操控的賽局－單堆拈遊戲必勝法探討

摘要

上課的時候老師跟我們玩了一個遊戲，叫做「二十一顆棋子」，規則很簡單，假設桌上有二十一個物體，由兩位玩家輪流取走物體，玩家可以一次拿走一個、兩個，或是三個物體，拿到最後一個物體的那一方為勝。結果我們發現不管改變棋子數量、改變每次所拿的棋子數，或者規定拿到最後一顆的人輸，其中都存在著必勝的規則。也就是在每人每次最少取 1 個，最多取 k 個的情況下。若規定拿到最後一顆的人贏，那麼當棋子的數量為 q(k+1)時（q 為(k+1)除以棋子數量的商），後拿的人必勝；當棋子的數量為 q(k+1)+r 時（r 為(k+1)除以棋子數量的餘數），先拿的人第一次拿走 r 顆便必勝。若規定拿到最後一顆的人輸，那麼當棋子的數量為 q(k+1)+1 時，後拿的人必勝；當棋子的數量為 q(k+1)+r 時，先拿的人第一次拿走 r-1 顆，讓所剩的棋子數為 q(k+1)+1 便必勝。我們進一步探討每人每次最少取 j 個，最多取 k 個的情況，發現亦存在著必勝的規則。

關 鍵 詞：拈遊戲、必勝法

壹、研究動機

上課的時候老師跟我們玩了一個遊戲，叫做「二十一顆棋子」，規則很簡單，假設桌上有二十一個物體，由兩位玩家輪流取走物體，玩家可以一次拿走一個、兩個，或是三個物體，拿到最後一個物體的那一方為勝。結果我們發現只要先拿的玩家第一次只拿一個物體，則先拿的玩家最後一定獲勝。從中我們推論出這個遊戲有一個簡單的神奇數字，那就是---四！因為如果輪到對方的時候桌子上剩下四的倍數的物體，就可以掌控遊戲，並穩穩的拿下勝利，也就是說，這個遊戲在決定誰先拿走棋子的時候，勝負就已經決定了。.老師鼓勵我們，是否可以藉著改變玩法：比如改變棋子的數量、改變每次所拿的棋子數，或者改變遊戲規則，如拿到最後一顆的人輸，推論出其中是否存在著必勝的規則。因此，我們便從不同的遊戲玩法，進一步來探討這個對局遊戲中所隱藏的神奇數字。

貳、研究目的

一、探討「拈遊戲」在對局中所隱藏的規則。

二、探討「拈遊戲」中先取者與後取者的必勝策略。

三、探討「拈遊戲」中改變遊戲規則的必勝策略。

參、研究過程與方法

一、研究設備與器材：棋子（或錢幣、豆子、石頭）數個、紀錄紙、筆。

二、「拈遊戲」規則說明：

(一)準備數個棋子（或錢幣、豆子、石頭）。

(二)兩方猜拳，贏的人先拿棋子，然後輪流，每人一次可任意拿所規定之最多與最少的棋子數。

(三)輪到時不可不拿。

(四)拿到最後一個的人得勝。

(五)試著找出必勝的策略。

三、「拈遊戲」變化玩法：

(一)改變棋子的數量。

(二)改變每次所拿的棋子數。

(三)改變遊戲規則，規定拿到最後一個的人輸。

四、「拈遊戲」過程討論

(一)對於改變棋子數量的討論（拿到最後一顆的人贏）。

(二)對於改變每次所拿的棋子數的討論。

(三)對於改變遊戲規則（拿到最後一顆的人輸）的討論。

(四)由歸納法推論出不同情況下的必勝法則。

肆、研究結果

（●代表先取者所拿的棋子）

（○代表後取者所拿的棋子）

一、對於改變棋子數量的討論

規則：每人每次最少取 1 個，最多取 3 個，拿到最後一顆的人贏

9 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●○●●●○○●●

說明：先取者先拿 1 個棋子，此時剩 8 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

10 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●○○●●○○○●

說明：先取者先拿 2 個棋子，此時剩 8 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

11 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●●○○●●○○○●

說明：先取者先拿 3 個棋子，此時剩 8 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

12 個棋子的情況（後取者必勝）

例子：●○○○●●○○●●●○

說明：只要先取者拿 1 個，後取者便拿 3 個；先取者拿 2 個，後取者便拿 2 個；先取者拿 3 個，後取者便拿 1 個，則最後 1 顆棋子一定由後取者拿到得勝。

