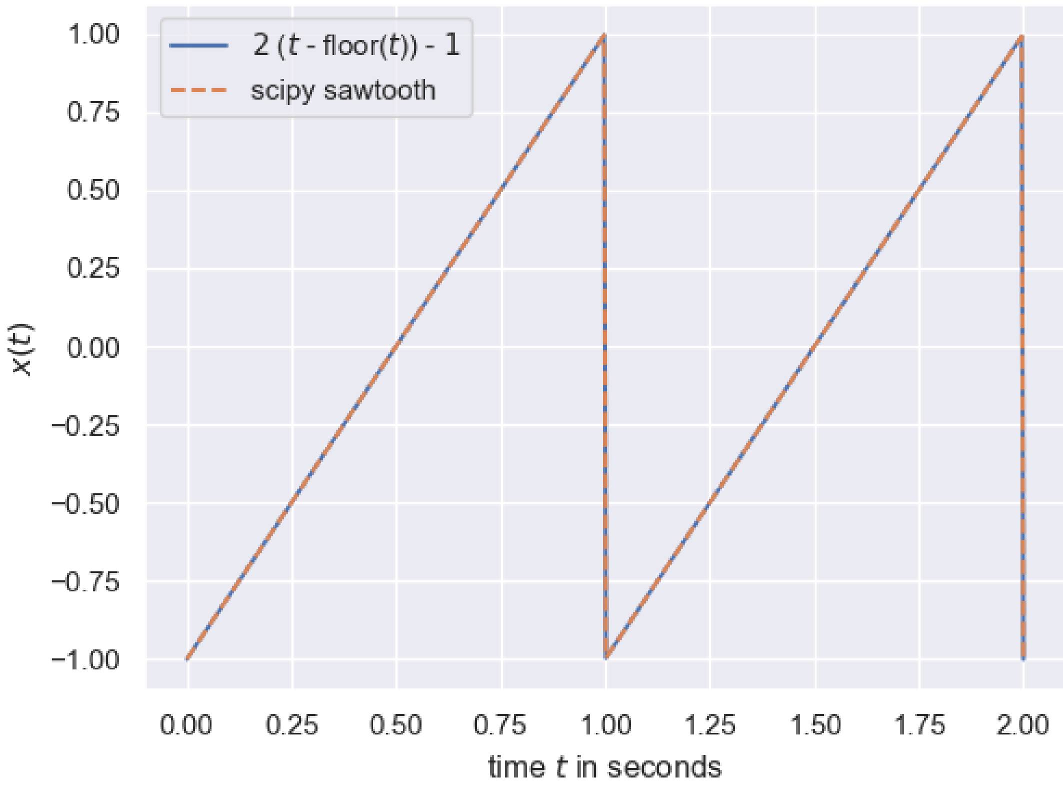
$$X_{saw}(t) = t - [t],$$

或以0为中心作为

$$x_{saw}(t) = 2(t - [t]) - 1.$$

scipy库给了我们更多的灵活性来生成和可视化锯齿信号，因为它们可以像正弦信号一样被生成。

```
from scipy import signal

t = np.linspace(0, 2, 500)
saw_tooth = 2*(t-np.floor(t))-1

f0 = 1 # frequency in Hz for scipy samtooth
saw_tooth2 = signal.sawtooth(2 * np.pi * f0 * t)

plt.plot(t, saw_tooth, label='$2$ ($t$ - floor($t$)) - $1$')
plt.plot(t, saw_tooth2, '--', label='scipy sawtooth');
plt.xlabel('time $t$ in seconds'); plt.ylabel('$x(t)$')
plt.legend();
```

