Caso de Estudio: Pentágono y Polígonos Estrellados de 5 Puntas

Alexander Guacán, Karol Macas, Aymé Escobar, Richard Albán
Computación Gráfica
14774

1 de enero de 2024

1. Descripción del problema

Dado el lado de un pentágono, dibujar la figura geométrica correspondiente y los diferentes polígonos estrellados de 5 puntas, tal y como se muestra en la Figura 1. Se debe considerar que las figuras geométricas se grafican con respecto al punto $O(0,0)$.

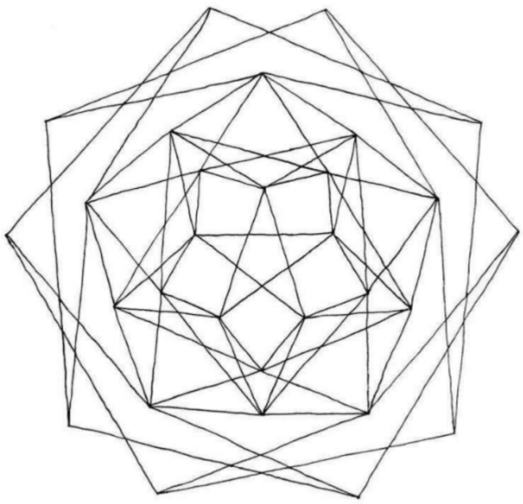

Figura 1: Péntagono y polígonos estrellados de 5 puntas.

2. Geometría de la figura

2.1. Pentágono

La figura principal para lograr solucionar el problema es el pentágono. Para graficarlo se ha optado por utilizar la intersección de un círculo circunscrito al pentágono y rectas que tienen una separación de 72° como se ve en la Figura 2, que es la medida de su ángulo central α. Cada una de estas intersecciones representa los vértices del pentágono. De esta manera, si deseamos que el pentágono esté paralelo al eje Y, bastará con sumar un ángulo inicial a la recta del primer vértice para conseguirlo. Además otro ángulo conocido es el ángulo interno del pentágono que es de 108°, donde cada línea de intersección con el círculo también es una bisectriz, por lo tanto $\beta = 54°$.

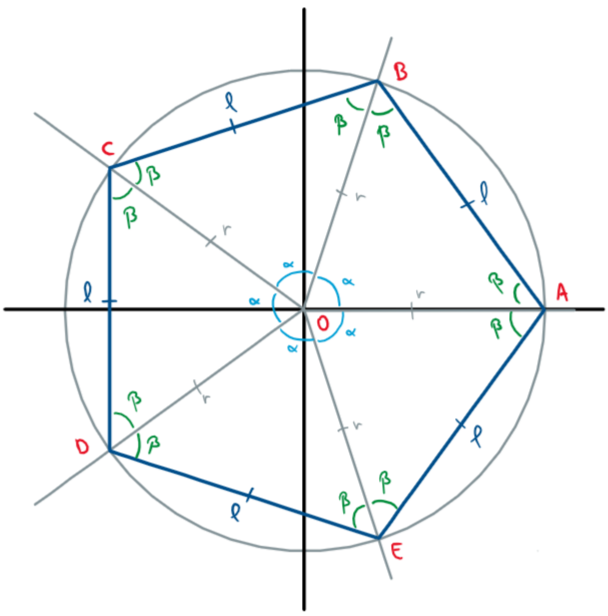

Figura 2: Vértices, ángulos y lados del hexágono.

Comenzaremos obteniendo la fórmula general para poder calcular el radio del círculo circunscrito dado la medida del lado del pentágono:

Figura 3: Triángulo interno del pentágono.

Ley de senos:

$$\frac{r}{\sin(\beta)} = \frac{l}{\sin(\alpha)}$$

$$r = l\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \tag{1}$$

Procederemos a obtener la fórmula general para calcular el punto de intersección entre el círculo circunscrito y la recta dado un ángulo θ, este ángulo representará el ángulo de separación α entre cada uno de los vértices. Recordemos que:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{2}$$

$$m = tan(\theta) \tag{3}$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \tag{4}$$

Dado que cualquier recta pasará por el centro (h, k) de la circunferencia, y que la pendiente de la recta esta en función de su ángulo, remplazamos (3) en (2):

$$y - k = tan(\theta)(x - h)$$

$$y = tan(\theta)(x - h) + k \tag{5}$$

Remplazamos (5) en (4):

$$(x-h)^2 + [tan(\theta)(x-h) + k - k]^2 = r^2$$

$$(x-h)^2 + tan^2(\theta)(x-h)^2 = r^2$$

$$[1 + tan^2(\theta)](x-h)^2 = r^2$$

Por identidad trigonométrica sabemos que:

$$1 + tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) \tag{6}$$

$$sec^2(\theta) = \frac{1}{cos^2(\theta)} \tag{7}$$

$$tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \tag{8}$$

Por lo tanto, remplazando con (6) y (7):

$$(x-h)^2 \sec^2(\theta) = r^2$$

$$\sec^2(\theta)(x^2 - 2hx + h^2) = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 = r^2 \cos^2(\theta)$$

$$x^2 - 2hx + h^2 - r^2\cos^2(\theta) = 0$$

Calculamos las raices:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
x_{1,2} &= \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - 4[h^2 - r^2 \cos^2(\theta)]}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{2h \pm \sqrt{4[h^2 - h^2 + r^2 \cos^2(\theta)]}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{2h \pm \sqrt{4r^2 \cos^2(\theta)}}{2} \\
x_{1,2} &= \frac{2h \pm 2r \cos(\theta)}{2} \\
x &= h + r \cos(\theta) \qquad (9)
\end{aligned}$$

Solo tomaremos la ecuación con signo positivo, ya que el ángulo que corresponde al vértice del pentágono es positivo. Por lo tanto, remplazando (9) y (8) en (5), obtenemos:

$$\begin{aligned}
y &= \tan(\theta)[h + rcos(\theta) - h] + k \\
y &= rcos(\theta) \tan(\theta) + k \\
y &= r \cos(\theta) \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} + k \\
y &= k + r \sin(\theta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto los vértices del pentagono en función de su ángulo de inclinación son:

$$\begin{aligned}
O(x, y) &= O(h, k) \\
A(x, y) &= A(h + r, b) \\
B(x, y) &= B(h + r \cos(\alpha), k + r \sin(\alpha)) \\
C(x, y) &= C(h + r \cos(2\alpha), k + r \sin(2\alpha)) \\
D(x, y) &= D(h + r \cos(3\alpha), k + r \sin(3\alpha)) \\
E(x, y) &= E(h + r \cos(4\alpha), k + r \sin(4\alpha))
\end{aligned} \qquad (10)$$

Con los vértices de (10), podemos graficar el primer pentágono, pero si deseamos graficar el pentágono paralelo al eje y, requerimos de un ángulo más que nos indique el ángulo inicial de inclinación como se puede observar en la Figura 4.