13 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●○●●●○○●●○○○●

說明：先取者先拿 1 個棋子，此時剩 12 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

14 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●○○●●○●●●○○○●

說明：先取者先拿 2 個棋子，此時剩 12 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

15 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●●○●●●●○○●●○○○●

說明：先取者先拿 3 個棋子，此時剩 12 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

16 個棋子的情況（後取者必勝）

例子：●○○○●●○○●●●○●●○○

說明：只要先取者拿 1 個，後取者便拿 3 個；先取者拿 2 個，後取者便拿 2 個；先取者拿 3 個，後取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到得勝。

歸納：從以上情況我們歸納出只要讓對方拿棋子時，桌上剩下的棋子數是 4 的倍數，我方就能控制接下來的賽局，亦即：

$n=4q+1$ 先取者先拿 1 個必勝

$n=4q+2$ 先取者先拿 2 個必勝

$n=4q+3$ 先取者先拿 3 個必勝

$n=4q$ 後取者必勝 （n 為棋子總數，$q=n/4$）

因為 1+3=4，2+2=4，3+1=4，所以只要看對方拿幾個，我方就可決定拿幾個，使得每兩次所拿的棋子之和都是 4，這便是致勝之道。

但是當改變每次所拿的棋子數時，賽局是否也可以由一方所控制？

二、對於改變每次所拿的棋子數的討論

規則：每人每次最少取 1 個，最多取 2 個的情況（拿到最後一顆棋子的人贏）

7 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●○●●○○●

說明：先取者先拿 1 個棋子，此時剩 6 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

8 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●○●●○○●

說明：先取者先拿 2 個棋子，此時剩 6 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

9 個棋子的情況（後取者必勝）

例子：●○○●●○●●○

說明：只要先取者拿 1 個，後取者便拿 2 個；先取者拿 2 個，後取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到得勝。

10 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●○●●○○●○○●

說明：先取者先拿 1 個棋子，此時剩 9 顆棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

11 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●○●●○○●○●●

說明：先取者先拿 2 個棋子，此時剩 9 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

12 個棋子的情況（後取者必勝）

例子：●○○●●○●●○●○○

說明：只要先取者拿 1 個，後取者便拿 2 個；先取者拿 2 個，後取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到得勝。

歸納：從以上情況我們歸納出只要讓對方拿棋子時，桌上剩下的棋子數是 3 的倍數，我方就能控制接下來的賽局，亦即：

$n=3q+1$ 先取者先拿 1 個必勝

$n=3q+2$ 先取者先拿 2 個必勝

$n=3q$ 後取者必勝 （n 為棋子總數，$q=n/3$）

規則：每人每次最少取 1 個，最多取 4 個的情況

21 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●○●●●●○○●●●○○○●●○○○○●

說明：先取者先拿 1 個棋子，此時剩 20 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

22 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●○●●●●○○●●●○○○●●○○○○●

說明：先取者先拿 2 個棋子，此時剩 20 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

23 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●●○●●●●○○●●●○○○●●○○○○●

說明：先取者先拿 3 個棋子，此時剩 20 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

24 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●●●○●●●●○○●●●○○○●●○○○○●

說明：先取者先拿 4 個棋子，此時剩 20 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

25 個棋子的情況（後取者必勝）

例子：●●●●○●●●●○○●●●○○○●●○○○○●

說明：只要先取者拿 1 個，後取者便拿 4 個；先取者拿 2 個，後取者便拿 3 個；先取者拿 3 個，後取者便拿 2 個；先取者拿 4 個，後取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到得勝。

歸納：從以上情況我們歸納出只要讓對方拿棋子時，桌上剩下的棋子數是

5 的倍數，我方就能控制接下來的賽局，亦即：

n=5q+1 先取者先拿 1 個必勝

n=5q+2 先取者先拿 2 個必勝

n=5q+3 先取者先拿 3 個必勝

n=5q+4 先取者先拿 4 個必勝

n=5q 後取者必勝 （n 為棋子總數，q=n/5）

規則：每人每次最少取 1 個，最多取 5 個的情況

25 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●○●●●●●○○●●●●○○○●●●○○○○●●

說明：先取者先拿 1 個棋子，此時剩 24 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 5 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 5 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

26 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●○●●●●●○○●●●●○○○●●●○○○○○●