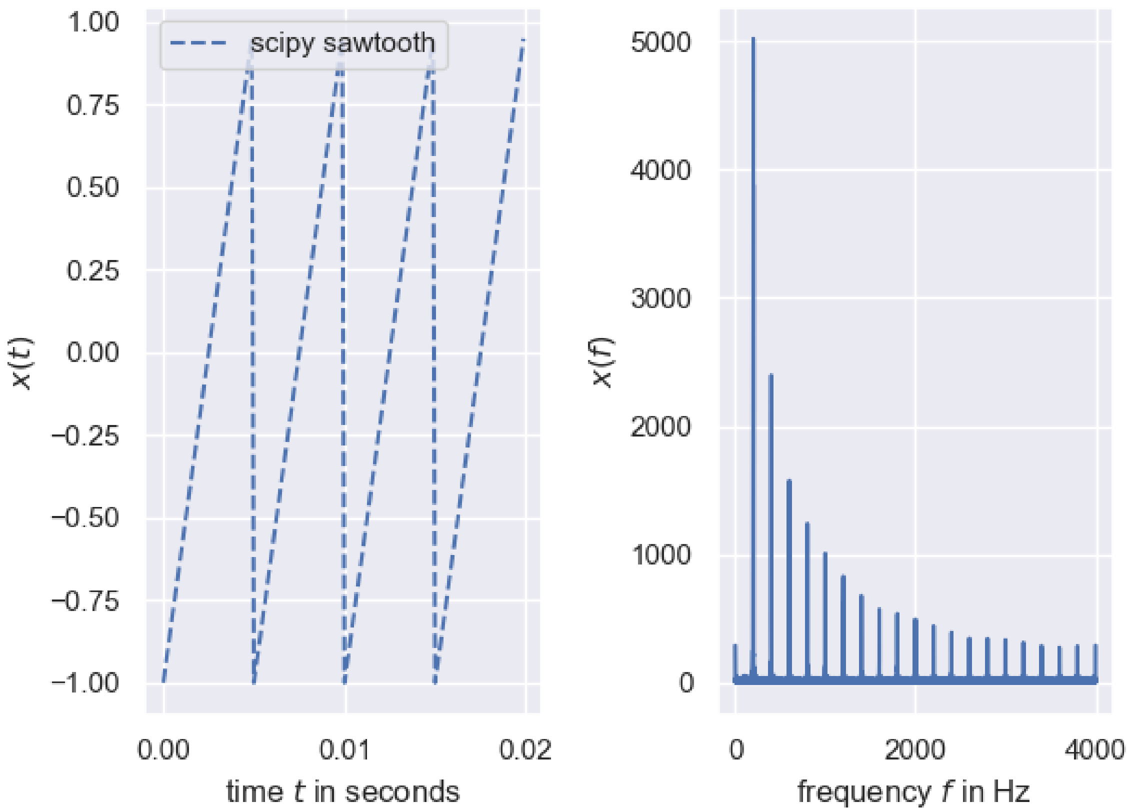


我们在上面的图中看到，使用方程（2）和使用scipy库实现锯齿的结果是一样的（尽管scipy的方法证明了更多的灵活性。

- [ ] **任务1：** 生成一个长度为2秒的锯齿信号，基频为200Hz的锯齿信号，并播放它。为了实现这一目标，请替换下面代码中由`# ...'表示的注释。该代码将显示时域信号的初始20毫秒，以及使用函数` np.ft.rfft()`计算实值时间序列的（复数）离散傅里叶变换（DFT）的频谱（频域）。

```
from scipy import signal            # for easy sawtooth signal generation
from IPython import display as ipd  # to playback audio signals

fs= 8000                    # sampling frequency
t = np.arange(0,2,1/fs)         # time vector

f0 = 200                     # frequency in 200 Hz for scipy sawtooth
saw_tooth = signal.sawtooth(2*np.pi*f0*t)

# plot first 20 ms (=160 samples at sampling frequency of 8000 Hz)
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(t[0:160], saw_tooth[0:160], '--', label='scipy sawtooth');
plt.xlabel('time $t$ in seconds'); plt.ylabel('$x(t)$')
plt.legend();

# calculate the spectum (frequency domain representation)
FFT_length = 2**15 # take a power of two which is larger than the signal length
f = np.linspace(0, fs/2, num=int(FFT_length/2+1))
spectrum = np.abs(np.fft.rfft(saw_tooth,n=FFT_length))

# plot the spectrum
plt.subplot(1,2,2)
```

```
plt.plot(f,spectrum)
plt.xlabel('frequency $f$ in Hz');plt.ylabel('$x(f)$')

plt.tight_layout() # this allowes for some space for the title text.

# playback sound file (if you want)
ipd.Audio(saw_tooth, rate=fs)
```



