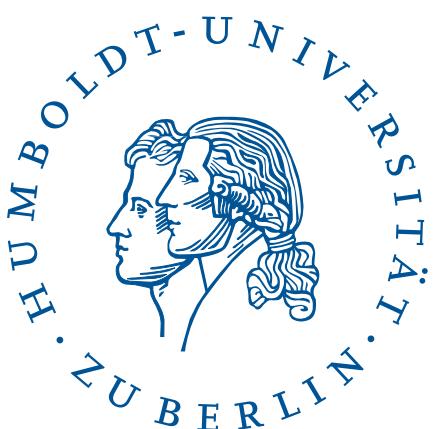


# **Untersuchung der Temperaturabhängigkeit von Resonanzen in photonischen Kristallstrukturen**

## **BACHELORARBEIT**

**zur Erlangung des akademischen Grades  
Bachelor of Science (B. Sc.)  
im Fach Physik**



**eingereicht an der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I  
Institut für Physik  
Humboldt-Universität zu Berlin**

von Herrn Niko Nikolay  
geboren am 17.11.1987 in Berlin

Betreuung: Prof. Dr. O. Benson  
Prof. Dr. A. Peters

eingereicht am: 14. September 2011

# Zusammenfassung

In dieser Bachelorarbeit werden Resonanzen in photonischen Kristallen hinsichtlich ihrer Temperaturabhängigkeiten untersucht. Es wird vor allem auf die Temperaturabhängigkeit der Resonanzfrequenzen und Güten einer L3-Kavität eingegangen. Diese in einer Galliumphosphid-Membran (GaP-Membran) eingelassene Struktur wird theoretisch und experimentell untersucht. Neben der Wärmeleitfähigkeit von GaP bei tiefen Temperaturen, wird auch die Erwärmung der Kavitäten durch Laserbestrahlung quantifiziert. Die Laserbestrahlung kann einen dramatischen Einfluss auf die Kavitätentemperatur haben. Diese steigt bei 4.6 K um  $5 \pm 2 \text{ K}/\mu\text{W}$  und bei 300.6 K um  $(9 \pm 3) \cdot 10^{-2} \text{ K}/\mu\text{W}$ .

Das folgende Bild zeigt grobe Eckpfeiler der vorliegenden Arbeit und ist als eine schematische Übersicht, die während oder erst nach dem Lesen der Arbeit verständlich wird, gedacht.

## Schlagwörter:

photonischer Kristallresonator, L3-Kavität, temperaturabhängige Resonanz und Güte, Wärmeleitfähigkeit, Galliumphosphid

# Abstract

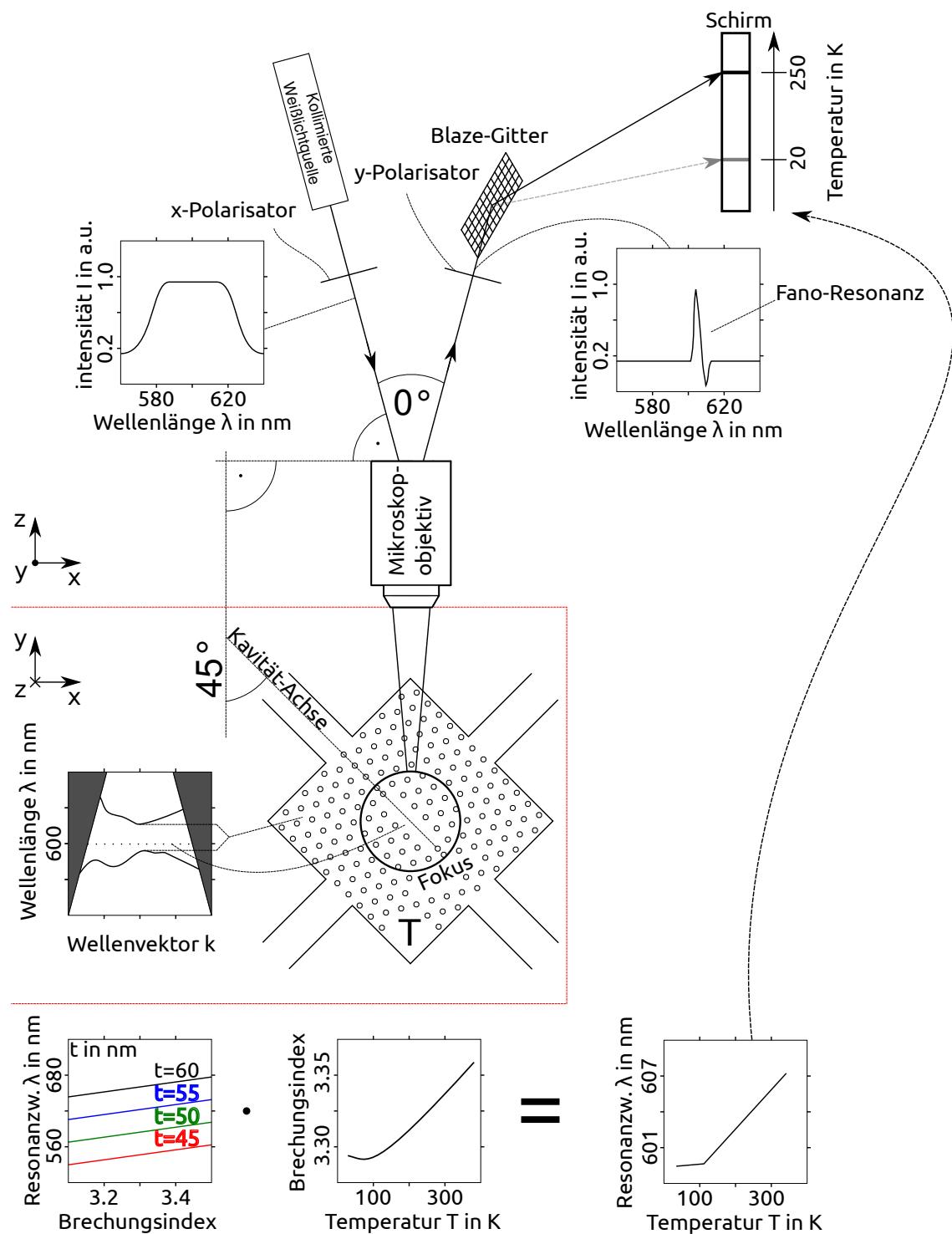
In this bachelor thesis, the temperature dependency of resonances in photonic crystals is examined. This study emphasizes the L3-cavity, located in a gallium-phosphide-membrane (GaP-membrane), while focusing on the temperature dependence of both the resonance frequency and the quality factor. Both were evaluated over a wide temperature range - theoretically and experimentally. The thermal conductivity of GaP on low temperatures and the heating effect, while irradiating with a laser on the L3-cavity, are quantified. The results are dramatic: while a laser shines on the cavity, at 4.6 K, the cavity is heated by  $5 \pm 2 \text{ K}/\mu\text{W}$  and at 300.6 K by  $(9 \pm 3) \cdot 10^{-2} \text{ K}/\mu\text{W}$ .

With the used measuring method and the results from this bachelor thesis, one can imagine applications such as the noninvasive *in situ* temperature-measuring of L3-cavities: even a temperature stabilization can be envisioned.

The following picture demonstrates a rough overview of this bachelorthesis. It is meant to be guide while reading the thesis.

## Keywords:

photonic crystal, L3-cavity, temperature dependence of resonance and quality factor, thermal conductivity, gallium phosphide



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen photonischer Kristalle</b>	<b>3</b>
2.1. Photonische Kristalle . . . . .	3
2.2. Maxwell-Gleichungen in Halbleitern . . . . .	4
2.3. Direktes Kristallgitter . . . . .	5
2.4. Reziprokes Gitter . . . . .	6
2.5. Brillouinzone . . . . .	7
2.6. Numerisches Lösungsverfahren . . . . .	8
2.7. Die Bandstruktur (quasi) zweidimensionaler photonischer Kristalle . . . . .	8
2.7.1. Ursprung der Bandlücke . . . . .	9
2.8. Güte . . . . .	10
<b>3. Theorie der L3-Kavität in photonischen Kristallmembranen aus GaP</b>	<b>12</b>
3.1. Innere Totalreflexion und Güteoptimierung . . . . .	13
3.2. Bandstruktur und Feldverteilung . . . . .	13
3.3. Abstrahlcharakteristik der L3-Kavität . . . . .	14
3.4. Verhalten bei Temperaturänderung . . . . .	15
3.4.1. Theoretische Vorhersage der Resonanzentwicklung . . . . .	15
3.4.2. Theoretische Vorhersage zur Entwicklung der Güte . . . . .	16
<b>4. Experimentelle Realisierung</b>	<b>18</b>
4.1. Messmethode . . . . .	18
4.2. Messaufbau . . . . .	20
4.3. Temperatureinstellung . . . . .	22
<b>5. Ergebnisse und Auswertung</b>	<b>24</b>
5.1. Spektrum . . . . .	24
5.2. Messung im Bereich der Raumtemperatur . . . . .	24
5.2.1. Wärmeaustausch . . . . .	25
5.3. Messung bei tiefen Temperaturen bis Raumtemperatur . . . . .	28
5.3.1. Temperaturabhängige Resonanzverschiebung . . . . .	28
5.3.2. Temperaturabhängigkeit der Güte . . . . .	28
5.3.3. Aufheizung der Kavität durch Laserbestrahlung hoher Intensität	29
<b>6. Ausblick</b>	<b>32</b>
<b>A. Von den Symmetrien zur Brillouinzone</b>	<b>33</b>
Die Operatorschreibweise und die Hermitizität . . . . .	33
Diskrete Translastionsinvarianz: das Blochtheorem . . . . .	34
Zeit- Dreh- und Spiegelsymmetrie der Master-Gleichung . . . . .	35
Brillouinzone . . . . .	37

# Abbildungsverzeichnis

2.1.	Übersicht photonischer Kristalle . . . . .	3
2.2.	Hexagonal angeordneter Kristall . . . . .	6
2.3.	irreduzible Brillouin-Zone des hexagonalen Gitters . . . . .	7
2.4.	Eine TE-Bandstruktur einer gelochten Membran . . . . .	9
3.1.	Schematische Darstellung des L3-Defekts, REM-Aufnahme einer Membran . . . . .	12
3.2.	Bandstruktur und Feldverteilung der L3-Kavität . . . . .	14
3.3.	Polarisierte Moden . . . . .	14
3.4.	Resonanzfrequenzabhängigkeit vom Brechungsindex und Brechungsindexabhängigkeit von der Temperatur . . . . .	15
3.5.	Eindringtiefen des Lichts aus Galliumphosphid in Luft . . . . .	17
4.1.	Illustration der Messmethode; schematische Darstellung der Polarisationsdrehung . . . . .	19
4.2.	Winkelabhängige Polarisation; Phasenlage um die Resonanzwellenlänge	20
4.3.	Darstellung des Messaufbaus . . . . .	21
5.1.	Spektrum der L3-Kavität . . . . .	24
5.2.	Resonanzmessung um Raumtemperatur . . . . .	26
5.3.	Wärmeaustausch, Wasserablagerung, sowie Oxidation der Membran .	27
5.4.	Resonanzmessung von 4.6 K bis 300.6 K; $\epsilon$ -Verlauf bei 1, 10 und 100 kHz . . . . .	29
5.5.	Verlauf der Güte von 4.6 K bis 300.6 K . . . . .	30
A.1.	Vollständige Drehung . . . . .	36
A.2.	Konstruktion der irreduziblen BRILLOUIN-Zone . . . . .	37

# 1. Einleitung

In den vergangenen Jahrzehnten schritt die Forschung und Entwicklung in der Halbleiterelektronik rasant voran. Die elektronischen Eigenschaften von Halbleitern werden unter anderem durch ihren kristallinen Aufbau und die gezielte Einbringung von Fremdatomen bestimmt.

Heutzutage wird in der gesamten Informationsverarbeitung standardmäßig Halbleiterelektronik eingesetzt. Da sie in Zukunft voraussichtlich an ihre Grenzen stößt, gibt es Bestrebungen hin zur integrierten Optik. Eine Möglichkeit optische Schaltkreise zu integrieren ist die Verwendung photonischer Kristalle. Hier geht man ganz ähnlich vor wie bei der Halbleiterelektronik: ein Medium, in dem sich Licht ausbreitet, kann durch einen periodisch modulierten Brechungsindex (der im Prinzip das Analogon zum elektrischen Potential im Halbleiter ist) und durch Störstellen in dieser Periodizität, verschiedene Bauteile hervorbringen. Es wurden bereits Wellenleiter, Strahlteiler, Interferometer und Mikroresonatoren realisiert. Gerade letztere sind von besonderem Interesse, da sie Licht bestimmter Wellenlängen auf kleinsten Raum einsperren können. Damit lässt sich die Wechselwirkung von Licht mit Materie besser untersuchen. Die hohe Modendichte im Resonator kann quantenmechanische Effekte bestimmter Partikel, die im Resonator eingebracht wurden, hervorrufen [1]. Da Mikroresonatoren unter anderem die Grundlage für weitere Forschungen an diesen hybriden nanophotonischen Elementen bilden, stehen sie im Fokus dieser Arbeit.

Es ist wichtig, die Temperatur der untersuchten Hybridsysteme zu kennen, denn wie sich im Laufe dieser Arbeit herausstellen wird, können sich Eigenschaften wie die Größe der Güte oder die Lage der Resonanz im Frequenzspektrum mit der Temperatur wesentlich ändern. Auch werden diverse quantenmechanische Effekte erst bei niedrigen Temperaturen sichtbar. Manche Autoren haben vorgeschlagen, durch Ändern der Temperatur die Resonanz eines Mikroresonators zu schalten [2, 3].

In dieser Arbeit werden zweidimensionale photonische Kristalle untersucht, die nur wenig thermischen Kontakt mit der Umgebung haben und somit auch nur vermindert Wärme austauschen können. Zudem haben diese Kristalle eine Ausdehnung von wenigen zehn Quadratkilometern. Bei verschiedenen Experimenten ist es nötig, sie durch einen Laser mit mehreren zehn Mikrowatt Leistung anzuregen. Durch den schlechten Wärmekontakt zur Umgebung kann die durch den Laser eingebrachte Wärmemenge zur lokalen Aufheizung des Kristalls führen.

Die Temperatur wird über die Lage der Resonanzfrequenz bestimmt. Der Brechungsindex photonischer Kristalle ändert sich mit der Temperatur. Dadurch verschiebt sich auch die Resonanzfrequenz. Andere Temperaturmessungen sind aufgrund der Größe des Kristalls nicht möglich.

Die Messungen erfolgten mit einem Konfokalmikroskop. Dieses wurde mit gekreuzten Polarisatoren versehen, um mit wenig Leistung arbeiten zu können (was nötig ist, um die Temperatur allein durch die Messung nicht merklich zu beeinflussen). Das auf die Kavität treffende Licht wird reflektiert und dessen Polarisation bei erreichen der Resonanzwellenlänge teilweise gedreht. Das reflektierte Licht wird durch zwei verschiedene Mechanismen zum Teil phasengleich und zum Teil phasenverschoben

reflektiert. Die Interferenz dieser beiden Reflexionen ergeben eine FANO-Resonanz im Reflexionsspektrum. Die gemessenen Spektren werden durch Anpassen dieser Resonanzen ausgewertet [4].

Das zweite Kapitel beginnt mit den theoretischen Grundlagen photonischer Kristalle: Zunächst werden die MAXWELL-Gleichungen eingeführt und für den phottonischen Kristall angepasst. Es ergibt sich ein Eigenwertproblem, dessen Operator hermitesch ist. Diverse Symmetrien, wie z.B. die der diskreten Translation werden diskutiert, um so die irreduzible BRILLOUIN-Zone abzuleiten. Diese ist äußerst wichtig, um zu verstehen, warum die im Anschluss diskutierten Bandstrukturen den gesamten Kristall hinsichtlich der Lichtausbreitung charakterisieren.

Die theoretischen Grundlagen des L3-Defekts - eine mögliche Realisierung einer optischen Kavität - werden im dritten Kapitel diskutiert. Dabei wird sowohl auf die Güte als auch auf die Abstrahlcharakteristik, die Bandstruktur und das Verhalten dieser Kavität bei verschiedenen Temperaturen eingegangen. Zudem werden für die experimentell untersuchte L3-Kavität aus Galliumphosphid theoretische Vorhersagen bezüglich der Resonanzfrequenz und der Güte in Abhängigkeit der Temperatur getroffen.

Das vierte Kapitel widmet sich der experimentellen Realisierung. Zuerst wird auf die Messmethode mit gekreuzten Polarisatoren eingegangen, dann auf den Messaufbau. Da ein großer Temperaturbereich umspannt wurde (von 4.6 bis 370 K), gab es zwei Aufbauten.

Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit der Auswertung der Ergebnisse: Unter anderem wird die Auswertungsmethode an einem Spektrum beispielhaft besprochen. Außerdem werden andere äußere Einflüsse, die das Messergebnis verfälscht haben könnten, untersucht. Neben der temperaturabhängigen Resonanzverschiebung wird auch die temperaturabhängige Güte des Resonators und die Erwärmung der Kavität durch einen Laser aufgezeigt.

## 2. Theoretische Grundlagen photonischer Kristalle

In photonischen Kristallen ist der Brechungsindex periodisch moduliert. Dies ist das Analogon zu periodischen (elektrischen) Potentialen in Festkörpern, wodurch Bandstrukturen entstehen. Die theoretischen Grundlagen ähneln einander sehr: Konzepte wie die BRILLOUIN-Zone, der reziproke Raum, die eben erwähnte Bandstruktur und das BLOCH-Theorem werden zur Beschreibung dieser Strukturen verwendet. Der wesentliche Unterschied zwischen den Theorien zu Beschreibung von Festkörpern und photonischen Kristallen liegt bei den zugrunde liegenden Gleichungen: Während Elektronen in Festkörpern der skalaren SCHRÖDINGER-Gleichung genügen, wird bei photonischen Kristallen das elektromagnetische Feld durch die makroskopischen MAXWELL-Gleichungen beschrieben.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit zweidimensionalen photonischen Kristallen. Allerdings sind viele der theoretischen Schlussfolgerungen auch auf ein- und dreidimensionale Kristalle übertragbar. Die folgende Theorie befasst sich zuerst mit der Lichtausbreitung in den Kristallen. Die Grundlagen ab Abschnitt 2.3 werden eingeführt um die Bandstrukturen des defektfreien Kristalls zu verstehen, die zusammen mit dem L3-Defekt den Gegenstand der experimentellen Untersuchung darstellen.