說明：先取者先拿 2 個棋子，此時剩 24 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 5 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 5 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

27 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●●○●●●●●○○●●●●○○○●●●○○○○●●

說明：先取者先拿 3 個棋子，此時剩 24 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 5 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 3

個；後取者拿 4 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 5 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

28 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●●●○●●●●●○○●●●●○○○○●●○○○○○●

說明：先取者先拿 4 個棋子，此時剩 24 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 5 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 5 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

29 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●●●●○○●●●●○○○●●●○○○○●●○○○○○●

說明：先取者先拿 5 個棋子，此時剩 24 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 5 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 5 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到得勝。

30 個棋子的情況（後取者必勝）

例子：●○○○○○●●○○○○●●●○○○●●●●○○●●●●●○

說明：只要先取者拿 1 個，後取者便拿 5 個；先取者拿 2 個，後取者便拿 4 個；先取者拿 3 個，後取者便拿 3 個；先取者拿 4 個，後取者便拿 2 個；先取者拿 5 個，後取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到得勝。

歸納：從以上情況我們歸納出只要讓對方拿棋子時，桌上剩下的棋子數是

5 的倍數，我方就能控制接下來的賽局，亦即：

n=6q+1 先取者先拿 1 個必勝

n=6q+2 先取者先拿 2 個必勝

n=6q+3 先取者先拿 3 個必勝

n=6q+4 先取者先拿 4 個必勝

n=6q+5 先取者先拿 5 個必勝

n=6q 後取者必勝 （n 為棋子總數，q=n/6）

綜整每人每次最少取 1 個，最多取 2 個到每人每次最少取 1 個，最多取 5 個的情況，我們發現在每人每次最少取 1 個，最多取 k 個的情況下，若能使對方拿棋子時，桌上剩下的棋子數是 q(k+1)，我方就能控制接下來的賽局。

我們已經找出拿到最後一顆棋子的人得勝的規則，但是若改變規則，使得拿到最後一個棋子的人輸，是否也可由一方掌控賽局呢？

三、對於改變遊戲規則（拿到最後一顆棋子的人輸）的討論

規則：每人每次最少取 1 個，最多取 3 個的情況

13 個棋子的情況（後取者必勝）

例子：●○○○●●○○●●●○●

說明：只要先取者拿 1 個棋子，後取者便拿 3 個；先取者拿 2 個，後取者便拿 2 個；先取者拿 3 個，後取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到。

14 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●○●●●○○●●○○○●○

說明：先取者先拿 1 個棋子，此時剩 13 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到。

15 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●○●●●●○○●●○○○●○

說明：先取者先拿 2 個棋子，此時剩 13 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到。

16 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●●○●●●●○○●●○○○●○

說明：先取者先拿 3 個棋子，此時剩 13 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到。

從以上情況我們歸納出只要讓對方拿棋子時，桌上剩下的棋子數是 4 的倍數並多出一顆，我方就能控制接下來的賽局。因為 1+3=4，2+2=4，3+1=4，所以只要看對方拿幾個，我方就可決定拿幾個，使得每兩次所拿的棋子之和都是 4，而所多出的最後一顆必定由對方拿到，這便是制勝之道。亦即：

$n=4q+1$ 後取者必勝

$n=4q+2$ 先取者先拿 1 個必勝

$n=4q+3$ 先取者先拿 2 個必勝

$n=4q+4$ 先取者先拿 3 個必勝　　（n 為棋子總數，$q=n/4$）

規則：每人每次最少取 1 個，最多取 4 個的情況

21 個棋子的情況（後取者必勝）

例子：●○○○○●●○○○●●●○○●○○○○●

說明：只要先取者拿 1 個棋子，後取者便拿 4 個；先取者拿 2 個，後取者便拿 3 個；先取者拿 3 個，後取者便拿 2 個；先取者拿 4 個，後取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由先取者拿到。

22 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●○●●●●○○●●●○○○●●○○○○●○

說明：先取者先拿 1 個棋子，此時剩 21 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 5 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到。

23 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●○●●●●○○●●●○○○●●○○○○●○

說明：先取者先拿 2 個棋子，此時剩 21 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到。

24 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●●○●●●●○○●●●○○○●●○○○○●○

說明：先取者先拿 3 個棋子，此時剩 21 個棋子。之後只要後取者拿 1 個，先取者便拿 4 個；後取者拿 2 個，先取者便拿 3 個；後取者拿 3 個，先取者便拿 2 個；後取者拿 4 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到。