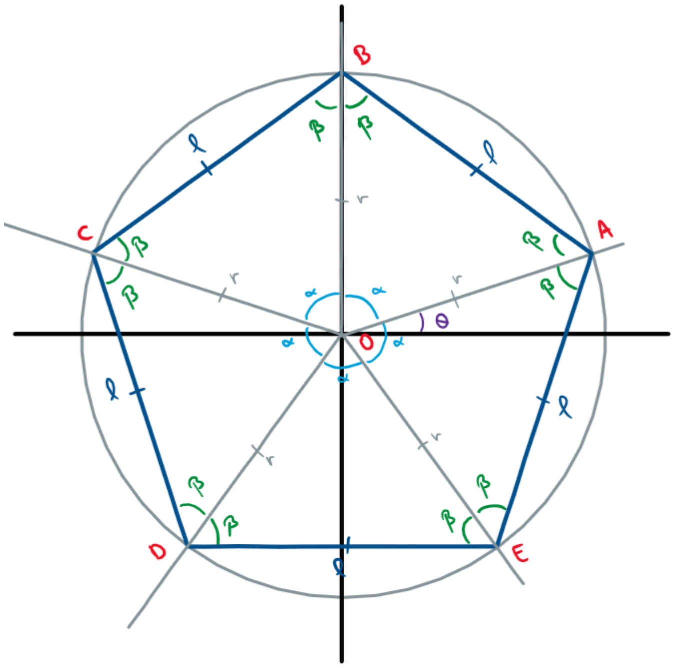

Figura 4: Pentágono vertical.

Calculamos el ángulo θ para el pentagono de la Figura 4:

$$
\begin{aligned}
\alpha + \theta &= 90 \\
\theta &= 90 - 72 \\
\theta &= 18
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Calculamos el ángulo θ para el pentágono de la Figura 5:

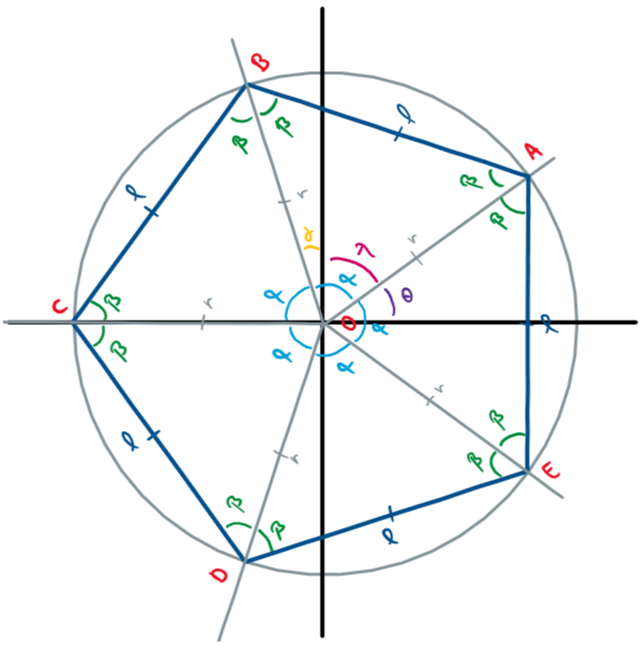

Figura 5: Pentágono vertical.

Sabemos que:

$$\alpha + \gamma = 90 \tag{12}$$
$$\gamma + \lambda = \alpha \tag{13}$$
$$\theta + \lambda = 90 \tag{14}$$

Despejamos α de (12):

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 90 \\ \alpha &= 90 - 72 \\ \alpha &= 18 \end{aligned} \tag{15}$$

Remplazamos (15) en (13):

$$\begin{aligned} \gamma + \lambda &= \alpha \\ \lambda &= 72 - 18 \\ \lambda &= 54 \end{aligned} \tag{16}$$

Por lo tanto, al remplazar (16) en (14):

$$\begin{aligned} \theta + \lambda &= 90 \\ \theta &= 90 - 54 \\ \theta &= 36 \end{aligned} \tag{17}$$

2.2. Pentágono central

Una vez graficamos los pentágonos de la Figura 2 y 5. Debemos graficar el pentágono central de la Figura 6, para ello podemos observar que el vértice superior es paralelo a una de las intersecciones I de los pentágonos externos, esto significa que la distancia entre la coordenada x_I y el origen, es el radio de la circunferencia circunscrita al pentágono central.

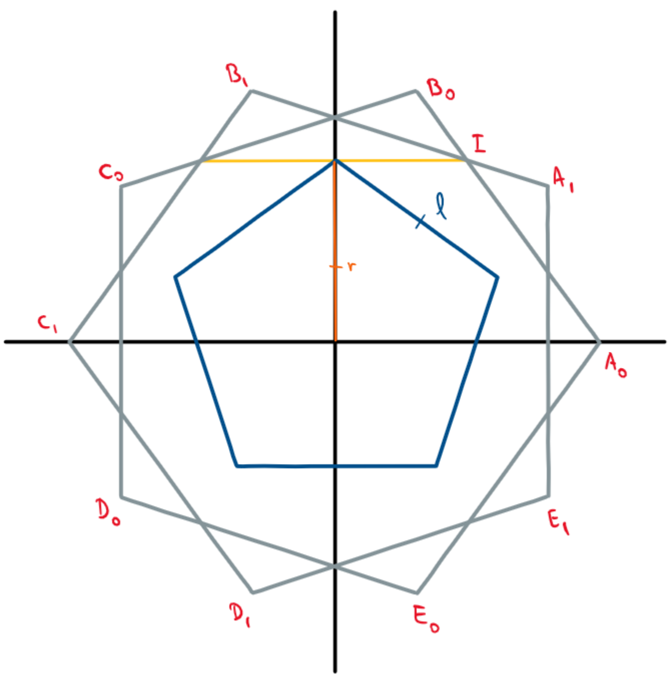

Figura 6: Pentágono central a la figura.

