Okruh 1 – Přirozená a celá čísla

1) Definujte pojmy prvočíslo; největší společný dělitel celých čísel; celá mocnina celého čísla.
2) Určete co nejmenší celá čísla *a,b* tak, aby platilo $9a^2 = 10b^3$.
3) Určete všechny dvojice přirozených čísel *a,b* tak, aby jejich největší společný dělitel byl 20 a jejich součin byl 7200.
4) Dokažte, že výraz $n^4 - n^2$ je pro všechna přirozená *n* dělitelný 12. Pro která *n* je výraz dělitelný dokonce 24?
5) Dokažte platnost implikace: Je-li druhá mocnina přirozeného čísla sudá, je i samotné číslo sudé.
6) Dokažte, že pro všechna přirozená *n* je výraz $72^{2n+2} - 47^{2n} + 28^{2n-1}$ dělitelný 25.
7) V maximálním definičním oboru vyřešte nerovnici $\binom{x}{2} + \binom{x+3}{x+1} + \binom{x+6}{2} < 93$.

Okruh 2 – Racionální a reálná čísla

1) Určete příklad čísel a,b tak, aby platilo
   a. $a \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q} \quad \wedge \quad b \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q} \quad \wedge \quad a + b \in \mathbb{N}$
   b. $a \notin \mathbb{R} \quad \wedge \quad b \notin \mathbb{R} \quad \wedge \quad a + b \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad ab \in \mathbb{R}$
   c. $a \notin \mathbb{R} \quad \wedge \quad \frac{1}{a} \notin \mathbb{R} \quad \wedge \quad a + \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$
2) Sestrojte úsečku délky $\sqrt{18}\ cm$ užitím Pythagorovy věty, Eukleidovy věty o výšce i Eukleidovy věty o odvěsně.
3) Vyjádřete číslo $1{,}0\overline{12}$ zlomkem v základním tvaru.
4) Definujte racionální číslo a dokažte, že ani číslo $\sqrt{2}$ ani číslo $\log 3$ mezi tato čísla nepatří.
5) Zjistěte, pro která *celá* čísla *x* bude číslo $\frac{2-x\sqrt{3}}{2+x\sqrt{3}}$ číslem racionálním.
6) Dokažte, že pro všechna *kladná reálná* čísla platí $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ plus zjistěte, kdy se nerovnost změní na rovnost.
7) Dokažte, že pokud pro *kladná reálná* čísla platí $\frac{a}{b} < \frac{a+5b}{a+b}$, pak mezi těmito dvěma zlomky leží číslo $\sqrt{5}$.

Okruh 3 – Komplexní čísla

1) Rovnice $z^2 - \sqrt{8} \cdot z + 4 = 0$ má dva kořeny $z_1; z_2$. Kořen, jehož reálná i imaginární část jsou kladné, označme z_1.
   a. Oba kořeny vyjádřete v algebraickém i goniometrickém tvaru.
   b. Určete $z_1^4 + z_2^4$.
   c. Určete $\frac{z_1}{z_2}$.
   d. Určete z_1^{2014}.
2) Určete obvod a obsah mnohoúhelníku, jehož vrcholy tvoří v Gaussově rovině obrazy všech $\sqrt[6]{-64}$.
3) Zjistěte, kdy bude komplexní číslo $\frac{2-a\sqrt{3}i}{2+a\sqrt{3}i}$ komplexní jednotkou, kdy bude ryze imaginární, kdy bude reálné?
4) V oboru komplexních čísel řešte rovnici $x^2 - 3x + 3 - i = 0$.

Okruh 4 – Absolutní hodnota

1) Definujte absolutní hodnotu reálného i absolutní hodnotu komplexního čísla a určete její geometrický význam.
2) V Gaussově rovině znázorněte všechna *komplexní* čísla *z* splňující:
   a. $|z - 1| \leq |z - i|$
   b. $|z - 1| + |z - 7| = 10$

   a obě množiny popište nejen slovně, ale i pomocí analytického vyjádření.
3) Načrtněte graf funkce $y = |x^2 - 4|x| + 3|$, popište její vlastnosti a v závislosti na reálném parametru m určete počet řešení rovnice $|x^2 - 4|x| + 3| = m$.
4) Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $x \cdot |x - 2| + (x - 1) \cdot |x| \leq x$.
5) Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\left|\frac{3}{x-3} + 1\right| < 2$.