25 個棋子的情況（先取者必勝）

例子：●●●●○●●●●○○●●●○○○●●○○○○●○

說明：先取者先拿 4 顆棋子，此時剩 21 顆棋子。之後只要後取者拿 1 顆，先取者便拿 4 顆；後取者拿 2 顆，先取者便拿 3 顆；後取者拿 3 顆，先取者便拿 2 顆；後取者拿 4 個，先取者便拿 1 個，則最後 1 個棋子一定由後取者拿到。

從以上情況我們歸納出只要讓對方拿棋子時，桌上剩下的棋子數是 5 的倍數並多出一顆，我方就能控制接下來的賽局。亦即：

n=5q+1 後取者必勝

n=5q+2 先取者先拿 1 個必勝

n=5q+3 先取者先拿 2 個必勝

n=5q+4 先取者先拿 3 個必勝

n=5q+5 先取者先拿 4 個必勝　　　（n 為棋子總數，q=n/5）

歸納每人每次最少取 1 個，最多取 3 個，以及每人每次最少取 1 個，最多取 4 個的情況，我們發現在每人每次最少取 1 個，最多取 k 個下，若能使對方拿棋子時，桌上剩下的棋子數是 q(k+1)+1，也就是使得每兩次所拿的棋子之和都是 k+1，並預留 1 顆棋子，我方就能控制接下來的賽局。

伍、討論

一、每人每次最少取 1 個，最多取 k 個的情況（初步研究）

每次所拿的棋子數	拿到最後一個的人贏	拿到最後一個的人輸
每人每次最少取 1 個，最多取 2 個的情況	n=3q（後取者必勝） n=3q+1（先取 1 個者必勝） n=3q+2（先取 2 個者必勝）	n=3q+1（後取者必勝） n=3q+2（先取 1 個者必勝） n=3q+3（先取 2 個者必勝）
每人每次最少取 1 個，最多取 3 個的情況	n=4q（後取者必勝） n=4q+1（先取 1 個者必勝） n=4q+2（先取 2 個者必勝） n=4q+3（先取 3 個者必勝）	n=4q+1（後取者必勝） n=4q+2（先取 1 個者必勝） n=4q+3（先取 2 個者必勝） n=4q+4（先取 3 個者必勝）
每人每次最少取 1 個，最多取 4 個的情況	n=5q（後取者必勝） n=5q+1（先取 1 個者必勝） n=5q+2（先取 2 個者必勝） n=5q+3（先取 3 個者必勝） n=5q+4（先取 4 個者必勝）	n=5q+1（後取者必勝） n=5q+2（先取 1 個者必勝） n=5q+3（先取 2 個者必勝） n=5q+4（先取 3 個者必勝） n=5q+5（先取 4 個者必勝）
每人每次最少取 1 個，最多取 5 個的情況	n=6q（後取者必勝） n=6q+1（先取 1 個者必勝） n=6q+2（先取 2 個者必勝） n=6q+3（先取 3 個者必勝） n=6q+4（先取 4 個者必勝） n=6q+5（先取 5 個者必勝）	n=6q+1（後取者必勝） n=6q+2（先取 1 個者必勝） n=6q+3（先取 2 個者必勝） n=6q+4（先取 3 個者必勝） n=6q+5（先取 4 個者必勝） n=6q+6（先取 5 個者必勝）
每人每次最少取 1 個，最多取 k 個的情況	n=q(k+1)（後取者必勝） n=q(k+1)+r（先取 r 個者必勝）	n=q(k+1)+1（後取者必勝） n=q(k+1)+r（先取 r-1 個者必勝） n=q(k+1)（先取 k 個者必勝）

在此遊戲中，我們發現勝負在第一次下手時就已決定了，也就是只要依據棋子的數量，以及每次所拿的棋子數的不同，算出其中所具有的規則性，就可成為賽局操控者。我們從不同的遊戲條件歸納出，在每人每次最少取 1 個，最多取 k 個的情況下，若規定拿到最後一個的人贏，那麼當棋子的數量 n=q(k+1)時，後取者必勝；當棋子的數量 n=q(k+1)+r 時，先取者第一次拿走 r 個，便可操控賽局；相反的，若規定拿到最後一個的人輸，那麼當棋子的數量 n=q(k+1)+1 時，後取者必勝，也就是賽局可由後取者操控；當棋子的數量為 n=q(k+1)+r 時，先取者第一次拿走 r-1 顆，讓所剩的棋子數為 q(k+1)+1，便可操控賽局。