Por lo tanto, el radio del pentágono central es:

$$r = |y_I - y_O| \tag{18}$$

Para encontrar el punto I haremos uso del teorema del punto medio entre dos rectas:

$$Pm(x, y) = Pm(\frac{y_3 - y_1 + m_1x_1 - m_2x_3}{m_1 - m_2}, y_1 + m_1(x_{Pm} - x_1)) \tag{19}$$

Donde:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m_2 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

Entonces, si despejamos l de la Ecuación (1), obtenemos que el lado del pentágono central es:

$$l = r\frac{\sin(\alpha)}{\sin\beta} \tag{20}$$

2.3. Unión de vértices pentágonos externos y pentágono central

En la Figura 7 se ilustra como se une cada uno de los vertices de ambos pentágonos externos con el pentágono central. Aquí podemos darnos cuenta que el pentágono de la Figura 2, une cada uno de sus vértices con el anterior vértice al del pentágono central. Por el contrario, el pentágono de la Figura 5 une cada vértice con el siguiente vértice del pentágono central.

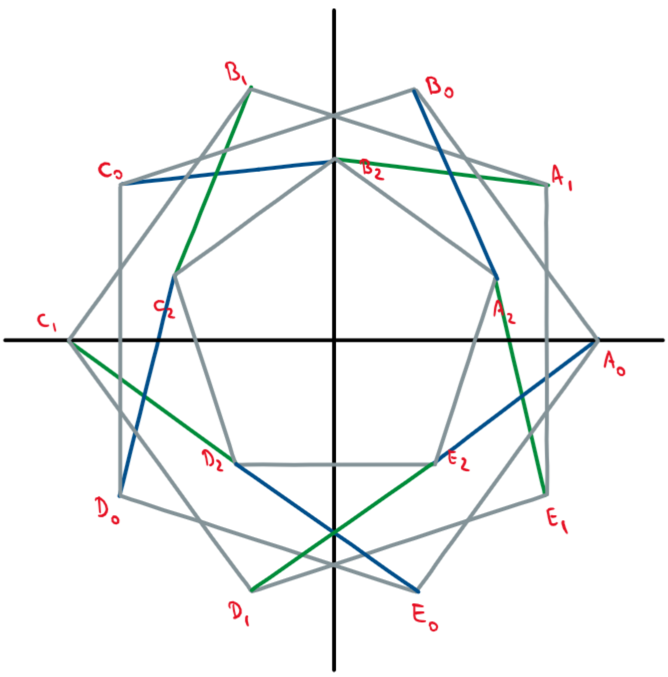

Figura 7: Unión de vértices entre pentágonos externos y pentágono central.

Entonces, lo que haremos será calcular los segmentos $\overrightarrow{P_0P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ que une los vertices P_0 del pentágono con un grado de inclinación $\theta = 0°$, con los vértices P_2 del pentágono central, y de los vértices P_1 del pentágono con $\theta = 36°$ con el pentágono central, respectivamente.

$$\overrightarrow{P_0P_2}[i] = \begin{cases} P_o[i] = P_0[i] \\ P_f[i] = P_2[(5 + i - 1) \bmod 5] \end{cases}, D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \,|\, 0 \leqslant i \leqslant 4\} \tag{21}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2}[i] = \begin{cases} P_o[i] = P_1[i] \\ P_f[i] = P_2[(5+i+1) \bmod 5] \end{cases} , D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \mid 0 \leqslant i \leqslant 4\} \quad (22)$$

La iteración de i representa a cada vértice de los pentágonos, donde $A = 0$, $B = 1$ y así sucesivamente. Además, la palabra *mod* representa el módulo o residuo entre la división de los operandos izquierdo y derecho a este operador.

2.4. Unión vértices y puntos medios del pentágono central

La siguiente parte del gráfico es la unión de los vértices del pentágono central con dos puntos medios de los lados de este pentágono. En la Figura 8, se puede visualizar la conexión de cada uno de estas medianas. Así que, primero deberemos calcular los puntos medios de cada uno de los lados del pentágono.

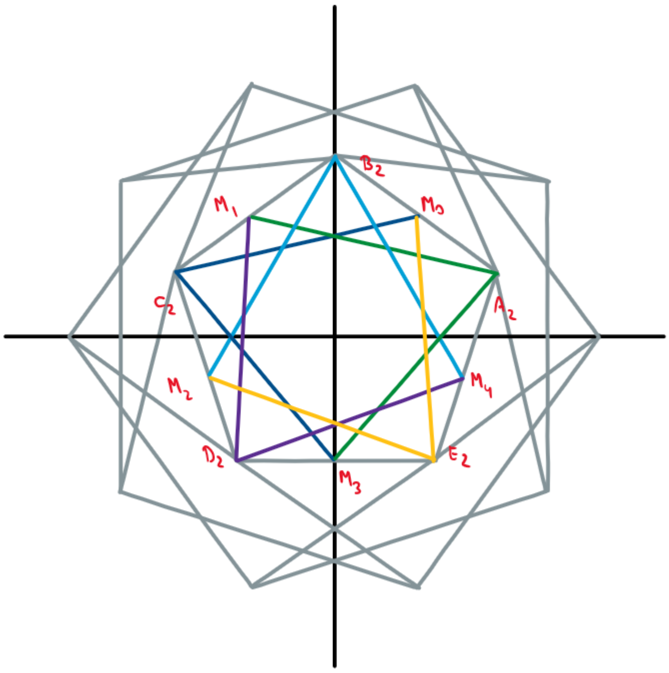

Figura 8: Unión de vértices y puntos medios del pentágono central.