Okruh 5 – Kombinatorika

1) Definujte faktoriál, kombinační číslo, zakreslete Pascalův trojúhelník, vysvětlete pravidla jeho konstrukce.
2) Dokažte, že součet prvků na k-tém řádku Pascalova trojúhelníku (který začíná řádkem číslo 0), je 2^k. Užijte jednak binomickou větu, jednak přímou úvahu o počtu podmnožin k-prvkové množiny.
3) Vypočtěte sumy $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0}$, $\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{1}$, $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$
4) Upravte výraz $\frac{1}{(n-1)!}-\frac{2}{n!}-\frac{n^2-1}{(n+1)!}$
5) Kolik existuje anagramů slova VENIVIDIVICI
   a. Bez jakýchkoli dalších omezení
   b. Žádná dvojice I nesmí stát vedle sebe
   c. Dochází k pravidelnému střídání samohlásek a souhlásek
6) Dvacet stejných jablek a třicet stejných hrušek rozdělujeme mezi pět (různých) dětí tak, aby každé dítě dostalo alespoň 2 jablka a alespoň 4 hrušky. Kolika způsoby to lze a jak by se změnila odpověď, kdyby každé jablko i každá hruška byly různé (a tedy rozlišitelné)?
7) 18 dětí máme rozdělit do tří dvoučlenných a čtyř tříčlenných skupin. Kolika způsoby tak můžeme učinit?
8) Určete počet všech šesticiferných čísel sestavených z cifer 0,1,2 tak, aby byly dělitelné osmnácti.

Okruh 6 – Pravděpodobnost

1) Házíme současně čtyřmi šestistěnnými kostkami. Určete pravděpodobnost těchto jevů:
   a. Hodíme čtyři různé výsledky
   b. Hodíme samé liché výsledky
   c. Hodíme alespoň jednu šestku
   d. Hodíme právě jednu šestku
   e. Hodíme dvě a dvě stejná čísla (nikoli však čtyři stejná)
2) Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se šesti dětmi bude
   a. 6 chlapců
   b. Více chlapců než děvčat
   c. Aspoň dva chlapci
3) Test má deset otázek, každá má pět variant odpovědí – jednu správnou a čtyři špatné. Jaká je pravděpodobnost, že při náhodné volbě odpovědí nastane jev:
   a. Liché otázky odpovíme správně, sudé špatně
   b. Právě osm otázek odpovíme správně
   c. Uděláme nejvýše jednu chybu
   d. Uděláme aspoň jednu chybu
4) V zásuvce A je 7 bílých a 3 černé koule, v zásuvce B jsou 4 bílé a 6 černých koulí, v zásuvce C 8 bílých a 2 černé koule. Náhodně vybereme jednu zásuvku a z ní vytáhneme současně tři koule.
   a. Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme 2 bílé a jednu černou kouli?
   b. Jaká je pravděpodobnost, že pokud už po vytažení držíme v ruce 2 bílé a jednu černou kouli, že jsme použili zásuvku B nebo C?
5) Elektrický obvod se větví na dvě větve. Horní větev obsahuje dva rezistory, spodní větev obsahuje tři rezistory. Pravděpodobnost toho, že každý jeden rezistor je funkční, je 0,8. Jaká je pravděpodobnost toho, že obvodem poteče proud?
6) Ze slova KOULE vytvoříme náhodně anagram. Jaká je pravděpodobnost toho, že anagram
   a. Nebude mít na žádné pozici původní písmeno? (tzn. že anagram nebude mít první písmeno K, druhé písmeno nebude O atd.)
   b. Bude mít aspoň tři písmena na správné pozici.

Okruh 7 – Kvadratická funkce, rovnice i nerovnice

1) Načrtněte graf funkce $y = -x^2 + 4x + 5$, popište její vlastnosti, její lokální extrém nalezněte jednak přímou úpravou, jednak pomocí derivace a spočtěte obsah plochy uzavřené osou *x* a grafem této funkce. V jejím bodě $[1; ?]$ Napište rovnice tečny, normály a té přímky, která sice není tečnou, ale má s grafem funkce společný jen jeden bod.
2) Rovnice $x^2 + x + 2 = 0$ má kořeny $x_{1,2}$. Aniž byste je jakkoli hledali, napište alespoň jednu kvadratickou rovnici, která má kořeny $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$; $y_2 = \frac{x_2}{x_1}$. Kolik takových rovnic existuje a jaký mají vztah k té Vaší nalezené?
3) Rovnice $(m + 1)x^2 + (2m + 3)x + (m - 1) = 0$ s reálným parametrem m a neznámou x. Určete všechny hodnoty parametru m tak, aby daná rovnice měla
   a. Právě jeden reálný kořen, který také určete.
   b. Právě dva reálné kořeny, z nichž jeden bude kladný a druhý záporný.
   c. Alespoň jeden kořen rovný 0.
4) Vyřešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $\frac{(x^2+2x-3)(2x^2+3x-2)(x^2+1000)}{(2x^2-3x+1)(x^2+5x+6)(x^2+e^x)} > 0$.
5) Nalezněte takovou primitivní funkci $F(x)$ k funkci $f(x) = (x - 2)(x - 5)$ tak, aby $F(6) = 4$.
6) Určete obsah plochy ležící v prvním kvadrantu uzavřené mezi křivkami $y = x^2$; $y = 4x^2$; $y = 4$.
7) Určete definiční obor nerovnice a vyřešte ji v $\mathbb{R}$ $\sqrt{1 - x^2} \geq x + 1$.