二、每人每次最少取 2 個，最多取 k 個的情況（進階研究 1）

每次所拿的棋子數	拿到最後一個的人贏	拿到最後一個的人輸
每人每次最少取 2 個，最多取 3 個的情況 （餘數不足 2 以 2 計取）	n=5q （後取者必勝） n=5q+1（先取 1 個者必勝） n=5q+2（先取 2 個者必勝） n=5q+3（先取 3 個者必勝） n=5q+4（後取者必勝）	n=5q+1（後取者必勝） n=5q+2（後取者必勝） n=5q+3（先取 2 個者必勝） n=5q+4（先取 2 或 3 個者必勝） n=5q+5（先取 3 個者必勝）
每人每次最少取 2 個，最多取 4 個的情況 （餘數不足 2 以 2 計取）	n=6q （後取者必勝） n=6q+1（先取 1 個者必勝） n=6q+2（先取 2 個者必勝） n=6q+3（先取 3 個者必勝） n=6q+4（先取 4 個者必勝） n=6q+5（後取者必勝）	n=6q+1（後取者必勝） n=6q+2（後取者必勝） n=6q+3（先取 2 個者必勝） n=6q+4（先取 2 或 3 個者必勝） n=6q+5（先取 3 或 4 個者必勝） n=6q+6（先取 4 個者必勝）
每人每次最少取 2 個，最多取 5 個的情況 （餘數不足 2 以 2 計取）	n=7q （後取者必勝） n=7q+1（先取 1 個者必勝） n=7q+2（先取 2 個者必勝） n=7q+3（先取 3 個者必勝） n=7q+4（先取 4 個者必勝） n=7q+5（先取 5 個者必勝） n=7q+6（後取者必勝）	n=7q+1（後取者必勝） n=7q+2（後取者必勝） n=7q+3（先取 2 個者必勝） n=7q+4（先取 2 或 3 個者必勝） n=7q+5（先取 3 或 4 個者必勝） n=7q+6（先取 4 或 5 個者必勝） n=7q+7（先取 5 個者必勝）
每人每次最少取 2 個，最多取 6 個的情況 （餘數不足 2 以 2 計取）	n=8q （後取者必勝） n=8q+1（先取 1 個者必勝） n=8q+2（先取 2 個者必勝） n=8q+3（先取 3 個者必勝） n=8q+4（先取 4 個者必勝） n=8q+5（先取 5 個者必勝） n=8q+6（先取 6 個者必勝） n=8q+7（後取者必勝）	n=8q+1（後取者必勝） n=8q+2（後取者必勝） n=8q+3（先取 2 個者必勝） n=8q+4（先取 2 或 3 個者必勝） n=8q+5（先取 3 或 4 個者必勝） n=8q+6（先取 4 或 5 個者必勝） n=8q+7（先取 5 或 6 個者必勝） n=8q+8（先取 6 個者必勝）
每人每次最少取 2 個，最多取 k 個的情況 （餘數不足 2 以 2 計取）	n=q(k+2) （後取者必勝） n=q(k+2)+r（若 r=1~k，先取 r 個者必勝） n=q(k+2)+r（若 r=k+1，後取者必勝）	n=q(k+2)+1（後取者必勝） n=q(k+2)+2（後取者必勝） n=q(k+2)+r（若 r=3~k+1，先取 r-2 或 r-1 個者必勝） n=q(k+2)（先取 k 個者必勝）