当我们看上图右边的光谱时，我们看到它是由等距离的谱线组成的，在较高的频率下振幅逐渐减小。

锯齿形信号的傅里叶级数 (Task 2)

锯齿信号的傅里叶级数由以下公式给出

$$x'_{saw}(t) = \frac{2}{\pi}[Sin(\omega_0 t) + \frac{Sin(2\omega_0 t)}{2} + \frac{Sin(3\omega_0 t)}{3} + \ldots],$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Sin(i\omega_0 t)}{i},$$

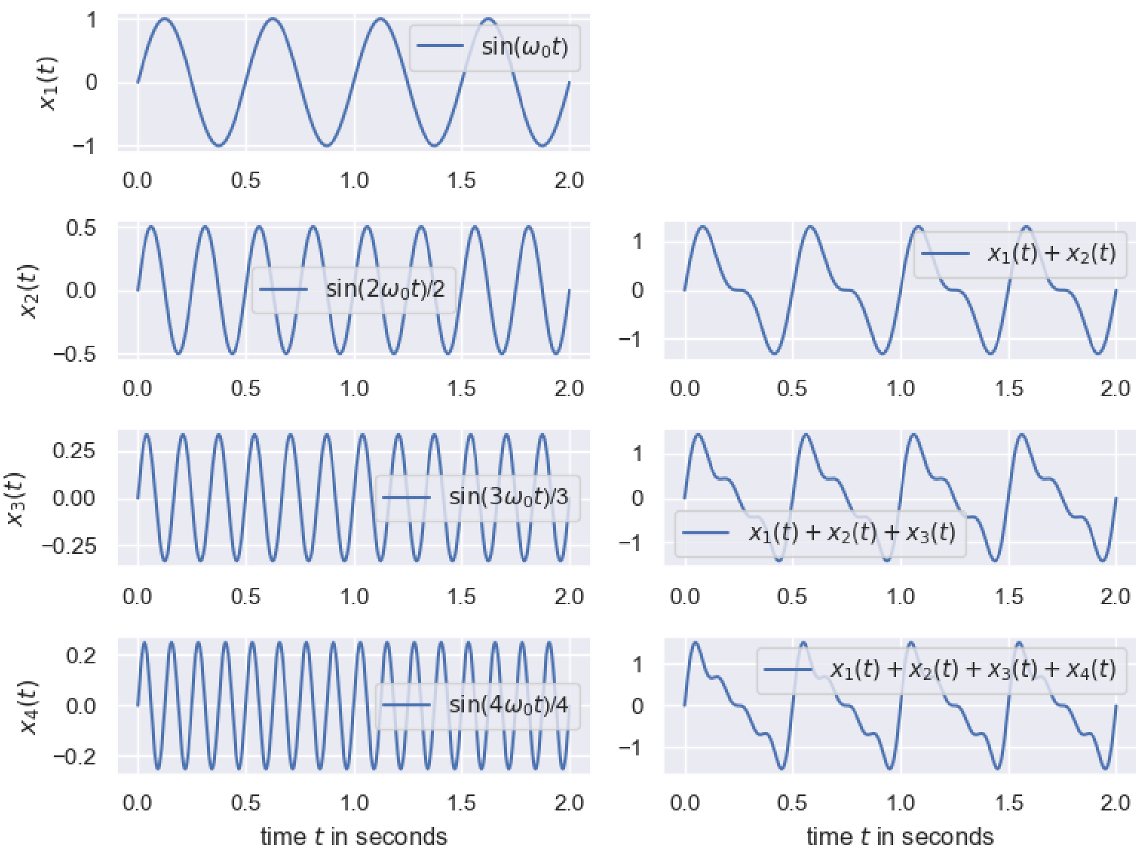
with $\omega = 2\pi f$ 是角频率。ie.