Ecuación del punto medio:

$$M(x, y) = M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}) \quad (23)$$

Puntos medios del pentágono:

$$M_i(x, y) = M_i(\frac{x_i + x_{(5+i+1) \bmod 5}}{2}, \frac{y_i + y_{(5+i+1) \bmod 5}}{2}), D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \mid 0 \leqslant i \leqslant 4\} \quad (24)$$

Lo que podemos notar es que, para cada vértice, se conecta con el punto medio del siguiente lado adyacente al vértice en sentido horario y también en sentido antihorario. Por ejemplo, para el vértice A_2, su lado adyacente en sentido antihorario es $\overrightarrow{A_2B_2}$, y en sentido horario es $\overrightarrow{A_2E_2}$, por lo que su unión se dá con el lado $\overrightarrow{B_2C_2}$ y $\overrightarrow{D_2E_2}$, respectivamente.
Por lo tanto, la ecuación que replica este patrón para cada uno de los segmentos $\overrightarrow{P_2M}$ en sentido antihorario es:

$$\overrightarrow{P_2M}[i] = \begin{cases} P_o[i] = P_2[i] \\ P_f[i] = M[(5+i+1) \bmod 5] \end{cases} , D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \mid 0 \leqslant i \leqslant 4\} \quad (25)$$

Sentido horario:

$$\overrightarrow{P_2M}[i] = \begin{cases} P_o[i] = P_2[i] \\ P_f[i] = M[(5+i-2) \bmod 5] \end{cases} , D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \mid 0 \leqslant i \leqslant 4\} \quad (26)$$

2.5. Estrella de 5 puntas

El último polígono que queda por dibujar es la estrella de 5 puntas. Para graficarla, como se puede observar en la Figura 9, debemos hacerlo utlizando los vértices de un pentágono. Una estrella de este tipo se puede graficar utilizando un único trazo, conectando en un orden específico cada vértice. Podemos comenzar desde cualquier vértice, en este caso empezaremos desde le vértice A, por lo tanto, el orden de los vértices es: A, C, E, B, D, A.

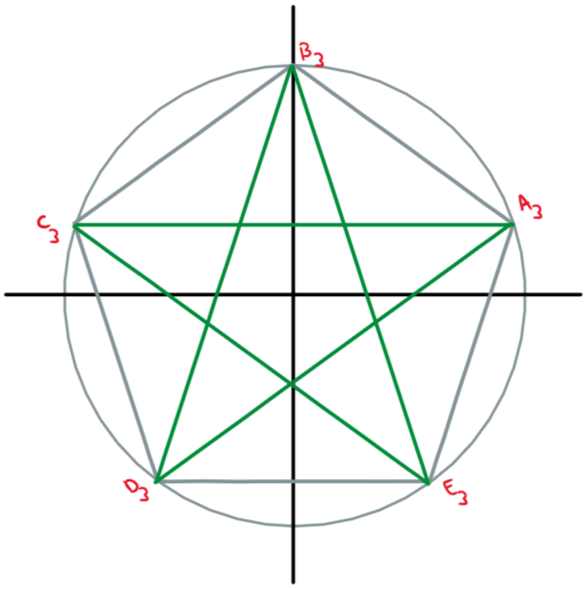

Figura 9: Estrella de 5 puntas.

El patrón a seguir para graficar la estrella, es unir un vértice con el siguiente vértice saltandose uno en sentido antihorario, esto se hace hasta que se vuelva a conectar con el vértice desde donde empezamos a dibujar.
Unión de vértices de un pentágono para dibujar estrella de 5 puntas partiendo desde cualquier vértice:

$$\overrightarrow{P_{3o}P_{3f}}[i] = \begin{cases} P_o[i] = P_3[i] \\ P_f[i] = P_3[(5+i-2) \bmod 5] \end{cases} \quad , D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \mid 0 \leqslant i \leqslant 5\} \tag{27}$$

Si observamos la Figura 1, la estrella en el centro del gráfico tiene sus vértices A y C en paralelo a los vértices A y C de los polígonos exteriores respectivamente. Dicho en otras palabras, el centro de la estrella esta trasladado en sentido vertical, donde el segmento $\overrightarrow{AC}$ está en paralelo al eje X como se puede observar en la Figura 10. Por lo tanto, el valor de h nos dará la medida en la que deberemos desplazar el centro de la estrella.

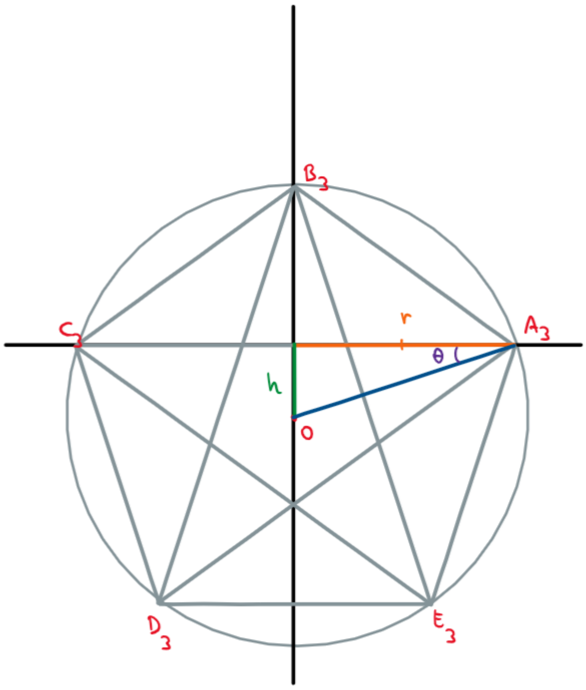

Figura 10: Estrella de 5 puntas con segmento $\overrightarrow{AC}$ paralelo al eje X.

Por ángulos alternos internos:

$$\theta = 18°$$

Por identidad trigonométrica:

$$\sin(\theta) = \frac{h}{r}$$
$$h = r\sin(\theta) \tag{28}$$

Centro de la estrella:

$$O(x, y) = O(x_O, y_O - h) \tag{29}$$

Una vez que identificamos la ubicación de la estrella de 5 puntas, debemos determinar que tan grande debe ser la misma. En la Figura 11 vemos como los vértices A y C están en paralelo a las intersecciones de los segmentos que unen los vértices y medianas $\overrightarrow{A_2M_1}$, $\overrightarrow{B_2M_4}$ y $\overrightarrow{C_2M_0}$, $\overrightarrow{B_2M_2}$ respectivamente. Además por la Figura 10 sabemos que la distancia del centro a el vértice A o C, corresponde a la medida del radio de la circunferencia circunscrita.