Okruh 8 – Mocniny a odmocniny

1) Graficky vyřešte nerovnici $x^{-4} > -x^{-3}$
2) Určete hodnotu výrazu $\frac{3x-2y-10}{x+2y-7}$ pro $x = 2 + \sqrt{2}$ $\quad y = 3 - \sqrt{2}$
3) Zjednodušte $\frac{3\sqrt{45}-2\sqrt{50}+3\sqrt{18}-3\sqrt{20}}{2\sqrt{32}-\sqrt{80}+\sqrt{5}-\sqrt{98}}$
4) Zjednodušte $\sqrt[6]{\frac{2^3\cdot\sqrt[3]{3}}{6}} : \sqrt[3]{\frac{6}{3\sqrt{3}}}$ a vyjádřete jako jedinou odmocninu.
5) Ověřte konvergenci a v pozitivním případě vypočtěte $1 + \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \cdots$
6) Zjednodušte $\left(\frac{1}{a-\sqrt{ab}} + \frac{1}{a+\sqrt{ab}}\right) \cdot \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$
7) Zjednodušte $\left[\left(\frac{8-x}{2+\sqrt[3]{x}}\right) : \left(2 + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{2+\sqrt[3]{x}}\right)\right] + \left[\left(\sqrt[3]{x} + \frac{2\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-2}\right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}-4}{\sqrt[3]{x^2}+2\cdot\sqrt[3]{x}}\right]$
8) Určete předpis inverzní funkce k funkci $y = x^2 + 2x + 5; x \in (-\infty; -1\rangle$.

Okruh 9 – exponenciální funkce, rovnice a nerovnice

1) Načrtněte graf funkcí $y = 2^x$; $y = 2^{-x}$; $y = e^x$; $y = e^{-x}$. Popište jejich vlastnosti.
2) Porovnejte podle velikosti čísla $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{1452}$; $\left(-\frac{8}{27}\right)^{242}$
3) Funkce $y = 1 + e^{-2x}$ je definována pro $x \in \langle 0; 1\rangle$. Určete obsah plochy pod křivkou a objem rotačního tělesa vzniklého rotací této plochy kolem osy x.
4) Určete všechny hodnoty reálného parametru m tak, aby exponenciální funkce $f(x) = \left(\frac{m+1}{m-1}\right)^x$ byla klesající.
5) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice a nerovnice
   a. $16^x - 6 \cdot 4^x + 8 \leq 0$
   b. $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$
   c. $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$
   d. $\frac{1}{2^x+2} < \frac{2^x}{2^x-1}$
6) Vypočtěte $\int e^{-x} \cdot \sin(2x)\, dx$

Okruh 10 – logaritmická funkce, rovnice a nerovnice

1) Načrtněte grafy funkcí $y = \log_2 x$; $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = \ln x$; popište jejich vlastnosti
2) Určete $\log_{\sqrt{8}} \sqrt[3]{16^5}$
3) Načrtněte graf funkce $y = 1 + |\ln|x||$ a na základě tohoto grafu rozhodněte (v závislosti na reálném parametru m) o počtu řešení rovnice $1 + |\ln|x|| = m$.
4) Určete definiční obor funkcí $y = \log(\log(\sin x))$; $y = \sqrt{\log \frac{x+1}{x-1}}$
5) Vypočítejte obsah plochy pod grafem funkce $y = \ln x$ pro $x \in \langle 1; e^2 \rangle$. Dále spočítejte objem rotačního tělesa vzniklého rotací této plochy kolem osy x.
6) Vyjádřete číslo Z pomocí čísla A. $Z = \log_6 16$ $A = \log_{12} 27$
7) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice a nerovnice
    a. $log_2^2 x + 2log_2 x = 3$
    b. $x^{2+\log x} = 100x$
    c. $\log_2 x - \log_4 x + \log_{16} x = \frac{3}{4}$
    d. $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 4) \geq -3$