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

下面的代码从（左图）开始生成前四个正弦信号，以及这些信号的叠加，从而一步步形成锯齿信号（右图）。

```
fs = 8000 # Sampling frequency

t = np.arange(0,2,1/fs) # time vector 2

f0 = 2         # fundamental frequency in Hz



sin1 = np.sin(2*np.pi*f0*t)

sin2 = np.sin(2*np.pi*2*f0*t)/2

sin3 = np.sin(2*np.pi*3*f0*t)/3

sin4 = np.sin(2*np.pi*4*f0*t)/4



plt.figure(figsize=(8,6))

plt.subplot(4,2,1)

plt.plot(t,sin1,label='$\mathrm{sin}(\omega_0 t$)')

plt.ylabel('$x_1(t)$')

plt.legend()



plt.subplot(4,2,3)

plt.plot(t,sin2,label='$\mathrm{sin}(2 \omega_0 t$)/2')

plt.ylabel('$x_2(t)$')

plt.legend()



plt.subplot(4,2,4)

plt.plot(t,sin1+sin2,label='$x_1(t)+x_2(t)$')

plt.legend()



plt.subplot(4,2,5)

plt.plot(t,sin3,label='$\mathrm{sin}(3 \omega_0 t$)/3')

plt.ylabel('$x_3(t)$')

plt.legend()
```

```
plt.subplot(4,2,6)

plt.plot(t,sin1+sin2+sin3,label='$x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$')

plt.legend()



plt.subplot(4,2,7)

plt.plot(t,sin4,label='$\mathrm{sin}(4 \omega_0 t$)/4')

plt.ylabel('$x_4(t)$')

plt.xlabel('time $t$ in seconds')

plt.legend()



plt.subplot(4,2,8)

plt.plot(t,sin1+sin2+sin3+sin4,label='$x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)+x_4(t)$')

plt.xlabel('time $t$ in seconds')

plt.legend()



plt.tight_layout()

plt.show()
```