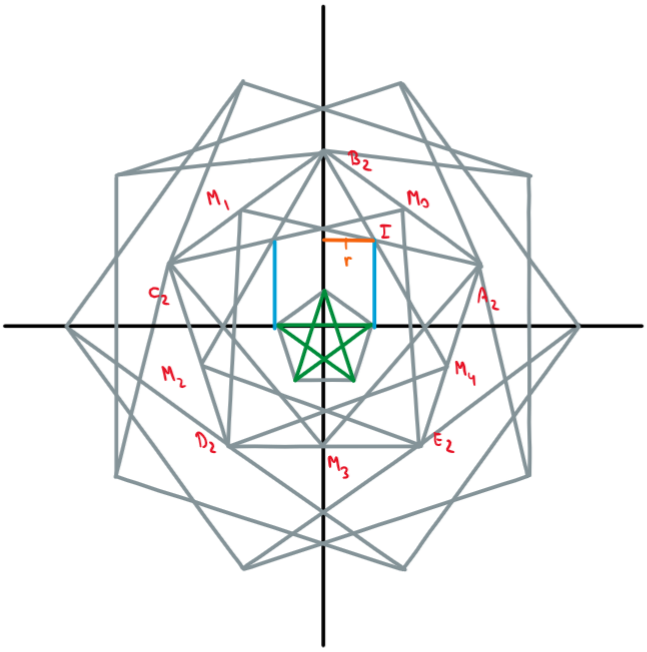

Figura 11: Estrella de 5 puntas con segmento $\overrightarrow{AC}$ paralelo al eje X.

Entonces, usando la Ecuación (19) y (20), utilizaremos el punto I que es la intersección de los segmentos $\overrightarrow{A_2M_1}$ y $\overrightarrow{B_2M_4}$, por lo tanto, el radio de la estrella es:

$$r = |x_I - x_O| \tag{30}$$

2.6. Unión medianas del pentágono central y vértices de la estrella

A continuación debemos unir cada mediana del pentágono central con dos puntas de la estrella como se ilustra en la Figura 12.

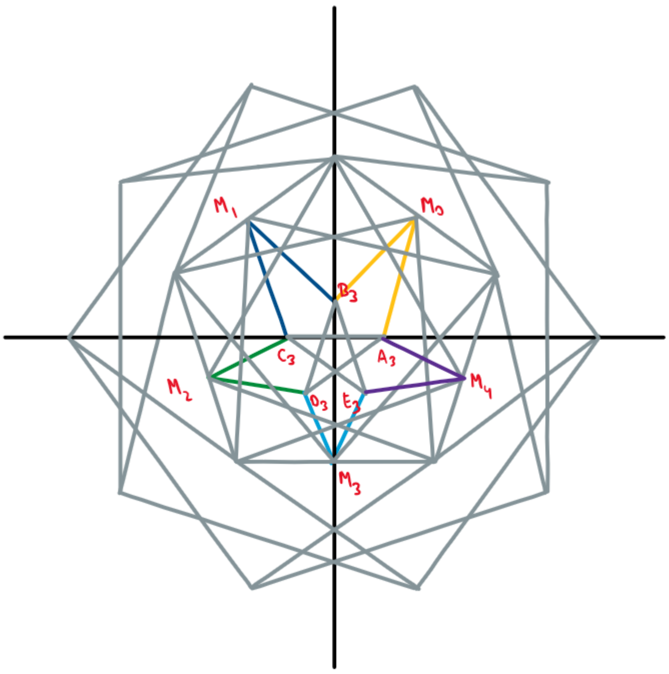

Figura 12: Unión medianas pentágono central y puntas de estrella.

Función que describe la conexión de los puntos medios del pentágono central con las puntas de las estrella en orden paralelo:

$$\overrightarrow{MP_3}[i] = \begin{cases} P_o[i] = M[i] \\ P_f[i] = P_3[i] \end{cases} \quad , D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \,|\, 0 \leqslant i \leqslant 4\} \tag{31}$$

Función que describe la conexión de los puntos medios del pentágono central con la siguiente punta de la estrella en sentido antihorario:

$$\overrightarrow{MP_3}[i] = \begin{cases} P_o[i] = M[i] \\ P_f[i] = P_3[(5 + i + 1) \bmod 5] \end{cases} \quad , D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \,|\, 0 \leqslant i \leqslant 4\} \tag{32}$$

2.7. Unión intersección de medianas del pentágono central y vértices de la estrella

Por último, tenemos que unir cada intersección de las medianas del pentágono central con dos puntas de la estrella como se ilustra en la Figura 13.

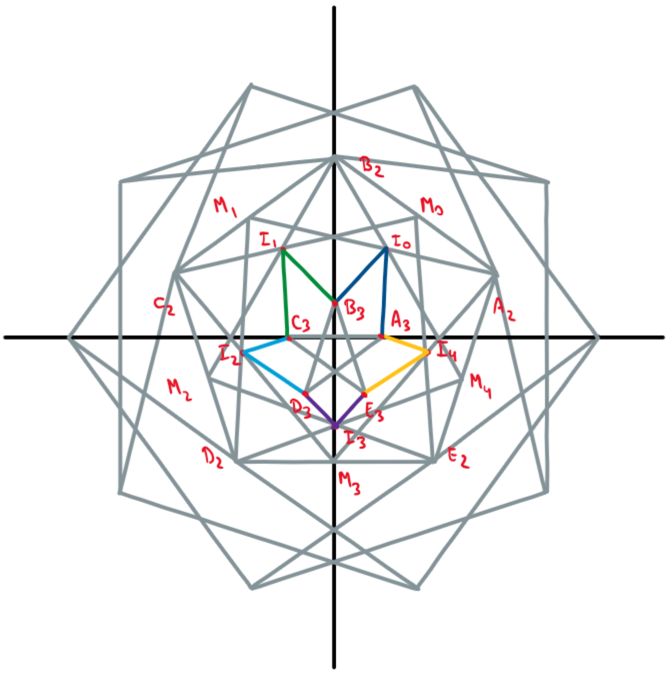

Figura 13: Unión intersección de medianas pentágono central y puntas de estrella.