Okruh 11 – goniometrické funkce, rovnice a nerovnice

1) Definujte funkce $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $y = tg(x)$, $y = cotg(x)$ a popište jejich vlastnosti.
2) Stanovte definiční obor funkce $y = \sqrt{\frac{2 \cdot \sin(x) - 1}{\cos(x)}}$
3) Určete, pro která reálná m má rovnice $3 \cdot \sin(10x) = \frac{m+1}{m}$ alespoň nějaké reálné řešení.
4) Pro reálné t platí $t \in \langle \frac{\pi}{2}; \pi \rangle$, $\sin t = \frac{4}{5}$. Určete přesnou hodnotu $tg(4t)$.
5) Dokažte, že pro přípustné hodnoty proměnných platí $\frac{\sin(\frac{\pi}{6}+x) - \sin(\frac{\pi}{6}-x)}{\cos(\frac{\pi}{3}+x) + \cos(\frac{\pi}{3}-x)} = \sqrt{3} \cdot tg(x)$
6) Vypočtěte $\int_0^{\frac{\pi}{6}} sin^5 x \cdot cos^2 x \, dx$ a určete geometrický význam výsledku výpočtu.
7) V trojúhelníku ABC platí (při obvyklém značení) $cos\alpha = \frac{1}{4}$ $\cos\beta = -\frac{1}{3}$. Určete přesnou hodnotu $cos\gamma$.
8) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnice a nerovnice
    a. $tg^3 x + tg^2 x - 3tgx - 3 = 0$
    b. $\sqrt{2\sin(x)} = -\sqrt{3} \cdot tg(x)$
    c. $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 6x \cdot \cos 2x$
    d. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}$
    e. $tg(3x - \frac{\pi}{6}) \leq 1$

Okruh 12 – soustavy rovnic, rovnice vyšších stupňů

1) Vyřešte rovnice (tam, kde je to vhodné, užijte substituci):
   a. v $\mathbb{R}$: $(x^2-3x)^3-(x^2-3x)^2-10x^2+30x-8=0$
   b. v $\mathbb{C}$: $\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4=-16$
   c. v $\mathbb{Q}$: $x^8+3x^7+2x^6-2x^4-4x^3-x^2-x+2=0$ (opravdu POUZE v $\mathbb{Q}$)
2) Pro které hodnoty reálného parametru m mají rovnice $x^2+mx+1=0=x^2+x+m$ společný reálný kořen?
3) Určete všechny průsečíky přímky $2x+3y-10=0$ s kuželosečkou $x^2+xy-25=0$.
4) Určete všechny hodnoty reálného parametru m tak, aby řešením soustavy byla jediná uspořádaná dvojice nezáporných čísel: $2x-my=\frac{2}{m-1} \quad \wedge \quad x+2y=\frac{m+5}{m-1}$.
5) Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu rovnic s reálnými neznámými x, y, z a reálným parametrem m:
   $$mx+y-z=1 \qquad x+my-z=1 \qquad -x+y+mz=1$$
6) Řešte v $\mathbb{R}$ reciprokou rovnici $x^9-3x^8-4x^7+4x^6+2x^5+2x^4+4x^3-4x^2-3x+1=0$.
7) Nalezněte nějakou reciprokou rovnici nejmenšího možného stupně, jejímž jedním kořenem bude $1+2i$ a zároveň všechny koeficienty této rovnice budou reálné.

Okruh 13 – číselné a algebraické výrazy

1) Porovnejte podle velikosti čísla
   a. $\frac{666\,666\,666\,664}{666\,666\,666\,667}$ versus $\frac{555\,555\,555\,554}{555\,555\,555\,557}$ b. $\sqrt{17+\sqrt{17}}$ versus $1+\sqrt{17-\sqrt{17}}$
   $c.$ $99!+101!$ Vs. $2\cdot 100!$ $d.$ $111\,222\,333\,445^2-1$ vs. $111\,222\,333\,444^2+2\cdot 111\,222\,333\,444$
2) Dané výrazy zjednodušte a udejte podmínky, za nichž mají smysl
   $\left[\left(\frac{p+q}{q}-\frac{2p}{p+q}\right)\cdot\left(1+\frac{q+1}{p}+\frac{q}{p^2}\right)\right]:\frac{p^2+q^2}{p^2q}$ $\left(\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{xy}\right):(x-y)+\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$
3) Kořeny rovnice $2x^2+x+1=0$ označme u, v. Aniž je vypočítáte, určete přesnou hodnotu výrazu $\frac{u^2+3uv+v^2}{u^3+v^3}$.
4) Je dán výraz $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{15}$. Určete přesnou hodnotu třináctého členu pro x=64. Dále určete, zda daný binomický rozvoj obsahuje absolutní člen (a pokud ano, kolikátý v pořadí je).
5) Určete $\int \frac{x^5+x^4+2x^3-3x^2-24x-36}{x^4-16}$ dx