Der gesamte Theorieteil lehnt sich an die Diskussion in [5] an.

### 2.1. Photonische Kristalle

Die verschiedenen Arten photonischer Kristalle unterscheidet man durch ihre Dimensionalität. Es existieren ein- zwei-, quasi zwei- und dreidimensionale Kristalle. Bei eindimensionalen Kristallen kann der Brechungsindex periodisch in eine Richtung variieren, bei Zweidimensionalen in zwei Richtungen usw. (siehe Abbildung 2.1).

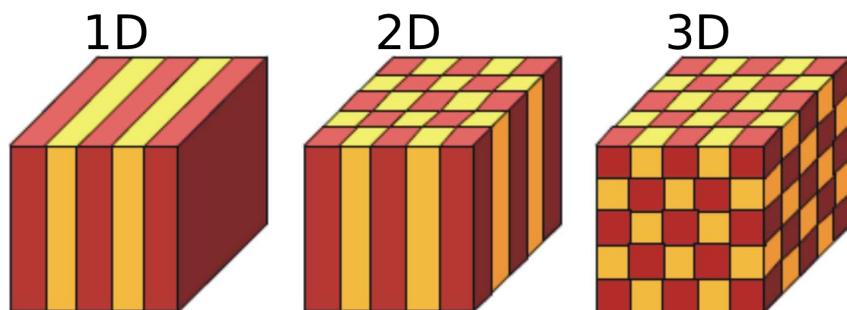


Abbildung 2.1.: Beispiele zur Übersicht der verschiedenen photonischen 1-D, 2-D und 3-D Kristalle nach [6], rote und gelbe Materialien haben verschiedene Brechungsindices.

Quasizweidimensionale photonische Kristalle haben die Eigenschaft, ihren Brechungsindex in zwei Richtungen periodisch zu ändern, während sie in die dritte Dimension endlich ausgedehnt sind und dort keinen periodischen Brechungsindex haben. Ein Beispiel dafür ist die im Rahmen dieser Bachelorarbeit untersuchte Struktur: eine Membran endlicher Dicke, in die periodisch Löcher eingebracht sind (Abbildung 3.1).

Genauer handelt es sich beim untersuchten photonischen Kristall um eine von Luft umgebene gelochte Membran aus Galliumphosphid (III-V-Halbleiter), dessen Luflöcher hexagonal angeordnet sind.

Die folgenden theoretischen Überlegungen werden zeigen, dass durch den periodisch modulierten Brechungsindex in Form dieser Löcher eine Bandstruktur im  $\mathbf{k}$ -Raum auftritt. Bei geschickter Wahl der geometrischen Abmessungen kann auch eine Bandlücke geschaffen werden: Elektromagnetische Wellen in diesem Frequenz- bzw. Wellenlängenbereich können sich im Kristall nicht ausbreiten.

Im nächsten Abschnitt wird auf die Lichtausbreitung eingegangen, ihre Wellennatur ist essenziell für die Entstehung der Bänder.

## 2.2. Maxwell-Gleichungen in Halbleitern

Die MAXWELL-Gleichungen bilden die Grundlage der mathematischen Beschreibung der Ausbreitung elektromagnetischer Felder in photonischen Kristallen [7]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}. \quad (2.4)$$

In diesen Gleichungen bezeichnen  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  und  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  die vektorielle elektrische und magnetische Feldstärke.  $\epsilon(\mathbf{r})$  ist die Dielektrizitätskonstante,  $\epsilon_0$  die Influenzkonstante,  $\mu_r(\mathbf{r})$  die magnetische Permeabilität,  $\mu_0$  die Induktionskonstante,  $\rho$  die freie Ladungsdichte und  $\mathbf{J}$  die Stromdichte. Die Symbol  $\nabla$  symbolisiert den Nabla-Operator,  $\partial_t$  die partielle Zeitableitung  $\partial_t = \partial/\partial t$ .

Da es in undotierten Halbleitern wie sie hier verwendet werden, keine freien Ladungen oder interne Feldquellen gibt, verschwinden  $\rho$  und  $\mathbf{J}$ . Zudem ist das Material isotrop und wird als linear angenähert. Weiterhin ist die relative Permeabilität etwa bei eins, sodass der Einfachheitshalber  $\mu_r(\mathbf{r}) = 1$  gesetzt wird.

Mit diesen Ersetzungen und den Materialgleichungen für lineare Medien ( $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)/(\epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r}))$  und  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{r}) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ) lauten die MAXWELL-Gleichungen:

$$\nabla \cdot \epsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \partial_t \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2.7)$$

$$\epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (2.8)$$

Diese Form der MAXWELL-Gleichungen erlaubt es, das Differentialgleichungssystem zu entkoppeln. Man erhält eine von der elektrischen Feldstärke entkoppelte Gleichung für die magnetische Feldstärke:

$$\nabla \times [\epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] = -\mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

Mit Ausnutzung der Relation  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$  ergibt sich schließlich:

$$\nabla \times [\epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

Im Weiteren wird nur noch mit Gleichung 2.9 gearbeitet, da mit Gleichung 2.8 die elektrische Feldstärke aus der Magnetischen bestimmt werden kann. Es ist einfacher, die magnetische Feldstärke auszurechnen, da diese nur zwei Komponenten besitzt. Hat  $\mathbf{H}$  die Form  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , folgt durch einsetzen in Gleichung 2.6, dass  $\nabla \cdot \mathbf{H} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$  ist. Dies bedeutet dass  $\mathbf{H} \perp \mathbf{k}$ , also transversal zur Ausbreitungsrichtung ist.

Geht man davon aus, dass der Kristall weit gegenüber der Periodizität des Brechungsindex ausgedehnt ist, kann man Gleichung 2.9 durch den Ansatz  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) := \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t}$  und (Entwicklung nach ebenen Wellen) in einen orts- und einen zeitabhängigen Teil separieren [6]. Im Folgenden wird  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{H}(\mathbf{r})$  und  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$  gesetzt. Der Operator  $\partial_t$  besitzt, angewendet auf die magnetische Feldstärke, den Eigenwert  $-i\omega$ . Für die elektrische Feldstärke gilt das Gleiche, man kann sie nun durch  $i\omega^{-1} \epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) \epsilon_0^{-1} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  erhalten. Für den übrig bleibenden Ortsanteil ergibt sich ein Eigenwertproblem, die sogenannte Master-Gleichung [5]:

$$\boxed{\nabla \times [\epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] = \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{H}(\mathbf{r}).} \quad (2.10)$$

Die Master-Gleichung weist im Kristall einige Symmetrien auf, die die nötige Lösungsmenge zum vollständigen Charakterisieren der Lichtausbreitung im Kristall einschränken. Zuerst muss jedoch klargestellt werden, was mit einem Kristall gemeint ist (Abschnitt 2.3). Da der Kristall im reziproken Raum ( $\mathbf{k}$ -Raum) charakterisiert wird, wird dieser ebenfalls eingeführt (Abschnitt 2.4). Schließlich kommt es durch Ausnutzen aller Symmetrien zur irreduziblen BRILLOUIN-Zone (Abschnitt 2.5).

### 2.3. Direktes Kristallgitter

Um zu verstehen, wie es zu Bandstrukturen in photonischen Kristallen kommt, ist es vor allem wichtig, das reziproke Gitter einzuführen. Dieses wiederum entsteht aus dem direkten Kristallgitter. Ein konkretes Beispiel, nämlich das zweidimensionale hexagonale Gitter bei dem die Gitterpunkte hexagonal angeordnet sind, ist in Abbildung 2.2 gezeigt.

Die Vektoren  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  und  $\mathbf{a}_3$  werden Basisvektoren genannt, alle zusammen bilden eine Basis des Kristallgitters. Ihr Betrag gleicht dem Abstand zwischen benachbarten Gitterplätzen und wird mit  $a$  bezeichnet. Durch ganzzahlige Linearkombination dieser Vektoren ist es möglich zu jedem Gitterplatz zu gelangen. Eine solche Linearkombination der Basisvektoren heißt zusammenfassend Gittervektor, da dieser ausgehend von einem Gitterpunkt nur auf andere Gitterpunkte zeigen kann:

$$\tilde{\mathbf{G}}_{\tilde{h}\tilde{k}\tilde{l}} = \tilde{h} \mathbf{a}_1 + \tilde{k} \mathbf{a}_2 + \tilde{l} \mathbf{a}_3. \quad (2.11)$$

Dieser Gittervektor ist für den allgemeinen dreidimensionalen Fall definiert. In Abbildung 2.2 kann man sich  $\mathbf{a}_3$  als aus der dargestellten Kristallebene heraus zeigender Basisvektor mit Länge  $c$  vorstellen:  $\mathbf{a}_3 = c/a^2 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)$ .

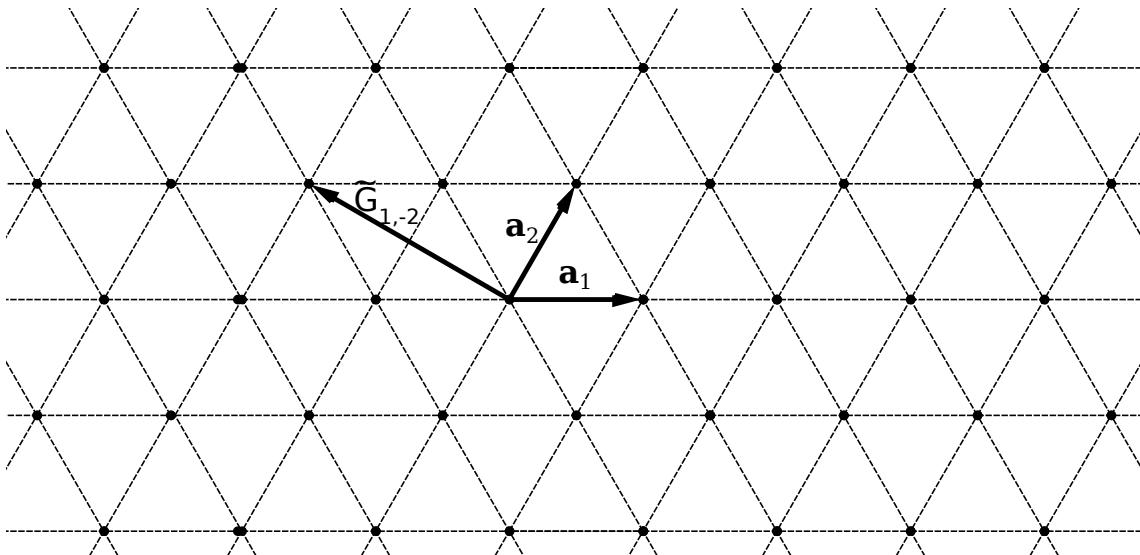


Abbildung 2.2.: Schematische Darstellung eines hexagonalen Kristallgitters. Schwarze Punkte markieren Gitterplätze an denen beispielsweise die Zentren der Löcher eines quasi zweidimensionalen photonischen Kristalls sitzen;  $\mathbf{a}_1$  und  $\mathbf{a}_2$  sind Basisvektoren;  $\tilde{\mathbf{G}}_{1,-2}$  ist ein zweidimensionaler Gittervektor

## 2.4. Reziprokes Gitter

Mittels FOURIER-Transformation wird das Gitter vom Orts- in den k-Raum übersetzt. Der k-Raum eines Gitters wird durch drei reziproke Gittervektoren  $\mathbf{b}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) aufgespannt, die sich aus den drei Basisvektoren des direkten Gitters wie folgt zusammensetzen [8]:

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}. \quad (2.12)$$

Durch diese drei Basisvektoren wird das reziproke Gitter vollständig aufgespannt: Wieder kann mit einer diskreten Kombination jeder reziproke Gitterplatz, ausgehend von einem solchen, erreicht werden. Mit  $h, k, l \in \mathbb{Z}$  wird der sogenannte reziproke Gittervektor gebildet:

$$\mathbf{G}_{hkl} = h \mathbf{b}_1 + k \mathbf{b}_2 + l \mathbf{b}_3. \quad (2.13)$$

Im Folgenden wird  $\mathbf{G}_{hkl}$  mit  $\mathbf{G}$  abgekürzt.

Der defektfreie photonische Kristall ist translationsinvariant, also invariant unter Hinzuzaddieren eines Gittervektors. Es spielt keine Rolle von welchem Gitterplatz aus der Kristall betrachtet wird, er sieht immer gleich aus. Da dies nicht an den Rändern gilt, wird im Weiteren von einer unendlichen Ausdehnung ausgegangen. Die Translationsinvarianz hat unmittelbaren Einfluss auf die Lösungen der MAXWELL-Gleichungen in einem Kristall, wie im folgenden Kapitel diskutiert wird.

## 2.5. Brillouinzone

Die Symmetrien eines Kristalls schränken die nötigen Informationen zur elektromagnetischen Charakterisierung auf die irreduzible BRILLOUIN-Zone ein.

Durch eine regelmäßige Modulation des Brechungsindex liegt die diskrete Translationsinvarianz vor. Mithilfe des BLOCH-Theorems kann gezeigt werden, dass sich diese Symmetrie auf die Eigenwerte der Master-Gleichung überträgt [5]. Daher reicht es aus, den Kristall im Bereich der BRILLOUIN-Zone zu beschreiben. Diese ergibt sich durch Verbinden von Linien, die die Verbindungsstrecken eines Gitterplatzes mit den umliegenden Gitterplätzen halbieren: In Abbildung 2.3 ist ein hexagonales Gitter und dessen BRILLOUIN-Zone (das Hexagon in der Mitte) zu sehen.

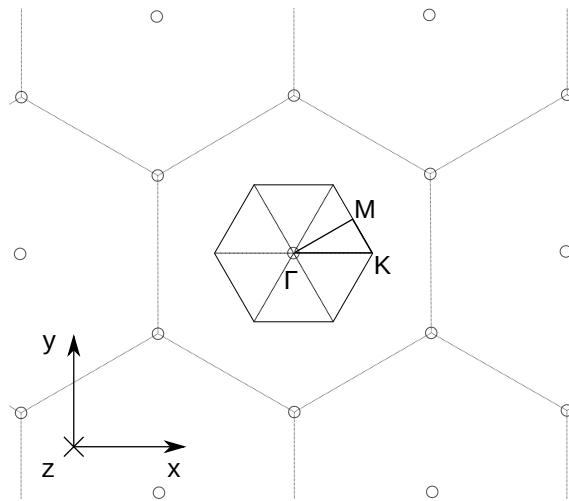


Abbildung 2.3.: Die dickeren Linien stellen die irreduzible Brillouin-Zone des hexagonalen Gitters dar.

Durch weitere Symmetrien des Kristalls beherbergt die BRILLOUIN-Zone noch immer mehrfach die selben Eigenwerte der Master-Gleichung. Weist ein photonischer Kristall Dreh- und Spiegelsymmetrie auf, kann der Bereich zur vollständigen Beschreibung weiter eingeschränkt werden, denn beide Symmetrien übertragen sich auf die Eigenwerte der Master-Gleichung. Die BRILLOUIN-Zone wird auf einen Bereich reduziert, der durch Drehungen und Spiegelungen die ursprüngliche BRILLOUIN-Zone wiederherstellen kann, aber selbst keine Dreh- und Spiegelsymmetrie mehr aufweist. Diese sogenannte irreduzible BRILLOUIN-Zone (Beispiel siehe Abbildung 2.3) beherbergt alle nötigen Informationen zur Charakterisierung des Kristalls.

Die Spiegelsymmetrie hat bei den in dieser Bachelorarbeit untersuchten gelochten Membranen noch einen weiteren Effekt: Da  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  ein Pseudovektorfeld und  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  ein Vektorfeld ist und in  $z$ -Richtung (die Richtungen beziehen sich auf Abbildung 2.3) eine Spiegelsymmetrie vorliegt, spalten durch Spiegelung an der x-y-Ebene ( $z \rightarrow -z$ ) die Felder in transversal elektrische (TE) und transversal magnetische (TM) Moden auf. Bei TM-Moden haben die Felder die Komponenten  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(z)$ ,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y)$ , bei TE-Moden ist  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(z)$  und  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y)$ .

Eine ausführlichere Diskussion zur Entstehung der BRILLOUIN-Zone und der Aufspaltung der Moden ist in Anhang A zu finden.

## 2.6. Numerisches Lösungsverfahren

Möchte man nun die Master-Gleichung mit beliebigen Randwerten lösen, bieten sich numerische Lösungsverfahren an. Das wahrscheinlich einfachste wird nun kurz vorgestellt:

Gleichung 2.10 kann mit dem Ansatz A.6, unter Berücksichtigung von 2.6, gelöst werden. Die elektrische Feldstärke wird dann durch Gleichung 2.8 unter Berücksichtigung von 2.5 gewonnenen. Wie bereits erwähnt, ist es einfacher erst die magnetische und daraus die elektrische Feldstärke zu berechnen, da die magnetischen Eigenvektoren orthogonal zu einander (auf Grund der Hermitizität des auftretenden Operators) und quellfrei sind, d.h.:

nach Gleichung A.6 gilt  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}$ , Einsetzen in Gleichung 2.6 ergibt

$$\nabla \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} \nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}) + i \mathbf{k} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.14)$$

Der erste Summand ist reell, der zweite imaginär. Es muss also jeder Summand für sich null ergeben. Dass  $i \mathbf{k} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0$  ist bedeutet, dass  $\mathbf{k}$  senkrecht auf  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  steht. Das Feld ist also transversal und muss nur für zwei Komponenten gelöst werden.

Da sowohl  $\epsilon_r^{-1}(\mathbf{r})$  als auch  $\mathbf{v}_{kn}(\mathbf{r})$  im photonischen Kristall mit  $\mathbf{G}$  periodisch sind, werden sie durch FOURIER-Reihen

$$\epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) = \sum_{hkl \in \mathbb{Z}} c_{\mathbf{G}} e^{i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{v}_{kn}(\mathbf{r}) = \sum_{hkl \in \mathbb{Z}} c_{\mathbf{G}kn} e^{i \mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.16)$$

mit den FOURIER-Koeffizienten  $c_{\mathbf{G}}$  und  $c_{\mathbf{G}kn}$  dargestellt.

Beide Gleichungen zusammen mit A.6 eingesetzt in 2.10 ergeben ein Gleichungssystem (siehe [1]), das mit Standardmethoden wie in [9] beschrieben gelöst wird. Um auch die Auswirkungen von Störstellen berechnen zu können, werden sogenannte Superzellen verwendet. Näheres dazu findet man z.B. in [10].