Utilizando la Ecuación (19), obtenemos la función para calcular las intersecciones de las medianas del pentágono central:

$$I[i](x, y) = \begin{cases} x = Pm(\overrightarrow{P_2[i]M[(5 + i + 1) \bmod 5]}) \\ y = Pm(\overrightarrow{P_2[(5 + i + 1) \bmod 5]M[(5 + i + 1) \bmod 5]}) \end{cases} \tag{33}$$

Donde:

$$D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \,|\, 0 \leqslant i \leqslant 4\}$$

Función que describe la conexión de la intersección de medianas del pentágono central con las puntas de las estrella en orden paralelo:

$$\overrightarrow{IP_3}[i] = \begin{cases} P_o[i] = I[i] \\ P_f[i] = P_3[i] \end{cases} \quad , D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \,|\, 0 \leqslant i \leqslant 4\} \tag{34}$$

Función que describe la conexión de la intersección de medianas del pentágono central con la siguiente punta de la estrella en sentido antihorario:

$$\overrightarrow{IP_3}[i] = \begin{cases} P_o[i] = I[i] \\ P_f[i] = P_3[(5+i+1) \bmod 5] \end{cases} \quad , D = \{i \,\epsilon\, \mathbb{N} \,|\, 0 \leqslant i \leqslant 4\} \tag{35}$$

3. Algoritmos

3.1. Función *ConvertDegreeToRadians()*

1. Retornar la conversión grados a radianes.

3.2. Función *LineIntersection()*

1. Retornar el punto de intersección entre dos rectas.

3.3. Constructor *Pentagon()*

1. Inicializar variables *Side*, *Center* e *InclinationAngle*.
2. Calcular radio del círculo circunscrito del pentágono con la Ecuación (1).
3. Calcular los vértices del pentágono con la Ecuación (10).
4. Asignar cada vértice a un arreglo de puntos.

3.4. Función *ComputeSide()*

1. Retornar el valor del lado del pentágono usando la Ecuación 20.

3.5. Método *ComputeMedians()*

1. Inicializar un arreglo de puntos de tamaño 5.
2. Calcular las puntos medios de los lados del pentágono con la Ecuación (24).
3. Agregar cada punto al arreglo inicializado previamente.
4. Retornar el arreglo de puntos

3.6. Método *ComputeMedianIntersections()*

1. Llamada a la función *ComputeMedians()*.
2. Asignar resultado del paso anterior a un arreglo de puntos llamado *medians*.
3. Crear un arreglo de puntos llamado *intersections* de tamaño 5.
4. Llamada a la función *LineIntersection()* enviando como parámetro los vértices y medianas del pentágono central.
5. Asignar cada punto obtenido en el paso anterior a *intersections*.
6. Retornar *intersections*.

3.7. Método *Plot()* de la clase *Pentagon*

1. Asignar al objeto *illustrator* la funcionalidad de crear gráficos del *PictureBox* llamado *canvas*.
2. Crear un bolígrafo de color negro (Black).
3. Crear un arreglo de puntos con los vértices del pentágono: A, B, C, D, E, A.
4. Graficar un polígono con el bolígrafo y el arreglo de puntos del paso anterior.

3.8. Método *PlotInternalStar()*

1. Asignar al objeto *illustrator* la funcionalidad de crear gráficos del *PictureBox* llamado *canvas*.
2. Crear un bolígrafo de color negro (Black).
3. Crear un arreglo de puntos con los vértices del pentágono en el orden de la Ecuación (27).
4. Graficar un polígono con el bolígrafo y el arreglo de puntos del paso anterior.

3.9. Método *ComputeCenteredPentagon()*

1. Calcular radio de pentágono central usando la Ecuación (18) y llamando a la función *LineIntersection()*.
2. Calcular medida del lado del pentágono central con la llamada a la función *ComputeSide()*, enviandole el radio obtenido en el paso anterior.
3. Crear un pentágono con un tamaño de lado calculado en el paso anterior, con centro en el origen, y con un ángulo de inclinación de 18°.
4. Retornar el pentágono creado previamente.

3.10. Método *ComputeStarPentagon()*

1. Calcular radio de la estrella de 5 puntas usando la Ecuación (30).
2. Calcular el lado del pentágono circunscrito a la estrella llamando a la función *ComputeSide()*.
3. Calcular coordenada y del centro de la estrella con la Ecuación (28).
4. Crear un punto que tenga la misma coordenada x que el origen y la coordenada y calculada en el paso anterior, utilzando la Ecuación (29).
5. Crear un pentágono con un lado y centro calculado anteriormente y con un ángulo de inclinación de 18°.
6. Retornar el pentágono creado previamente.

3.11. Método *ConnectPentagonsVertices()*

1. Asignar al objeto *illustrator* la funcionalidad de crear gráficos del *PictureBox* llamado *canvas*.
2. Crear un bolígrafo de color negro (Black).
3. Dibujar lineas con el bolígrafo entre los vértices del pentágono central y los exteriores, utilizando la Ecuación (21) y (22).

3.12. Método *DrawMedians()*

1. Asignar al objeto *illustrator* la funcionalidad de crear gráficos del *PictureBox* llamado *canvas*.
2. Crear un bolígrafo de color negro (Black).
3. Dibujar lineas con el bolígrafo entre los vértices del pentágono central con sus medianas, utilizando la Ecuación (25) y (26).

3.13. Método *ConnectMediansAndVertices()*

1. Asignar al objeto *illustrator* la funcionalidad de crear gráficos del *PictureBox* llamado *canvas*.
2. Crear un bolígrafo de color negro (Black).
3. Dibujar lineas con el bolígrafo entre los vértices de la estrella de 5 puntas con las medianas del pentágono central, utilizando la Ecuación (31) y (32).

3.14. Método *ConnectMedianIntersectionsAndPoints()*

1. Asignar al objeto *illustrator* la funcionalidad de crear gráficos del *PictureBox* llamado *canvas*.
2. Crear un bolígrafo de color negro (Black).
3. Dibujar lineas con el bolígrafo entre los vértices de la estrella de 5 puntas con las intersecciones de las medianas del pentágono central, utilizando la Ecuación (34) y (35).

3.15. Constructor *StarPolygon()*

1. Inicializar punto de origen como la mitad del ancho del PictureBox y la mitad del alto del PictureBox, para las coordenadas x y y, respectivamente.
2. Crear pentágono (RightTiltedPentagon) con grado de inclinación 0° y lado determinado por el usuario.
3. Crear pentágono (LeftTiltedPentagon) con grado de inclinación 36° y lado determinado por el usuario.
4. Crear pentágono (CenteredPentagon) con grado de inclinación 18° y lado determinado por el usuario.
5. Calcular las medianas del pentágono central. Llamada a la función *ComputeCenteredPentagon()*.
6. Calcular los puntos de intersecció de las medianas del pentágono central. Llamada a la función *ComputeMedians()*.
7. Crear pentágono (StarPentagon) con grado de inclinación 18°. Llamada a la función *ComputeStarPentagon()*.