Okruh 14 – Posloupnosti a řady

1) Uvažme posloupnost $\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$. Popište její vlastnosti (monotonie, omezenost, limita pro $n\to\infty$) a všechna tvrzení dokažte.
2) Posloupnost vyjádřenou rekurentně $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{n\cdot(n+1)}$; $a_1=2$ vyjádřete vzorcem pro n-tý člen.
3) Sečtěte $(-29)+(-26)+(-23)+\cdots+25+28+31$.
4) Přičteme-li k číslům 3,8,18 vždy stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Sečtěte jejích prvních osm členů.
5) V aritmetické posloupnosti platí (při obvyklém značení) $a_2+a_4-a_5=2$; $a_6-a_3-a_1=7$. Zapište ji jednak rekurentně, jednak vzorcem pro n-tý člen.
6) Mezi kořeny rovnice $x^2-65x+64=0$ vložte pět čísel tak, aby vzniklo sedm členů a) geometrické b) aritmetické posloupnosti.
7) Zjednodušte $\frac{3+6+9+\cdots+3n}{n+\frac{n}{3}+\frac{n}{9}+\cdots}$
8) Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $1-\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}-\cdots=\frac{2x-4}{x+6}$

Okruh 15 – limity posloupností a limity funkcí

1) Definujte pojem limita posloupnosti a vlastní limita funkce ve vlastním bodě. Ukažte, že každá posloupnost může mít maximálně jednu limitu a každá funkce v každém bodě také maximálně jednu limitu.
2) Určete limity posloupností/funkcí
   a. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n+3}{(2n-1)^2}$
   b. $\lim_{n\to\infty} \frac{4+7+10+\cdots+(3n+1)}{n^2+4n+5}$
   c. $\lim_{x\to1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$
   d. $\lim_{x\to0} \frac{2-2\cdot\cos x}{x^2}$
   e. $\lim_{x\to7} \frac{2x-14}{\sqrt{x+2}-3}$
   f. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+5}{4-x^3}$
3) Z definice derivace dokažte, že $(x^2+3x-1)' = 2x+3$
4) Sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(n+3)}$
5) Určete všechny asymptoty funkce $y = \frac{x^2}{x-2}$.
6) Rozeberte součet 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + … z <u>korektního</u> matematického pohledu.

Okruh 16 – derivace funkce

1) Z definice derivace dokažte, že pro všechna přípustná reálná *x* platí $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2) Vypočtěte derivace funkcí $y = \ln\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; $y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}$; $y = arctg\,\frac{1+x}{1-x}$.
3) Určete $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)$, je-li $f(x) = \sin(3x)\cdot\cos(2x)$.
4) Určete intervaly konvexnosti/konkávnosti a inflexní body funkce $f(x) = e^{4-x}\cdot(x^2-x+2)$.
5) Napište rovnici tečny i normály ke grafu funkce $y = \frac{x+1}{x-2}$ v bodě $[3;?]$ ležícím na grafu funkce.
6) Ve kterých bodech má funkce z předchozího příkladu tečnu rovnoběžnou s přímkou x + 3y = 0?

Okruh 17 – průběh funkce

1) Určete definiční obor funkce $y = \sqrt{\frac{x^2-5x-6}{4-x}}$.
2) Určete obor hodnot funkce $y = \frac{3x}{x^2+9}$.
3) Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{(x-3)^2}{x-4}$ (definiční obor, intervaly, kdy funkce nabývá kladných/záporných hodnot, intervaly monotónnosti, lokální extrémy, intervaly konvexnosti/konkávnosti, inflexní body, asymptoty a graf)

Okruh 18 – extrémy funkcí

1) Definujte lokální minimum/maximum funkce a pojednejte o jeho souvislosti s derivací funkce.
2) Nalezněte extrémní hodnotu výrazu $5x-x^2+3$ a zdůvodněte kvalitu (maximum/minimum) tohoto extrému.
3) Určete lokální extrémy funkce $y = x^2\cdot e^{-x}$.
4) Určete globální extrémy funkce $y = x^3-3x^2-24x+10$ na intervalu $I = \langle -3; 5\rangle$
5) Do koule o poloměru R vepíšeme válec maximálního objemu. Kolik procent objemu koule zabírá?
6) Číslo 2 rozdělte na dva nezáporné sčítance tak, aby jejich součin byl maximální, resp. minimální.