Die Ergebnisse werden in Diagrammen veranschaulicht, die im nächsten Abschnitt diskutiert werden.

## 2.7. Die Bandstruktur (quasi) zweidimensionaler photonischer Kristalle

Um den photonischen Kristall auf einen Blick bezüglich der sich in ihm ausbreitenden Lichtwellen charakterisieren zu können, werden die numerisch gewonnenen Eigenfrequenzen über den Wellenvektor  $\mathbf{k}_{||} = (k_x, k_y)$  entlang der BRILLOUIN-Zone aufgetragen. Die Achsen dieses Diagramms werden üblicherweise reduziert: Die Frequenz wird in Einheiten von  $2\pi c/a$  ( $c$ -Lichtgeschwindigkeit,  $a$ -Lochabstand) und der Wellenvektor in Einheiten von  $2\pi/a$  aufgetragen.

In Abbildung 2.4 ist eine Bandstruktur zu sehen: Unten ist die Dispersion für  $n=1$ , weiter oben  $n=2$  usw. Niedrige Frequenzen sind vor allem in der Nähe des  $\Gamma$ -Punktes zu finden: Sie haben eine große Wellenlänge und zeigen eine lineare Dispersion. Für sie scheint das Material einen effektiven Brechungsindex zu haben. Das gelb markierte Gebiet weist eine Bandlücke für TE-Moden auf: Das Material ist für elektromagnetische TE-Wellen in diesem Frequenzbereich nicht transparent. Die Bandlücke kommt durch die Orthogonalität der Moden zueinander und durch

die Feldverteilung der Grundmode zustande. Die genaue Erklärung ist in 2.7.1 zu finden.

Bisher wurde von 2D-Strukturen ausgegangen. Die Untersuchte Membran stellt einen zweidimensionalen photonischen Kristall (der sich in x- und y-Richtung erstreckt) mit einer endlichen Ausdehnung in der dritten Dimension (in z-Richtung) dar. Die bisherigen Überlegungen können auf diese dünnen Membranen (quasi-2D) übertragen werden: Innerhalb der Membran geschieht die Lichtausbreitung im Wesentlichen wie zuvor, allerdings muss das Licht durch innere Totalreflexion auch in z-Richtung beschränkt werden. Der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  besitzt nun eine endliche Komponente in z-Richtung, üblicherweise wird in der Bandstruktur nur  $\omega(\mathbf{k}_{\parallel})$  dargestellt, da dieser reziproke Gittervektor bei dünnen Membranen aufgrund der diskreten Translationsinvarianz erhalten bleibt. Zudem wird, wie in Abbildung 2.4 zu sehen ist, eine Lichtlinie eingezeichnet oberhalb derer ein Kontinuum an Zuständen vorliegt. Sie kommt durch die eben erwähnte (winkelabhängige) innere Totalreflexion zustande (siehe Kapitel 3.1).

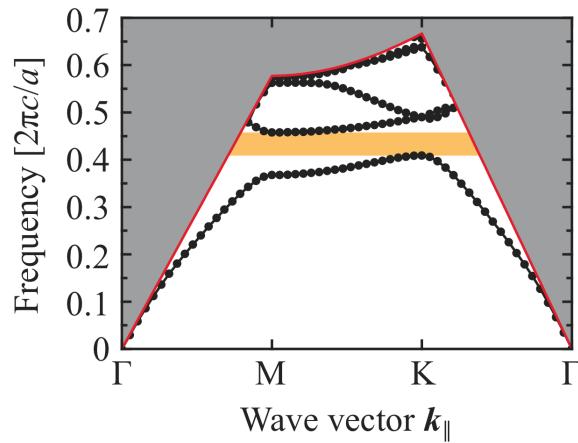


Abbildung 2.4.: Berechnete TE-Bandstruktur des projizierten Wellenvektors für eine hexagonal gelochte Membran mit  $\epsilon = 4.04$  und  $r = 0.3a$  von Dr. Michael Barth [1] ( $a$ : Lochabstand, Gitterkonstante). Im grauen Gebiet (getrennt durch die rote Linie) ist ein Kontinuum an Zuständen möglich. Das gelb markierte Gebiet ist die Bandlücke für TE-Moden.

### 2.7.1. Ursprung der Bandlücke

Die Bandlücke kommt durch die Orthogonalität der verschiedenen Moden zu einander, gekoppelt mit der Verteilung der elektromagnetischen Energie der Grundmode vorrangig im Bereich hoher Brechungsindices, zustande. Dies zeigt das aus der Quantenmechanik bekannte Variationsverfahren, das für hermitesche Operatoren gilt und für die Dispersionsrelation der ersten Mode

$$\omega_1(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{H}_1(\mathbf{r})} \frac{\langle \mathbf{H}_1(\mathbf{r}), \hat{\Theta} \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \rangle}{\langle \mathbf{H}_1(\mathbf{r}), \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \rangle} \quad (2.17)$$

lautet [11]. Diese Dispersionsrelation wird mit Hilfe von Gleichungen 2.7 und 2.8 und Einsetzen des Operators  $\hat{\Theta}$  in Abhängigkeiten der elektrischen Feldstärke umgeschrieben. Zuerst werden die beiden erwähnten Gleichungen durch Einsetzen des Eigenwerts der Zeitableitung  $-i\omega$  der Felder in die zeitunabhängigen überführt, sie lauten dann:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{\mu_0 \omega} \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\epsilon_r(\mathbf{r}) \epsilon_0 \omega} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}). \quad (2.19)$$

Da das Feld  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  eine Eigenfunktion von  $\hat{\Theta}$  ist, gilt zudem  $\langle \mathbf{H}_1(\mathbf{r}), \hat{\Theta} \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\omega^2}{c^2} \langle \mathbf{H}_1(\mathbf{r}), \mathbf{H}_1(\mathbf{r}) \rangle$ . Gleichung 2.17 wird zu

$$\omega_1(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{E}(\mathbf{r})} \frac{\omega^4}{c^4} \frac{\left(\frac{-i}{\mu_0 \omega}\right)^2 \langle \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle}{\left(\frac{-i}{\mu_0 \omega}\right)^2 \langle \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \nabla \times \epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \rangle}$$

umgeformt. Durch Einsetzen der Gleichungen A.4, 2.18 und 2.19 ergibt sich

$$\omega_1(\mathbf{k}) = \min_{\mathbf{E}_1(\mathbf{r})} \frac{\langle \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}), \nabla \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \rangle}{\langle \mathbf{E}_1(\mathbf{r}), \epsilon_r(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \rangle}. \quad (2.20)$$

Da  $\epsilon_r(\mathbf{r})$  im Nenner steht, konzentriert sich das Feld im Bereich großer Brechungsindices: So erreicht es die kleinsten Werte, wie es die rechte Seite der Gleichung verlangt. Da die erste Mode hauptsächlich die Bereiche großer Brechungsindices einnimmt, muss die zweite Mode aufgrund der Orthogonalität der Moden (siehe Anhang A) in Bereiche kleiner Brechungsindices ausweichen. Dies ändert die Frequenz der zweiten Mode und damit der ausbreitungsfähigen Frequenzen drastisch: Die Bandlücke entsteht.

Gelingt es nun, durch einen Defekt eine Wellenausbreitung im Kristall im Frequenzbereich der Bandlücke lokal zu ermöglichen, würde diese Welle auf die Ausdehnung des Defekts beschränkt sein. Sie kann sich im restlichen Kristall aufgrund der Bandlücke nicht ausbreiten und ist in z-Richtung durch Totalreflexion beschränkt, die Welle ist also im Defekt gefangen. Da die innere Totalreflexion winkelabhängig ist, kann dennoch mit jedem durchlaufenden Zyklus etwas Licht ausgestreut werden. Eine mögliche Realisierung des Defekts ist die sogenannte L3-Kavität. Die Theorie dieser Defektstruktur wird in Kapitel 3 besprochen. Zuvor wird die Güte eingeführt. Sie ist zusammen mit dem Volumen, welches das Feld einnimmt, maßgebend um eine Wechselwirkung von Lichts mit Materie zu bewirken.

## 2.8. Güte

Die Fouriertransformation des durch Streuung mit der Zeit abnehmenden Felds in der Kavität ergibt eine LORENTZ-Verteilung im Frequenzspektrum (im Experiment wurden stets Frequenzspektren aufgenommen). In dieser Verteilung werden verschiedene Größen zur sogenannten Güte  $Q$  zusammengefasst, welche durch

$$Q := \omega_0 U/P = \omega_0/\Gamma \quad (2.21)$$

definiert wird [5].  $\omega_0$  ist die Kreisfrequenz der resonanten Mode,  $U$  die in der Kavität deponierte Feldenergie,  $P$  die abgestrahlte Leistung und  $\Gamma$  die Halbwertsbreite der Frequenzverteilung um die Resonanzfrequenz.

Der Betrag der Güte äußert sich in der Breite des Resonanzpeaks im reflektierten Frequenzspektrum, da  $1/Q$  die normierte Bandbreite [5] ist. Zudem beschreibt sie den Verlust der deponierten Leistung pro Zeit: sie ist nach  $Q$  Perioden auf  $\approx 0.2\%$  der Ursprungsintensität abgefallen.

Je größer die Güte ist, desto mehr Energie wird länger in der Kavität deponiert; die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit von Licht mit externen Partikeln in der Kavität steigt. Außerdem steht das Material der Kavität (das nicht vollkommen verlustlos ist) selber stärker mit dem elektromagnetischen Feld in Wechselwirkung: Sie erwärmt sich stärker.

### 3. Theorie der L3-Kavität in photonischen Kristallmembranen aus GaP

Die L3-Kavität ist eine spezielle Realisierung eines Defekts. Sie entsteht, wenn in einer Membran, dessen Brechungsindex durch hexagonal angeordnete Zylinder periodisch moduliert ist, drei Zylinder ausgelassen werden. Speziell wurde eine von Luft umgebene aus Galliumphosphid bestehende Membran mit hexagonal angeordneten Luflöchern untersucht (siehe Abbildung 3.1). Drei dieser Löcher wurden ausgelassen, um die L3-Kavität zu erzeugen. Auf diese Weise wird das Licht lokalisiert: in x- und y-Richtung durch die Bandlücke des umgebenen "störungsfreien" photonischen Kristalls (er verhindert die Ausbreitung des Lichts in diesem Frequenzbereich durch perfekte Reflexion), in z-Richtung durch totale interne Reflexion. Da nur diskrete Bänder - durch die L3-Kavität - im Bereich der Bandlücke des photonischen Kristalls liegen und dieses Licht dort gefangen ist, spricht man von einem Resonator.

In den folgenden Abschnitten werden zunächst die Bandstruktur und die Verteilung des elektromagnetischen Feldes in der Umgebung einer L3-Kavität diskutiert. Anschließend wird auf die Entwicklung der Resonanzfrequenz und der Güte bei Temperaturänderung eingegangen. Um die erwartete Güteänderung, das Design der Kavität (Abbildung 3.1) und den quantitativen Verlauf der Lichtlinie in der Bandstruktur zu verstehen, wird zunächst auf die innere Totalreflexion eingegangen.

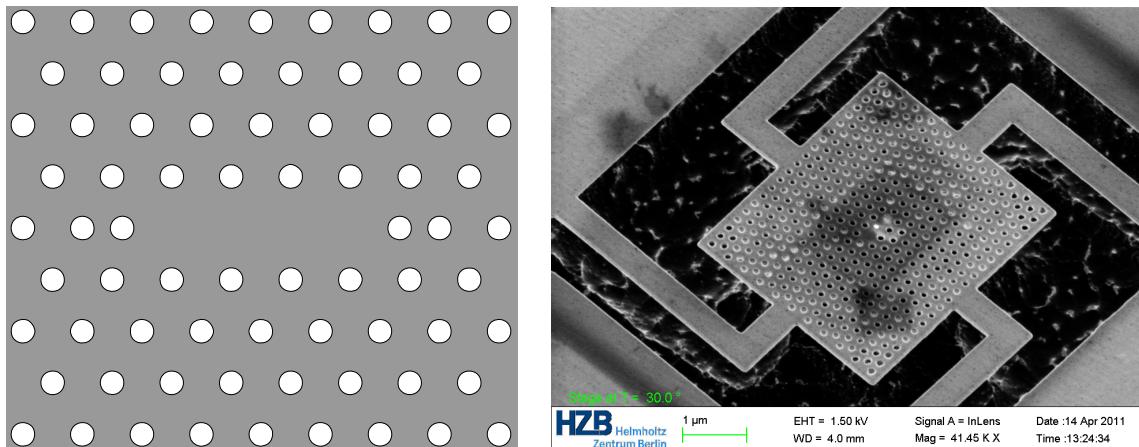


Abbildung 3.1.: Links ist eine schematische Darstellung des L3-Defekts mit verschiedenen Löchern (links und rechts) zu erkennen. Rechts ist eine typische Rasterelektronenmikroskopie von Membran und Haltern abgebildet. In der Mitte ist die L3-Kavität zu erkennen.

### 3.1. Innere Totalreflexion und Güteoptimierung

Der Schwachpunkt des quasi zweidimensionalen photonischen Kristalls ist die Winkelabhängigkeit der inneren Totalreflexion. Das Licht kann die Membran verlassen, wenn der Winkel der ebenen Lichtwellen im Kristall den kritischen Winkel aus dem Snelliusschen Brechungsgesetz unterschreitet (“leaky modes”). Speziell für eine von Luft umgebene Galliumphosphid-Membran ( $n_{Luft} = 1$ ) ist dieses Gesetz durch

$$|\Theta_c| = |\arcsin \frac{1}{n_{GaP}}| \quad (3.1)$$

gegeben. Totalreflexion tritt auf, wenn  $\Theta \geq \Theta_c$ . Mit den Zusammenhängen  $n_{GaP} = \lambda_0 / \lambda_{GaP}$  ( $\lambda_0$  ist die Vakuumwellenlänge) und  $\lambda_{Gap} = 2\pi / |\mathbf{k}|$  erhält man:

$$|\sin \Theta| \geq \frac{2\pi / |\mathbf{k}|}{\lambda_0}.$$

Außerdem muss  $0 \leq |\sin \Theta| \leq 1$  gelten. Auch die rechte Seite muss zwischen 0 und 1 liegen, denn sowohl  $\lambda_0$  als auch  $|\mathbf{k}|$  sind positiv:

$$0 \leq \frac{1}{|\mathbf{k}|} \leq \frac{\lambda_0}{2\pi} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} \leq |\mathbf{k}| \leq \infty.$$

Liegt  $|\mathbf{k}|$  also zwischen 0 und  $2\pi/\lambda_0$  kann das Licht dem Kristall entkommen.

Akahane et al. zeigten, dass das Nach-außenschieben der Löcher an den Ecken der L3-Kavität weniger Anteile des Wellenvektors in diesem Gebiet liegen lässt [12]. Dabei vergrößert sich zwar die Kavität etwas, allerdings erhöht sich das Güte-pro-Volumen-Verhältnis um das bis zu 10-100-fache. Dass weniger Anteile in diesem Gebiet sind, liegt am sanften Abklingen des Feldes: Zuvor wurde es außerhalb der Kavität sofort sehr stark abgeschwächt. Dies hat zur Folge, dass in der FOURIER-Transformation (im  $\mathbf{k}$ -Raum) viele Oberwellen auftreten. Durch das sanfte, GAUSS-förmige Abklingen des Feldes sind keine Oberwellen und nur wenig Anteile des Wellenvektors zwischen 0 und  $2\pi/\lambda_0$  im  $\mathbf{k}$ -Raum zu finden. Aus diesem Grund sind die Löcher an den Ecken der untersuchten Kavität etwas nach außen gerückt.

### 3.2. Bandstruktur und Feldverteilung

Durch eine L3-Kavität in einer Membran endlicher Dicke wird die Bandstruktur des photonischen Kristalls im Bereich der Bandlücke geändert: Es entstehen Moden, die sich im störungsfreien Kristall nicht ausbreiten können. Abbildung 3.2 zeigt die durch die Kavität verschobenen Moden. Die Bandstruktur des störungsfreien Kristalls ist in Abbildung 2.4 gezeigt.

Das Auslassen dreier Löcher (um die L3-Kavität zu erschaffen) bewirkt einen lokal erhöhten Brechungsindex im Vergleich zum Rest des Kristalls. Durch die Erhöhung des Brechungsindex werden Moden des störungsfreien Kristalls in der Frequenz verringert, sie bilden die Defektmoden. Diese Moden gehen links und rechts in ein Gebiet kontinuierlicher Zustände über, das wie bereits diskutiert durch die innere Totalreflexion entsteht. Zudem müssen die Bänder flach sein, denn lokalisierte Moden müssen die Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \partial\omega / \partial\mathbf{k} = 0$  besitzen.

Die Grundmode deponiert die Feldenergie vorrangig in Bereichen hoher Brechungsindices (siehe Abschnitt 2.7.1). Höhere Moden müssen aufgrund der Orthogonalitätsbedingung ihre Feldenergien verstärkt auf Bereiche niedriger Brechungsindices verteilen. In Abbildung 3.3 ist dies an den beiden  $TE_y$  Moden zu erkennen.

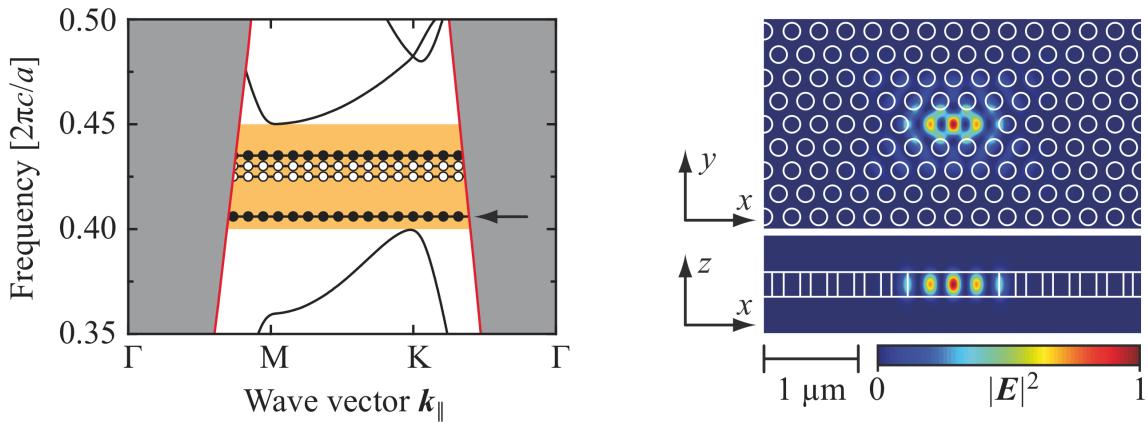


Abbildung 3.2.: Links ist die Bandstruktur aus Abbildung 2.4 (schwarze Linien) gezeigt (gleiche Parameter wie in Abb. 2.4, Membrandicke  $t = 0.93a$ ). Zusätzlich sind Moden der L3-Kavität im Bereich der Bandlücke eingezeichnet: Gefüllte/offene Kreise symbolisieren ungerade/gerade Defektmoden. Rechts ist die Feldverteilung der Grundmode (links durch einen Pfeil markiert) in der Membranebene und im Schnitt gezeigt. Beide Bilder wurden von Dr. Michael Barth [1] erstellt.

