

Yttrium-Vanadat als Kompensationskristall für Quantenkommunikationsanwendungen

BACHELORARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
(B. Sc.)
im Fach Physik



eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I
Institut für Physik
Humboldt-Universität zu Berlin

von
Herrn Oliver Weiße
geboren am 09.04.1992 in Berlin

Gutachter:

1. *Prof. Dr. Oliver Benson*
2. *Prof. Achim Peters, Ph.D.*

eingereicht am: 16. Juni 2015

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Funktion eines Yttrium-Vanadat-Kristalls als Kompensationskristall für eine Quelle verschränkter Photonen unterschiedlicher Wellenlänge untersucht. Der Brechungsindex des Kristall wird mit Hilfe eines optischen Resonators vermessen und dessen Temperaturabhängigkeit untersucht. Die theoretischen Grundlagen des optischen Resonators werden eingeführt. Es stellt sich heraus, dass der optische Resonator sich grundsätzlich zur Messung von optischen Weglängen eignet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Grundlegende Motivation	1
1.2	Polarisationsverschränkte Photonenpaarquelle	2
1.3	Aufbau und Ziele dieser Arbeit	3
2	Theoretische Grundlagen	5
2.1	Der optische Resonator	5
2.2	Messung des Brechungsindex mithilfe eines optischen Resonators . . .	10
2.2.1	Messung der Änderung des Brechungsindex	11
3	Experimentelle Umsetzung	13
3.1	Messung der Kristalllänge	13
3.2	Messung des Brechungsindex	14
3.2.1	Methode I: Bestimmung durch Abstimmung eines Probelasers	14
3.2.2	Methode II: Bestimmung durch Phasenmodulation eines Pro- belasers	16
3.3	Aufbau des Versuchs	21
4	Auswertung	24
4.1	Schiefelage des Kristalls	24
4.2	Methode I: Abstimmung eines Probelasers	26
4.3	Methode II: Phasenmodulation	27
4.4	Messung der Änderung des Brechungsindex mit der Temperatur . . .	31
4.4.1	Beispielrechnung zur Temperaturabstimmung	32
5	Zusammenfassung und Ausblick	33

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Grundlegende Motivation

In der heutigen Zeit können klassische Methoden der Informationsübertragung zunehmend angegriffen werden, daher ist es wichtig neue Wege der abhörsicheren Informationsübertragung zu entwickeln [5]. Die Quantenkommunikation macht sich die grundlegenden Gesetze der Quantenphysik zu Nutze, um vor unerwünschtem Abhören zu schützen. Ein wichtiges Ergebnis der Quantenphysik ist, dass Messungen den Quantenzustand eines Systems irreversibel verändern (sofern sie nicht an einem Eigenzustand vorgenommen werden). Um unerwünscht abzuhören ist zwangsläufig eine Messung am Quantensystem erforderlich. Der 'Lauscher' hinterlässt beim Abhören also erkennbare 'Spuren' und verändert durch seine Messung das System. Somit schützt die Quantenkommunikation zwar nicht vor Eingriffen, aber zumindest wird vor Abhörern gewarnt, sodass die Datenübertragung abgebrochen werden kann. [5, 6]

Die quantenphysikalischen Eigenschaften sind aber gleichzeitig auch ein Problem in der Quantenkommunikation. So werden für die Informationsübertragung über weite Strecken sogenannte Repeater benötigt, die der Abschwächung des Signals entgegenwirken. Der Repeater der klassischen Informationsübertragung kopiert einfach das empfangene Signal und sendet es verstärkt weiter. In der Quantenphysik gibt es allerdings ein sogenanntes 'No-Cloning-Theorem', welches ein einfaches Kopieren unbekannter Quantenzustände untersagt [5]. Für die Quantenkommunikation soll daher ein Quantenrepeater verwendet werden. [2, 5, 8]

Der Quantenrepeater basiert dabei auf dem quantenmechanischen Prinzip der Verschränkung. Verschränkte Teilchen haben korrelierte Eigenschaften, auch wenn diese nicht wechselwirken und sich weit entfernt voneinander befinden. Sind beispielsweise zwei Photonen polarisationsverschränkt, so wird durch die Messung der Polarisation eines Photons die Polarisation des anderen Photons mit festgelegt. Diese Eigenschaft machen sich Quantenrepeater zu Nutze um Quanteninformation über weite Strecken 'weiterzuleiten'. Für den Quantenrepeater (aber auch andere Anwendungen in der Quantenkommunikation) werden verschränkte Photonenpaare benötigt. [2, 5, 6, 8]

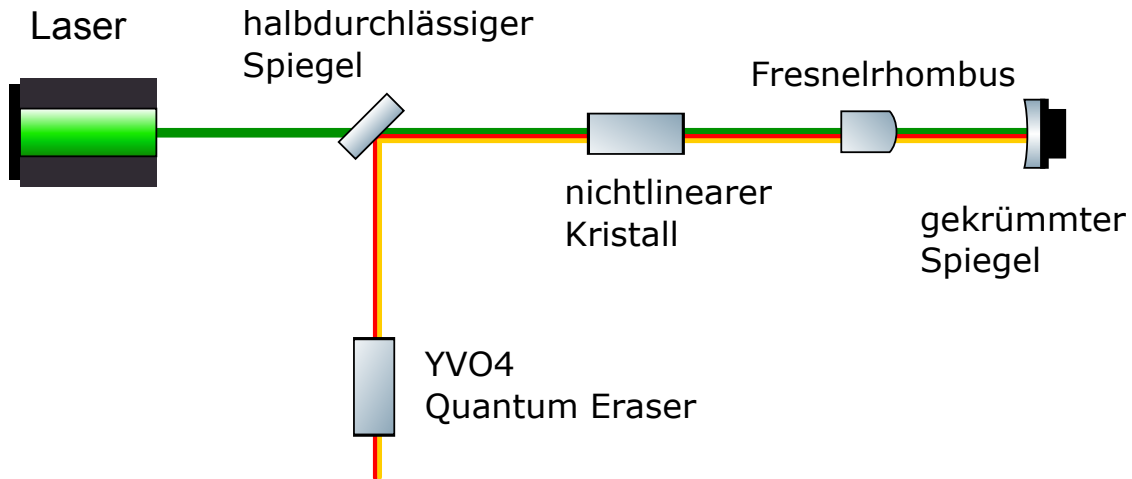


Abbildung 1.1: Aufbau der Photonenpaarquelle. Im nichtlinearen Kristall entstehen durch parametrische Fluoreszenz aus dem Pumplicht (grün) Photonenpaare (gelb und rot). Sie entstehen entweder im ersten oder zweiten Durchlauf durch den nichtlinearen Kristall. Die entstandenen Photonen haben nicht die gleiche Wellenlänge. Durch den Fresnelrhombus unterscheiden sich die Photonenpaare, je nach Erzeugungszeitpunkt, in ihrer Polarisation. Der Kompensationskristall passt die Phase der Photonenpaare an, um sie ununterscheidbar zu machen. So entstehen polarisationsverschränkte Photonenpaare.

1.2 Polarisationsverschränkte Photonenpaarquelle

In einem Quantenrepeater müssen verschiedene Komponenten zusammenwirken. Eine davon ist eine Quantenschnittstelle zwischen 'fliegenden Quantenbits' (Photonen), und 'stationären Quantenbits', die Quantenzustände über längere Zeit speichern können. Für stationäre Quantenbits können z.B. elektronische Zustände in Atomen eingesetzt werden. Diese müssen jedoch mit Photonen einer ganz spezifischen Wellenlänge wechselwirken. Auf der anderen Seite erfordert jedoch die Übertragung von Photonen als fliegende Quantenbits über optische Fasern Wellenlängen im Telecombereich. Eine geeignete Möglichkeit, dieses Problem zu lösen ist eine Quelle für verschränkte Photonen mit unterschiedlicher Wellenlänge. Die Erzeugung der verschränkten Photonenpaare geschieht durch den Effekt der parametrischen Fluoreszenz (englisch: down-conversion) in einem nichtlinearen Kristall [11]. In diesem wird ein Photon, unter Berücksichtigung der Energie- und Impulserhaltung in zwei Photonen umgewandelt.

In Abb. 1.1 ist der konzeptionelle Aufbau der Photonenpaarquelle abgebildet. Das diagonal polarisierte Licht geht durch einen nichtlinearen Kristall, wo mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ein vertikal polarisiertes Photonenpaar erzeugt wird. Dieses besteht aus zwei Photonen mit den Wellenlängen 894 nm und 1313 nm. Der nichtlineare Kristall wurde so produziert, dass nur vertikal polarisierte Photonen entstehen können. Das Photonenpaar durchläuft den Fresnelrhombus (Fresnelsches Parallelepiped), reflektiert am gekrümmten Spiegel und durchläuft den Fresnelrhombus ein weiteres Mal. Der Fresnelrhombus dreht ähnlich wie ein $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen die Polarisation des Lichts. Das erzeugte Photonenpaar hat nun horizontale Polarisation. Das ursprüngliche Laserlicht welches nicht in Photonenpaare zerlegt wurde, ist nach Durchgang durch den Fresnelrhombus und Reflexion am Spiegel weiterhin

diagonal polarisiert und durchläuft den nichtlinearen Kristall ein weiteres Mal. Hier wird mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wieder ein Photonenpaar in vertikaler Richtung produziert. Die Photonenpaare können also beim ersten Durchgang des Kristalls entstanden und horizontal polarisiert sein oder beim zweiten Durchgang entstanden und vertikal polarisiert sein.

Durch die Dispersion (Wellenlängenabhängigkeit des Brechungsindex) sind die Photonenpaare des ersten und zweiten Durchgangs allerdings unterscheidbar. Das Wellenpaket eines Photons hat im Frequenzraum eine gewisse Breite. Der Brechungsindex und damit die Lichtgeschwindigkeit im Medium hängen allerdings von der Frequenz ab. Die verschiedenen Frequenzen des Wellenpakets durchlaufen das Medium also unterschiedlich schnell und laufen demnach im Zeitraum auseinander. Die Photonenpaare, die im ersten Durchgang durch den nichtlinearen Kristall erzeugt wurden, haben nicht die gleiche Wegstrecke im nichtlinearen Kristall zurückgelegt wie die Photonenpaare, die im zweiten Durchlauf erzeugt wurden. Die Wellenpakete sind daher auch nicht gleich weit auseinander gelaufen.

Durch einen Kompensationskristall kann die Dispersion kompensiert werden. Nach dem Durchlauf durch den Kompensationskristall sind die Photonenpaare ununterscheidbar und somit unklar in welchem Durchlauf durch den nichtlinearen Kristall sie entstanden sind. Der Kompensationskristall 'löscht' die Information des Erzeugungszeitpunkts.

Es kann nun nicht mehr unterschieden werden, in welchem Durchlauf die Photonen erzeugt wurden und damit welche Polarisation sie haben. Die Photonen sind deshalb polarisationsverschränkt. Nach der Messung der Polarisation eines Photons, ist allerdings die des zweiten Photons bestimmt.

Der Kompensationskristall ist doppelbrechend. Bei doppelbrechenden Materialien ist, je nach Polarisation des Licht, der Brechungsindex ein anderer. Die Achsen des doppelbrechenden Kristalls werden 'ordentlich' und 'außerordentlich' genannt. Der Brechungsindex ist entscheidend für die Geschwindigkeit des Lichts im Medium und somit für das zeitliche Auseinanderlaufen der Photonen. Die vertikal und horizontal polarisierten Photonenpaare erfahren somit im Kompensationskristall einen unterschiedlichen Brechungsindex und somit kann bei richtig gewählter Länge die Dispersion kompensiert werden. Die Kompensation ist dabei nur von der Differenz der Brechungsindizes

$$\Delta n = n_a - n_o \quad (1.1)$$

der ordentlichen und außerordentlichen Achse abhängig. Ist diese bekannt lässt sich die richtige Länge zur Kompensation berechnen. [8, 16, 17]

1.3 Aufbau und Ziele dieser Arbeit

In dieser Arbeit soll der Brechungsindex für die ordentliche und außerordentliche Achse des Kompensationskristalls bei einer Wellenlänge von 894,3 nm bestimmt werden, um die benötigte Länge für die Kompensation bestimmen zu können. 894,3 nm ist die Wellenlänge, die eins der Photonen bei der Erzeugung am nichtlinearen Kristall hat. Zwar gibt es einige Quellen, die hier einen Brechungsindex angeben, allerdings unterscheiden sich diese ein wenig, was für das angestrebte Experiment große Auswirkungen hat. Außerdem sollte der Brechungsindex des wirklich verwendeten Kristalls tatsächlich ausgemessen werden.