3.16. Método *Plot()* de la clase *StarPolygon*

1. Llamada a la función *Plot()* del objeto *RightTiltedPentagon*.
2. Llamada a la función *Plot()* del objeto *LeftTiltedPentagon*.
3. Llamada a la función *Plot()* del objeto *CenteredPentagon*.
4. Llamada a la función *ConnectPentagonsVertices()*.
5. Llamada a la función *DrawMedians()*.
6. Llamada a la función *PlotInternalStar()* del objeto *StarPentagon*.
7. Llamada a la función *ConnectMediansAndVertices()*.
8. Llamada a la función *ConnectMedianIntersectionsAndPoints()*.

3.17. Método *buttonPlotShapeClick()*

1. Limpiar dibujo previo del PictureBox.
2. Leer el lado del pentágono.
3. Crear un objeto *PointF* con coordenas x y y de la mitad del ancho y alto del PictureBox respectivamente.
4. Crear un objeto *StarPolygon*, pasandole el lado del pentágono y el punto creado anteriormente.
5. Llamada a la función *Plot()* del objeto *StarPolygon* creado previamente.

4. Código de la aplicación

A continuación se muestra los métodos de cada una de las clases principales necesarias para resolver el problema.

4.1. Clase *Angle*

```
public class Angle {
    public static float ConvertDegreeToRadians(float degree) {
        return degree * (float)Math.PI / 180;
    }
}
```

Figura 14: Convertir grados a radianes.

4.2. Clase *StraightLine*

```
public class StraightLine {
    public static PointF LineIntersection(PointF P1, PointF P2, PointF P3, PointF P4) {
        static float slope(PointF p1, PointF p2) => (p2.Y - p1.Y) / (p2.X - p1.X);

        float slope1 = slope(P1, P2);
        float slope2 = slope(P3, P4);

        PointF intersection = new() {
            X = (P3.Y - P1.Y + slope1 * P1.X - slope2 * P3.X) / (slope1 - slope2)
        };

        intersection.Y = P1.Y + slope1 * (intersection.X - P1.X);

        return intersection;
    }
}
```

Figura 15: Calcular punto medio entre dos rectas.

4.3. Clase *Pentagon*

```
public Pentagon(float side, PointF center, float inclinationAngle = 0) {
    Side = side;
    Center = center;
    InclinationAngle = inclinationAngle;
    Radius = Side * (float) Math.Sin(Angle.ConvertDegreeToRadians(InternalAngle)) / (float)
Math.Sin(Angle.ConvertDegreeToRadians(CenterAngle));

    for (int i = 0; i < Sides; ++i) {
        Vertices[i].X = Center.X + Radius * (float) Math.Cos(Angle.ConvertDegreeToRadians(InclinationAngle + i * CenterAngle)) *
StarPolygon.ScalarFactor;
        Vertices[i].Y = Center.Y + -Radius * (float) Math.Sin(Angle.ConvertDegreeToRadians(InclinationAngle + i * CenterAngle)) *
StarPolygon.ScalarFactor;
    }
}
```

Figura 16: Constructor de la clase *Pentagon*.

```
public static float ComputeSide(float radius) {
    return radius * (float)Math.Sin(Angle.ConvertDegreeToRadians(CenterAngle)) /
(float)Math.Sin(Angle.ConvertDegreeToRadians(InternalAngle));
}
```

Figura 17: Calcular lado del pentágono a partir del radio del círculo circunscrito.

```
public PointF[] ComputeMedians() {
    PointF[] medians = new PointF[Sides];

    for (int i = 0; i < Sides; ++i) {
        medians[i] = new PointF {
            X = (Vertices[i].X + Vertices[(Sides + i + 1) % Sides].X) / 2,
            Y = (Vertices[i].Y + Vertices[(Sides + i + 1) % Sides].Y) / 2,
        };
    }

    return medians;
}
```

Figura 18: Calcular puntos medios de cada lado del pentágono.

```
public PointF[] ComputeMedianIntersections() {
    PointF[] medians = ComputeMedians();
    PointF[] intersections = new PointF[Sides];

    for (int i = 0; i < Sides; ++i) {
        intersections[i] = StraightLine.LineIntersection(Vertices[i], medians[(Sides + i + 1) % Sides], Vertices[(Sides + i + 1) % Sides], medians[(Sides + i + 4) % Sides]);
    }

    return intersections;
}
```

Figura 19: Calcular puntos de intersección entre las medias del pentágono.

```
public void Plot(PictureBox canvas) {
    Graphics illustrator = canvas.CreateGraphics();
    Pen pen = new(Color.Black);

    var shape = Vertices;
    _ = shape.Append(shape[0]);

    illustrator.DrawPolygon(pen, shape);
}
```

Figura 20: Graficar pentágono.

```
public void PlotInternalStar(PictureBox canvas) {
    Graphics illustrator = canvas.CreateGraphics();
    Pen pen = new(Color.Black);

    PointF[] star = new PointF[Sides + 1];

    for (int i = 0, j = 0; i < star.Length; ++i, j += 2)
        star[i] = Vertices[(Sides + j) % Sides];

    illustrator.DrawPolygon(pen, star);
}
```

Figura 21: Graficar estrella interna de un pentágono.

4.4. Clase *StarPolygon*

```
private Pentagon ComputeCenteredPentagon() {
    float radiusCenteredPentagon = Math.Abs(StraightLine.LineIntersection(RightTiltedPentagon.Vertices[0], RightTiltedPentagon.Vertices[1], LeftTiltedPentagon.Vertices[0], LeftTiltedPentagon.Vertices[1]).Y - Origin.Y) / ScalarFactor;

    float sideCenteredPentagon = Pentagon.ComputeSide(radiusCenteredPentagon);

    const float parallelToOrdinateAxis = 18;
    return new(sideCenteredPentagon, Origin, parallelToOrdinateAxis);
}
```

Figura 22: Calcular medidas del pentágono central.

```
private Pentagon ComputeStarPentagon() {
    const float parallelToOrdinateAxis = 18;

    float radiusOfStar = Math.Abs(MedianIntersectionsCenteredPentagon[0].X - Origin.X) / ScalarFactor;

    float sidePentagonStar = Pentagon.ComputeSide(radiusOfStar);

    float heightFromOriginAtFirstPentagonVertex = radiusOfStar * (float)Math.Sin(parallelToOrdinateAxis);

    PointF originStar = new() {
        X = Origin.X,
        Y = Origin.Y - heightFromOriginAtFirstPentagonVertex
    };

    return new(sidePentagonStar, originStar, parallelToOrdinateAxis);
}
```