### 3.3. Abstrahlcharakteristik der L3-Kavität

Wie in Abbildung 3.3 zu sehen ist, geht aus FDTD-Simulationen hervor, dass die Felder der TE-Moden x- und y-polarisiert sind. Auch die Abstrahlcharakteristik der einzelnen Moden (ebenfalls in Abbildung 3.3 gezeigt) ist entsprechend der Felder polarisiert: Die Grundmode beispielsweise zieht Polarisationen in Richtung der Kavitäten-Achse vor - aus diesem Grund wird mit gekreuzten Polarisatoren gemessen, näheres dazu folgt in Abschnitt 4.1.

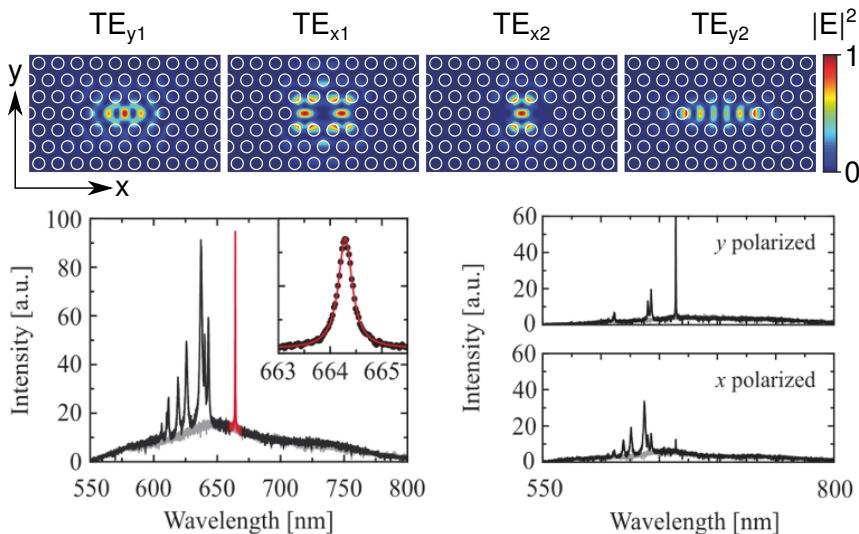


Abbildung 3.3.: Dargestellt sind die Feldverteilungen mit den Parametern: Gitterkonstante  $a=270$  nm, Lochradius  $r=0.3a$ , Dicke  $t=1a$  und die gemessenen Spektren der L3-Kavitäten mit  $r=0.29a$  und sonst gleichen Parametern (von Dr. Michael Barth [1] erstellt).

### 3.4. Verhalten bei Temperaturänderung

Mit der Temperatur des photonischen Kristalls ändern sich auch die Eigenschaften, wie der Brechungsindex und die Materialausdehnung. Beide haben einen Einfluss auf die Lage der Resonanz im Frequenzspektrum und die Güte. Da GaP einen positiven Ausdehnungskoeffizienten hat, zieht es sich bei Abkühlung zusammen. Bei 300 K beträgt er  $\approx 4.65 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  [13]. Zieht sich das Material zusammen, werden die Löcher größer, die L3-Kavität also kleiner.

Im Folgenden wird erst auf die Verschiebung der Resonanz und dann auf die Änderung der Güte bei verschiedenen Temperaturen eingegangen.

#### 3.4.1. Theoretische Vorhersage der Resonanzentwicklung

Die Resonanzverschiebung kann nun durch Kenntnis der Temperaturabhängigkeit des Brechungsindex und der Verschiebung der Resonanzfrequenz in Abhängigkeit des Brechungsindex vorhergesagt werden:

Mithilfe der Finite-Difference-Time-Domain-Methode (FDTD-Methode) lassen sich die Resonanzfrequenz der Grundmode in Abhängigkeit des Brechungsindex bei verschiedenen Membrändicken berechnen. Es zeigt sich, wie in Abbildung 3.4 zu sehen, ein linearer Zusammenhang. Die untersuchte Probe hat eine Dicke von  $t \approx 50\text{nm}$ , der Anstieg ergibt sich zu  $a_1 = (163.39 \pm 0.01)\text{nm/Brechungsindex}$  (der Abbildung zugrundeliegenden Wertetabelle erstellt von Janick Wolters AG Nano Optik, HU-Berlin entnommen).

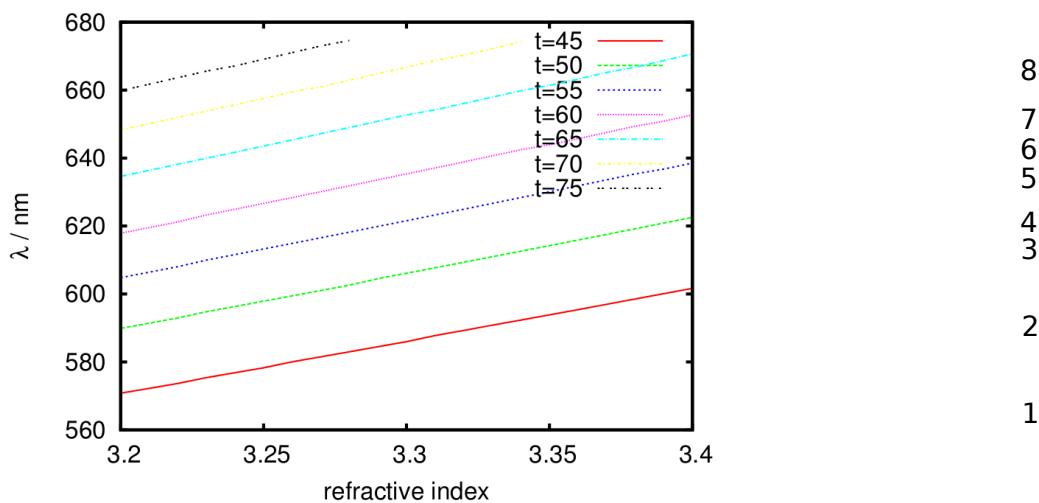


Abbildung 3.4.: Dargestellt ist links die Abhängigkeit der Resonanzfrequenz vom Brechungsindex des Materials für verschiedene Schichtdicken  $t$  in nm, erstellt durch die FDTD-Methode von Janik Wolters (AG Nano Optik, HU-Berlin) und rechts die Abhängigkeit des Brechungsindex des Materials von der Temperatur bei verschiedenen Wellenlängen [14]; (3) entspricht 599.96 nm.

Die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Temperatur wurde von PIKHTIN et. al. [14] bei Raumtemperatur bis 100 K untersucht. Dieser zeigt, wie in Abbildung 3.4 (rechts) zu sehen, ebenfalls einen linearen Zusammenhang. Im unter-

suchten Wellenlängenbereich beträgt der Anstieg dieser Gerade  $a_2 = (190 \pm 10) \cdot 10^{-6}$  Brechungsindex/K.

Da beide Zusammenhänge linear sind, ist auch die Abhängigkeit der Resonanzwellenlänge von der Temperatur linear. Beide Anstiege miteinander multipliziert ergeben nun den gesuchten Anstieg:

$$a_{Th} = 31 \pm 2 \text{ pm/K} \quad (3.2)$$

Die Größe der Unsicherheit wird hierbei fast ausschließlich durch die Ablesegenauigkeit von Abbildung 3.4 (rechts) bestimmt.

Theoretische Vorhersagen für Temperaturen unterhalb von 100 K können mithilfe der Werte von PIKHTIN et al. nicht gemacht werden. Der einzige gefundene Literaturwert bei noch tieferen Temperaturen (hier bei 1.6 K) wurde bei Wellenlängen  $>400 \mu\text{m}$  von PATRICK et al. [15] gemessen, er beträgt  $n(1.6 \text{ K}) = 3.28 \pm 0.02$ . In [15] wird dieser Wert mit dem von BARKER et al. [16] bei 300 K verglichen, er beträgt  $n(300 \text{ K}) = 3.332 \pm 0.002$ . Aus diesen Werten erhält man einen Anstieg von  $a'_2 = (174 \pm 7) \cdot 10^{-6}$  Brechungsindex/K und somit  $a'_{Th} = 28 \pm 1 \text{ pm/K}$ .

Dieser Anstieg ist kleiner als der von PIKHTIN et al. Da  $a_{Th}$  bis auf 100 K gültig ist, muss der kleinere Anstieg  $a'_{Th}$  aus einem flacheren Verlauf des Brechungsindizes bei tiefen Temperatur resultieren.

### 3.4.2. Theoretische Vorhersage zur Entwicklung der Güte

Wie in Abschnitt 3.1 und vor allem von Akahane et al. [12] diskutiert, verbessert sich die Güte der Kavität, wenn das Licht an den Rändern “sanft” abklingt. Die Eindringtiefe  $d$  an den Luft-/GaP-Übergängen wird durch

$$d = \frac{\lambda(n_{\text{GaP}})}{2\pi n_{\text{GaP}} \sqrt{\sin^2 \Theta - 1/n_{\text{GaP}}^2}} \quad (3.3)$$

berechnet (wobei  $n_{Luft} = 1$  gesetzt wurde) [17]. Das Feld klingt exponentiell ab und erreicht bei dieser Tiefe eine relative Intensität von  $1/e$ .  $\Theta$  ist der Winkel zwischen der einlaufenden Welle und dem Normalenvektor der Ebene, an der die Welle reflektiert wird.  $\lambda(n)$  kann aus Abbildung 3.4 (links) extrahiert werden. Für eine Membran der Dicke  $t = 50 \text{ nm}$  ergibt sich

$$\lambda(n) = (163.39 \pm 0.01) \text{ nm} \cdot n + (67.05 \pm 0.01) \text{ nm}. \quad (3.4)$$

Mit Abbildung 3.4 (rechts) kann die Temperaturabhängigkeit von  $n$  bestimmt werden:

$$n(T) = (190 \pm 10) \cdot 10^{-6}/\text{K} \cdot T + 3.275 \pm 0.005. \quad (3.5)$$

Die Angabe der Eindringtiefe macht nur bei innerer Totalreflexion Sinn. Diese tritt ein, wenn  $|\sin \Theta| > 1/n$  ist. Mithilfe dieser vier Gleichungen wurde Abbildung 3.5 (links) für Temperaturen von 100 bis 300 K bei Winkeln zwischen  $90^\circ$  und  $18^\circ$  erstellt (es sind auch kleinere Winkel bis ausschließlich  $\Theta_c = 1/n_{\text{GaP}}$  möglich). Die erste, oberste Reihe liegt bei  $18^\circ$ ; in  $+1^\circ$ -Schritten geht es abwärts. Abbildung 3.5 (rechts) zeigt die Differenz der Eindringtiefen. Dabei wurde für verschiedene Winkel die Eindringtiefe bei 100 K von der bei 300 K abgezogen (die Abbildung daneben

zeigt, dass die Abhängigkeiten monoton sind - dies ist also ein guter Indikator zum Abschätzen der Differenz der Eindringtiefen). Eine negative Differenz bedeutet, dass die Eindringtiefe zu höheren Temperaturen hin abnimmt (und das tut sie bei jedem Winkel). Wird sie kleiner, klingt das Licht weniger sanft ab. Daraus folgt: Die Güte wird bei steigender Temperatur kleiner.

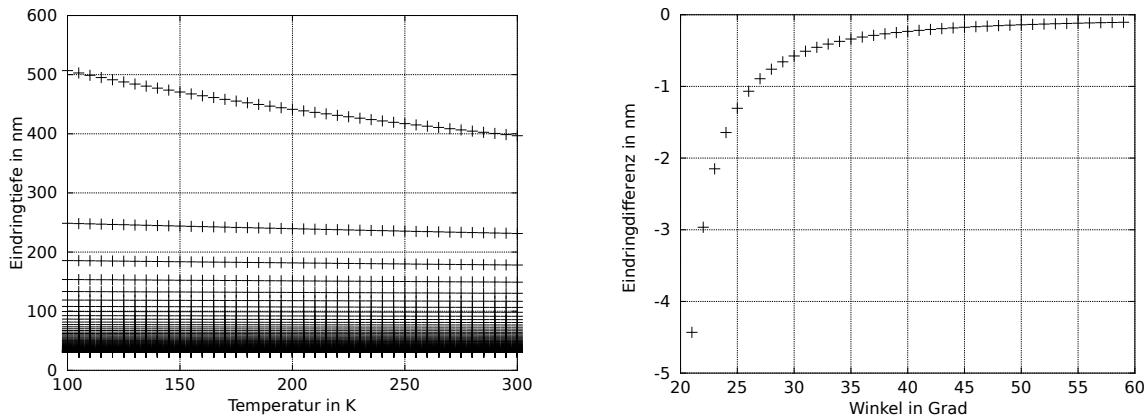


Abbildung 3.5.: Links sind Eindringtiefen für Licht aus Galliumphosphid in Luft für verschiedene Winkel dargestellt (oberste Reihe  $18^\circ$ , darunter bei  $19^\circ$  usw.) Das rechte Bild zeigt die aus dem linken Bild resultierenden Differenzen der Eindringtiefen für ausgewählte Winkel.

# 4. Experimentelle Realisierung

Im Rahmen dieser Bachelorarbeit wurden Temperaturabhängigkeiten von Resonanzen in photonischen Kristallen untersucht. Das von einer L3-Kavität abgestrahlte Licht wurde spektral aufgelöst, um die Resonanzwellenlänge und die Güte zu bestimmen.

Hierzu wurde ein Konfokalmikroskop verwendet. Dieses Licht-Mikroskop beleuchtet und detektiert im Gegensatz zu gewöhnlichen Mikroskopen nur einen kleinen Ausschnitt der Probe [18]. Um dies zu gewährleisten, dienen zur Anregung vor allem kollimierte Lichtquellen. Zusätzlich wird die Detektion mit einer Lochblende (Pinhole) versehen. Das Objektiv wird (mit Hilfe eines Strahlteilers) zur Anregung und Detektion gleichermaßen benutzt.

Dieses Mikroskop ermöglicht es, kaum mehr als die Kavität zu beleuchten und deren Spektrum mit einem Spektrometer zu detektieren. Andere Bereiche der Probe haben nur geringen Einfluss auf das detektierte Signal. Um sich dennoch auf der Probe orientieren zu können, wird neben einer kollimierten Weißlichtquelle, die zur Resonanzanregung gedacht ist, auch eine Weißlichtquelle in Form einer LED (light emitting diode) zur Anregung genutzt. Entfernt man die Lochblende, lässt sich ein großer Ausschnitt der Probe auf einer CCD-Kamera (charge-coupled device) abbilden.

Ist die temperaturabhängige Resonanzverschiebung bekannt, kann die Temperaturänderung unter Bestrahlung der Kavität mit einem Laser hoher Intensität bestimmt werden. So ist es auch möglich, Aussagen über die Wärmeleitfähigkeit des Materials bei tiefen Temperaturen zu treffen.

## 4.1. Messmethode

Für genaue Temperaturmessungen darf die Probe nicht durch die Messung erwärmt werden. Daher ist es nötig, mit möglichst geringer Leistung zu arbeiten. Indem man die bevorzugte Polarisationsrichtung der Moden der Kavität ausnutzt, kann auch mit wenig Intensität die Resonanzwellenlänge (im reflektierten Frequenzspektrum) von anderen Wellenlängen unterschieden werden [4]:

Man strahlt mit linear polarisierten Licht dessen Polarisationsrichtung um  $45^\circ$  zur Kavitäten-Achse (im Folgenden x-Achse) gedreht ist auf die Kavität. Hat das Licht eine Wellenlänge in der Nähe der Resonanzwellenlänge, dreht die Kavität die Polarisationsrichtung (der Grund der Drehung wird weiter unten diskutiert). Das von der Kavität abgestrahlte Licht muss einen Analysator passieren, der um  $-45^\circ$  gedrehtes Licht durchlässt. Auf diese Weise erhält man nur bei der Resonanzfrequenz ein Signal im Detektor.