Der Kompensationskristall wird aus mehreren Yttrium Vanadat Kristallen zusammengesetzt, wobei der kleinste Kristall 0,2 mm lang ist. Die Länge lässt sich also nicht beliebig genau zusammensetzen. Um die Phasenkompensation so genau wie möglich zu machen, können die Kristalle aber geheizt werden. Hiermit ändert sich der Brechungsindex der Kristalle und somit kann mit der Temperaturänderung eine 'Feinanpassung' durchgeführt werden. Es ist daher auch von Interesse, wie sich der Brechungsindex von Yttrium Vanadat bei Temperaturänderung verhält.

Der Brechungsindex des Kompensationskristalls wird mit Hilfe eines optischen Resonators untersucht. Von Interesse ist daher, ob und wie genau sich eine Brechungsindexmessung mit Hilfe eines optischen Resonators durchführen lässt. Hier werden zwei Methoden ausprobiert, die im Laufe der Arbeit beschrieben werden.

Zusammenfassend sind die Ziele der Arbeit folgende:

- Messung des Brechungsindex von Yttrium Vanadat der ordentlichen und außerordentlichen Achse bei einer Wellenlänge von 894,3 nm und Vergleich mit anderen Quellen
- Untersuchung der Brechungsindexänderung von Yttrium Vanadat bei Temperaturänderungen
- Überprüfung der grundsätzlichen Möglichkeit einer Brechungsindexmessung mit Hilfe eines optischen Resonators

Da die Messung mit einem optischen Resonator durchgeführt wird, werden in Kapitel zwei zunächst die theoretischen Grundlagen des optischen Resonators erklärt und wie mit dessen Hilfe Brechungsindexmessungen erfolgen können. Hier sind zwei verschiedene Arten der Messung möglich. Eine ungenauere Absolutmessung und eine genauere Messung, mit der nur die Änderung des Brechungsindex gemessen werden kann. Im dritten Kapitel wird der experimentelle Aufbau betrachtet. Es werden zwei Methoden zur Absolutmessung untersucht, wovon jedoch nur eine sinnvolle Ergebnisse liefern konnte. Kapitel vier widmet sich der Auswertung und Fehlerbetrachtung und in Kapitel fünf folgt eine Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Die Messung des Brechungsindex von Yttrium Vanadat wird mit einem optischen Resonator durchgeführt, daher sollen in diesem Kapitel zunächst dessen theoretische Grundlagen erarbeitet werden. Der Abschnitt 2.2 erklärt dann, wie mithilfe des Resonators der Brechungsindex gemessen werden kann. Außer der Absolutmessung, lässt sich mit dem Resonator auch die Änderung des Brechungsindex (zum Beispiel bei Temperaturänderung) bestimmen, womit sich Abschnitt 2.3 beschäftigt. Diese Messung ist genauer und wird zudem später auch zur Abschätzung des Fehlers bei Justierung des Kristalls benutzt.

2.1 Der optische Resonator

Ein optischer Resonator besteht aus zwei gegenüberliegenden Spiegeln. Das Licht wird mehrere Male reflektiert und es kommt zur Interferenz. Nur für bestimmte Wellenlängen, Resonatormoden genannt, kommt es zur konstruktiven Interferenz. In diesem Fall muss die Resonatorlänge einem ganzzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge entsprechen. Durch die Änderung der optischen Weglänge im Resonator ändern sich auch die Resonatormoden. Wird ein dielektrisches Material, z.B. ein Kristall, zwischen die Spiegel gelegt, verändern sich die Resonatormoden und durch Messungen mit und ohne Kristall, kann auf den Brechungsindex des Kristalls geschlossen werden. Dies soll im folgenden detaillierter betrachtet werden.

Es werden zwei ebene Spiegel wie in Abb. 2.1 betrachtet. Durch Reflexion entsteht eine Vielzahl von Wellen, die interferieren. Das Gesamtfeld ergibt sich also aus der Summe dieser Wellen. Bei jeder Reflexion schwächt sich die Amplitude der Welle um den Amplitudenreflexionskoeffizienten r ab. Die Spiegel sind teildurchlässig, daher ist $r < 1$. Außerdem verschiebt sich bei einem Umlauf die Phase der Welle um ϕ . Für das Gesamtfeld der sich nach rechts ausbreitenden Welle gilt also:

$$E = A_0(1 + r^2 e^{i\phi} + r^4 e^{2i\phi} + \dots) \quad (2.1)$$

A_0 sei hier die Amplitude der ursprünglichen Welle. Es handelt sich hierbei um eine geometrische Reihe.

$$E = \frac{A_0}{1 - r^2 e^{i\phi}} \quad (2.2)$$

der Reflektivität $R = r^2$ kann die Intensität $I = EE^*$ der Welle bestimmt werden.

$$I = \frac{A_0}{1 - R e^{i\phi}} \cdot \frac{A_0}{1 - R e^{-i\phi}} \quad (2.3)$$

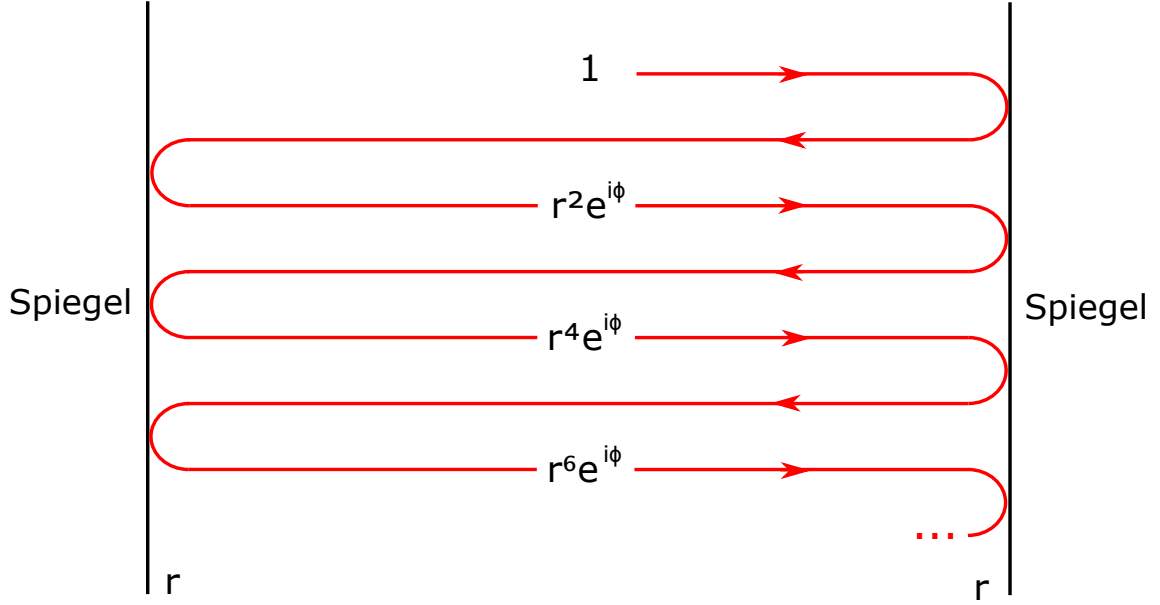


Abbildung 2.1: Lichtwelle im optischen Resonator. Die Welle wird an den Spiegeln mehrere Male hin und her reflektiert. Bei jeder Reflexion wird die Welle um den Amplitudenreflexionskoeffizient r abgeschwächt und die Phase verschiebt sich um ϕ . Die eingehende und die reflektierten Wellen interferieren miteinander [18].

$$= \frac{A_0^2}{1 - Re^{-i\phi} - Re^{i\phi} + R^2} \quad (2.4)$$

$$= \frac{A_0^2}{1 + R^2 - R(e^{i\phi} + e^{-i\phi})} \quad (2.5)$$

$$= \frac{A_0^2}{1 + R^2 - 2R \cos \phi} \quad (2.6)$$

Mit der trigonometrischen Identität

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \quad (2.7)$$

ergibt sich

$$I = \frac{A_0^2}{1 + R^2 - 2R(1 - 2 \sin^2 \frac{\phi}{2})} \quad (2.8)$$

$$= \frac{A_0^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad (2.9)$$

Dies ist die Intensität im Resonator. Um die Intensität hinter dem optischen Resonator zu erhalten, muss der Term noch mit $(1 - R)^2$ multipliziert werden, denn das Licht hat den hinteren Spiegel transmittiert. Wird das Licht von außen eingestrahlt, wird auch der vordere Spiegel transmittiert, was zu einem weiteren Faktor von $(1 - R)^2$ führt. Aus Gl. (2.9) wird also

$$I = \frac{A_0^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\phi}{2}} (1 - R)^2 \quad (2.10)$$

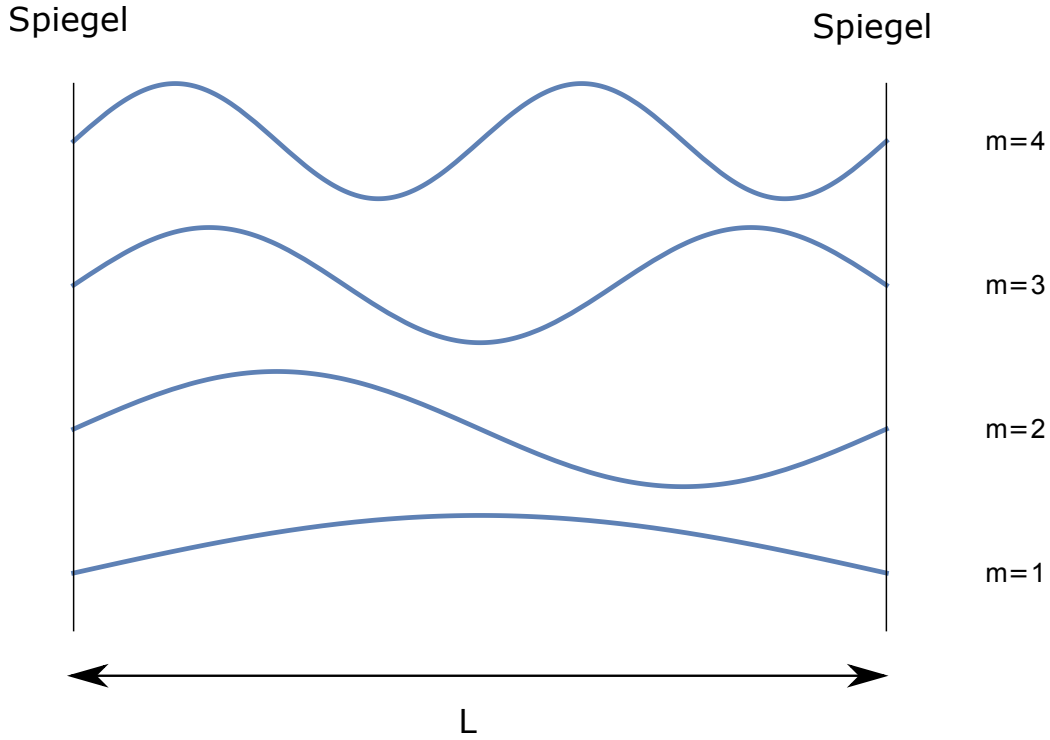


Abbildung 2.2: Moden im optischen Resonator. Sie erfüllen die Bedingung $m\lambda = 2L$. Der Spiegelabstand entspricht also immer einem ganzzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge.