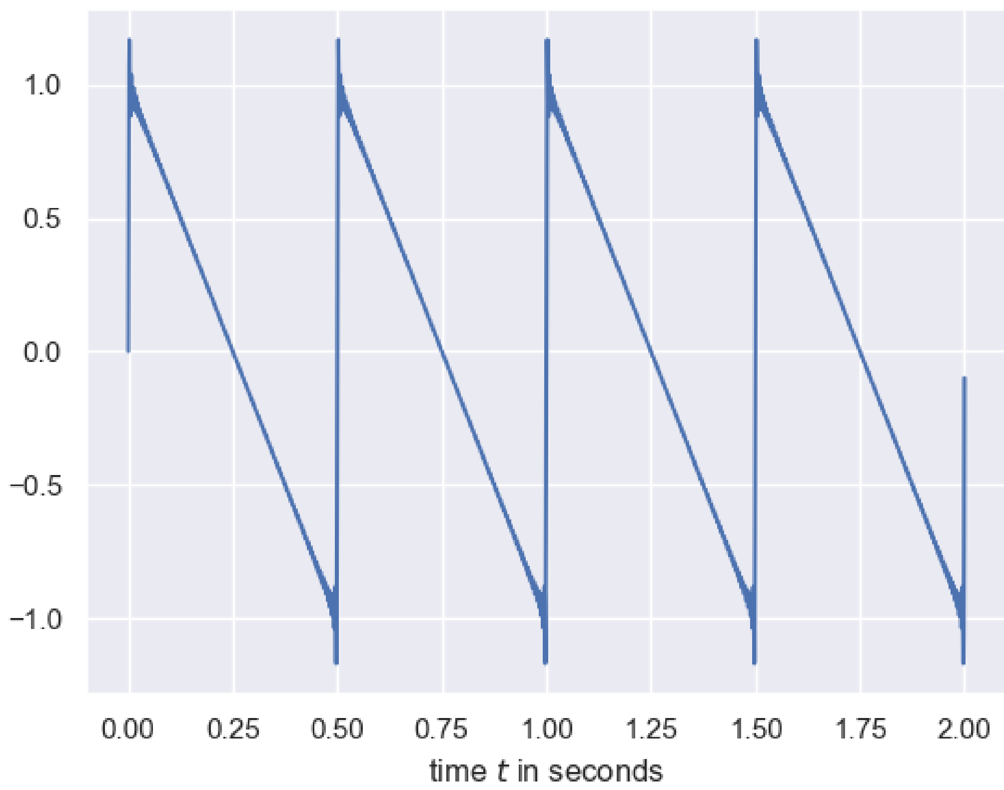


请注意，左侧面板中的正弦波的振幅在下降（见y轴标签）。

作为一个函数的实现（下面的generateSawTooth()）当然在代码的可重用性方面更有效率。

```
def generateSawTooth(f0=2, length = 2, fs=8000, order=10, height=1):

  """

  Return a saw-tooth signal with given parameters.



  Parameters

  \----------

  f0 : float, optional

•    fundamental frequency $f_0$ of the signal to be generated,

•    default: 1 Hz

  length : float, optional

•    length of the signal to be generated, default: 2 sec.

  fs : float, optional

•    sampling frequency $f_s$, default: 8000 Hz

  order : int, optional
```

```
•    number of sinosuids to approximate saw-tooth, default: 10

  height : float, optional

•    height of saw-tooth, default: 1



  Returns

  \-------

  sawTooth

•    generated sawtooth signal

  t

•    matching time vector

  """

•

  t=np.arange(0,length,1/fs) # time vector

  sum = np.zeros(len(t))

  for ii in range(order):

•    jj=ii+1

•    sum += np.sin(2*np.pi*jj*f0*t)/jj

  return 2*height*sum/np.pi, t



saw,t = generateSawTooth(order=100)

plt.plot(t,saw)

plt.xlabel('time $t$ in seconds')

plt.show()
```



锯齿信号的傅里叶级数（时间反转）（Task 3)

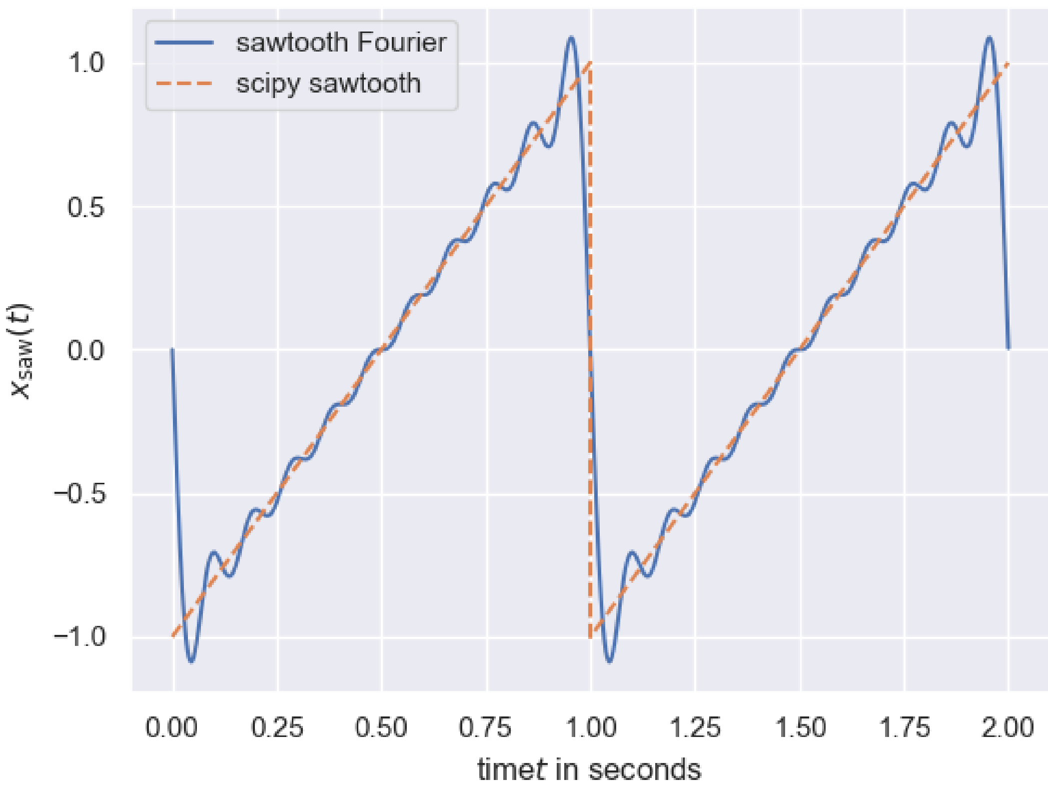
如果我们想让锯齿信号先从0增加到1的部分开始，这可以通过实现以下傅里叶数列来实现。

$$x_{saw}(t) = -\frac{2h}{\pi}[Sin(\omega_0 t) - \frac{Sin(2\omega_0 t)}{2} + \frac{Sin(3\omega_0 t)}{3} - .. + .. - ...],$$
$$= -\frac{2h}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{Sin(k\omega_0 t)}{k},$$