Das auf die Kavität fallende Licht wird durch zwei Mechanismen gedreht:

- 1. Trifft Licht einer Wellenlänge weit weg von der Grundmode auf die Kavität, wird es entweder polarisationserhaltend reflektiert oder transmittiert. Liegt die Wellenlänge des Lichts aber in der Nähe der Resonanzwellenlänge, kann

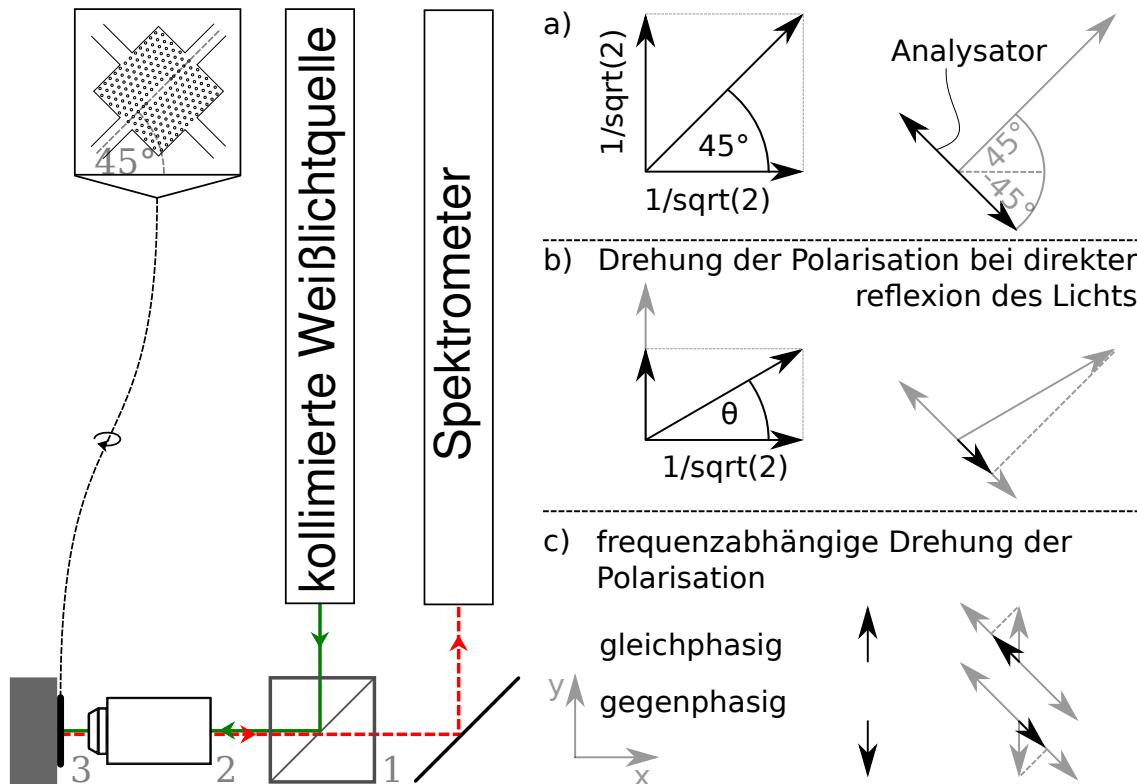


Abbildung 4.1.: Links ist die Methode zur Aufnahme des Reflektionsspektrums der L3-Kavität nach GALLI et al. [4] dargestellt: 1: Polarisationsstrahlteiler, transmittierte und reflektierte Polarisationen unterscheiden sich um  $90^\circ$ ; 2: Mikroskopobjektiv; 3: Um  $45^\circ$  zur Polarisation gedrehte Probe mit Temperaturregler. Rechts ist die Polarisationsdrehung schematisch dargestellt. Die Pfeile repräsentieren die Polarisationsrichtungen zu einer festen Zeit. a) Der schräge Pfeil repräsentiert die Polarisationsrichtung des anregenden Lichts.

es je nach Polarisation reflektiert, transmittiert oder in die Kavität eingekoppelt werden. X-polarisiertes Licht kann wie zuvor reflektiert oder transmittiert werden. Y-polarisiertes Licht aber kann in die Kavität einkoppeln, denn die Grundmode beherbergt zum größten Teil y-polarisiertes Licht (siehe Abbildung 4.2 links, bzw. Abschnitt 3.3). Dies hat zur Folge, dass weniger y- als x-polarisiertes Licht reflektiert wird. Dadurch entsteht eine effektive Drehung der Polarisation des Lichts. Es kann nun zum Teil den Analysator passieren. Abbildung 4.1 b) zeigt diesen Vorgang schematisch.

- 2. In Resonanznähe verhält sich die Frequenz des in die Kavität eingekoppelten Lichts wie die Schwingungsfrequenz eines getriebenen linearen Oszillators. Unterhalb der Resonanzfrequenz folgt das in der Kavität eingeschlossene Licht der Anregungsfrequenz (und eilt dabei etwas nach). Oberhalb der Resonanzfrequenz liegt das Licht nahezu in Gegenphase zum anregenden Licht (in Abbildung 4.2 rechts dargestellt). Aufgrund der endlichen Güte des Resonators ist  $\beta > 0$  (denn  $Q = \omega_0/2\beta$ ) und damit der Phasenübergang kontinuierlich [19]. Das in die Kavität eingekoppelte Licht wird aufgrund der Winkelabhängigkeit der inneren Totalreflexion ausgestreut (wie in 3.1 diskutiert). Dieses

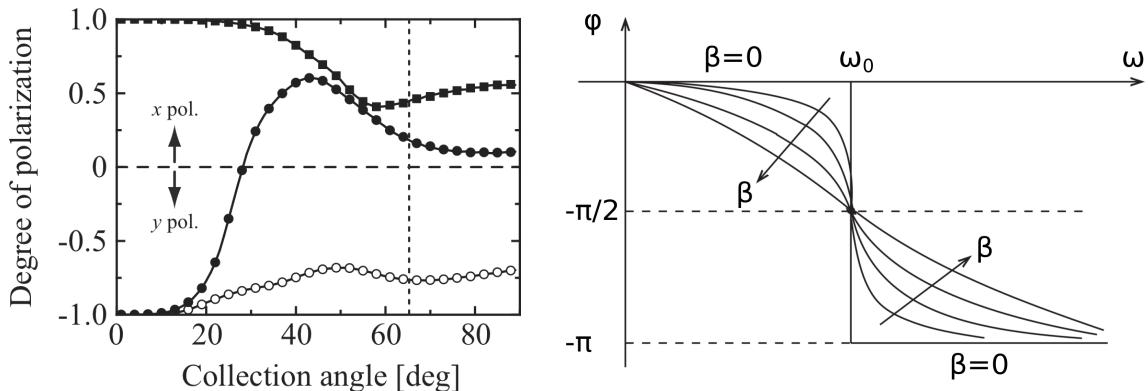


Abbildung 4.2.: Links ist winkelabhängige Abstrahlcharakteristik der L3-Kavität (offene Kreise) dargestellt (von Dr. Michael Barth [1]), rechts die Phasenverschiebung zwischen harmonischen Oszillatoren (verschiedener Dämpfung) und sinusförmiger Anregung aus [19].

y-polarisierte Licht kann den Analysator zum Teil ( $1/\sqrt{2}$ ) der Ursprungsinintensität) passieren.

Auf dem Detektor interferieren beide Anteile und im detektierten Spektrum entsteht eine FANO-Resonanz. Diese wird quantitativ durch

$$F(\lambda) = A_0 + F_0 \frac{[q + 2(\lambda - \lambda_0)/\Gamma]^2}{1 + [2(\lambda - \lambda_0)/\Gamma]^2} \quad (4.1)$$

beschrieben. In dieser Formel bezeichnet  $A_0$  den Offset,  $F_0$  die Amplitude,  $\lambda_0$  die Resonanzwellenlänge,  $\Gamma$  die Resonanzbreite und  $q$  das Verhältnis der Amplituden der beiden oben diskutierten Anteile [4].

Diese Resonanz entsteht, wenn sich diskrete und kontinuierliche Pfade mischen [20]. Das in die Membran eingekoppelte Licht ist ein diskreter Endzustand (schmale Resonanz mit frequenzabhängiger Phasendrehung). Es interferiert mit dem durch Reflexion an der Membran-Oberfläche entstehenden kontinuierlichen verteilten Licht (breite Resonanz ohne Phasendrehung). Die Interferenz beider Wellen ruft eine FANO-Resonanz hervor [21]. Abhängig vom angeregten Bereich weist die Resonanzkurve verschiedene Formen auf. Wenn  $|q| \approx 1$  ist, sind die Amplituden beider Anteile etwa gleich groß und die Resonanz ist asymmetrisch. Wird nur die Kavität angeregt hat  $|q|$  einen großen Wert. Der eingekoppelte Teil (Abbildung 4.1 rechts, c) überwiegt und die Resonanz ist LORENTZ-förmig. Bei kleinem  $|q|$  überwiegt der direkt reflektierte Teil und man erhält einen umgekehrt LORENTZ-förmige Resonanz [4].

## 4.2. Messaufbau

Die experimentelle Umsetzung der eben erläuterten Methode ist schematisch in Abbildung 4.2 gezeigt:

Um das spätere Spektrum mit einer Messung aufnehmen zu können dient zur Anregung eine kollimierte Weißlichtquelle. Das Licht durchläuft zuerst eine Strahl-aufweitung (1), sodass das Objektiv (7) vom Lichtstrahl überleuchtet wird. Dies ist

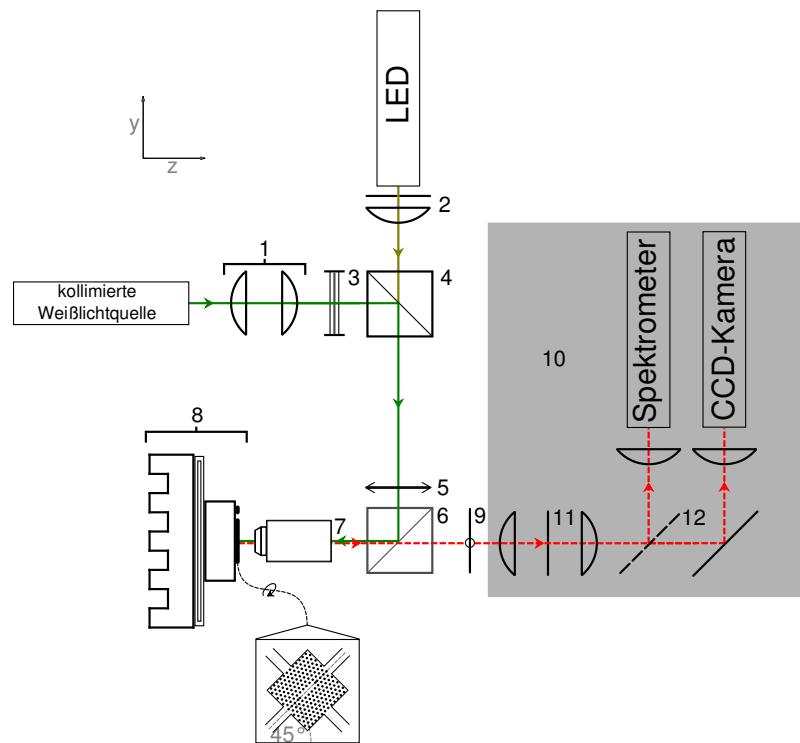


Abbildung 4.3.: Schematische Darstellung des Messaufbaus zur Untersuchung des Reflektionsspektrums der L3-Kavität; durchgezogene (grüne und gelbe) Linie läuft zur Probe, die gestrichelte (rote) von der Probe zur Detektion. 1: Strahlaufweitung; 2: Lochblende und Linse zum Kollimieren; 3: Filterhalter mit Infrarot und UV Filter 4: 50/50 Strahlteiler; 5: Linearpolarisator parallel zur Oberfläche; 6: Strahlteiler, reflektierte Polarisation parallel zur Oberfläche, transmittierte Polarisation orthogonal zur Oberfläche; 7: Mikroskopobjektiv; 8: Um 45° zur Polarisation gedrehte Probe mit einer Vorrichtung zur Temperaturänderung und -messung, 9: Linearpolarisator orthogonal zur Oberfläche; 10: Abdeckung der Detektion; 11: abnehmbare Lochblende; 12: umklappbarer Spiegel

nötig, da das Profil des Lichtstrahls (also die Verteilung der Feldstärken) GAUSS-förmig ist. Das Auflösungsvermögen wird maximal, wenn die ins Objektiv einfal-lenden Wellen ebene Wellen sind. Überleuchtet man das Objektiv, gleicht sich die Feldstärke an den Rändern an die Feldstärke in der Mitte an. Man kommt so dem Ideal einer ebenen Wellenfront am Objektiv näher. Da die gesamte Anregungsleis-tung klein sein soll, werden die Wellenlängen des Lichts, die nicht im Spektrum der erwarteten Resonanz liegen durch zwei Spektralfilter (3) ausgesiebt. Der übrige Strahl passiert einen 50/50 Strahlteiler (4), der dazu dient eine kollimierte LED als „Weißlichtquelle“ mit dem folgenden Strahlenverlauf zu überlagern. Sie wird benö-tigt, um sich auf der Probe mithilfe der CCD-Kamera orientieren und die Kavität in den Fokus der Weißlichtquelle rücken zu können. Während der Aufnahme des Spektrums wird die LED abgeschaltet.

Als nächstes durchläuft der Strahl einen linearen Polarisator (5), der den Strahl in z-Richtung polarisiert. Durch den anschließenden polarisationsabhängigen Strahl-teiler (6) wird der Strahl nochmals in gleicher Richtung polarisiert und umgelenkt,

sodass seine Polarisation jetzt in y-Richtung zeigt.

Das so polarisierte Licht wird durch das Mikroskopobjektiv auf die um  $45^\circ$  zur y-Achse geneigte Kavität (8) fokussiert. Das selbe Objektiv sammelt auch das reflektierte Licht ein. Der Teil des reflektierten Lichts, dessen Polarisation in Richtung der y-Achse gedreht ist, wird vom polarisationsabhängigen Strahlteiler (6) und dem nachfolgenden Polarisator (9) transmittiert.

Der Strahl erreicht den Bereich der Detektion. Dieser ist zur Vermeidung von Streulicht abgedeckt (10). Um möglichst nur den Bereich der Kavität auszumessen, wird im Fokus des Strahls eine Lochblende aufgestellt, welche Reflexionen des umliegenden Bereichs wegfiltert<sup>1</sup>. Zur Orientierung auf der Probe muss die Lochblende abgenommen und der Klappspiegel (12) benutzt werden, sodass die Probe auf der CCD-Kamera abgebildet wird.

### 4.3. Temperatureinstellung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Temperaturabhängigkeit der Resonanzen zunächst um die Raumtemperatur und anschließend bei tiefen Temperaturen bestimmt. Diese beiden Temperaturbereiche wurden mit jeweils eigenen Methoden untersucht. Bei Temperaturen unterhalb der Raumtemperatur und insbesondere bei sehr tiefen Temperaturen wird ein Vakuum benötigt, um eine Kondensation von Wasser und anfrieren von Atmosphärengasen zu verhindern, aber auch um die Probe thermisch zu isolieren. Messungen bei Temperaturen oberhalb der Raumtemperatur erfordern dies nicht.

#### Raumtemperatur

Um die Temperatur der Probe im Bereich der Raumtemperatur festzulegen, ist diese mithilfe von Silberleitlack auf einen Kupferblock geklebt worden. Zur Bestimmung der Temperatur wurde an den Kupferblock auch ein PT-100 Sensor (Platin-Thermometer mit  $100\Omega$  bei  $0^\circ\text{C}$ ) befestigt. Auf der Rückseite des Kupferblocks wurde mit wärmeleitfähigen Kleber ein PELTIER-Element festgeklebt. Durch einen beliebigen aber konstanten Stromfluss durch das PELTIER-Element entsteht ein definierter Temperaturunterschied der gegenüberliegenden Seiten des Elements. Da nun eine absolute Temperatur eingestellt werden soll, muss eine Seite des PELTIER-Elements bei konstanter Temperatur gehalten werden. Dies geschieht durch einen großen Kühlkörper, der durch thermischen Kontakt mit der Umgebung ein Wärmereservoir darstellt.

Zur Umrechnung des durch ein Digitalmultimeter (DMM) gemessenen Widerstandswerts in eine Temperatur, wird wie bei diesen Bauteilen angegeben ein Polynom 4. Grades benutzt:

$$R = R_0(1 + aT + bT^2 + c(T - 100 \text{ K})T^3), \quad (4.2)$$

mit den Konstanten  $R_0 = 100\Omega$ ,  $a = 3.9083 \cdot 10^{-3}/\text{K}$ ,  $b = -5.775 \cdot 10^{-7}/\text{K}^2$  und  $c = -4.183 \cdot 10^{-12}/\text{K}^4$ . In der elektrischen Messtechnik ist es üblich, diese Formel zu „linearisieren“. Dabei wird für die Funktion 4.2 eine Wertetabelle aufgestellt

---

<sup>1</sup>Eigentlich sollten nur noch Informationen der Kavität vorhanden sein, da aber die Polarisatoren nicht perfekt sind und auch das Objektiv nicht komplett polarisationsunabhängig ist, kommt es trotzdem zu weiteren kleinen Drehungen der Polarisation und somit zu einem Hintergrundrauschen.

und anschließend ein Polynom 3. Grades angepasst. Als variabler Parameter wird die Temperatur genommen. Die Formel zur direkten Temperaturberechnung lautet dann:

$$T = T_0 + dT + eT^2 + fT^3 \quad (4.3)$$

$$dT = \pm(0.30 \text{ K} + 0.005 \cdot |T|) \quad (4.4)$$

Mit den Konstanten  $T_0 = -246.27 \text{ K}$ ,  $d = 2.37137$ ,  $e = 872 \cdot 10^{-6}/\text{K}$ ,  $f = 0.43 \cdot 10^{-6}/\text{K}^2$  deren jeweils letzte Stelle unsicher ist.

## Tiefe Temperaturen

Um zu verhindern, dass bei sehr tiefen Temperaturen Wasser und Atmosphärengase anfrieren, ist es nötig, sie mit einem Vakuum zu umgeben. Hierzu wurde ein Kryostat in Kombination mit einer Turbopumpe benutzt. Durch Verdampfen von flüssigen Helium in den Kühlkanälen des Kryostats wird ein sogenannter Kühlfinger, auf dem die Probe mit Silberleitlack geklebt wurde, gekühlt. Die Variation der Durchflussmenge des Heliums und das Einschalten einer eingebauten Heizung erlaubt es, die Temperatur kontinuierlich zu ändern. Mit Hilfe eines PID-Reglers (proportional-integral-derivative controller), der im Versuch nur die Heizung ansteuern konnte, kann auf eine vorgegebene Temperatur geregelt werden. Ein für tiefe Temperaturen kalibriertes Thermometer gibt den Ist-Zustand der Kühlfingertemperatur an.

# 5. Ergebnisse und Auswertung

## 5.1. Spektrum

Um die theoretisch vorhergesagten Anstiege zu validieren, wurden Spektren bei verschiedenen Temperaturen aufgenommen. An diese wurden anschließend FANO-Resonanzen (Gleichung 4.1) angepasst und so die Resonanzparameter bestimmt. Anschließend werden diese Wellenlängen über der Temperatur aufgetragen. Abbildung 5.1 zeigt ein Beispieldspektrum und die angepassten FANO-Resonanzen. Der rechte Peak bei 637 nm entspricht der Grundmode, dessen spektrale Unsicherheit in der Größenordnung von  $10^{-2}$  nm liegt.