Mit

$$G = \frac{4R}{(1 - R)^2} \quad (2.11)$$

und $I_0 = A_0^2$ ergibt sich

$$I = I_0 \frac{1}{1 + G \sin^2 \frac{\phi}{2}} \quad (2.12)$$

Die Intensität ist maximal wenn $\sin^2 \frac{\phi}{2} = 0$. Also gilt

$$\frac{\phi}{2} = m\pi \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.13)$$

Legt eine Welle den Weg s zurück, ist die Phase um

$$\phi = ks = \frac{2\pi}{\lambda}s \quad (2.14)$$

weitergelaufen [7]. k ist hier der Wellenvektor. Die Phasenverschiebung einer Welle, die sich um den doppelten Spiegelabstand $2L$ ausgebreitet hat ist daher

$$\phi = \frac{4\pi L}{\lambda} \quad (2.15)$$

Nach Gl. (2.13) und Gl. (2.15) kommt es zur maximalen konstruktiven Interferenz für Wellenlängen, welche die Bedingung

$$m\lambda = 2L \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.16)$$

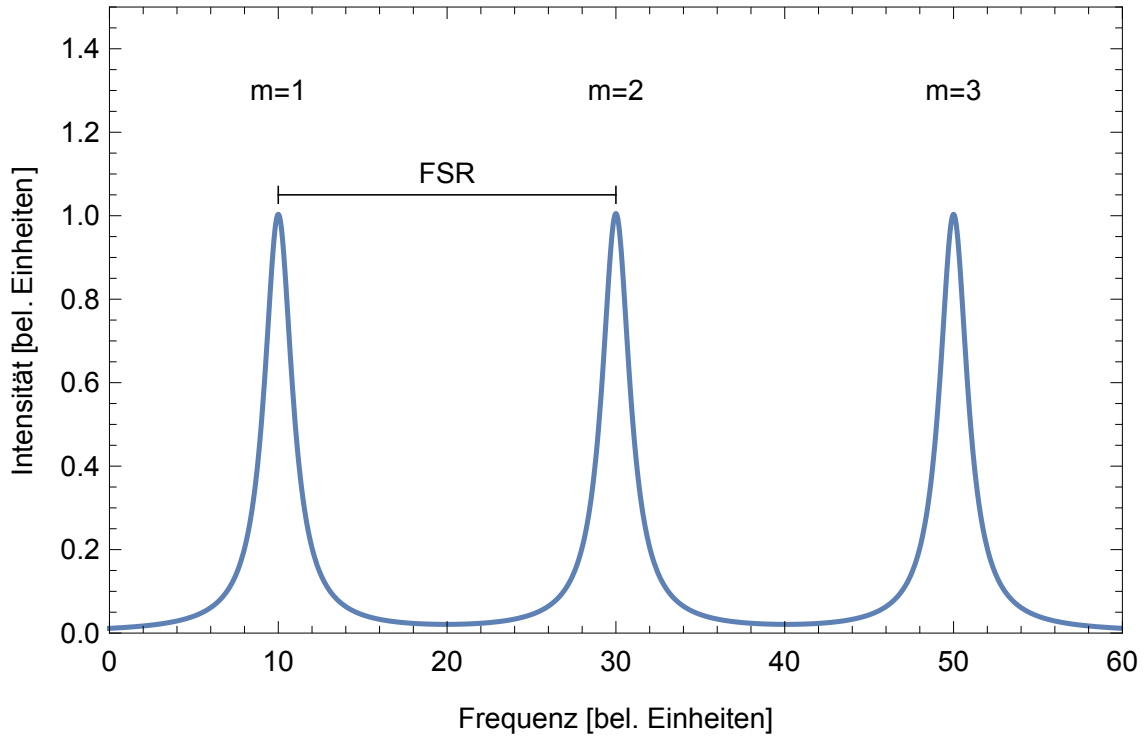


Abbildung 2.3: Die Resonanzfrequenzen im optischen Resonator. Sie sind äquidistant und ihr Abstand wird freier Spektralbereich FSR genannt. Die Form der Resonanzen sind Lorentzlinien.

erfüllen (Abb. 2.2). Die Resonanzen, werden auch Moden und m die Modenzahl genannt.

Im Frequenzbild gilt

$$f = \frac{mc}{2L} \quad m \in N \quad (2.17)$$

Das heißt, der Abstand zwischen zwei Resonanzfrequenzen ist konstant (Abb. 2.3). Er wird auch 'freier Spektralbereich' genannt (englisch: Free spectral range bzw. FSR).

$$FSR = \frac{c}{2L} \quad (2.18)$$

Nun soll noch die Form der Resonanzen auf der Frequenzskala betrachtet werden. Ist die Reflektivität hoch, wird auch G in Gl. (2.12) groß und für Wellenlängen, die größere Abweichungen von der Resonanzfrequenz haben, wird die Intensität sehr klein. Betrachtet man die Form der Kurve lässt sich somit die Kleinwinkelnäherung $\sin \frac{\phi}{2} \approx \frac{\phi}{2}$ verwenden, sodass sich Gl. (2.12) zu

$$I = I_0 \frac{1}{1 + G \left(\frac{\phi}{2} \right)^2} \quad (2.19)$$

$$\stackrel{(2.15)}{=} I_0 \frac{1}{1 + G \left(\frac{2\pi L f}{c} \right)^2} \quad (2.20)$$

$$= \frac{I_0 c^2}{4\pi^2 G L^2} \cdot \frac{1}{\frac{c^2}{4\pi^2 G L^2} + f^2} \quad (2.21)$$

umschreiben lässt. Es handelt es sich hierbei also um eine Lorentzlinie (Abb. 2.3), die sich schreiben lässt als

$$I = \frac{C}{\Delta^2/2 + f^2} \quad (2.22)$$

Dabei wurde die Konstante C als

$$C = \frac{I_0 \Delta^2}{2} \quad (2.23)$$

und die Halbwertsbreite Δ als

$$\Delta = \frac{c}{2\sqrt{G}\pi L} \quad (2.24)$$

definiert. Die Halbwertsbreite lässt sich noch weiter zu

$$\Delta \stackrel{(2.11)}{=} \frac{(1-R)c}{2\pi\sqrt{RL}} \quad (2.25)$$

$$\stackrel{(2.18)}{=} FSR \frac{1-R}{\pi\sqrt{R}} \quad (2.26)$$

umschreiben. Definiert man jetzt noch die Finesse

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R} \quad (2.27)$$

ergibt sich

$$\Delta = \frac{FSR}{\mathcal{F}} \quad (2.28)$$

Die Resultate wurden für ebene Spiegel hergeleitet. Sind allerdings die Spiegel nicht vollkommen parallel oder trifft der Lichtstrahl nicht exakt senkrecht auf die Spiegel, wird er nach einigen Reflexionen aus dem Resonator wandern. Um Stabilität zu gewährleisten, werden in der Praxis gekrümmte Spiegel verwendet. Hier ergeben sich allerdings die gleichen Resultate.

Außerdem können durch schiefe Ausrichtung des Lichtstrahls, Lichtwege wie in Abb. 2.4 entstehen. Hierdurch verlängert sich der Lichtweg, was nach Gl. (2.18) Resonanzen mit kleinerem FSR entspricht. Durch Ausrichtung des Lichtstrahls können verschiedene Resonanzen verstärkt und abgeschwächt werden [13, 18].

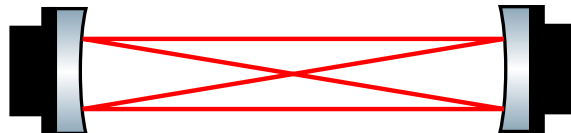


Abbildung 2.4: Schiefe Ausrichtung im optischen Resonator. Durch die schiefe Ausrichtung des Lichtstrahls, können längere Lichtwege entstehen, die zu anderen Resonanzen führen.

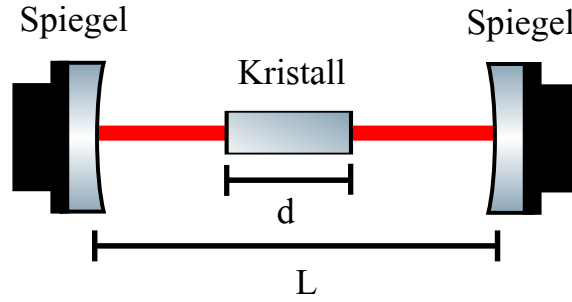


Abbildung 2.5: Der Kristall im optischen Resonator. Durch die Messung des FSR mit und ohne Kristall lässt sich auf die optische Weglänge des Kristalls schließen. Bei bekannter Kristalllänge d ist somit auch der Brechungsindex bekannt.

2.2 Messung des Brechungsindex mithilfe eines optischen Resonators

Mithilfe des optischen Resonators soll der Brechungsindex des Kristalls vermessen werden. Der Kristall befindet sich zwischen den Spiegeln des Resonators. Prinzipiell lässt sich mit dem optischen Resonator nur die optische Weglänge W , die das Licht zwischen den Spiegeln zurücklegt, bestimmen. Wird zweimal gemessen, mit und ohne Kristall, kann auf die optische Weglänge des Kristalls geschlossen werden. Bei bekannter Kristalllänge ist dann auch der Brechungsindex bekannt.

Zunächst müssen die in Abschnitt 2.1 hergeleiteten Formeln modifiziert werden. Wird ein dielektrisches Medium in den optischen Resonator eingebracht ändert sich die Lichtgeschwindigkeit. Die Länge L muss daher durch die optische Weglänge

$$W = nL \quad (2.29)$$

ersetzt werden. Aus Gl. (2.18) wird somit

$$FSR = \frac{c}{2W} \quad (2.30)$$

Nun wird der Kristall im optischen Resonator in Abb. 2.5 betrachtet. Durch das Einlegen des Kristall wird sich der freie Spektralbereich verändern. Der Kristall füllt nicht den kompletten optischen Resonator aus. Der Lichtstrahl wandert auch durch Luft mit dem Brechungsindex n_L . Die optische Weglänge ist die Summe der einzelnen optischen Weglängen. Ohne Kristall ist die optische Weglänge W zwischen den Spiegeln

$$W = n_L L \quad (2.31)$$

und mit Kristall ist die optische Weglänge W

$$W = n_L(L - d) + nd = n_L L + (n - n_L)d \quad (2.32)$$

Setzt man Gl. (2.31) in Gl. (2.30) ein und stellt um, erhält man die Gleichung

$$n_L L = \frac{c}{2 FSR_o} \quad (2.33)$$

Das Einsetzen von Gl. (2.32) in Gl. (2.30) führt auf

$$n_L L = \frac{c}{2 FSR_m} - (n - n_L)d \quad (2.34)$$

FSR_m ist der freie Spektralbereich mit Kristall und FSR_o ist der freie Spektralbereich ohne Kristall. Gleichsetzen von Gl. (2.33) und Gl. (2.34), sowie Auflösen nach n ergibt

$$n = \frac{c}{2d} \left(\frac{1}{FSR_m} - \frac{1}{FSR_o} \right) + n_L \quad (2.35)$$

Um den Brechungsindex des Kristalls zu bestimmen werden also die Länge des Kristalls und die freien Spektralbereiche mit und ohne Kristall, sowie die Länge des Kristalls benötigt.

2.2.1 Messung der Änderung des Brechungsindex

Durch Temperaturänderung von Yttrium Vanadat, ändert sich auch der Brechungsindex des Kristalls. Mit dem optischen Resonator lässt sich auch die *Änderung* des Brechungsindex in genauerer Form messen. Es kann festgestellt werden um welchen Betrag sich der Brechungsindex durch den Temperatureinfluss ändert, obwohl man den absoluten Brechungsindex nur ungenau kennt. Die theoretische Grundlage dafür soll hier vorgestellt werden.

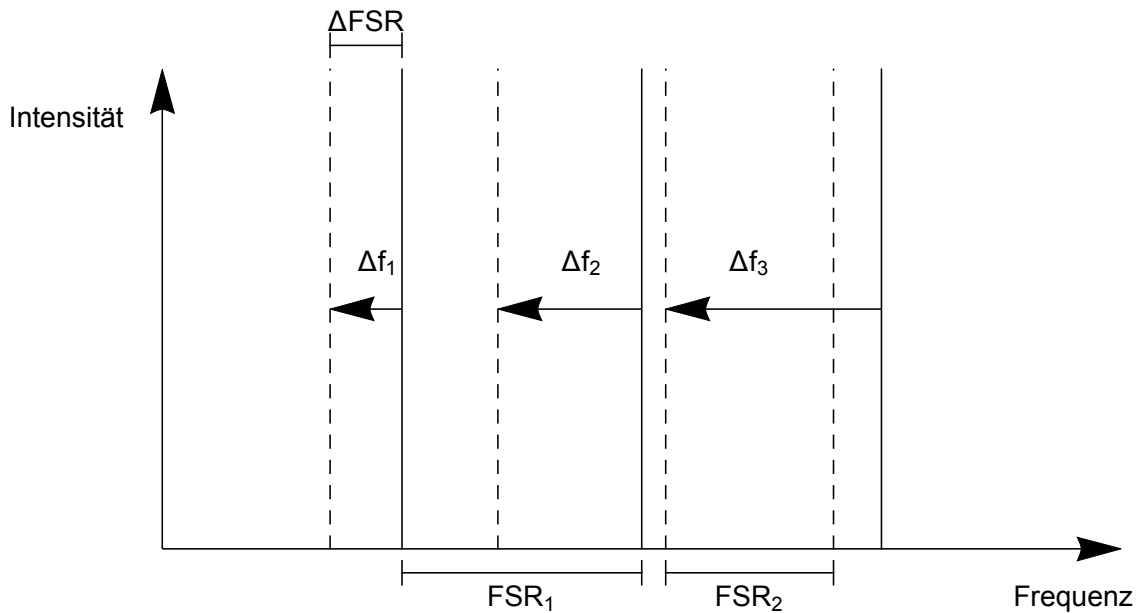


Abbildung 2.6: Verschiebung der Resonanzlinien bei Temperatureinfluss. Die durchgezogenen vertikalen Linien sind die Resonanzlinien vor Temperaturänderung. Bei Änderung des Brechungsindex verschieben sich die Resonanzfrequenzen (gestrichelt). Je größer die Modenzahl m , desto mehr verschieben sie sich.