在上述两个公式中，h是高度， ω = 2πf 是角频率。

```
def generateSawTooth2(f0=1, length = 2, fs=8000, order=10, height=1):
    """
    Return a saw-tooth signal with given parameters.

    Parameters
    ----------
    f0 : float, optional
        fundamental frequency $f_0$ of the signal to be generated,
        default: 1 Hz
    length : float, optional
        length of the signal to be generated, default: 2 sec.
    fs : float, optional
        sampling frequency $f_s$, default: 8000 Hz
    order : int, optional
        number of sinosuids to approximate saw-tooth, default: 10
```

```
    Returns
    -------
    sawTooth
        generated sawtooth signal
    t
        matching time vector
    """
    t=np.arange(0,length,1/fs)  # 时间向量
    sawTooth = np.zeros(len(t)) # 用零来预分配变量
    for ii in range(1,order+1):
        sign = 2*(ii % 2) - 1# 创建交替的标志
        sawTooth += np.sin(2*np.pi*ii*f0*t)/ii
        print(str(ii)+': adding ' + str(sign) + ' sin(2 $\pi$ '+str(ii*f0)+' Hz
t)')
    return -2*height/np.pi*sawTooth, t

f0 = 1
saw2,t = generateSawTooth2(f0)
plt.plot(t,saw2,label="sawtooth Fourier")
plt.ylabel("$x_{\mathrm{saw}}(t)$")
plt.xlabel("time$t$ in seconds")

# 与scipy生成的锯齿形信号进行比较
saw_scipy = signal.sawtooth(2*np.pi*f0*t)

plt.plot(t,saw_scipy,"--",label="scipy sawtooth")
plt.legend()
plt.show()
```