Okruh 19 – neurčitý a určitý integrál

1) Dokažte, že funkce $F(x) = -\frac{\cos(2x)}{2}$ a $G(x) = 2 \cdot sin^2x + cos^2x$ jsou primitivní k téže funkci f, tuto funkci určete a také určete konstantu, o kterou se funkce F a G liší.
2) Vypočtěte $\int cotg^2x \ \ dx$
3) K funkci $y = \ln x$ nalezněte takovou její primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $[e; 2]$.
4) Vypočtěte $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx$
5) Vypočtěte $\int e^{-x} \cos x \, dx$
6) Určete obsah plochy ležící v prvním kvadrantu uzavřené mezi křivkami o rovnicích $y = x^2, y = 4x^2; y = 4.$
7) Užitím určitého integrálu dokažte vzorce pro objem koule, kuželu, komolého kuželu.

Okruh 20 – trojúhelníky

1) Užitím podobnosti trojúhelníků dokažte Eukleidovy věty o výšce, odvěsně a z nich i Pythagorovu větu.
2) Na ciferníku hodin určete odchylku přímky „1-6“ od přímky „8-9“
3) Určete počet všech a)rovnostranných b)rovnoramenných c) pravoúhlých trojúhelníků, jejichž všechny tři vrcholy leží ve vrcholech pravidelného 24-úhelníku.
4) Proveďte rozbor konstrukce trojúhelníku, je-li (při obvyklém značení) dáno t_a, t_b, v_c.
5) V trojúhelníku (při obvyklém značení) platí $\sin \propto = \frac{1}{3}; a = 2; c = 6.$ Určete přesnou hodnotu $\cos \beta$.
6) V trojúhelníku (při obvyklém značení platí $a = 3, b = 5, \gamma = \frac{2\pi}{3}$. Určete poloměry kružnic opsané i vepsané tomuto trojúhelníku.
7) Jsou dány body $A[-2; 0]$ $B[1; -1]$. Určete body C,D tak, aby B byl střed AC, trojúhelník ACD byl rovnoramenný, bod D byl hlavním vrcholem trojúhelníku a ležel na přímce $3x - 2y - 1 = 0$.

Okruh 21 – mnohoúhelníky

1) Definujte tečnový (tětivový) čtyřúhelník a vyslovte + dokažte „základní“ větu o velikostech jeho stran (úhlů).
2) Na ciferníku hodin vyznačme čtyřúhelník „2-5-6-11“. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů i odchylku úhlopříček.
3) Konvexní čtyřúhelník – spojíme středy sousedních stran. Jaký čtyřúhelník vznikne a proč?
4) Konvexní n-úhelník – jaký má počet úhlopříček a jaký má součet velikostí vnitřních úhlů?
5) Sestrojte lichoběžník ABCD (základny AB,CD), je-li dáno
    a. a+c, e, f (= obě úhlopříčky), δ
    b. a, α plus víme, že délky stran b,c,d jsou stejné (ale tuto délku neznáme)
6) Vypočítejte obvod a obsah pravidelného dvanáctiúhelníku a) opsaného b) vepsaného kružnici o poloměru R.
7) Ve čtyřúhelníku ABCD platí a=6, b=3, c=5, d=4, f=7 (délka BD). Určete velikosti jeho vnitřních úhlů.
8) V Gaussově rovině je umístěn pravidelný šestiúhelník tak, že jeho střed je v počátku GR a jeden jeho vrchol reprezentuje obraz čísla $1 + i$. Určete zbylých pět vrcholů šestiúhelníku.

Okruh 22 – kružnice

1) Definujte kružnici, zapište její středovou rovnici. Vyslovte Thaletovu větu a její platnost dokažte. Definujte středový, obvodový a úsekový úhel příslušný oblouku kružnice, uveďte vztah mezi nimi a tento vztah dokažte ve speciálním případě, kdy obvodový a středový úhel příslušný témuž oblouku kružnice mají „společné" rameno.
2) Napište obecnou rovnici Thaletovy kružnici sestrojené nad průměrem AB, kde $A[1;-4]$ $B[7;4]$.
3) Nalezněte střed a poloměr kružnice o rovnici $x^2+y^2+4x-8y=0$.
4) Kružnice o poloměru 5 cm, bod A vzdálený od středu kružnice 13 cm. Vypočtěte délku úseček AB, kde B je bod dotyku tečen vedených z bodu A k této kružnici.
5) Napište a dokažte vztah pro poloměr kružnice vepsané do trojúhelníku, známe-li délky všech jeho tří stran.
6) Čtverci ABCD o straně délky $2\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)$ vepíšeme kružnici. Zároveň bodem B vedeme sečnu této kružnice tak, že její průsečíky X,Y s kružnicí tvoří rovnostranný trojúhelník SXY (S je střed čtverce i kružnice). Určete velikost úseček BX, BY.
7) Je dána přímka a dva body A,B, ani jeden na přímce neleží, ale leží ve stejné polorovině určené touto přímkou. Sestrojte kružnici tak, aby se dotýkala dané přímky a procházela oběma body A,B.
8) Nalezněte rovnici kružnice, jejíž střed leží na ose prvního a třetího kvadrantu a samotná kružnice prochází body K,L, kde $K[3;5]$ $L[-1;3]$.