Ändert man den Brechungsindex des Kristalls (zum Beispiel durch Temperaturänderung), ändern sich auch die Resonanzfrequenzen (Abb. 2.6). Denn

$$f_m = \frac{mc}{2W} = m FSR \quad m \in N \quad (2.36)$$

Durch die Änderung des Brechungsindex ändert sich die optische Weglänge und die m -te Resonanzfrequenz ist eine andere. Auch der freie Spektralbereich, zweier Resonanzfrequenzen, ändert sich bei Änderung des Brechungsindex.

$$\Delta f_m = m \Delta FSR \quad m \in N \quad (2.37)$$

Je grösser die Modenzahl m der betrachteten Resonanzfrequenz, desto mehr verschiebt sich diese bei Änderung des Brechungsindex. Somit kann die Änderung der Resonanzfrequenz gerade bei hoher Modenzahl gut gemessen werden. Die Modenzahl ist nach Gl. (2.36)

$$m = \frac{c}{\lambda FSR} \quad (2.38)$$

Die Änderung des Brechungsindex ergibt nach Gleichung (2.35), (2.37) und (2.38)

$$\Delta n \stackrel{(2.35)}{=} \frac{c}{2d} \left(\frac{1}{FSR_2} - \frac{1}{FSR_1} \right) = -\frac{c}{2d} \frac{\Delta FSR}{FSR_1 FSR_2} \quad (2.39)$$

$$= -\frac{c}{2d FSR_1 (FSR_1 + \Delta FSR)} \stackrel{(2.37)}{\approx} -\frac{c}{2d m FSR^2} \Delta f_m \quad (2.40)$$

$$\Delta n \stackrel{(2.38)}{\approx} -\frac{\lambda}{2d} \frac{\Delta f_m}{FSR} \quad (2.41)$$

wobei FSR_1 und FSR_2 den freien Spektralbereich vorher und nachher jeweils *mit* Kristall bezeichnen. Sie sind ungefähr gleich groß (daher kann ΔFSR vernachlässigt werden) und müssen mit der ungenaueren Absolutmessung bestimmt werden. Ist also der *absolute* Wert des FSR ungefähr bekannt, kann durch die Verschiebung der m -ten Resonanzfrequenz auf die *Änderung* des FSR oder die *Änderung* des Brechungsindex geschlossen werden.

Kapitel 3

Experimentelle Umsetzung

In diesem Kapitel werden in Abschnitt 3.2 zunächst die zwei Methoden zur experimentellen Umsetzung vorgestellt. Im Experiment sind die Resonanzfrequenzen des optischen Resonators unbekannt. Um die Resonanzbedingung in Gl. (2.16) zu erfüllen muss daher ein Parameter variiert werden. Eine der Methoden variiert die Länge des Resonators, während die andere die Wellenlänge des Lichts verändert. Die Methoden verwenden außerdem unterschiedliche Verfahren zur Kalibrierung der Frequenzskala. Abschnitt 3.3 erklärt den realen Aufbau des Versuchs für beide Methoden. Es werden Justierung und Ablauf der Messung, sowie auftretende Probleme auf Grund der Sensibilität des Experiments, beschrieben und diskutiert.

3.1 Messung der Kristalllänge

Um den Brechungsindex des Kristalls messen zu können, wird wie in Abschnitt 2.2 gezeigt wurde, nach Gl. (2.35) die Länge des Kristalls benötigt. Diese wurde mit einem Lichtmikroskop ausgemessen und digital ausgewertet. In Abb. 3.1 ist ein Bild eines vermessenen Kristalls zu sehen. Die Kristalle sind ca. 2 cm lang und konnten auf 3 Nachkommastellen genau vermessen werden.

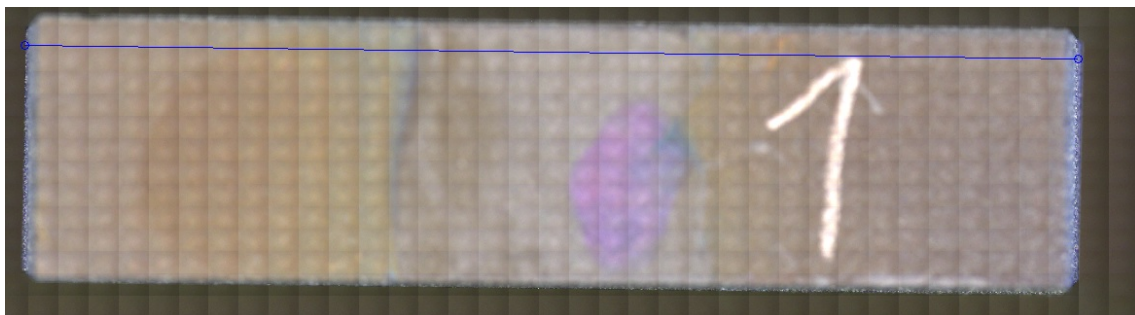


Abbildung 3.1: Kristall unter dem Lichtmikroskop. Die 1 auf dem Kristall ist die Kristallnummer. Der bläuliche Fleck wurde aufgetragen um die ordentliche und außerordentliche Achse des Kristalls auseinander halten zu können. Die blaue Linie dient der eigentlichen Vermessung des Kristalls. Die Mikroskopsoftware gibt die Länge dieser eingezeichneten Linie aus. Die Länge der Kristalle entspricht in etwa 2 cm.

3.2 Messung des Brechungsindex

Um den Brechungsindex des Kompensationskristalls messen zu können muss der freie Spektralbereich des optischen Resonators mit und ohne Kristall gemessen werden. Dazu wurden zwei verschiedene Methoden ausprobiert.

In der ersten Methode, beschrieben in Abschnitt 3.2.1, wird die Frequenz des Lasers durchgestimmt, sodass die Resonanzbedingung für einige Frequenzen erfüllt wird. Die Frequenzskala wird dabei mit den charakteristischen Spektrallinien von Cäsium kalibriert.

In der zweiten Methode, beschrieben in Abschnitt 3.2.2, wird die Frequenz des Lasers konstant gehalten und stattdessen die Länge des Resonators verändert. Dem Laser werden durch Phasenmodulation Seitenbänder aufgeprägt, sodass er nicht mehr monochromatisch ist. Obwohl die Frequenz konstant ist, kann durch die Seitenbänder auf den Abstand zweier Resonanzfrequenzen geschlossen werden.

3.2.1 Methode I: Bestimmung durch Abstimmung eines Probelasers

In dieser Methode wird die Frequenz des Lasers zeitlich linear erhöht. Somit wird die Resonanzbedingung für einige Frequenzen des optischen Resonators erfüllt und am Detektor hinter dem Resonator ein Signal registriert. Um die Zeitskala des Detektorsignals in eine Frequenzskala umzuwandeln, muss diese kalibriert werden. Das Cäsium, dessen Spektrallinien bekannt sind, wird hier zur Kalibrierung benutzt.

Der Versuchsaufbau soll nun genauer betrachtet werden und ist in Abb. 3.2 abgebildet. Das Licht durchläuft ein $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen und kann damit in seiner Polarisation gedreht werden. Der polarisierende Strahlteiler (englisch: Polarizing beam splitter bzw. PBS) teilt das Licht je nach Polarisationsrichtung in zwei Teilstrahlen auf. Somit kann mit dem $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen die Intensität der beiden Teilstrahlen eingestellt werden. Der eine Teilstrahl geht durch eine mit Cäsium gefüllte Kammer und trifft dort auf einen Detektor.

Die Cäsiumatome können von Licht passender Frequenz in einen höheren Energiezustand versetzt werden. Die angeregten Atome emittieren durch den elektronischen Übergang in den Grundzustand Licht gleicher Frequenz in alle Raumrichtungen. Der Laserstrahl wird dementsprechend in seiner ursprünglichen Richtung abgeschwächt. Entspricht das Licht also den charakteristischen Spektrallinien von Cäsium wird am Detektor 1 nur ein sehr abgeschwächtes Signal zu messen sein.

Der Detektor ist mit einem Oszilloskop verbunden, welches das Signal über die Zeit aufnimmt. Da der Laser zeitlich linear erhöht wird, ist die Zeitskala proportional der Frequenzskala. Das Signal ist reduziert wenn die Frequenz den charakteristischen Spektrallinien des Cäsiums entsprechen (Abb. 3.3).

Der andere Teilstrahl geht durch den optischen Resonator. Das $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen dient der erneuten Drehung der Polarisation, es sollen nämlich sowohl der Brechungsindex der ordentlichen Achse, als auch der außerordentlichen Achse des Kristalls vermessen werden. Die Linsen dienen der Fokussierung in den optischen Resonator bzw. auf den Detektor 2. Mithilfe der Spiegel lässt sich der Strahl drehen und verschieben, um ihn so optimal auf den optischen Resonator ausrichten zu können.

Der optische Resonator hat teildurchlässige Spiegel, sodass auch ein wenig Licht ein- und austreten kann. Nur wenn der zeitlich linear erhöhte Laser einer Resonanzfrequenz entspricht, misst Detektor 2 ein Signal. Denn nur dann interferieren

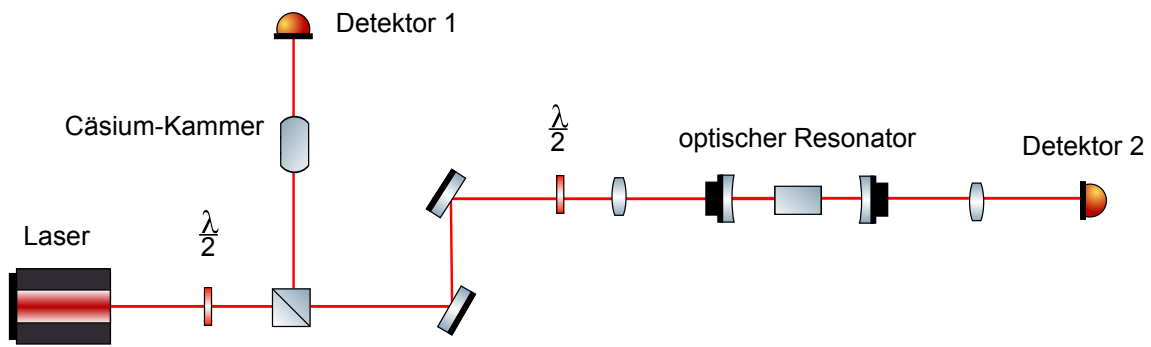


Abbildung 3.2: Der Versuchsaufbau mit der Spektrallinien-Methode zur Bestimmung des FSR. Der Strahl wird an einem polarisierendem Strahlteiler aufgeteilt. Ein Teilstrahl durchläuft eine Cäsiumkammer, während der andere Teilstrahl durch den optischen Resonator läuft. Der Laser wird in der Frequenz linear erhöht, daher sind an Detektor 2 die Resonanzen des optischen Resonators zu sehen. Die Spektrallinien von Cäsium am Detektor 1 dienen der Kalibrierung Frequenzskala.