Figura 23: Calcular medidas de la estrella de 5 puntas central.

```
private void ConnectPentagonsVertices(PictureBox canvas) {
    Graphics illustrator = canvas.CreateGraphics();
    Pen pen = new(Color.Black);

    for (int i = 0; i < Pentagon.Sides; ++i) {
        illustrator.DrawLine(pen, RightTiltedPentagon.Vertices[i], CenteredPentagon.Vertices[(Pentagon.Sides + i - 1) % Pentagon.Sides]);
        illustrator.DrawLine(pen, LeftTiltedPentagon.Vertices[i], CenteredPentagon.Vertices[(Pentagon.Sides + i + 1) % Pentagon.Sides]);
    }
}
```

Figura 24: Unir los vértices de los pentágonos exteriores y el pentágono central.

```
private void DrawMedians(PictureBox canvas) {
    Graphics illustrator = canvas.CreateGraphics();
    Pen pen = new(Color.Black);

    for (int i = 0; i < Pentagon.Sides; ++i) {
        illustrator.DrawLine(pen, CenteredPentagon.Vertices[i], MediansCenteredPentagon[(Pentagon.Sides + i + 1) % Pentagon.Sides]);
        illustrator.DrawLine(pen, CenteredPentagon.Vertices[i], MediansCenteredPentagon[(Pentagon.Sides + i - 2) % Pentagon.Sides]);
    }
}
```

Figura 25: Dibujar medianas del pentágono central.

```
private void ConnectMediansAndVertices(PictureBox canvas) {
    Graphics illustrator = canvas.CreateGraphics();
    Pen pen = new(Color.Black);

    for (int i = 0; i < Pentagon.Sides; ++i) {
        illustrator.DrawLine(pen, MediansCenteredPentagon[i], StarPentagon.Vertices[i]);
        illustrator.DrawLine(pen, MediansCenteredPentagon[i], StarPentagon.Vertices[(Pentagon.Sides + i + 1) % Pentagon.Sides]);
    }
}
```

Figura 26: Unir medianas del pentágono central y vértices de la estrella de 5 puntas.

```
private void ConnectMedianIntersectionsAndPoints(PictureBox canvas) {
    Graphics illustrator = canvas.CreateGraphics();
    Pen pen = new(Color.Black);

    for (int i = 0; i < Pentagon.Sides; ++i) {
        illustrator.DrawLine(pen, MedianIntersectionsCenteredPentagon[i], StarPentagon.Vertices[i]);
        illustrator.DrawLine(pen, MedianIntersectionsCenteredPentagon[i], StarPentagon.Vertices[(Pentagon.Sides + i + 1) % Pentagon.Sides]);
    }
}
```

Figura 27: Unir intersecciones de medianas del pentágono central y vértices de la estrella de 5 puntas.

```
public StarPolygon(float pentagonSide, PointF origin) {
    const float leftHandOrientation = 36;

    Origin = origin;
    RightTiltedPentagon = new(pentagonSide, Origin);
    LeftTiltedPentagon = new(pentagonSide, Origin, leftHandOrientation);
    CenteredPentagon = ComputeCenteredPentagon();
    MediansCenteredPentagon = CenteredPentagon.ComputeMedians();
    MedianIntersectionsCenteredPentagon = CenteredPentagon.ComputeMedianIntersections();
    StarPentagon = ComputeStarPentagon();
}
```

Figura 28: Constructor de la clase *StarPolygon*.

```
public void Plot(PictureBox pictureBoxCanvas) {
    RightTiltedPentagon.Plot(pictureBoxCanvas);
    LeftTiltedPentagon.Plot(pictureBoxCanvas);
    CenteredPentagon.Plot(pictureBoxCanvas);
    ConnectPentagonsVertices(pictureBoxCanvas);
    DrawMedians(pictureBoxCanvas);
    StarPentagon.PlotInternalStar(pictureBoxCanvas);
    ConnectMediansAndVertices(pictureBoxCanvas);
    ConnectMedianIntersectionsAndPoints(pictureBoxCanvas);
}
```

Figura 29: Gráficar pentágonos y polígonos estrellados.

4.5. Clase *Form1*

```
private void buttonPlotShape_Click(object sender, EventArgs e) {
    pictureBoxCanvas.Refresh();

    try {
        float pentagonSide = float.Parse(textBoxSidePentagon.Text);
        PointF origin = new(pictureBoxCanvas.Width / 2, pictureBoxCanvas.Height / 2);

        StarPolygon starPolygon = new(pentagonSide, origin);
        starPolygon.Plot(pictureBoxCanvas);

    } catch (Exception exc) {
        MessageBox.Show("El valor ingresado no es valido: " + exc);
    }

}
```

Figura 30: Función del botón “Graficar”.

5. Corrida del programa

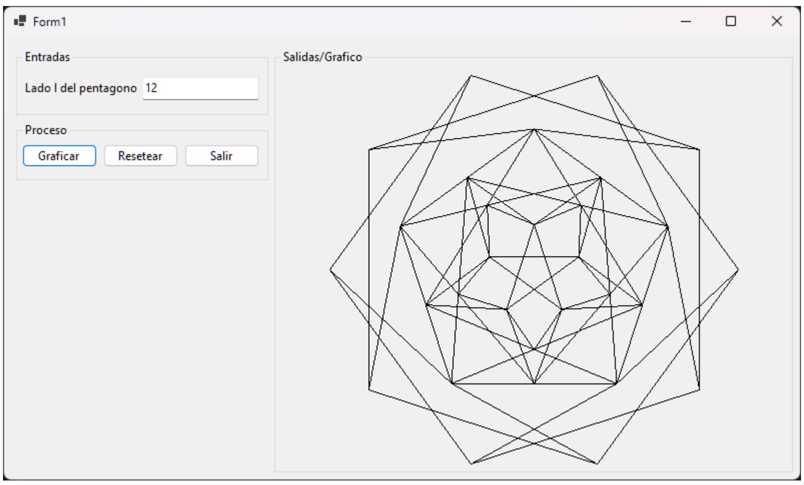

Figura 31: Ejecución del programa.