Okruh 23 – vzdálenosti

1) Popište algoritmus na analytické nalezení vzdálenosti bodu od přímky v rovině i v prostoru a bodu od roviny.
2) Určete velikost výšek v trojúhelnících ABC
    a. $A[1;1]$ $B[2;3]$ $C[0;4]$
    b. $A[0;1;0]$ $B[-1;0;1]$ $C[1;0;0]$
3) V pravidelném čtyřbokém hranolu ABCDEFGH o podstavě (ABCD) s hranou délky a a výšce $2a$ určete vzdálenosti
    a. bodu G od přímky AH
    b. bodu A od roviny BCE
4) V pravidelném čtyřbokém jehlanu ABCDV o podstavě s hranou délky a a výšce $2a$ určete vzdálenost středu hrany AD od roviny BCV.
5) Určete vzdálenost mimoběžek $p=\{[t;1;1-t];t\in\mathbb{R}\}$, $q=\{[1;s;1+s];s\in\mathbb{R}\}$

Okruh 24 – odchylky

1) Definujte odchylku dvou přímek v rovině i v prostoru, odchylku přímky a roviny.
2) Vysvětlete souvislost kolmosti vektorů a jejich skalárního součinu a užijte tohoto poznatku při nalezení všech hodnot reálného parametru m tak, aby vektory $(1-m;2;m)$ a $(m;2;2)$ byly kolmé.
3) Určete souřadnice bodu D tak, aby ABCD (v tomto pořadí!!!) byl rovnoběžník a určete odchylku jeho úhlopříček. $A[-3;-2;0]$ $B[3;-3;1]$ $C[5;0;2]$.
4) V pravidelném čtyřbokém jehlanu ABCDV o podstavě s hranou délky a a výšce v určete odchylku přímek BD a XV, kde X je střed AD.
5) V pravidelném čtyřstěnu ABCD určete odchylku dvou sousedních stěn.
6) Určete odchylku přímky $p=\{[1-t;1+t;t]\ t\in\mathbb{R}\}$ od roviny ABC. $A[-1;1;1]$ $B[2;-1;0]$ $C[0;0;1]$.

Okruh 25 – obsahy a povrchy

1) Napište vztah pro výpočet obsahu trojúhelníku, znáte-li délky dvou stran a velikost úhlu sevřeného těmito stranami a tento vztah dokažte.
2) Užitím integrálního počtu odvoďte vzorec pro povrch koule, kužele, komolého kužele.
3) Pravidelný osmiúhelník je a) vepsán b) opsán kružnici o poloměru R. Určete jejich obsahy.
4) Do koule vepíšeme rovnostranný válec a rovnostranný kužel. V jakém poměru jsou povrchy těchto tří těles?
5) Vypočtěte obsah plochy uzavřené v prvním kvadrantu mezi křivkami $y = \frac{1}{9}x^2;\quad y = x^2;\quad y = 1.$
6) Krychle ABCDEFGH má hranu a. Čtverci ABCD je opsán kruh, do čtverce EFGH je vepsán kruh. Oba tyto kruhy jsou podstavy komolého kuželu o výšce rovné hraně krychle. Určete povrch komolého kuželu.

Okruh 26 – objemy

1) Kouli o poloměru R jsou a) vepsány b) opsány rovnostranný válec a rovnostranný kužel. Určete poměry objemů těchto tří těles.
2) Integrálním počtem odvoďte vzorce pro objem koule, kužele, rotačního komolého kužele.
3) Krychle ABCDEFGH má hranu a. Čtverci ABCD je opsán kruh, do čtverce EFGH je vepsán kruh. Oba tyto kruhy jsou podstavy komolého kuželu o výšce rovné hraně krychle. Určete objem komolého kuželu.
4) Do rotačního komolého kuželu s poloměry podstav $r_1; r_2$ je vepsána koule tak, že se dotýká nejen obou podstav, ale i pláště komolého kuželu. Určete objem komolého kuželu.
5) Určete objem tělesa vzniklého rotací obrazce omezeného čarami $y = \ln x\,; x = 1; x = e^2$ kolem osy x.
6) Vypočtěte objem čtyřstěnu ABCD, $A[1; 2; 0]$ $B[-1; 0; 1]$ $C[0; 1; 1]$ $D[1; 1; -1]$