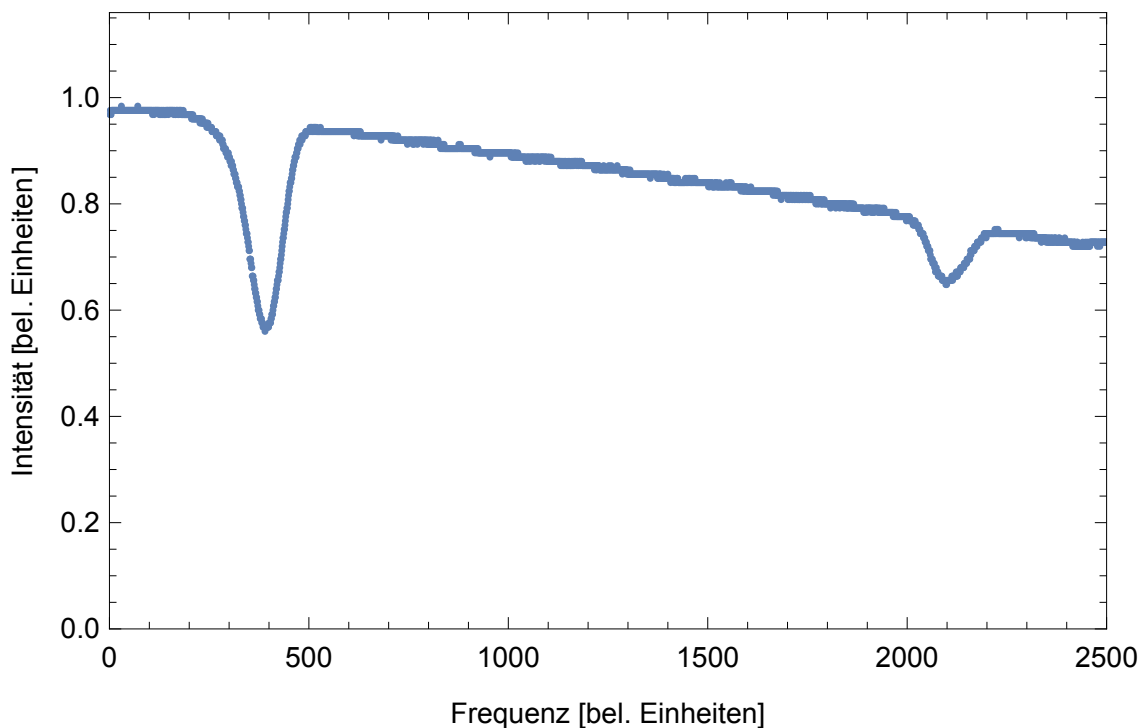


Abbildung 3.3: Transmission durch die Cäsium-Kammer. Entspricht die Frequenz den Spektrallinien des Cäsiums ist die Intensität abgeschwächt.

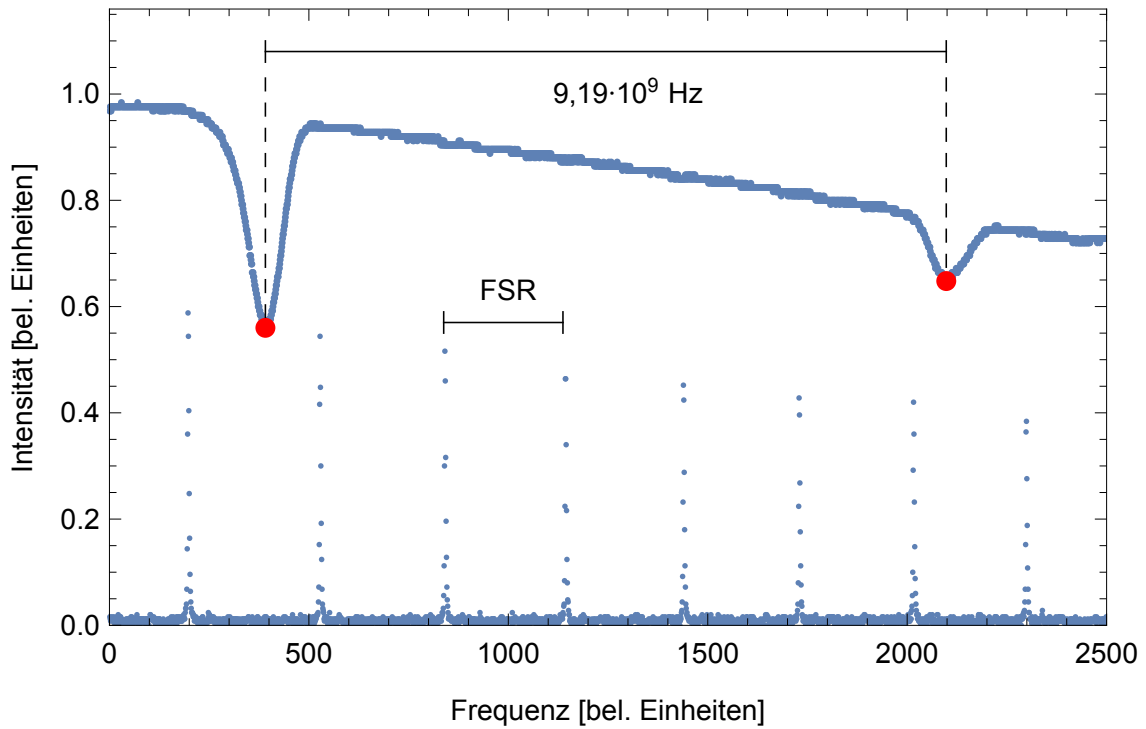


Abbildung 3.4: Resonanzen des optischen Resonators und Transmissionsverhalten des Cäsiums. Der Abstand der Spektrallinien von Cäsium ist aus der Literatur bekannt und beträgt $9,19 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ [1]. Damit ist die Skala kalibriert und der freie Spektralbereich des optischen Resonators kann bestimmt werden.

die reflektierenden Lichtstrahlen im optischen Resonator konstruktiv.

Die Zeitskalen der Signale von Detektor 1 und 2 sind proportional der Frequenzskala und haben die gleiche Proportionalitätskonstante, denn das Licht kommt aus der gleichen Quelle und wird mit der gleichen Geschwindigkeit in der Frequenz erhöht. Die Signale der Detektoren werden am Oszilloskop übereinandergelegt und dann digital ausgewertet (Abb. 3.4).

Das Signal von Detektor 1 hat Peaks bei den Resonanzfrequenzen, und der Abstand jener entspricht dem freien Spektralbereich FSR , der nach Gl. (2.18) zur Bestimmung des Brechungsindex benötigt wird. Die Spektrallinien des Cäsiums werden zur Kalibrierung benutzt. Der Literatur wird entnommen, dass der Abstand der D1-Spektrallinien $9,19 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ entspricht [1]. Damit ist die Skala kalibriert und der FSR kann bestimmt werden.

3.2.2 Methode II: Bestimmung durch Phasenmodulation eines Probelasers

Bei der zweiten Methode wird statt der Frequenz des Lasers, die Länge des optischen Resonators variiert. Obwohl die Frequenz des Lasers konstant ist, kann mit dieser Methode der Abstand zweier Resonanzfrequenzen bestimmt werden. Zur Kalibrierung der Skala dient diesmal Phasenmodulation des Lasers, die Seitenbänder mit bekanntem Frequenzabstand entstehen lässt.

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 3.5 abgebildet. Der Strahlteiler dient nun nicht mehr um den Strahl zu spalten, sondern um lineare Polarisierung zu erhalten. Diese bleibt in der Faser erhalten. Die beiden Spiegel dienen der Einkopplung des Lichts

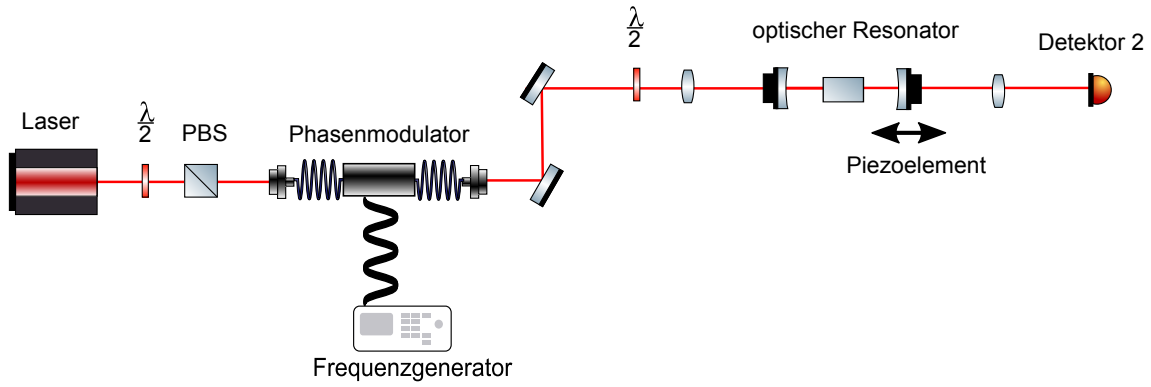


Abbildung 3.5: Versuchsaufbau mit Phasenmodulator. Der Versuchsaufbau ähnelt der Methode mit der Abstimmung des Lasers aus Kapitel 3.2.1. Der Unterschied ist, dass bei diesem Aufbau die Frequenz des Lasers monochromatisch ist. Stattdessen wird die Länge des optischen Resonators mit einem Piezoelement variiert. Statt der Cäsiumkammer wird hier die Phasenmodulation des Lasers benutzt um die Frequenzskala zu kalibrieren.

in die Faser, denn mit zwei Spiegeln, lässt sich der Strahl beliebig ausrichten. Das zweite $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen dient der Drehung der Polarisierung. Denn es soll der Brechungsindex der ordentlichen und der außerordentlichen Achse vermessen werden. Die Linsen dienen der Fokussierung auf den optischen Resonator bzw. den Detektor. Der Unterschied zur Methode mit der Abstimmung des Lasers ist, dass die Länge des optischen Resonators mit einem Piezoelement angesteuert wird und damit die Länge des optischen Resonators variiert wird. Die Frequenz des Lasers dagegen bleibt konstant. Die Rolle der Kalibrierung der Skala übernimmt in diesem Versuchsaufbau ein Phasenmodulator, der von einem Frequenzgenerator angesteuert wird. Der Phasenmodulator ist ein optisches Bauteil, welches die Phase des durchlaufenden Lichts harmonisch oszillieren lässt. Ohne Phasenmodulator wird die Lichtwelle an einem festen Ort durch

$$Ae^{i\omega t} \quad (3.1)$$

charakterisiert. Der Phasenmodulator fügt der Phase der Lichtwelle das Signal des Frequenzgenerators hinzu. Dies soll eine Sinusfunktion mit Kreisfrequenz Ω und Amplitude β sein. Die Welle hat also die Form

$$Ae^{i\omega t + i\beta \sin(\Omega t)} \quad (3.2)$$

Nun kann die Jacobi-Anger-Entwicklung benutzt werden

$$e^{iz \sin(\phi)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(z) e^{in\phi} \quad (3.3)$$

,wobei $J_n(z)$ die Besselfunktionen sind. Die Lichtwelle wird also

$$A \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(\beta) e^{i(\omega + n\Omega)t} = AJ_0(\beta) e^{i\omega t} + AJ_{-1}(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t} + AJ_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} + \dots \quad (3.4)$$

Wie in Abb. 3.6 veranschaulicht entstehen also neben der ursprünglichen Welle Seitenbänder, die auf der Frequenzskala den Abstand $n\nu$ von der ursprünglichen Frequenz des Lasers haben. $\nu = \frac{\Omega}{2\pi}$ ist die Frequenz, die am Generator eingestellt wird.

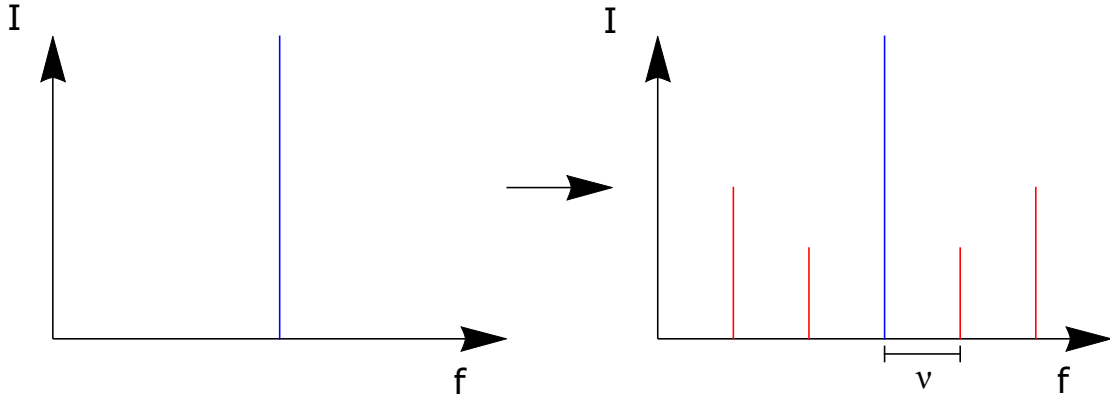


Abbildung 3.6: Erzeugung von Seitenbändern durch Phasenmodulation. Im linken Bild ist das Frequenzspektrum des Lasers ohne Phasenmodulation abgebildet. Durch die Phasenmodulation entstehen Seitenbänder (rot), die auf der Frequenzskala den Abstand $n\nu$ von der ursprünglichen Frequenz (blau) haben. $\nu = \frac{\Omega}{2\pi}$ ist dabei die Frequenz der am Frequenzgenerator eingestellten Schwingung. Durch Variation der Amplitude am Frequenzgenerator ändern sich die Amplituden der Seitenbänder.