三、每人每次最少取 3 個，最多取 k 個的情況（進階研究 2）

每次所拿的棋子數	拿到最後一顆的人贏	拿到最後一顆的人輸
每人每次最少取 3 個，最多取 4 個的情況 （餘數不足 3 以 3 計取）	n=7q　（後取者必勝） n=7q+1（先取 3 個者必勝） n=7q+2（先取 3 個者必勝） n=7q+3（先取 3 個者必勝） n=7q+4（先取 4 個者必勝） n=7q+5（後取者必勝） n=7q+6（後取者必勝）	n=7q+1（後取者必勝） n=7q+2（後取者必勝） n=7q+3（後取者必勝） n=7q+4（先取 3 個者必勝） n=7q+5（先取 3 或 4 個者必勝） n=7q+6（先取 3 或 4 個者必勝） n=7q+7（先取 4 個者必勝）
每人每次最少取 3 個，最多取 5 個的情況 （餘數不足 3 以 3 計取）	n=8q　（後取者必勝） n=8q+1（先取 3 個者必勝） n=8q+2（先取 3 個者必勝） n=8q+3（先取 3 個者必勝） n=8q+4（先取 4 個者必勝） n=8q+5（先取 5 個者必勝） n=8q+6（後取者必勝） n=8q+7（後取者必勝）	n=8q+1（後取者必勝） n=8q+2（後取者必勝） n=8q+3（後取者必勝） n=8q+4（先取 3 個者必勝） n=8q+5（先取 3 或 4 個者必勝） n=8q+6（先取 3 或 4 或 5 個者必勝） n=8q+7（先取 4 或 5 個者必勝） n=8q+8（先取 5 個者必勝）
每人每次最少取 3 個，最多取 6 個的情況 （餘數不足 3 以 3 計取）	n=9q　（後取者必勝） n=9q+1（先取 3 個者必勝） n=9q+2（先取 3 個者必勝） n=9q+3（先取 3 個者必勝） n=9q+4（先取 4 個者必勝） n=9q+5（先取 5 個者必勝） n=9q+6（先取 6 個者必勝） n=9q+7（後取者必勝） n=9q+8（後取者必勝）	n=9q+1（後取者必勝） n=9q+2（後取者必勝） n=9q+3（後取者必勝） n=9q+4（先取 3 個者必勝） n=9q+5（先取 3 或 4 個者必勝） n=9q+6（先取 3 或 4 或 5 個者必勝） n=9q+7（先取 4 或 5 或 6 個者必勝） n=9q+8（先取 5 或 6 個者必勝） n=9q+9（先取 6 個者必勝）
每人每次最少取 3 個，最多取 k 個的情況 （餘數不足 3 以 3 計取）	n=q(k+3)　（後取者必勝） n=q(k+3)+r（若 r=1~k，先取 r 個者必勝） n=q(k+3)+r（若 r=k+1~k+2，後取者必勝）	n=q(k+3)+1（後取者必勝） n=q(k+3)+2（後取者必勝） n=q(k+3)+3（後取者必勝） n=q(k+3)+r（若 r=4~k+2，先取 r-3 或 r-2 或 r-1 個者必勝） n=q(k+3)（先取 k 個者必勝）

陸、結論

我們從進階研究歸納出：在每人每次最少取 2 個，最多取 k 個的情況下，有以下必勝法則：

若規定拿到最後一個的人贏，那麼當棋子的數量 n=q(k+2)時，**後取者必勝**，當棋子的數量 n=q(k+2)+r 時，若 r=k+1，亦為**後取者必勝**，也就是以上兩種賽局可由**後取者操控**；但是當棋子的數量為 q(k+2)+r 時，若餘數 r=1~k，則**先取者**第一次取 r 個便可操控賽局（※當餘數不足 2 時，第 1 次須取 2 個）。

若遊戲規則為拿到最後一個的人輸，那麼當棋子的數量為 n=q(k+2)+1 以及 n=q(k+2)+2 時，**後取者必勝**，也就是賽局可由後取者操控；當棋子的數量 n=q(k+2)+r 時，若餘數 r=3~k+1，則是**先取者**第一次取 r-2 個或 r-1 個，讓所剩的棋子數為 q(k+2)+2 或 q(k+2)+1，**便可得勝**，而當 n=q(k+2)時，則是先取者第一次取 k 個必勝，以上兩種賽局皆可由**先取者操控**。

在每人每次最少取 3 個，最多取 k 個的情況下，又有以下必勝法則：

若規定拿到最後一個的人贏，那麼當棋子的數量 n=q(k+3)時，**後取者必勝**，當棋子的數量 n=q(k+3)+r 時，若 r=k+1 或 r=k+2，亦為**後取者必勝**，也就是以上兩種賽局可由後取者操控；但是當棋子的數量為 q(k+3)+r 時，若餘數 r=1~k，則**先取者**第一次取 r 個便可操控賽局（※當餘數不足 3 時，第 1 次須取 3 個）。