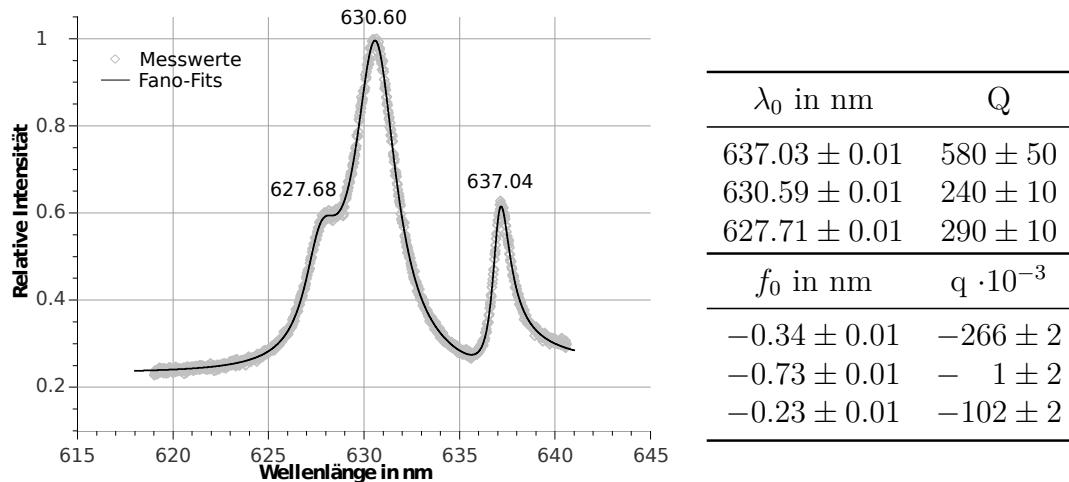


Abbildung 5.1.: Das Spektrum der L3-Kavität zeigt die Resonanz der Grundmode (rechts) und zwei weitere Resonanzen höherer Moden. Die Durchgezogene Linie resultiert aus drei Anpassungen nach Gleichung 4.1. Die nebenstehende Tabelle beinhaltet die dazugehörigen Fitparameter ( $Q = \lambda/\Gamma$ ). Der Lochradius beträgt 26 nm.

## 5.2. Messung im Bereich der Raumtemperatur

Um temperaturabhängig zu messen, wurde das PELTIER-Element an eine konstante Spannungsquelle angeschlossen und somit die Probe auf eine feste Temperatur gebracht. Der Widerstandswert des PT-100 gab über den Zusammenhang 4.3 Auskunft über die Temperatur.

War eine Temperatur stabil eingestellt, wurde mit dem Spektrometer ein Spektrum aufgenommen und durch Anpassung der FANO-Resonanz die Resonanzwellenlänge der Grundmode ermittelt.

Eigentlich wurde in diesem Temperaturbereich ein linearer Zusammenhang erwartet, doch wie in Abbildung 5.2 zu sehen, gibt es drei Bereiche verschiedenen Verhaltens.

- Bereich 1: Dadurch, dass die Temperatur der Probe unterhalb der Raumtemperatur liegt, kondensiert Wasser an der Membran. Abbildung 5.3 (rechts) b zeigt diesen Vorgang schematisch. Die Luftlöcher werden durch Wasserablagerungen kleiner. Bei großen Wasserschichtdicken, also niedrigen Temperaturen, kann ein effektiver Gesamtbrechungsindex der Löcher angenommen werden. Außerdem wird die Membran durch die Wasserablagerung effektiv dicker (der Brechungsindex von Wasser ist größer als der von Luft). Dies hat zur Folge, dass der Brechungsindexunterschied zwischen Löchern und GaP kleiner wird, der Lochradius aber gleich bleibt. Erhöht man die Temperatur, wird die Wasserschicht auf der Membran dünner. Deswegen nimmt man einen effektiv kleineren Lochdurchmesser an. Wird es noch wärmer, verschwindet die Wasserschicht [1].
- Bereich 2: Die trockene Probe zeigt wie erwartet ein lineares Verhalten. Der Brechungsindex von GaP ändert sich linear mit der Temperatur, die Resonanzfrequenz steigt. Es gibt einen Versatz am Punkt P, da die Messung dort unterbrochen und erst am nächsten Tag weitergeführt wurde. Wahrscheinlich hat sich in der Zeit Staub abgelöst (die Probe hing kopfüber). Dies führt zu einer Vergrößerung der Luftlöcher und somit zu einer Verringerung der Resonanzfrequenz wie in Bereich 1.
- Bereich 3: Die Probe beginnt zu oxidieren (Abbildung 5.3 (rechts) c). Da der Brechungsindex des oxidierten Galliumphosphids kleiner ist als der des nicht oxidierten, werden die Löcher effektiv größer und die Resonanzwellenlänge verkürzt sich.

Unterliegt die Membran keinen Wasseranlagerungen und keiner Oxidation, besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Temperatur und Resonanzwellenlänge. Neben dem in Abbildung 5.2 ermittelten Anstieg dieser Geraden wurden vier weitere ermittelt. Es ergibt sich ein gemittelter Anstieg von

$$a_{\text{Exp}} = 33 \pm 2 \text{ pm/K.} \quad (5.1)$$

Dieser deckt sich mit der theoretischen Erwartung aus Abschnitt 3.2.

### 5.2.1. Wärmeaustausch

Zwar deckt sich der experimentelle Anstieg mit der theoretischen Erwartung, dennoch lässt die große Unsicherheit des experimentellen Werts, die immerhin bei etwa 5% liegt, Raum für die folgenden Effekte. Die Membran ist beidseitig von Luft umgeben, gehalten von vier stabförmigen Haltern. Die Halter sind im Wesentlichen der einzige Wärmekontakt der Membran mit dem Wärmereservoir, also der restlichen Probe, die die selbe Temperatur  $T_1$  wie der Kupferblock hat. Weiterhin hat die Probe auf einer Seite thermischen Kontakt mit sich bewegender Luft der Temperatur  $T_3$ . Das hat der PT-100 auch, allerdings isoliert die aus dieser Seite des Sensors befindliche Keramikschicht sehr gut. Der thermische Gleichgewichtszustand der Membran muss nun bei einer Temperatur  $T_2$  liegen, wobei nach dem 0. Hauptsatz der Thermodynamik  $T_1 < T_2 < T_3$  gelten muss.

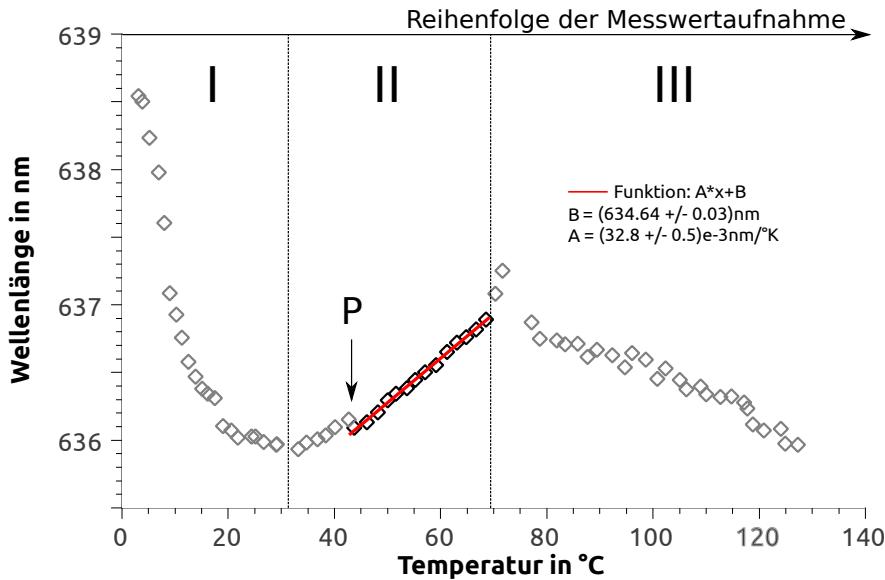


Abbildung 5.2.: Resonanzwellenlänge in Abhängigkeit von der Temperatur. Es wurde von tiefen zu höheren Temperaturen gemessen. Die rote Linie ist eine lineare Regression der hervorgehobenen Messwerte.

Der Wärmetransport durch einen Quader wird durch

$$\frac{dQ_H}{dt} = \frac{\lambda q}{L} (T_1 - T_2) \quad (5.2)$$

beschrieben [22]. Dabei bezeichnet  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit,  $q$  den Querschnitt (Fläche des Quaders in xz- bzw. yz-Ebene) und  $L$  die Länge (in xy-Ebene) des Quaders.

Die Wärmeabgabe der Membran durch thermischen Kontakt mit Luft ergibt sich zu

$$\frac{dQ_O}{dt} = \alpha A(T_2 - T_3). \quad (5.3)$$

$\alpha$  ist hierbei die Wärmeabgabe der Oberfläche pro Fläche und Kelvin (Wärmedurchgangskoeffizient),  $A$  ist die Oberfläche der Membran.

Ein Gleichgewichtszustand stellt sich ein, sobald die Membran eine Temperatur erreicht, bei der der Wärmezufuss durch die Halter komplett durch Wärmeverlust der Membranoberfläche kompensiert wird:

$$\begin{aligned} 4 \frac{dQ_H}{dt} &= \frac{dQ_O}{dt}, \\ \frac{\lambda q}{L} (T_1 - T_2) &= \alpha A(T_2 - T_3), \\ \Rightarrow T_2 &= \frac{\frac{4\lambda q}{L} T_1 + \alpha A T_3}{\alpha q + 4 \frac{\lambda q}{L}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Bei Temperaturen zwischen  $T_1 = 0^\circ\text{C}$  und  $130^\circ\text{C}$  weicht die Gleichgewichtstemperatur bei einer Leitfähigkeit von  $\lambda = 0.77 \text{ W/cm/K}$  [23], einem Wärmedurchgangskoeffizient von  $\alpha = 1 \text{ W/m}^2/\text{K}$ , einer quadratischen Membran der Kantenlänge 4

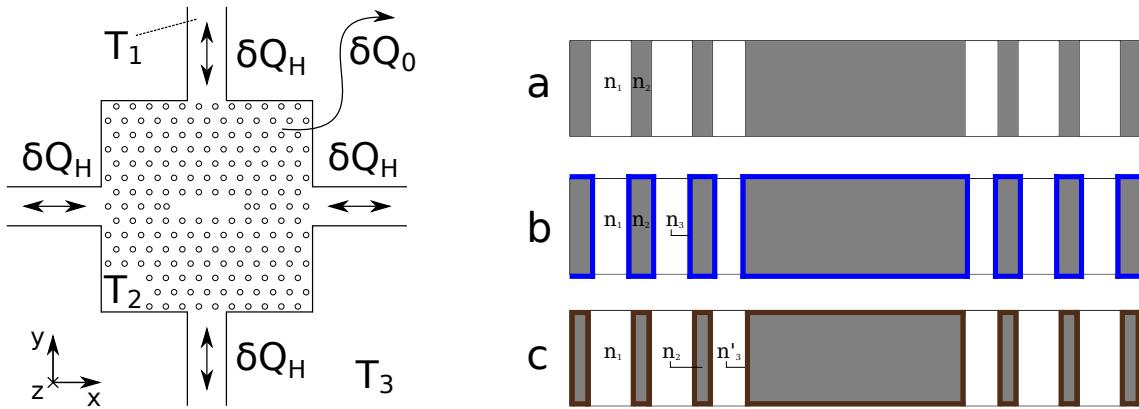


Abbildung 5.3.: Links ist die Veranschaulichung des Modells zur Berechnung der Gleichgewichtstemperatur der Membran dargestellt. Rechts ist eine schematische Darstellung a) der L3-Kavität im Schnitt, b) mit Wasserablagerung und c) bei einsetzender Oxidation.  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) bezeichnet den entsprechenden Brechungsindex.

$\mu\text{m}$ , einer Halterlänge von  $6 \mu\text{m}$ , einer Halterbreite von  $0.5 \mu\text{m}$  und einer Tiefe von  $55 \text{ nm}$ , in der Größenordnung

$$|T_1 - T_2| \approx 10^{-7} \text{ K} \quad (5.5)$$

ab und liegt somit weit unter der Messgenauigkeit.

Im Kryostat kann dieser Effekt nicht eintreten, da keine Luft vorhanden ist, mit der die Probe wechselwirken kann. Nun ist es aufgrund der großen Temperaturdifferenzen allerdings möglich, dass ein Wärmeaustausch durch thermische Strahlung stattfindet: Die Probe würde aufgewärmt werden. Dass sich das Material bei tiefen Temperaturen anders aufheizt als bei höheren Temperaturen, liegt an der Wärmeleitfähigkeit der Halter. Diese wird von der Phononendichte und bei sehr tiefen Temperaturen evtl. auch von den freien Elektronen, bzw. deren Beweglichkeit bestimmt. Beides nimmt zu tiefen Temperaturen hin ab.

Mithilfe der in Abschnitt 5.3.3 gewonnenen Werten wird die Wärmeleitfähigkeit für tiefe Temperaturen zu

$$\lambda_{4.6 \text{ K}} = (13 \pm 4) \cdot 10^{-3} \text{ W/cm/K} \quad (5.6)$$

abgeschätzt. Die Wärmeabstrahlung wird über das STEFAN-BOLTZMANN-Gesetz:

$$\frac{dQ_H}{dt} = \varepsilon \sigma A T^4 \quad (5.7)$$

berechnet. Dabei ist  $T$  die Temperatur der Umgebung,  $\varepsilon$  der Emissionsgrad (er liegt zwischen 0 und 1),  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$  die STEFAN-BOLTZMANN-Konstante und  $A = 16 \mu\text{m}^2$  die Fläche der Membran. Die Gleichgewichtstemperatur ergibt sich durch Gleichsetzen der Wärmezufuhr (die ihren Ursprung in der Wärmestrahlung der Umgebung hat) mit der Wärmeabfuhr durch die Halter (Gleichung 5.2). Mit der Ersetzung  $T_1 - T_2 = \Delta T$  folgt

$$\Delta T_{4.6 \text{ K}} = \frac{L \varepsilon \sigma A}{4 \lambda_{4.6 \text{ K}} q} T_3^4 \Rightarrow \Delta T_{4.6 \text{ K}} = \varepsilon \cdot (0.3 \pm 0.1) \text{ K}. \quad (5.8)$$

Dabei wurde vernachlässigt, dass die Membran ebenfalls Wärmestrahlung emittiert, denn der Einfluss ist sehr klein:  $4.6^4 K^4 \ll 300^4 K^4$ .

$\varepsilon$  ist nicht bekannt, je nach Größe des Werts kann die Wärmestrahlung bei sehr tiefen Temperaturen durchaus einen Einfluss haben: Die Lage der Resonanzfrequenz kann sich im Frequenzspektrum (mit dem Anstieg für tiefe Temperaturen aus Abbildung 5.4) um  $3 \pm 1$  pm verschieben.

## 5.3. Messung bei tiefen Temperaturen bis Raumtemperatur

Unter Vakuum wurden Spektren der L3-Kavität bei Temperaturen zwischen 4.6 K und 300.6 K aufgenommen. Durch die Anpassung von FANO-Resonanzen an die gemessenen Spektren konnten neben dem Temperatureinfluss auf die Resonanzfrequenz und die Güte der Kavität auch ihre Erwärmung durch einen Laser untersucht werden.

### 5.3.1. Temperaturabhängige Resonanzverschiebung

Wie in Abbildung 5.4 (links) gezeigt, lässt sich der Verlauf der Kavitätenresonanz durch zwei Geraden gut beschreiben. Man könnte auch einen exponentiellen Anstieg der Form  $a e^{bx} + c$  an die Messpunkte anpassen, allerdings würde diese Regression bei Raumtemperatur keine gute Approximation mehr sein. Auch bei tiefen Temperaturen ist sie nicht besser als die beiden Geraden. Die (roten) Quadrate in Abbildung 5.4 (links) weichen stark von jeder Erwartung ab. Sie sind wahrscheinlich Messfehler, denn: Auf hohe Temperaturen ist zum einen das Kryostat-Thermometer nicht kalibriert, zum anderen stieg der Druck im Kryostat bei steigender Temperatur an. Beide Fehlmessungen liegen außerdem über dem Gefrierpunkt von Wasser, war davor etwas an der Probe gefroren, könnte sich dies nun verflüssigt/verflüchtigt haben und das Messergebnis beeinflussen.

Die Abgrenzung der Wertebereiche der beiden Geraden bei 100 K ist nicht eindeutig. Man könnte die Grenze auch bei 120 K ziehen, die Anstiege ändern sich jedoch nur im Rahmen der angegebenen Unsicherheiten. Der Anstieg der blauen Gerade deckt sich mit dem theoretischen Wert aus Kapitel 3.4.1. Dieser kann jedoch nur bis 100 K angegeben werden, da Abbildung 3.4 die Entwicklung des Brechungsindex von Galliumphosphid erst ab dieser Temperatur angibt. Der flachere Anstieg bei tieferen Temperaturen wurde ebenfalls erwartet (siehe Kapitel 3.4.1), allerdings konnte kein konkreter Wert angegeben werden: Messwerte zur Berechnung eines Anstiegs des Brechungsindex bei diesen Temperaturen fehlen.

Eine wenigstens qualitative Aussage über die Anstiege kann man durch die Messungen von Samara et al. [24] treffen. Sie vermaßen den Brechungsindex von Galliumphosphid über große Temperaturbereiche bei Frequenzen von 1, 10 und 100 kHz. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.4 (rechts) dargestellt. Zwischen 30 und 100 K beschreibt der Verlauf eine parabelförmige Kurve, davor und danach ist ein nahezu linearer Verlauf zu sehen. Man kann nun auch für sichtbares Licht vermuten, dass der Anstieg bei niedrigen Temperaturen abnimmt.