Verändert man die Amplitude des Frequenzgenerators, verändern sich die Amplituden der Seitenbänder. Wird dagegen die Frequenz des Generators variiert, ändert sich der Abstand der Seitenbänder zur ursprünglichen Frequenz [15, 13].

Nun wird auch klar, wie der Phasenmodulator zur Kalibrierung der Skala benutzt werden kann. Würde nun der Laser in der Frequenz erhöht werden, entstünden zusätzlich zu jeder Resonanzfrequenz weitere Resonanzen, welche den Abstand $n\nu$ zur eigentlichen Resonanzfrequenz haben. ν wird am Frequenzgenerator eingestellt und ist damit bekannt. Durch die Kenntnis des Abstands der Resonanzfrequenz zum Seitenband ist die Skala kalibriert (Abb. 3.6).

In dieser Methode wird allerdings statt der Laserfrequenz die Länge des optischen Resonators variiert. Dazu ist einer der Spiegel mit einem Piezoelement verbunden. Wird hier eine Spannung eingestellt führt dies zu einer mechanischen Bewegung die den Spiegel verschiebt und somit die Länge des optischen Resonators verändert. Die Länge wird mit der Zeit vergrößert (und verkleinert) und wird eine Resonanzfrequenz getroffen, wird am Detektor ein Signal gemessen. Am Oszilloskop entsteht eine Skala die proportional der Länge des optischen Resonators ist. Nun ist es im ersten Moment verwunderlich, dass mit der Änderung der Länge, der freie Spektralbereich, also der Abstand zweier Resonanzfrequenzen, gemessen werden kann, denn die Frequenz ist konstant. Mithilfe des Phasenmodulators ist dies dennoch möglich, denn der Laser ist nicht mehr monochromatisch. Die folgende Überlegung verdeutlicht dies.

Die Resonanzwellenlängen des optischen Resonators bestimmen sich über

$$m\lambda_1 = 2L \quad (3.5)$$

Wird eine Resonanzwellenlänge λ_1 getroffen, muss sich die Länge des optischen Resonators um eine halbe Wellenlänge ändern, damit die Resonanzbedingung ein weiteres Mal für diese Wellenlänge erfüllt wird. Durch den Phasenmodulator entstehen aber auch weitere Wellen. Das erste Seitenband habe die Wellenlänge

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda \quad (3.6)$$

Dies werde in Gl. (3.5) eingesetzt und umgestellt:

$$m(\lambda_2 - \Delta\lambda) = 2L \quad (3.7)$$

$$m\lambda_2 = 2 \left(L + \frac{m\Delta\lambda}{2} \right) \quad (3.8)$$

Die Länge des optischen Resonators muss sich demnach um

$$\Delta L = -\frac{m\Delta\lambda}{2} \quad (3.9)$$

ändern um die Resonanzbedingung für das Seitenband zu erfüllen. Außerdem gilt

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = c \left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} \right) = -\frac{\Delta f}{f_1 f_2} c \approx -\frac{\Delta f}{f^2} c \quad (3.10)$$

Es gilt $f_1 \approx f_2$, da das Seitenband nur minimal von der ursprünglichen Frequenz abweicht, also $\Delta f \ll f_1, f_2$. Die Längenänderung ist somit

$$\Delta L = \frac{mc\Delta f}{2f^2} \quad (3.11)$$

Nach Gl. (2.37) ist

$$FSR = \frac{f}{m} \quad (3.12)$$

und damit

$$\Delta L = \frac{c\Delta f}{2 \cdot FSR \cdot f} = \frac{\lambda\Delta f}{2 \cdot FSR} \quad (3.13)$$

$$\Delta f = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{2 \cdot FSR \cdot \Delta L}{\lambda} \quad (3.14)$$

$\Delta f = \nu$ ist die Frequenz, die am Frequenzgenerator eingestellt wird, der mit dem Phasenmodulator verbunden ist.

Jetzt stellt sich noch die Frage, wie viel sich die Länge des optischen Resonators verändert hat (ΔL), um das Seitenband zur Resonanz zu bringen. Unabhängig von den Seitenbändern erscheint die nächste Resonanzwellenlänge nach Gl. (3.5) bei einer Längenänderung von $\frac{\lambda}{2}$. Neben dieser Resonanzfrequenz erscheinen wieder weitere Resonanzen durch die Seitenbänder. Die Situation ist in Abb. 3.7 dargestellt. Am Generator wird nun $\Delta f = \frac{\Omega}{2\pi}$ so variiert, dass die ersten Seitenbänder der beiden Resonanzfrequenzen aufeinander liegen. Damit ist d , der Abstand der Seitenbänder, gleich 0 und

$$\Delta L = \frac{\lambda}{4}. \quad (3.15)$$

Daher entspricht nach Gl. (3.14) die eingestellte Frequenz am Frequenzgenerator dem halben FSR .

$$\Delta f = \frac{FSR}{2} \quad (3.16)$$

Um den freien Spektralbereich zu messen muss also die Generatorfrequenz so eingestellt werden, dass die Seitenbänder aufeinander liegen ($d=0$). Die Frequenz entspricht dem halben FSR .

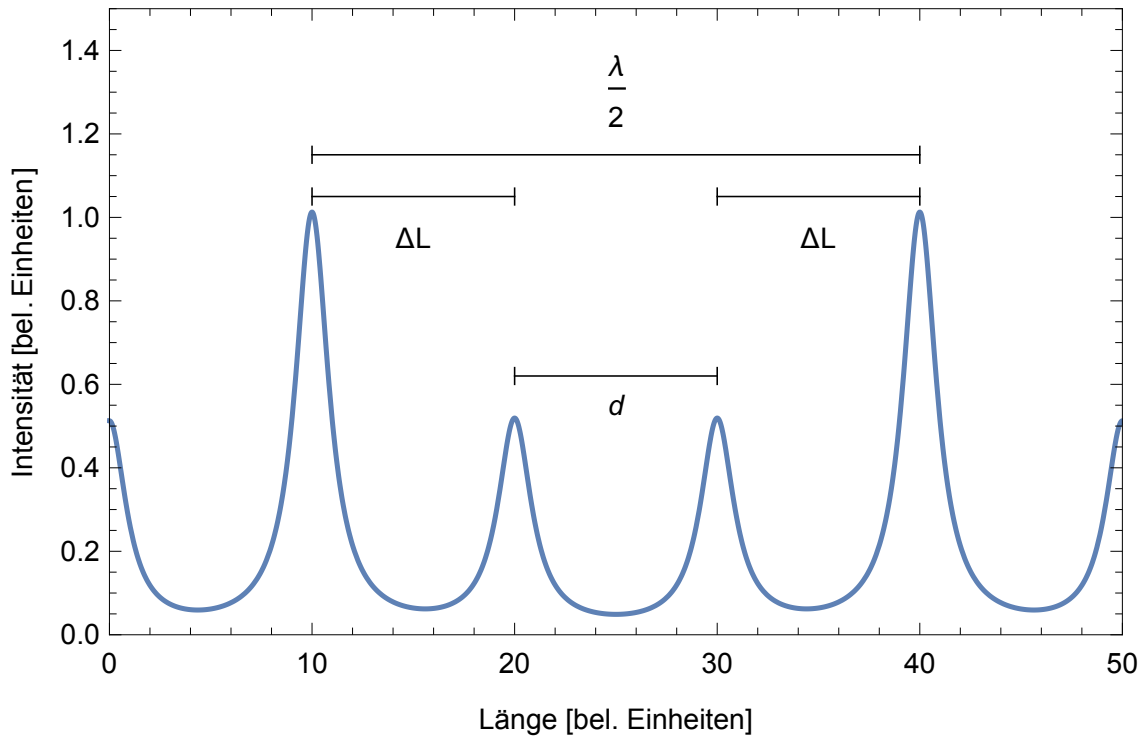


Abbildung 3.7: Die Resonanzfrequenzen bei Variation der Länge des optischen Resonators. Die Resonanzwellenlängen liegen $\frac{\lambda}{2}$ auseinander. Zur Messung des FSR wird die Frequenz am Frequenzgenerator so eingestellt, dass $d = 0$ und $\Delta L = \frac{\lambda}{4}$.

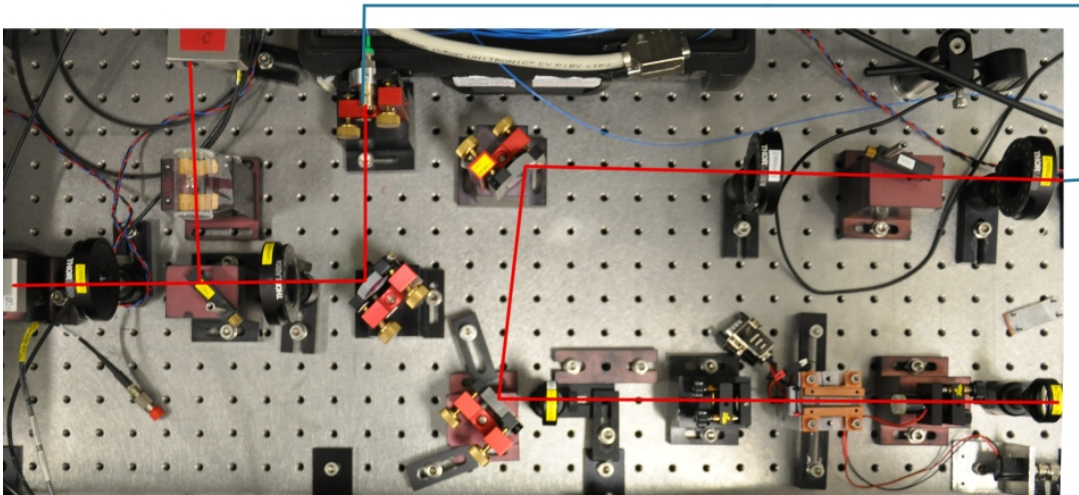


Abbildung 3.8: Aufbau des Versuchs. Der Strahl (rot) geht durch ein $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen und einen polarisierenden Strahlteiler. Der eine Teilstrahl geht durch eine Cäsiumkammer und trifft dahinter auf einen Detektor. Der andere Teilstrahl geht durch ein weiteres $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen welches die Polarisation in die gewünschte polarisationserhaltende Richtung der Faser (blau) dreht. Das Licht geht durch eine weitere Kombination $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen, PBS und $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen. So wird sicher gestellt, dass es sich auf jeden Fall um linear polarisiertes Licht in gewünschter Richtung handelt. Zum Schluß geht das Licht durch eine Linse, den optischen Resonator mit Kristall und eine weitere Linse und trifft dann auf den Detektor.

3.3 Aufbau des Versuchs

Im folgenden soll der Aufbau und die Justierung des realen Versuchsaufbaus besprochen werden. Der reale Versuchsaufbau ist in Abb. 3.8 zu sehen. Mit diesem Aufbau lassen sich beide Methoden, mit Spektrallinien und mit Phasenmodulator, durchführen.