若遊戲規則為拿到最後一個的人輸，那麼當棋子的數量為 n=q(k+3)+1、n=q(k+3)+2 以及 n=q(k+3)+3 時，**後取者必勝**，也就是賽局可由後取者操控；當棋子的數量 n=q(k+3)+r 時，若餘數 r=3~k+1，則是**先取者**第一次取 r-3 或 r-2 或 r-1 個，讓所剩的棋子數為 q(k+3)+3 或 q(k+2)+2 或 q(k+2)+1，**便可得勝**，而當 n=q(k+3)時，則是先取者第一次取 k 個必勝，以上兩種賽局皆可由**先取者操控**。

我們從每人每次最少取 1 個，最多取 k 個；每人每次最少取 2 個，最多取 k 個；每人每次最少取 3 個，最多取 k 個三種情況做出推論，若有 n 個棋子，每次最少可拿 j 個，最多可拿 k 個，拿到最後一個者算輸或贏，在此遊戲型態中，

是否也存在著必勝的規則？

從以上三個研究表格作綜整，並透過數學歸納法我們做成以下推論：

若規定拿到最後一個的人贏，那麼當棋子的數量 n=q(k+j)時，**後取者必勝**，當棋子的數量 n=q(k+j)+r 時，若 r=k+1~k+j-1，亦為**後取者必勝**，也就是以上兩種賽局可由後取者操控；但是當棋子的數量為 q(k+j)+r，若餘數 r=1~k，則**先取者**第一次取 r 個便可操控賽局（※當餘數不足 j 時，第 1 次須取 j 個）。

若遊戲規則為拿到最後一個的人輸，當棋子的數量為 n=q(k+j)+r，若 r=1~j，**後取者必勝**，也就是賽局可由後拿的人操控；但是當棋子的數量 n=q(k+j)+r，若 r= j+1~k+j-1，則**先取者**第一次取 r-j 個 ~ r-1 個，讓所剩的棋子數為 q(k+j)+j ~ q(k+j)+1，**便可得勝**，而當 n=q(k+j)時，則是先取者第一次取 k 個必勝，以上兩種賽局皆可由**先取者操控**。

一、每人每次最少取 j 個，最多取 k 個的情況結論

每次所拿的棋子數	拿到最後一個的人贏	拿到最後一個的人輸
每人每次最少取 1 個，最多取 k 個的情況	n=q(k+1)（後取者必勝） n=q(k+1)+r（先取 r 個者必勝）	n=q(k+1)+1（後取者必勝） n=q(k+1)+r（先取 r-1 個者必勝） n=q(k+1)（先取 k 個者必勝）
每人每次最少取 2 個，最多取 k 個的情況 **（餘數不足 2 以 2 計取）**	n=q(k+2) （後取者必勝） n=q(k+2)+r（若 r=1~k，先取 r 個者必勝） n=q(k+2)+r（若 r=k+1，後取者必勝）	n=q(k+2)+1（後取者必勝） n=q(k+2)+2（後取者必勝） n=q(k+2)+r（若 r=3~k+1，先取 r-2 或 r-1 個者必勝） n=q(k+2)（先取 k 個者必勝）
每人每次最少取 3 個，最多取 k 個的情況 **（餘數不足 3 以 3 計取）**	n=q(k+3) （後取者必勝） n=q(k+3)+r（若 r=1~k，先取 r 個者必勝） n=q(k+3)+r（若 r=k+1~k+2，後取者必勝）	n=q(k+3)+1（後取者必勝） n=q(k+3)+2（後取者必勝） n=q(k+3)+3（後取者必勝） n=q(k+3)+r（若 r=4~k+2，先取 r-3 或 r-2 或 r-1 個者必勝） n=q(k+3)（先取 k 個者必勝）
每人每次最少取 j 個，最多取 k 個的情況 **（餘數不足 j 以 j 計取）**	n=q(k+j) （後取者必勝） n=q(k+j)+r（若 r=1~k，先取 r 個者必勝） n=q(k+j)+r（若 r=k+1~k+j-1，後取者必勝）	n=q(k+j)+r（若 r=1~j，後取者必勝） n=q(k+j)+r（若 r=j+1~k+j-1，先取 r-j ~ r-1 個者必勝） n=q(k+j)（先取 k 個者必勝）

柒、參考資料

一、羅嵩詠、陳宇軒、蔡承璋。撿石頭。47 屆國小數學科作品。

二、張鎮華。拈及其各種變形遊戲。數學傳播第三卷第二期。