### 5.3.2. Temperaturabhängigkeit der Güte

In Abbildung 5.5 ist die Entwicklung der Güte der verschiedenen Moden zu sehen es entspricht den Erwartungen, dass sie zu niedrigen Temperaturen hin zunimmt:

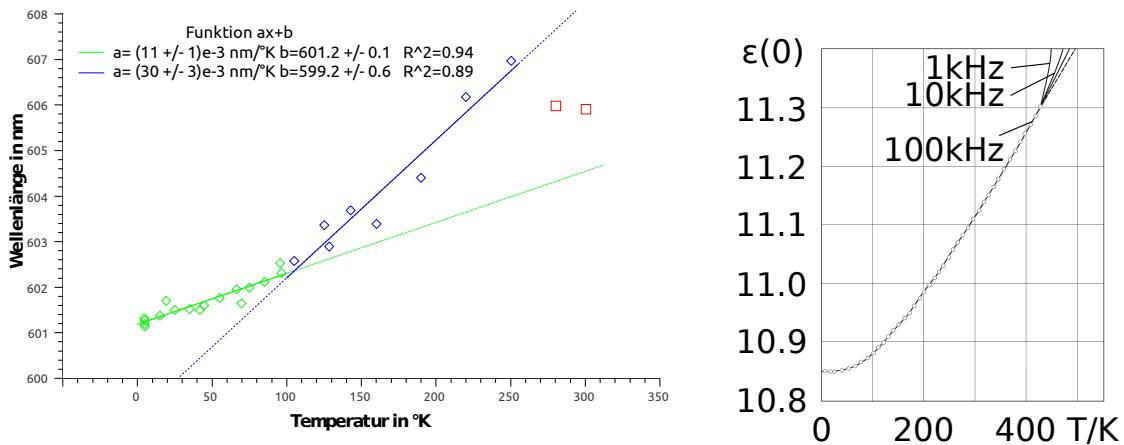


Abbildung 5.4.: Links sind gemessene Resonanzwellenlängen einer L3-Kavität über die Temperatur von 4.6 K bis 300.6 K aufgetragen. Grüne (blaue) Karos wurden zur Anpassung der grünen (blauen) Kurve verwendet. Die (roten) Vierecke sind vermutlich Fehlmessungen. Rechts ist die Permittivität  $\epsilon$  von GaP über weite Temperaturbereiche bei 1, 10 und 100 kHz dargestellt [24].

Das Material zieht sich bei tieferen Temperaturen zusammen, die Löcher werden größer, die Kavität und der Brechungsindex kleiner. Der kleinere Brechungsindex bewirkt ein örtlich tieferes Eindringen des Feldes, sowohl in die mit Luft gefüllten Löcher, als auch in die Luft ober- und unterhalb der Membran. Zudem klingt es auch in der Membranebene sanfter ab, da der kleinere Kontrast des Brechungsindex ein Schrumpfen der Bandlücke bewirkt. Das Feld kann tiefer in den Kristall eindringen und wird sanfter gedämpft. Klingt das Feld sanfter ab, kommt es zur Erhöhung der Güte (siehe Abschnitt 3.1).

Dass die höheren Moden im Rahmen der Messunsicherheit keinen Trend zeigen, liegt an der Feldverteilung. Wie in Abschnitt 2.7.1 diskutiert, muss das Feld der zweiten Mode stärker in den Löchern lokalisiert sein, als das der ersten Mode. In den Löchern befand sich während der Messung Vakuum, also lag ein konstanter Brechungsindex von  $n=1$  vor. Der Effekt des Zusammenziehens des Materials scheint sich nun mit dem sanfteren Abklingen an den GaP-Luft-Übergängen zu kompensieren.

### 5.3.3. Aufheizung der Kavität durch Laserbestrahlung hoher Intensität

Die Bestrahlung der Kavität mit einem Laser kann das Material aufheizen. In den theoretischen Überlegungen wurde das Material ideal als verlustlos angenommen, in Wirklichkeit ist das nur eine gute Approximation. Um so höher die Intensität des Feldes in der Kavität oder die Güte ist und um so geringer die Wärmeleitfähigkeit, desto größer wird der Temperaturgradient zwischen Kavität und Umgebung.

Experimentell kann die Erwärmung der Kavität durch einen Laser mit fast dem selben Messaufbau, wie in Abschnitt 4.2 vorgestellt, gemessen werden. Statt der LED in Abbildung 4.2 wird ein Laser verwendet. Dieser wird zeitgleich mit der kollimierten Weißlichtquelle, die wie zuvor zur Resonanzerzeugung dient, betrieben. Zusätzlich muss mit einem EMF-meter (electromagnetic field meter) die Leistung

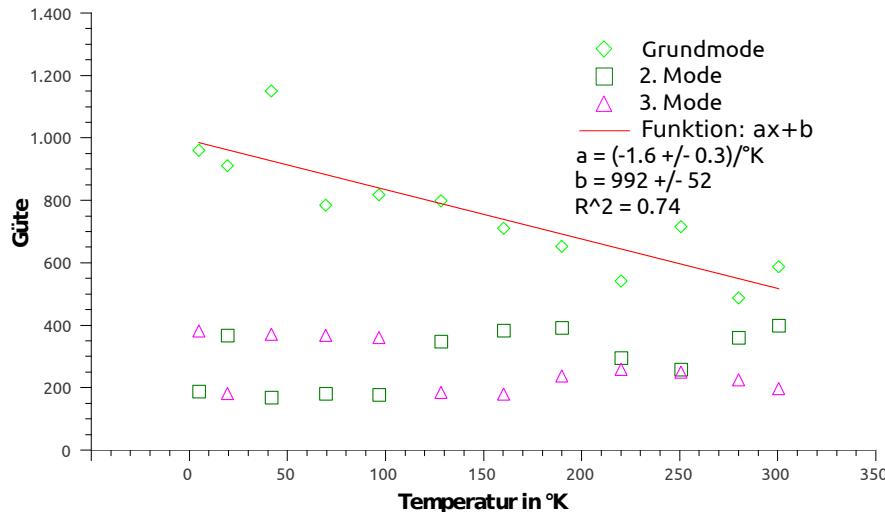


Abbildung 5.5.: Gemessene Güte von 4.6 K bis 300.6 K dreier Resonator-Moden einer L3-Kavität.

des Lasers gemessen werden. Im Experiment wurde diese nach dem Strahlteiler (6) (in Abbildung 4.2) gemessen.

Bei 4.6 K wurden Messwerte bei vier verschiedenen Laserleistungen aufgenommen. Bei 300.6 K wurden sechs Spektren jeweils mit hoher Laserintensität und ohne Laser aufgenommen. Die Resonanzwellenlängen ändern sich um  $60 \pm 20 \text{ pm}/\mu\text{W}$  für 4.6 K und um  $3 \pm 1 \text{ pm}/\mu\text{W}$  für 300.6 K. Durch die bekannten Zusammenhänge zur Temperatur aus Kapitel 5.2 und 5.3 ergeben sich schließlich die Erwärmungen:

$$\alpha_{4.6 \text{ K}} = (5 \pm 2) \text{ K}/\mu\text{W}, \quad \alpha_{300.6 \text{ K}} = (9 \pm 3) \cdot 10^{-2} \text{ K}/\mu\text{W}. \quad (5.9)$$

Galliumphosphid heizt sich bei verschiedenen Temperaturen unterschiedlich stark auf. Dies kann der Wärmeleitfähigkeit zugeschrieben werden, denn der einzige Wärmekontakt der Membran besteht in den Haltern (die Wärmeabstrahlung hat keinen so großen Effekt). Diese könnten durch die verminderte Wärmeleitfähigkeit bei niedrigen Temperaturen nicht mehr in der Lage sein, die Wärme abzuführen. Dass die Wärmeleitfähigkeit bei sehr niedrigen Temperaturen vermindert wird, liegt an der Verminderung von Phononen (oder frei beweglichen Elektronen). Beide sind für den Wärmetransport in Festkörpern verantwortlich.

Die Unsicherheit der Erwärmung der Kavität bei 4.6 K ist sehr groß, da jedoch nur vier Messungen gemacht wurden, ist das Ergebnis mit Vorsicht zu genießen.

### Anstiegskorrektur

Da die Erwärmung der Kavität bei 4.6 K durch Licht etwa das 60-fache der Erwärmung bei 300.6 K beträgt, kann die für die Messungen verwendete kollimierte Weißlichtquelle die Kavität bei verschiedenen Temperaturen verschieden stark erwärmen. Somit kann es nicht nur zu einem Offset, sondern auch zu einer Verzerrung des Anstiegs kommen.

Die Intensität der erwähnten Weißlichtquelle betrug  $\approx 150$  nW (sie erwärmt die Kavität bei 4.6 K also schon um etwa 0.8 K). Über den gesamten Temperaturbereich ergäbe sich ein zusätzlicher Anstieg von

$$a_{Korrektur} = (-30 \pm 10) \cdot 10^{-3} \text{ pm/K}. \quad (5.10)$$

Dabei wurde angenommen, dass sich die Wärmeleitfähigkeit von GaP linear mit der Temperatur ändert. Das ist wahrscheinlich nicht so, aber als grobe Abschätzung mit dem Ergebnis, dass der so ermittelte Anstieg zwei Größenordnungen von der Messunsicherheit entfernt ist, genügt sie.

## 6. Ausblick

Mithilfe des verwendeten Messverfahrens und der gewonnenen Messwerte deuten sich Anwendungen wie die nicht invasive *in situ* Temperaturmessung von L3-Kavitäten an. Aufgrund der verkürzten Detektionszeit, die mit diesem Messverfahren nötig ist, sind sogar Temperaturregelungen denkbar.

Da Kavitäten aufgrund der hohen Modendichte in ihrem Innern die Wechselwirkung von Licht mit Materie ermöglichen, dienen sie oft als Plattform für externe Teilchen wie Nanodiamanten mit NV-Zentrum. Diese können als Einzelphotonenemitter dienen. In Zukunft wird es möglich sein, die Temperatur dieser hybriden Nanostrukturen einzustellen und zu regeln - ohne den Emitter zu beeinflussen: Präzisionsmessungen der Resonanzentwicklung höherer Moden werden dazu dienen können, die Temperatur der an die Grundmode koppelnden Emitter zu bestimmen. Dazu wird es dann nicht mehr nötig sein Spektren aufzunehmen und FANO-Resonanzen anzupassen. Es wird genügen die Wellenlänge des Lasers auf die Flanke einer der höheren Moden zu setzen und dann das reflektierte Signal des Anregungslasers zu detektieren. Dessen Intensität wird sich aufgrund der Resonanzwellenverschiebung dieser höheren Mode ändern. Ein wesentliches Problem deutet sich dabei jetzt schon an: Die Form der FANO-Resonanz und damit das Verhältnis "Intensitätsänderung pro Kelvin" ändert sich mit dem Fokus. Da ein proportional?integral?derivative controller (PID-Regler) auf dieses Verhältnis reagiert, scheint es beispielsweise einfacher zu sein einen Zweipunktregler zu verwenden. Wird dessen Hysterese sehr klein gewählt hat das erwähnte Verhältnis kaum einen Einfluss auf die Regelung.

# A. Von den Symmetrien zur Brillouinzone

Ein Kristall birgt Symmetrien, die die nötigen Informationen zur elektromagnetischen Charakterisierung auf die sogenannte irreduzible BRILLOUIN-Zone einschränken. Um die Symmetrien auszuformulieren, wird zunächst die Operatorschreibweise eingeführt. Danach werden verschiedene Symmetrien diskutiert, die schließlich dazu dienen, die irreduzible BRILLOUIN-Zone aufzuspannen. Sie reicht zur vollständigen elektromagnetischen Charakterisierung des Kristalls aus.

## Die Operatorschreibweise und die Hermitizität

Die Betrachtung vieler Symmetrien wird durch den Formalismus für Eigenwertprobleme hermitescher Operatoren erleichtert. Dazu wird zunächst die Operatorschreibweise eingeführt und nach den anschließenden Schlussfolgerungen für hermitesche Operatoren abschließend der Ursprung der Bänder diskutiert.

Zunächst wird die Master-Gleichung

$$\nabla \times [\epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) \nabla \times \mathbf{H}_{kn}(\mathbf{r})] = \frac{\omega_n(\mathbf{k})^2}{c^2} \mathbf{H}_{kn}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.1})$$

in Operatorschreibweise mit dem Operator  $\hat{\Theta} = \nabla \times \epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) \nabla \times$  ausgedrückt

$$\hat{\Theta} \mathbf{H}_{kn}(\mathbf{r}) = \left( \frac{\omega_n(\mathbf{k})}{c} \right)^2 \mathbf{H}_{kn}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.2})$$

Wie zu sehen ist, besitzt dieser den Eigenwert  $(\omega/c)^2$ . Zudem ist er hermitesch, denn für das  $\mathbf{L}^2$ -Skalarprodukt zweier quadratintegrabler Vektorfelder  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{G}$ , unter Anwendung von  $\hat{\Theta}$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \hat{\Theta} \mathbf{G} \rangle &:= \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{F}^* \hat{\Theta} \mathbf{G} = \int d^3 \mathbf{r} \mathbf{F}^* \cdot \nabla \times \epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) [\nabla \times \mathbf{G}] \\ &= \int d^3 \mathbf{r} (\nabla \times \mathbf{F}^*) \epsilon_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{G}) - [\mathbf{F}^* \times \epsilon_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{G})]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \int d^3 \mathbf{r} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}^*) \epsilon_r^{-1} \mathbf{G} - [\mathbf{F}^* \times \epsilon_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{G}) + (\nabla \times \mathbf{F}^*) \epsilon_r^{-1} \times \mathbf{G}]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \int d^3 \mathbf{r} [\nabla \times \epsilon_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{F})]^* \mathbf{G} \\ &= \langle \hat{\Theta} \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle \mathbf{F}, \hat{\Theta} \mathbf{G} \rangle = \langle \hat{\Theta} \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle} \quad (\text{A.3})$$

Hierbei wird von einem verlustlosen Material ausgegangen, d.h.  $\epsilon_r$  ist reell.  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{G}$  bezeichnen periodische Vektorfelder. Das umrahmte Ergebnis entspricht der Definition der Hermitizität eines Operators und ist für  $\hat{\Theta}$  erfüllt. Um von der ersten

zur zweiten und von der zweiten zur dritten Zeile zu gelangen, wurde folgender Zusammenhang benutzt:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \epsilon_{ijk} \nabla_i (\mathbf{A}_j \mathbf{B}_k) = \epsilon_{ijk} (\nabla_i \mathbf{A}_j) \mathbf{B}_k + \epsilon_{ijk} \mathbf{A}_j (\nabla_i \mathbf{B}_k) \\ &= \epsilon_{ijk} (\nabla_i \mathbf{A}_j) \mathbf{B}_k - \epsilon_{jik} \mathbf{A}_j (\nabla_i \mathbf{B}_k) \\ &= \epsilon_{ijk} (\nabla_i \mathbf{A}_j) \mathbf{B}_k - \epsilon_{ijk} \mathbf{A}_i (\nabla_j \mathbf{B}_k) = (\nabla \times \mathbf{A}) \mathbf{B} - \mathbf{A} (\nabla \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} (\nabla \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\text{A.4})$$

Hierbei wurde das LEVI-CIVITA-Symbol  $\epsilon_{ijk}$  und die Einsteinsche Summenkonvention benutzt.  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  bezeichnen quadratintegrale Vektorfelder.

Aus der Hermitizität von  $\hat{\Theta}$  folgt sofort, dass seine Eigenwerte reell und Eigenmoden zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zu einander sind.

Die Orthogonalitätsbedingung ist der Grund, aus dem diskrete Bänder lokalisierter Moden entstehen:

Bei einem kontinuierlichen  $\mathbf{H}$ -Feld würde eine infinitesimale Änderung um  $\delta \mathbf{H}$  eine infinitesimale Änderung der Eigenwerte um  $\delta\omega$  bewirken. Dies stünde allerdings im Widerspruch zur Orthogonalitätsbedingung (im Weiteren sollen Eigenmoden normiert sein:  $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 1$ ):  $\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} + \delta \mathbf{H} \rangle = \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle + \langle \mathbf{H}, \delta \mathbf{H} \rangle \neq 0$ , also kann  $\mathbf{H} + \delta \mathbf{H}$  kein Eigenvektor und somit  $\omega + \delta\omega$  kein Eigenwert sein. Zu einem festem  $\mathbf{k}$  müssen sich verschiedene Lösungen um mehr als  $\delta\omega$  unterscheiden, d.h. es existieren diskrete Bänder.

Mithilfe dieser Überlegungen werden im Folgenden diverse Symmetrien diskutiert.

## Diskrete Translationsinvarianz: das Blochtheorem

Analog zu der quantenmechanischen Betrachtung eines Festkörpers bei dem ein periodisches elektrisches Potential (welches durch Ionenrümpe an den Gitterplätzen hervorgerufen wird [22]) für eine Periodizität in den Elektronenwellenfunktionen sorgt [25], sind die Eigenvektoren der Master-Gleichung ebenfalls periodisch. Daraus wird sich eine diskrete Translationssymmetrie ergeben.

Wie in [5] dargelegt, können die Eigenvektoren als ebene Wellen  $e^{i\mathbf{kr}}$  mit periodisch modulierten  $\mathbf{u}$  beschrieben werden (dies ergibt sich unter Anwendung eines Translationsoperators):<sup>1</sup>

$$\mathbf{H}_{kn}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_{kn}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{kr}}. \quad (\text{A.5})$$

Wobei der durch  $e^{i\mathbf{kr}}$  eingehüllte Vektor  $\mathbf{v}_{kn}(\mathbf{r})$  der Periodizität des Brechungsindex folgt ( $\epsilon_r^{-1}(\mathbf{r}) = \epsilon_r^{-1}(\mathbf{r} + \tilde{\mathbf{G}})$ ,  $n = \sqrt{\epsilon_r^{-1}(\mathbf{r})}$ ), es gilt also  $\mathbf{v}_{kn}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_{kn}(\mathbf{r} + \mathbf{G})$ .

In der Master-Gleichung wird  $\omega$  mit  $\mathbf{k}$  und  $n$  indiziert, so kommt es zur Bandstruktur: Bei festem  $n$  variiert  $\omega_{kn}$  kontinuierlich mit  $\mathbf{k}$  (wobei  $n$  diskret ist) oder anders:  $\omega_{kn}$  bezeichnet die  $n$ -te Dispersionsrelation, wobei  $n$  aus der in Abschnitt 2.5 diskutierten Diskretheit der Bänder stammt.

Örtliche und zeitliche Periodizität zusammen ergeben die Gleichung der ebenen Welle:

$$\mathbf{H}_{kn}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_{kn}(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)} \quad (\text{A.6})$$

<sup>1</sup>Diesmal allerdings örtlich bzw. im Impulsraum, nicht zu verwechseln mit der Entwicklung nach ebenen Wellen im Abschnitt 2.2, dort wurde die zeitliche Entwicklung mit ebenen Wellen beschrieben.

Eine diskrete Translationsinvarianz des Gitters überträgt sich also auf die Eigenfunktionen, sie unterscheiden sich nur noch durch komplexe Phasen. Da die Eigenwerte reell sind, überträgt sich diese Symmetrie direkt auf sie.