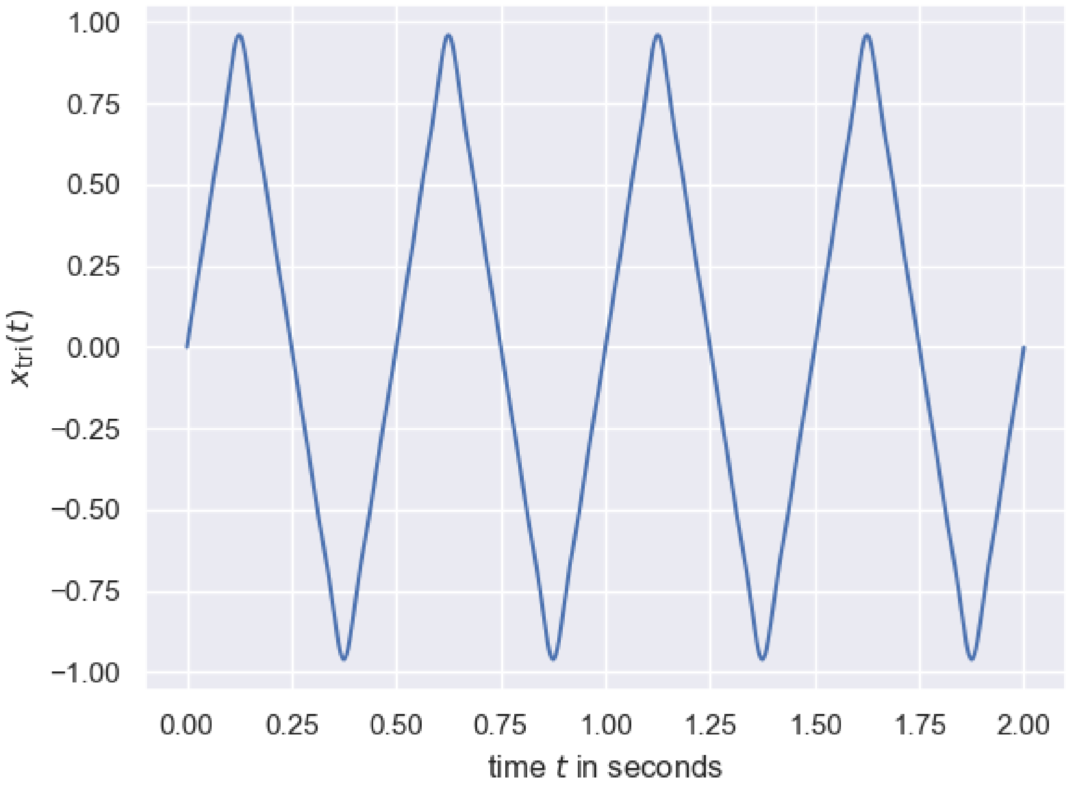


三角波形的傅里叶级数 (Task 4)

三角波可以通过以下的傅里叶数列来实现。

$$x_{tri}(t) = \frac{8h}{\pi^2}[Sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3^2}Sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2}Sin(5\omega_0 t) - ..+..-...],$$
$$= \frac{8h}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{Sin((2i-1))\omega_0 t}{(2i-1)^2}$$

```
def generateTriangular(f0=2, length = 2, fs=8000, order=10, height=1):
    """
    Return a saw-tooth signal with given parameters.

    Parameters
    ----------
    f0 : float, optional
        fundamental frequency $f_0$ of the signal to be generated,
        default: 1 Hz
    length : float, optional
        length of the signal to be generated, default: 2 sec.
    fs : float, optional
        sampling frequency $f_s$, default: 8000 Hz
    order : int, optional
        number of sinosuids to approximate saw-tooth, default: 10
    height : float, optional
        height of saw-tooth, default: 1

    Returns
    -------
    sawTooth
        generated sawtooth signal
    t
        matching time vector
    """

    t=np.arange(0,length,1/fs) # time vector
    sum = np.zeros(len(t))
    for ii in range(1, order+1, 2):
        sign = -1* (ii % 4) + 2# create alternating sign
        print(str(ii)+': adding ' + str(sign) + ' sin(2 $\pi$ '+str(ii*f0)+' Hz
t)')
        sum += sign*np.sin(2*np.pi*ii*f0*t)/(ii**2)
    return 8*height/(np.pi**2)*sum, t

f0=2
tri,t = generateTriangular(f0,order=10)
plt.plot(t,tri)
plt.ylabel('$x_{\mathrm{tri}}(t)$');
plt.xlabel('time $t$ in seconds');
plt.show()
```