Gegenüber dem konzeptionellen Aufbau in den Abbildungen 3.2 und 3.5 gibt es noch einige kleine Unterschiede. Hinter dem ersten polarisierenden Strahlteiler gibt es ein weiteres $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen. Die Faser ist nur in eine bestimmte Richtung polarisationserhaltend. Mit dem $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen wird die lineare Polarisation so gedreht, dass diese der ausgezeichneten Richtung der Faser entspricht. Die Faser wird benutzt um den Phasenmodulator dazwischen zu schalten. Hinter der Faser, rechts oben im Bild 3.8, gibt es erneut die Kombination $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen, PBS und $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen. Wird die polarisationserhaltende Richtung der Faser nicht exakt getroffen, ist das Licht dahinter eventuell nicht mehr linear polarisiert. Der PBS linearisiert die Polarisation. Das $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen wird so eingestellt, dass möglichst das gesamte Licht gerade durch den PBS geht und kein Anteil senkrecht reflektiert wird. Das $\frac{\lambda}{2}$ -Plättchen hinter dem PBS ist wie in der konzeptionellen Zeichnung da, um das nun linear polarisierte Licht zu drehen und damit den Brechungsindex für außerordentliche Achse und ordentliche Achse zu vermessen. Die zusätzlichen Bauteile dienen also der Sicherheit, wirklich linear polarisiertes Licht zu haben.

Der Kristall befindet sich in einem Ofen, der bis 60 °C heizt. Dieser ist in Abb. 3.9 genauer zu sehen. Durch die Temperaturveränderung des Kristalls, verändert sich der Brechungsindex, womit sich eine Feinanpassung durchführen lässt. In der Praxis werden Kristalle mit minimal 0,2 mm Länge aneinandergereiht um auf die gewünschte Länge zur Kompensation der Dispersion zu kommen. Mit diesen Längen lässt sich dies aber nur ungenau erreichen, daher wird zusätzlich der Brechungsindex der Kristalle durch Temperaturänderung angepasst. Daher ist es von Interesse, wie groß der Brechungsindex der Kristalle bei verschiedenen Temperaturen ist.

Für die Herleitung der Gl. (2.35) für den Brechungsindex wurde die Länge des optischen Resonators mit und ohne Kristall gleichgesetzt. Daher muss darauf geachtet werden, dass auch bei beiden Messungen die Länge die gleiche ist. Die Längenänderung mit dem Piezo kann vernachlässigt werden, da sie extrem klein gegenüber der Länge des Resonators ist. Das Experiment wurde zunächst nach einmaligem Aufbau nicht mehr grundlegend verstellt und immer mit der gleichen Länge gemessen. Über mehrere Tage konnte innerhalb der Messgenauigkeit keine Längenänderung festgestellt werden. Erst bei der Messung nach einigen Wochen gab es kleine Änderungen in der Resonatorlänge.

Wird nun mit den Spektrallinien des Cäsiums gemessen, sollten diese möglichst den gesamten Bildbereich des Oszilloskops ausfüllen (Abb. 3.3), um bei der Kalibrierung die bestmögliche Genauigkeit zu erlangen. Der Bildinhalt des Oszilloskops wird dann digital auf dem mit dem Oszilloskop verbundenen Computer abgespeichert.

Bei der Phasenmodulation wird der Laser monochromatisch betrieben und das Piezoelement für die Längenänderung des optischen Resonators eingeschaltet. Die Spannung des mit dem Phasenmodulator verbundenen Generators wird so eingestellt, dass das erste Seitenband der Resonanz und das erste Seitenband der darauffolgenden Resonanz aufeinanderliegen (Abb. 3.7, $d = 0$). Nun kann die Generatorfrequenz einfach abgelesen werden und damit der *FSR* bestimmt werden. Allerdings lässt sich die Genauigkeit dieser Methode mithilfe einer linearen Regression noch

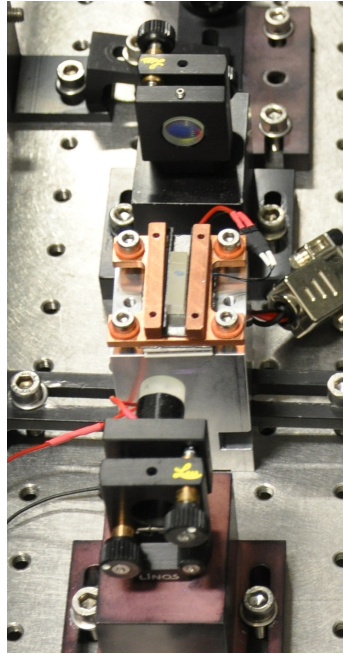


Abbildung 3.9: Ofen mit Kristall im optischen Resonator. Bei der Messung ist der Ofen verschlossen und der Kristall nicht zu sehen.

erhöhen. Es werden mehrere Messungen mit $d \neq 0$ gemacht und die Generatorfrequenz für $d=0$ dann aus der Regression gewonnen. Dies wird im Abschnitt Auswertung noch genauer erläutert. Für die digitale Auswertung sollte hier auch wieder möglichst der relevante Teil den gesamten Bildbereich des Oszilloskops ausfüllen. Der Bildbereich wird auf die beiden Seitenbänder gerichtet, die eigentlichen Resonanzen sind nicht zu sehen (Abb. 4.3). Die Generatorfrequenz wird variiert und die Daten auf dem Computer gespeichert.

Beim Einlegen des Kristalls muss zunächst wieder ein Signal gefunden werden, welches dann mit den Spiegeln wieder optimiert wird. Wird bei Raumtemperatur gemessen, kann ein Drehtisch benutzt werden. Ansonsten muss der Ofen vorsichtig gedreht werden, sodass der Lichtstrahl gerade durch den Kristall läuft. Läuft der Lichtstrahl schräg durch den Kristall, ist die optische Weglänge ein wenig länger, womit sich nach Gl. (2.30) der FSR verkleinert. Damit werden nach Gl. (2.36) auch die Resonanzfrequenzen ein wenig kleiner. Dies kann genutzt werden um den Kristall optimal auszurichten. Der Kristall wird gedreht, solange die Resonanzfrequenzen größer werden. Ist das Minimum der optischen Weglänge erreicht werden die Resonanzen bei weiterer Drehung wieder kleiner. Sobald die Resonanzen wieder kleiner werden, ist der Kristall also optimal ausgerichtet.

Nach Gl. (2.28) und Gl. (2.27) wird durch das Einlegen des Kristalls die Linienbreite der Resonanzen breiter. Außerdem wird die Intensität des Licht durch die Absorption des Kristalls kleiner. Dies erhöht die Unsicherheit der Messung minimal, der FSR lässt sich aber noch ohne Probleme messen. Das Experiment ist sehr sensibel. Wird ein wenig auf einen Spiegel gedrückt verschieben sich die Resonanzen auf dem Oszilloskop. Anfangs wurde das Experiment, um es mobil zu machen, auf einem Metallbrett aufgebaut (Abb. 3.10). Allerdings konnte damit die Messung nicht reproduziert werden. Das Aufschrauben anderer Bauteile oder das Festerziehen einzelner Schrauben hat das Messergebnis merklich verändert. Vermutlich hat sich das Brett dabei ein wenig verbogen und sich die Länge des optischen Resonators da-

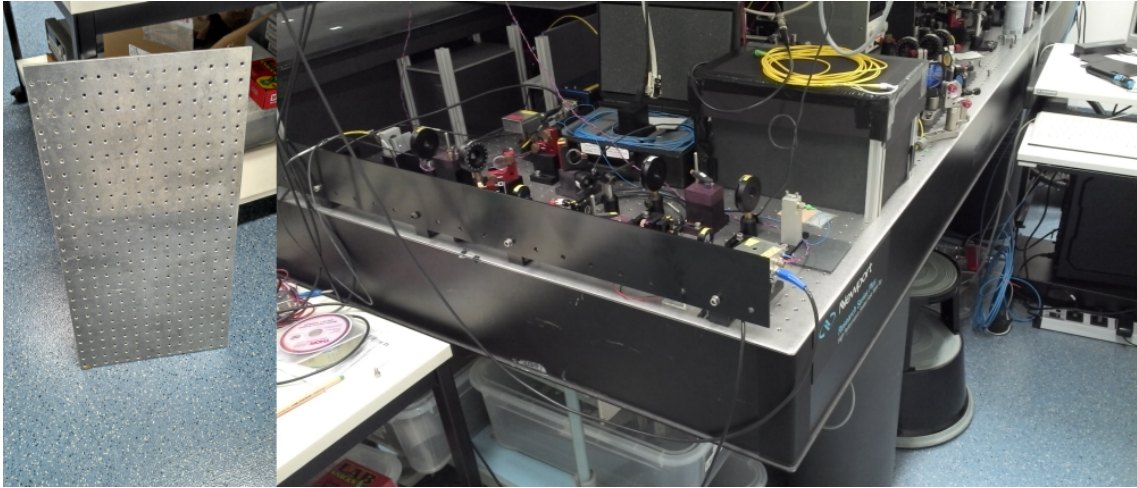


Abbildung 3.10: Aufbau des Versuchs auf verschiedenen Unterlagen. Der Versuch wurde zunächst aus Mobilitätsgründen auf einem Metallbrett (links) aufgebaut. Hier war allerdings die Stabilität nicht ausreichend groß, sodass die Messergebnisse nicht reproduziert werden konnten. Das Aufbauen auf dem optischen Tisch (rechts) konnte das Problem beheben.

mit verändert. Daher wurde das Bild wie in Abb. 3.10 zu sehen auf einem optischen Tisch aufgebaut. Dieser ist auf Druck nicht so empfindlich und das Messergebnis konnte so reproduziert werden.

Kapitel 4

Auswertung

Im Kapitel Auswertung wird zunächst die Schiefelage des Kristalls im optischen Resonator besprochen, die zu einem systematischen Fehler führen könnte. Daraufhin folgt die Auswertung der Methoden mit Spektrallinien und Phasenmodulation. Wie sich herausgestellt hat, war die zweite Methode zielführender und somit werden ihre Ergebnisse mit denen anderer Quellen verglichen.

4.1 Schiefelage des Kristalls

Für die Auswertung des Brechungsindex nach Gl. (2.35) ist die Länge des Kristall relevant. Dieser konnte auf vier signifikante Stellen bestimmt werden. Allerdings könnte der Kristall auch schief im Resonator liegen, sodass der Lichtstrahl einen längeren Weg durch den Kristall nimmt und somit die optische Weglänge größer wird (Abb. 4.1) Der Weg im Kristall nimmt um

$$\Delta l = d - a \quad (4.1)$$

zu. Δl hängt mit dem Winkel zwischen Längsseite des Kristalls und optischer Achse δ wie folgt zusammen:

$$\cos \delta = \frac{a}{d} = \frac{a}{\Delta l + a} \Rightarrow \delta = \arccos \left(\frac{a}{\Delta l + a} \right) \quad (4.2)$$

$$\Delta l = a \left(\frac{1}{\cos \delta} - 1 \right) \quad (4.3)$$

Die Kristalllänge a ist ca. 2 cm. Durch die Drehung wird der Kristall effektiv um Δl länger und die optische Weglänge um

$$\Delta W = (n - n_{\text{L}}) \Delta l \quad (4.4)$$

länger. Das Wegstück, welches vorher von Luft ausgefüllt wurde, wird nun vom Kristall ausgefüllt, daher muss hier die Differenz des Brechungsindizes verwendet werden. Da der Brechungsindex des Kristalls ca. 2 entspricht, ist $n - n_{\text{L}} \approx 1$ und somit Δl auch ungefähr die Änderung der optischen Weglänge ΔW . Die Änderung der optischen Weglänge führt zu einer Änderung des FSR von

$$FSR - \Delta FSR = \frac{c}{2(W + \Delta W)} = \frac{c}{2(W + \Delta l)} \quad (4.5)$$

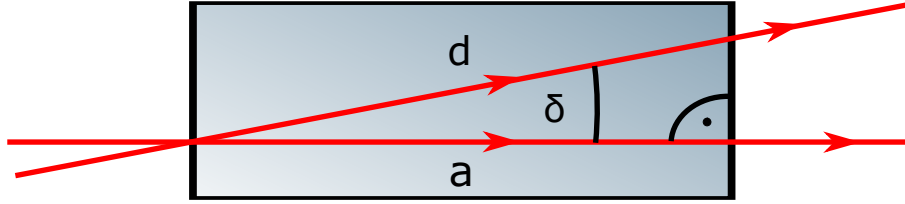


Abbildung 4.1: Lichtweg in schiefem Kristall. Liegt der Kristall schief im optischen Resonator, verlängert sich die optische Weglänge und damit der FSR. d ist der Lichtweg des schiefen Kristalls. a ist die Länge des Kristalls. δ ist der Winkel zwischen Lichtweg und optischer Achse.