Okruh 27 – vektory a vektorové prostory

1) Určete všechny hodnoty reálného parametru m tak, aby vektory $\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}$ byly a) kolmé b) rovnoběžné.
$$A[1-m; 0; m]\ B[1; 1-m; 0]\ C[2+m; 1-m; 1]\ D[0; 1; -m]$$
2) V krychli uvažme vektory $\vec{x} = \overrightarrow{AB}; \vec{y} = \overrightarrow{AD};\ \vec{z} = \overrightarrow{AG}$. Střed hrany CG označme X, střed hrany FG označme Y. Určete vektory $\overrightarrow{XY};\ \overrightarrow{AE}$ pomocí lineární kombinace vektorů $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$.
3) Dokažte, že množina $\{[t; s; 0; 0; s; t]\ s \in \mathbb{R}; t \in \mathbb{R}\}$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{R}^6$. Určete jeho dimenzi a nějakou bázi tohoto podprostoru.
4) Dokažte, že vektory $\overrightarrow{e_1}(1; 1; 1; 2); \overrightarrow{e_2}(1; 1; 2; 1); \overrightarrow{e_3}(1; 2; 1; 1); \overrightarrow{e_4}(2; 1; 1; 1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ a určete souřadnice vektoru $(-3; 0; -2; 0)$ v této bázi.
5) O vektorech $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ víme, že jsou jednotkové a že jejich součtem je nulový vektor. Co všechno se dá říct o výsledku výpočtu $\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{x}\cdot\vec{z} + \vec{y}\cdot\vec{z}$?

Okruh 28 – přímky v rovině

1) V rovnici přímky $p\colon 2x - my + 1 = 0$ určete všechny hodnoty reálného parametru m tak, aby přímka p:
   a. Procházela bodem $[1; 3]$
   b. Byla kolmá k přímce $2x + 3y - 2 = 0$
   c. Byla rovnoběžná s přímkou $y = 3x + 1$
2) Nalezněte obraz přímky $x + y - 1 = 0$
   a. ve středové souměrnosti podle středu $[1; 2]$
   b. v osové souměrnosti podle osy o rovnici $y = 3$.
3) Načrtněte graf funkce $y = 2x + 1 + 2\cdot|x-1| + |x|$
4) Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ v bodě $A[-2; f(-2)]$.
5) V rovině je dáno 10 bodů, z nichž 4 leží na jedné přímce a žádná další trojice na jedné přímce neleží. Kolik určují přímek?

Okruh 29 – přímky a roviny v prostoru

1) Je dána krychle ABCDEFGH o hraně délky a. Bod X je střed strany AB, Y střed BC, Z střed CG.
   a. Sestrojte řez krychle rovinou XYZ
   b. Dokažte, že tímto řezem je pravidelný šestiúhelník, jehož obvod a obsah určete.
   c. Sestrojte průnik úsečky DF s rovinou řezu.
   d. Dokažte, že DF je kolmá na rovinu řezu.
   e. Určete vzdálenost bodu D od roviny řezu.
   f. Sestrojte průsečnici roviny řezu s rovinou BDH.
   g. Určete délku úsečky, kterou má tato průsečnice „zavřenou“ v krychli.
2) V prostoru uvažme bod $A[1; 0; -1]$ a přímku $p = \{[t; 2 + t; 1 - t]\ t \in \mathbb{R}\}$.
   a. Určete obecnou rovnici roviny určenou bodem A a přímkou p.
   b. Určete bod osově symetrický k bodu A podle osy p.
   c. Určete obraz přímky p ve středové symetrii podle bodu A.
   d. Určete vzdálenost bodu A od přímky p.

Okruh 30 – kuželosečky

1) Pro každé $p \in \left\{-9; -1; 0; \frac{1}{36}; 1; 36\right\}$ rozhodněte, zda rovnice $x^2 + py^2 = 36$ je rovnicí kuželosečky. Pokud ano, načrtněte ji a popište její vlastnosti.
2) Napište rovnici kružnice opsané trojúhelníku KLM. $K[1; -1]$ $L[0; 2]$ $M[-1; 3]$
3) Určete všechny hodnoty reálného parametru m, pro něž bude kuželosečka singulární. Pro každou hodnotu pak určete typ kuželosečky: $x^2 + (m-1)xy + m^2y^2 + 2x + 2my = 0$
4) Do elipsy $x^2 + 9y^2 = 9$ vepíšeme rovnostranný trojúhelník tak, že jeho jeden vrchol splyne a) s hlavním b) s vedlejším vrcholem elipsy. Určete souřadnice zbývajících dvou vrcholů trojúhelníku.
5) Ke kuželosečce $x^2 - 2xy + 2x + 4y - 5 = 0$ veďte tečnu rovnoběžnou s přímkou $x - 8y = 0$.