矩形/方波的傅里叶级数（Task5）

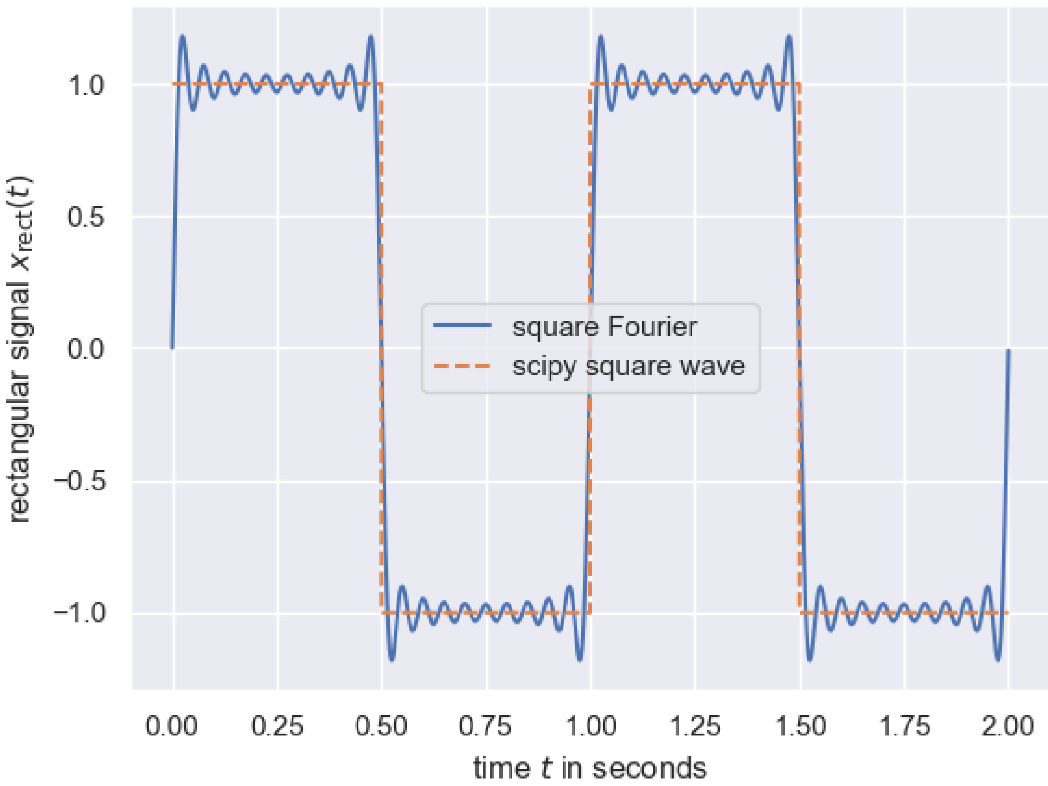
从下面生成的图可以看出，该公式代表矩形波，又称方波。

$$x_{rect}(t) = \frac{4}{\pi}[Sin(\omega_0 t) + Sin(3\omega_0 t) + Sin(5\omega_0 t) + \ldots],$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{Sin((2i-1))\omega_0 t}{(2i-1)}$$

```
def generateTriangular(f0=1, length = 2, fs=8000, order=10):
    t=np.arange(0,length,1/fs)  # time vector
    sum = np.zeros(len(t)) # pre-allocate variable with zeros
    for ii in range(1, order+1, 2):
        sum += np.sin(2*np.pi*ii*f0*t)/ii
        #print(str(ii)+': adding sin(2 $\pi$ '+str(ii*f0)+' Hz t)')
    return 4/np.pi*sum, t

f0=1
rec,t = generateTriangular(f0,order=20)
plt.plot(t,rec,label='square Fourier')
plt.ylabel('rectangular signal $x_{\mathrm{rect}}(t)$')
plt.xlabel('time $t$ in seconds')


# compare to the rectangular/square wave signal generated by scipy
rec_scipy = signal.square(2 * np.pi * f0 * t)
plt.plot(t,rec_scipy,'--',label='scipy square wave')
```

```
plt.legend()
plt.show()
```



傅里叶变换(Task6)

离散傅里叶变换用于将一般的时间序列转化为频域（即使它们是非周期性的）。

下面这段代码可以看出

$$x(t) = sin_1(t) + sin_2(t)$$

$$with$$

$$sin_1(t) = sin(2\pi f_1 t)$$

$$sin_2(t) = sin(2\pi f_2 t + \Phi_1)$$

$$f_1 = 1230Hz$$

$$f2 = 1800Hz$$

$$\Phi_1 = \pi$$

```
fs = 8000
t = np.arange(0,2,1/fs)
f1 = 1230
f2 = 1800
sin1 = np.sin(2*np.pi*f1*t)
sin2 = np.sin(2*np.pi*f2*t+np.pi)/2
```

```python
x = sin1+sin2

# 混合信号的DFT
N = 2**14    # DFT's length
print('Signal length is '+ str(len(x)))
print('DFT length is '+ str(N))
f1 = np.linspace(0,fs/2,int(N/2))    # the positive frequencies (up to fs/2)
f2 = np.linspace(-fs/2,0,int(N/2)) # the negative frequencies
f = np.concatenate([f1,f2])
X = np.fft.fft(x,N) # 使用fft函数对信号进行傅里叶变换

plt.figure(figsize=(12,8))
plt.subplot(2,2,1)
plt.plot(t[:160],x[:160])
plt.xlabel('time $t$ in seconds')
plt.ylabel('$x(t)$')
plt.subplot(2,2,2)
plt.plot(f,np.abs(X))
plt.title('Absolute value of the DFT of a signal mixture')
plt.xlabel('frequency $f$ in Hz')
plt.ylabel('$|x(f)|$')
plt.subplot(2,2,3)
plt.plot(f,np.real(X))
plt.subplot(2,2,4)
plt.plot(f,np.imag(X))
plt.tight_layout()
plt.legend()
plt.show()
```