## Zeit- Dreh- und Spiegelsymmetrie der Master-Gleichung

Neben der im Abschnitt A ausgenutzten diskreten Translationssymmetrie existieren unter Anderem auch die Zeit- und Dreh- und Spiegelsymmetrie. Diese werden zum Konstruieren der irreduziblen BRILLOUIN-Zone benutzt. Die Spiegelsymmetrie ist außerdem der Grund für die Separation von transversal elektrischen und transversal magnetischen Moden. Die Symmetrien werden nun im Einzelnen diskutiert:

### Zeitsymmetrie

Die Zeitumkehr entspricht dem Komplex-konjugieren der Feldstärke  $\mathbf{H}$ . Da die Eigenwerte des hermiteschen Operators  $\hat{\Theta}$  reell sind, löst auch  $\mathbf{H}^*$  die komplex-konjugierte Master-Gleichung

$$\hat{\Theta} \mathbf{H}_{\mathbf{k}\mathbf{n}}^*(\mathbf{r}) = \left( \frac{\omega_n(\mathbf{k})}{c} \right)^2 \mathbf{H}_{\mathbf{k}\mathbf{n}}^*(\mathbf{r}), \quad (\text{A.7})$$

mit dem selben Eigenwert  $\omega$ . Es gilt:

$$\omega_n(\mathbf{k}) = \omega_n(-\mathbf{k}). \quad (\text{A.8})$$

Es ist also egal, ob man eine feste aber beliebige Zeit vorwärts oder rückwärts läuft, die Eigenwerte bleiben gleich.

### Drehsymmetrie

Ist ein System nach einer Drehung um einen bestimmten Winkel vom vorherigen Zustand ununterscheidbar, so liegt eine Drehsymmetrie vor. Eine vollständige Drehung entsteht, wenn sowohl die Feldvektoren, also auch die Ortsvektoren gedreht werden. Anstatt die Ortsvektoren zu drehen, ist es oft einfacher das Koordinatensystem in die entgegengesetzte Richtung zu drehen. Abbildung A.1 veranschaulicht die Überlegung. Wird das Vektorfeld  $\mathbf{A}(x, y)$  um den Winkel  $\phi$  durch den Operator  $\hat{D} = \hat{D}(\phi)$  gegen den Uhrzeigersinn gedreht, entsteht das Vektorfeld  $\hat{D} \mathbf{A}(x, y) = \mathbf{A}'(x, y)$  (siehe Abbildung).

Nun werden die Koordinaten mit dem Uhrzeigersinn durch  $(\hat{D}^{-1} x, \hat{D}^{-1} y) = (x', y')$  gedreht (symbolisiert durch das graue Koordinatensystem in der Abbildung). Beide Drehungen zusammen ergeben den vollständigen Drehoperator  $\hat{O}$ :  $\hat{O} \mathbf{A}(x, y) = \hat{D} \mathbf{A}(\hat{D}^{-1} x, \hat{D}^{-1} y) = \mathbf{A}'(x', y')$ .

$\mathbf{A}''(x, y)$  bezeichnet in Abbildung A.1 den Vektor  $\mathbf{A}'(x', y')$  im ursprünglichen Koordinatensystem.

Existiert eine Drehsymmetrie um den Winkel  $\phi_0$ , lässt  $\hat{O}(\phi_0)$  den Systemzustand invariant, es gilt  $[\hat{O}(\phi_0), \hat{\Theta}] = 0$  und

$$\hat{O}(\phi_0)(\hat{\Theta} \mathbf{H}_{\mathbf{k}\mathbf{n}}(\mathbf{r})) = \hat{\Theta}(\hat{O}(\phi_0) \mathbf{H}_{\mathbf{k}\mathbf{n}}(\mathbf{r})), \quad (\text{A.9})$$

$$\hat{O}(\phi_0) \left( \frac{\omega_n(\mathbf{k})}{c} \right)^2 \mathbf{H}_{\mathbf{k}\mathbf{n}}(\mathbf{r}) = \hat{\Theta}(\hat{O}(\phi_0) \mathbf{H}_{\mathbf{k}\mathbf{n}}(\mathbf{r})). \quad (\text{A.10})$$

Die Eigenwerte des gedrehten Systems sind identisch mit denen des nicht gedrehten Systems.

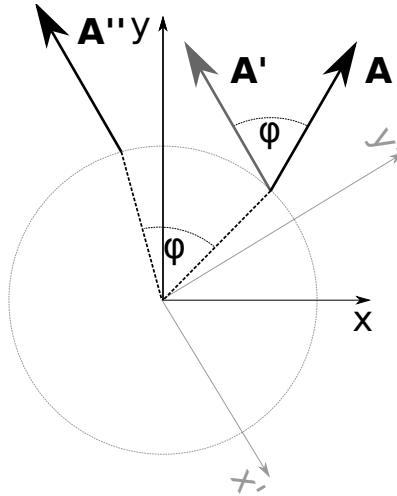


Abbildung A.1.: Schematische Illustration einer vollständigen Drehung eines Vektorfeldes (im Bild repräsentiert durch einen Vektor des Feldes)  $\mathbf{A}(x, y)$  um den Winkel  $\phi$ .

## Spiegelsymmetrie

Die Spiegelsymmetrie wird wie die Drehsymmetrie durch einen zusammengesetzten Operator  $\hat{O}_M$  realisiert. Dieser spiegelt das Feld und die Koordinaten:

$$\hat{O}_M \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{M} \mathbf{H}(\hat{M}\mathbf{r}). \quad (\text{A.11})$$

Wendet man die Spiegelung doppelt an, bleibt das Feld unverändert. Demnach müssen die Eigenwerte dieses Operators  $\pm 1$  sein. Da  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  ein Pseudovektorfeld und  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  ein Vektorfeld ist [7], transformieren sie wie folgt:

$$\hat{M} \mathbf{H}(\mathbf{r}) = +\mathbf{H}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.12}) \qquad \hat{M} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.14})$$

$$\Rightarrow \hat{O}_M \mathbf{H}(\mathbf{r}) = +\mathbf{H}(-\mathbf{r}), \quad (\text{A.13}) \qquad \Rightarrow \hat{O}_M \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(-\mathbf{r}). \quad (\text{A.15})$$

Eine sogenannte gerade Mode lässt die Felder unter Spiegelung invariant, d.h.:  $\hat{O}_M \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r})$  und  $\hat{O}_M \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ . Zusammen mit den aufgelisteten Formeln folgt, dass  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(-\mathbf{r})$  und  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(-\mathbf{r})$  ist. Ungerade Moden negieren die Felder unter Spiegelung. Analog erhält man:  $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\mathbf{H}(-\mathbf{r})$  und  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(-\mathbf{r})$ .

Der Beweis, dass sich die Spiegelsymmetrie eines Systems auf die Eigenwerte des Operators  $\hat{\Theta}$  überträgt, erfolgt analog zu dem im Abschnitt Drehsymmetrie geführten Beweis.

Im Rahmen dieser Arbeit werden gelochte Membranen untersucht, die sich in x- und y-Richtung erstrecken und dessen Dicke sich in z-Richtung erstreckt. Das System bleibt unter Spiegelung von  $z \rightarrow -z$  unverändert (damit ist eine Spiegelung an der x-y-Ebene in der Mitte der Membran bei halber Tiefe gemeint). Die eben hergeleiteten Konsequenzen für die Membran lauten

für gerade Moden:

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y, -z),$$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -\mathbf{E}(x, y, -z),$$

für ungerade Moden:

$$\mathbf{H}(x, y, z) = -\mathbf{H}(x, y, -z),$$

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y, -z).$$

Da es sich um eine Spiegelung an der xy-Ebene handelt, kann man die Gleichungen A.12 bis A.15 einsetzen. Daraus resultiert, dass manche Feldkomponenten verschwinden. Übrig bleiben

für gerade Moden:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(z),$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y),$$

für ungerade Moden:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y),$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z).$$

Da  $\mathbf{H}$  bei geraden Moden nur eine Komponente hat, die aus der Membranebene heraus zeigt, werden diese Moden transversal magnetische (TM-) Moden genannt. Die ungeraden dementsprechend transversal elektrische (TE-) Moden.

## Brillouinzone

Die diskutierten Symmetrien werden jetzt dazu benutzt das reziproke Gitter zu reduzieren, sodass ein Bereich im reziproken Raum entsteht, der keine Redundanz bezüglich der Frequenzverteilung mehr aufweist. Dieser Bereich wird irreduzible BRILLOUIN-Zone genannt und wie folgt konstruiert:

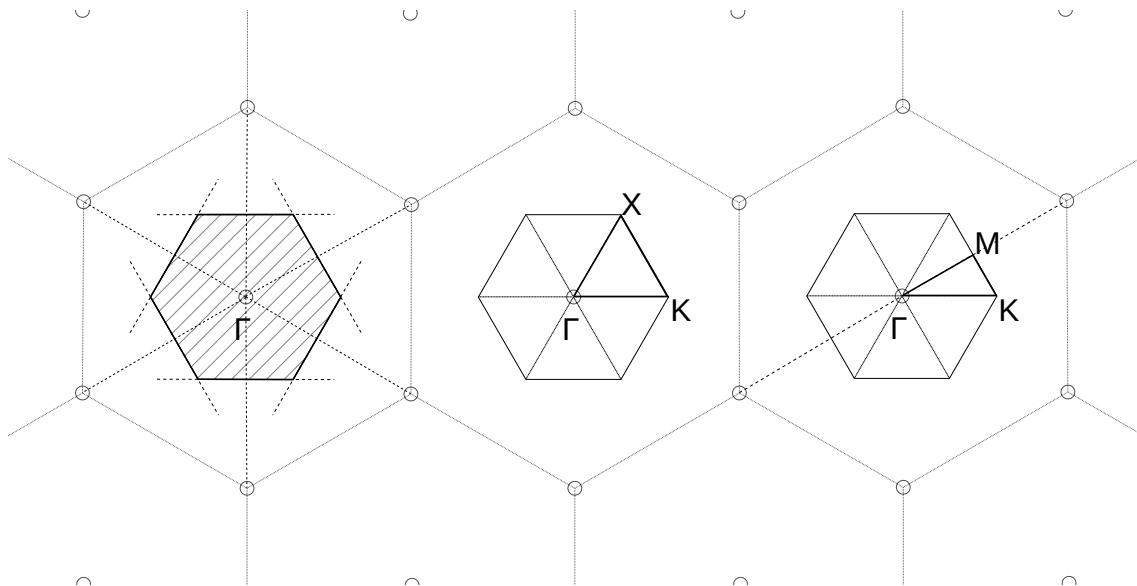


Abbildung A.2.: Schematische Darstellung der schrittweisen Konstruktion der irreduziblen BRILLOUIN-Zone.

Da eine diskrete Translationssymmetrie vorhanden ist (siehe Abschnitt A), muss zur Charakterisierung nicht der gesamte Kristall betrachtet werden, sondern nur der Raum von einem reziproken Gitterplatz (mittlerer Gitterplatz) bis zu den umliegenden Gitterplätzen. Dieser Bereich lässt sich noch weiter einschränken: Da aus

der Sicht eines jeden umliegenden Gitterplatzes das selbe gilt wie für den mittleren Gitterplatz (jeder äußere Gitterplatz könnte genauso als mittlerer Gitterplatz aufgefasst werden), ist die erste Hälfte des Wegs von einem reziproken Gitterplatz zum nächsten äquivalent zur zweiten Hälfte des Wegs (bis auf eine komplexe Phase). Es reicht, den Bereich zu betrachten, der entsteht, wenn man einen mittleren Gitterplatz mit seinen direkten Nachbarn verbindet und auf halber Strecke der Verbindungslien orthogonale Linien zieht (Abbildung A.2, links) . Der von den neu entstandenen Linien eingeschlossene Bereich ist die primitive WIGNER-SEITZ-Zelle, bzw. die erste BRILLOUIN-Zone.

Nutzt man jetzt die Drehsymmetrie aus, so verkleinert sich die Zone nochmals: Das Gitter hat eine 6-Zähligre Drehsymmetrie (Abbildung A.2, mittig). In Abschnitt A wurde gezeigt, dass sich die Drehsymmetrie des Systems auf die Eigenwerte der Master-Gleichung überträgt. Daraus folgt, dass ein Sechstel des bisherigen Bereichs betrachtet werden.

Die Spiegelsymmetrie schränkt den irreduziblen Bereich nochmals ein. Spiegelt man das Gitter an einer Achse die von  $\Gamma$ - und  $M$ -Punkt aufgespannt wird, sind die Eigenwerte der Master-Gleichung vorher und nachher gleich.

Kennt man das Verhalten der Frequenz auf den Rändern der irreduziblen BRILLOUIN-Zone, ist die Wellenausbreitung im gesamten Kristall bekannt.

# Literaturverzeichnis

- [1] Michael Barth. *Hybrid nanophotonic elements and sensing devices based on photonic crystal structures*. PhD thesis, HU Berlin, 2010. [Online: Stand 2011-05-13T17:23:22Z].
- [2] Dirk Englund, A.F. and Ilya Fushman, N.S. and Pierre Petroff, J.V. and others. Controlling cavity reflectivity with a single quantum dot. *Nature*, 450(7171):857–861, 2007.
- [3] Faraon, A. and Fushman, I. and Englund, D. and Stoltz, N. and Petroff, P. and Vuckovic, J. Dipole induced transparency in waveguide coupled photonic crystal cavities. In *IEEE Lasers and Electro-Optics Society, 2008. LEOS 2008. 21st Annual Meeting of the*, pages 622–623. IEEE, 2008.
- [4] Galli, M. and Portalupi, SL and Belotti, M. and Andreani, LC and O’Faolain, L. and Krauss, TF. Light scattering and fano resonances in highq photonic crystal nanocavities. *Applied Physics Letters*, 94:071101, 2009.
- [5] J.D. Joannopoulos. *Photonic crystals: molding the flow of light*. Princeton Univ Pr, 2008.
- [6] K. Mitzschke. *Erzeugung der Dritten Harmonischen in Silizium und Photonschen Kristallen aus makroporösem Silizium im spektralen mittleren IR-Bereich*. PhD thesis, Universitäts-und Landesbibliothek Sachsen-Anhalt, 2007.
- [7] Jackson, J.D. and Fox, R.F. Classical electrodynamics. *American Journal of Physics*, 67:841, 1999.
- [8] H. Ibach and H. Lüth. *Festkörperphysik: Einführung in die Grundlagen*. Springer, 2008.
- [9] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix computations*, volume 3. Johns Hopkins Univ Pr, 1996.
- [10] P. Kramper. *Mikroskopie und Spektroskopie an photonischen Kristallen: Einschluss von Licht auf Subwellenlängen-Bereiche (2003). Microscopy and Spectroscopy on Photonic Crystal: Confinement of Light to Subwavelength Regions*. PhD thesis, Uni Konstanz, 2002.
- [11] S.G. Johnson. *Photonic crystals: from theory to practice*. PhD thesis, Citeseer, 2001.
- [12] Y. Akahane, T. Asano, B.S. Song, and S. Noda. High-Q photonic nanocavity in a two-dimensional photonic crystal. *Nature* 425, 414:883–887, 2001.
- [13] G.A. Slack and SF Bartram. Thermal expansion of some diamondlike crystals. *Journal of Applied Physics*, 46(1):89–98, 1975.

- [14] AN Pikhtin, VT Prokopenko, VS Rondarev, and AD Yas'kov. Refraction of light in gallium phosphide. *Journal of Applied Spectroscopy*, 27(2):1047–1052, 1977.
- [15] L. Patrick and PJ Dean. Dielectric Constant of GaP at 1.6° K. *Physical Review*, 188:1254–1256, 1969.
- [16] A. S. Barker. Dielectric Dispersion and Phonon Line Shape in Gallium Phosphide. *Phys. Rev.*, 165(3):917–922, Jan 1968.
- [17] J. Picht. Beitrag zur Theorie der Totalreflexion. *Annalen der Physik*, 395(4):433–496, 1929.
- [18] W. Demtröder. *Experimentalphysik, volume 2: Elektrizität und Optik*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [19] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik*. Springer Berlin Heidelberg New York, 2010.
- [20] U. Fano. Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts. *Phys. Rev.*, 124(6):1866–1878, Dec 1961.
- [21] A.E. Miroshnichenko, S. Flach, and Y.S. Kivshar. Fano resonances in nanoscale structures. *Reviews of Modern Physics*, 82(3):2257, 2010.
- [22] W. Demtröder. *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper*. Springer, 2009.
- [23] Dismukes, JP and Ekstrom, L. and Steigmeier, EF and Kudman, I. and Beers, DS. Thermal and electrical properties of heavily doped ge-si alloys up to 1300° k. *Journal of Applied Physics*, 35(10):2899–2907, 1964.
- [24] G. A. Samara. Temperature and pressure dependences of the dielectric constants of semiconductors. *Phys. Rev. B*, 27(6):3494–3505, Mar 1983.
- [25] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 5/1: Quantenmechanik-Grundlagen*. Springer Verlag, 2008.

# Danksagung

Zuerst möchte ich Prof. Dr. O. Benson für die Aufnahme in der Arbeitsgruppe, seine Ideen, aber vor allem für die Motivation danken. Diese war für mich sehr wichtig, um die Sinnhaftigkeit dieser Arbeit zu verstehen und dadurch Spaß an der ganzen Sache zu haben!

Dann möchte ich natürlich Janik Wolters danken. Von ihm flossen nicht nur viele Ideen in diese Arbeit, er half mir auch sehr beim Verstehen der Thematik und beim Aufbau des Experiments - ohne seine Anstöße, Korrekturen, Simulationen und seinen Messplatz wären ganze Kapitel dieser Arbeit nicht entstanden.

Dr. Michael Barth möchte ich für seine Erklärungen, sowie für Bilder und Inhalte aus seiner Doktorarbeit danken.

Günter Kewes, Tim Schröder, Andreas Schell und der ganzen Arbeitsgruppe danke ich für das Interesse, das sie doch ab und zu an meinem Thema zeigten - dadurch entstand meinerseits neue Motivation. Gesine Steudle möchte ich für den Verleih ihrer Turbopumpe danken.

Zu guter Letzt: vielen Dank an Tabitha fürs Durchsehen und Korrigieren der Arbeit und an meine Familie und meine Freunde, die immer ein Ohr für mich hatten.

Macht's gut, und danke für den Fisch!

# Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit zur Erlangung des Bachelorgrades eigenständig und ohne Hilfe anderer als der angegebenen Hilfsmittel verfasst wurde.

Berlin, 14. September 2011

Niko Nikolay