Δl	δ	ΔFSR	Unsicherheit in der Nachkommastelle
0,03 cm	10°	3 MHz	3
0,003 cm	3°	0,3 MHz	4
0,0003 cm	1°	0,03 MHz	5

Tabelle 4.1: Unsicherheiten, die durch Schiefelage des Kristalls entstehen. Liegt der Kristall um den Winkel δ schief im Resonator, verlängert sich die optische Weglänge um Δl . Dies verkleinert den FSR um ΔFSR . Die letzte Spalte gibt an, in welcher Nachkommastelle die Unsicherheit bei der FSR-Messung entsteht.

Wird nun noch Gl. (2.30) eingesetzt und umgestellt erhält man

$$\Delta FSR = -\frac{c}{2(W + \Delta l)} + \frac{c}{2W} \quad (4.6)$$

Da die Länge des optischen Resonator in etwa 10 cm und die Kristalllänge ca. 2 cm entspricht, ist W ca. 12 cm und der FSR nach Gl. (2.30) ca. 1200 MHz.

In Tab. 4.1 wurden die Winkel zwischen Kristall- und optischer Achse, sowie die Änderung im FSR ausgerechnet, die bei verschiedenen Längenänderungen $\Delta l \approx \Delta W$ entstehen. Der Kristall sollte für eine Genauigkeit von vier Nachkommastellen also mindestens auf 3° genau im Resonator liegen. Wird der Kristall mit dem Drehtisch justiert, kann über das Informationsblatt des Herstellers der erreichte Drehwinkel bestimmt werden. Bei der Justierung des Kristalls, wird geschätzt, dass der Kristall auf zumindest ein Grad genau justiert werden konnte.

Eine weitere Methode ist es sich die Verschiebung der Resonanzfrequenzen anzuschauen. Wie im Abschnitt 'Messung der Änderung des Brechungsindex' besprochen (siehe auch Abb. 3.14), führt die Änderung des Brechungsindex bzw. der optischen Weglänge zur Verschiebung der Resonanzen auf der Frequenzskala. Wird der Kristall ein wenig gedreht, verlängert sich die optische Weglänge, der FSR wird kleiner und somit auch die Resonanzfrequenzen. Mit dem Drehtisch wird der Kristall so positioniert, dass die Resonanzen so groß wie möglich sind. Dies entspricht der geraden Stellung des Kristalls. Wird der Kristall ein wenig variiert kann abgeschätzt werden wie genau der Kristall justiert werden kann und wie weit die Resonanzen dabei wandern. Mit der Kalibrierung der Seitenbänder kann dieser Wert in Hz ausgedrückt werden. Es wurde gemessen, dass durch den unsicheren Drehwinkel die Resonanzen höchstens um 250 MHz kleiner als der Maximalwert sind. Aus Gl. (2.37) und Gl. (2.38) folgt:

$$\Delta f_m = \frac{c \Delta FSR}{\lambda FSR} \quad (4.7)$$

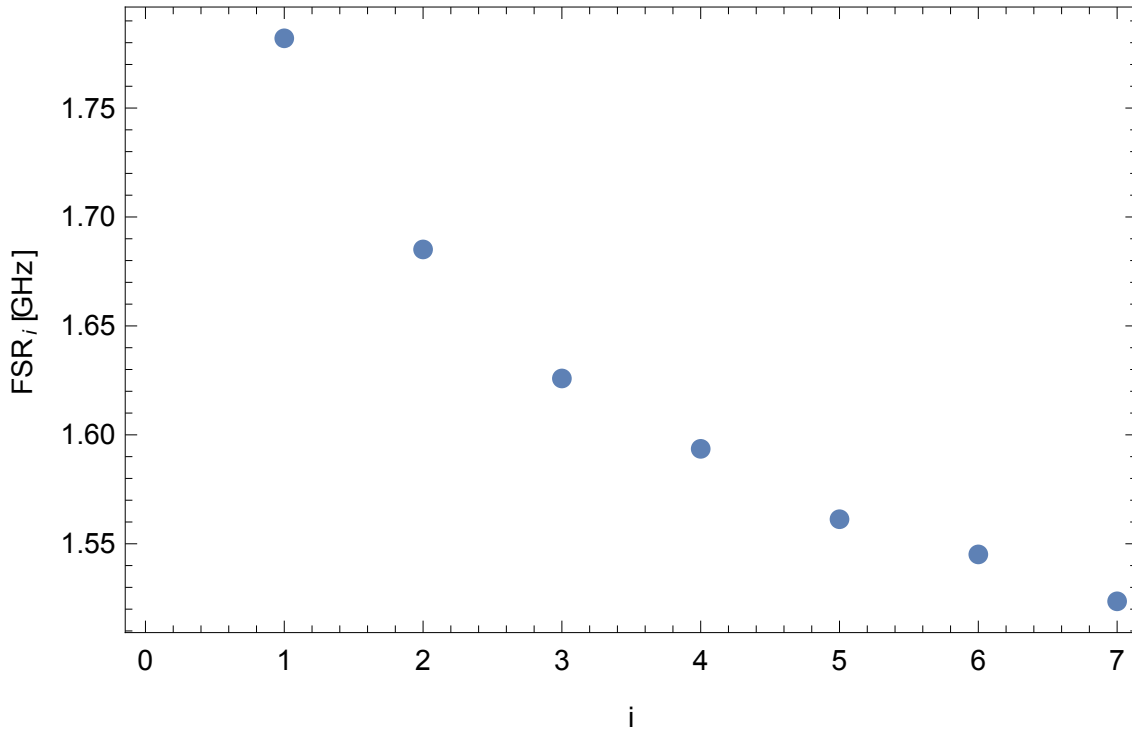


Abbildung 4.2: *FSR zwischen verschiedenen Resonanzfrequenzen bei der Methode mit der Abstimmung des Lasers. FSR_i sei der Abstand der $i+1$ -ten und i -ten Resonanzfrequenz die erfasst wurde. Der FSR wird mit zunehmender Frequenz kleiner. Dies könnte daran liegen, dass der Laser die Frequenz nicht linear erhöht.*

Δf_m ist hier die Verschiebung der Resonanzfrequenz, die der Änderung ΔFSR des freien Spektralbereichs entspricht. Der FSR liegt bei ca. 1200 MHz. Das heißt der unsichere Drehwinkel des Kristall führt höchstens zu einem verkleinertem FSR von

$$\Delta FSR \approx 900 \text{ Hz} = 9 \cdot 10^{-4} \text{ MHz} \quad (4.8)$$

Dies entspricht einer Änderung der optischen Weglänge um $\Delta W \approx 9 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$ und einem Winkel von $\delta = 0,2^\circ$. Der Drehwinkel des Kristalls zur optischen Achse führt also zu einer systematischen Unsicherheit erst in der sechsten Nachkommastelle und kann damit vernachlässigt werden.

4.2 Methode I: Abstimmung eines Probelasers

Zunächst wurde die Methode mit der Abstimmung des Lasers getestet. In Abb. 4.2 sind die freien Spektralbereiche mit zunehmender Frequenz abgebildet. Es ist eindeutig eine abnehmende Tendenz zu erkennen, obwohl nach Gl. (2.18) der FSR konstant sein sollte. Womöglich fährt der Laser die Lichtfrequenz nicht linear hoch. Die beste Messung ist also über fünf Resonanzfrequenzen, denn dies entspricht ca. dem Abstand der Spektrallinien von Cäsium.

Allerdings wurde diese Methode auf Grund der grösseren Unsicherheit gegenüber der zweiten Methode mit der Phasenmodulation nicht weiterverfolgt und auch keine Kristallmessung durchgeführt. Mit der genaueren Kenntnis des zeitlichen Verlaufs der Frequenz des Lasers könnte diese Methode verbessert werden.

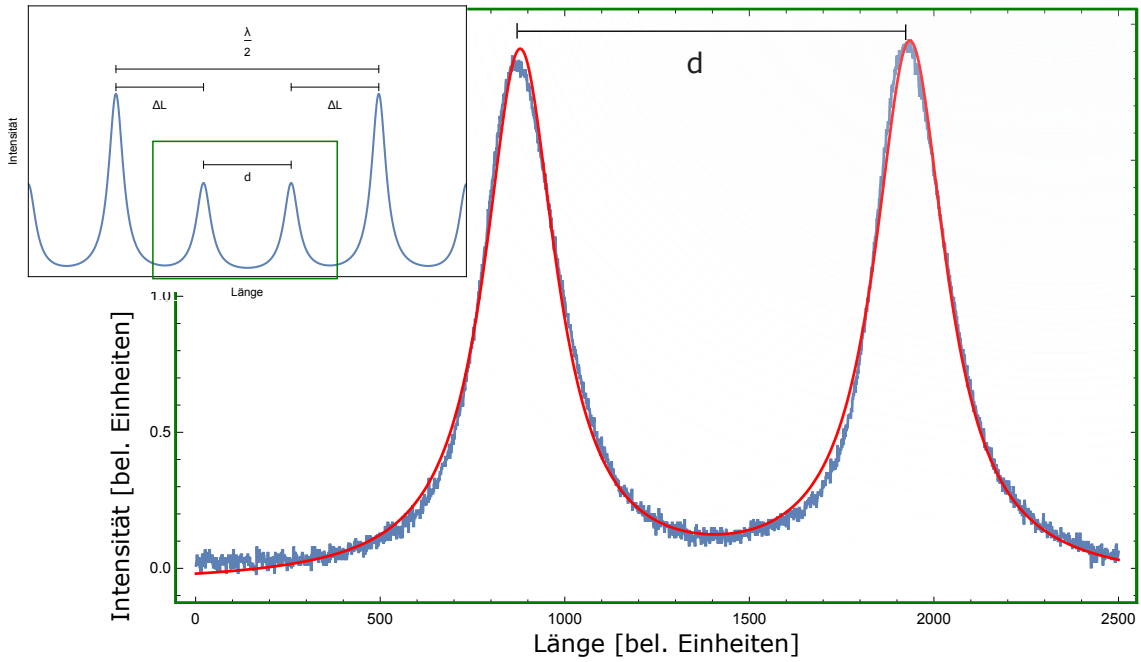


Abbildung 4.3: Seitenbänder mit doppeltem Lorenzfit. Es werden nur die Seitenbänder aufgenommen (roter Kasten aus Abb. 3.7). Das Signal der Seitenbänder wird bei verschiedenen Frequenzen am Frequenzgenerator gemessen. Durch einen doppelten Lorenzfit wird die Lage der Seitenbänder und damit deren Abstand d bestimmt.

4.3 Methode II: Phasenmodulation

Um die Messung mit der Phasenmodulation durchzuführen, werden, wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, die Seitenbänder durch Variation der Generatorfrequenz aufeinandergelegt ($d = 0$ in Abb. 3.7) und dann die Generatorfrequenz abgelesen. Das doppelte der Frequenz entspricht dem *FSR*. Allerdings ist diese Methode sehr ungenau. Um die Genauigkeit zu erhöhen wird folgendes getan: Es werden mehrere Messungen mit verschiedenen Frequenzen am Generator, also $d \neq 0$ durchgeführt. Um die bestmögliche Auflösung zu erhalten, wird dabei der Ausschnitt auf dem Oszilloskop möglichst so gewählt, dass nur die beiden Seitenbänder zu sehen sind. In Abb. 4.3 ist zu sehen, dass nun ein doppelter Lorenzfit für jede Messung durch das Signal gelegt wird, um die Lage des Maximums der Lorenzkurven zu bestimmen. Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, sind die Resonanzlinien näherungsweise Lorenzlinien. Hieraus lässt sich der Abstand der Seitenbänder d bestimmen. Der Betrag von d wird gegen die Generatorfrequenz aufgetragen und eine lineare Regression durchgeführt (Abb. 4.4). Die Nullstelle ist die gesuchte Generatorfrequenz bei $d = 0$ und entspricht nach Gl. (3.16) dem halben *FSR*. Mit dieser Methode lässt sich die Genauigkeit um eine Nachkommastelle verbessern.

Zunächst einmal kann mit dem aus der Regression gewonnen *FSR* mit Gl. (2.18) die Länge des optischen Resonators bestimmt werden. Hier ergibt sich

$$L = (9,989 \pm 0,003) \text{ cm} \quad (4.9)$$

Dies kann mit der mechanischen Ausmessung in Einklang gebracht werden. Die Messung mithilfe eines Messstabs ergab

$$L = (9,9 \pm 0,1) \text{ cm} \quad (4.10)$$

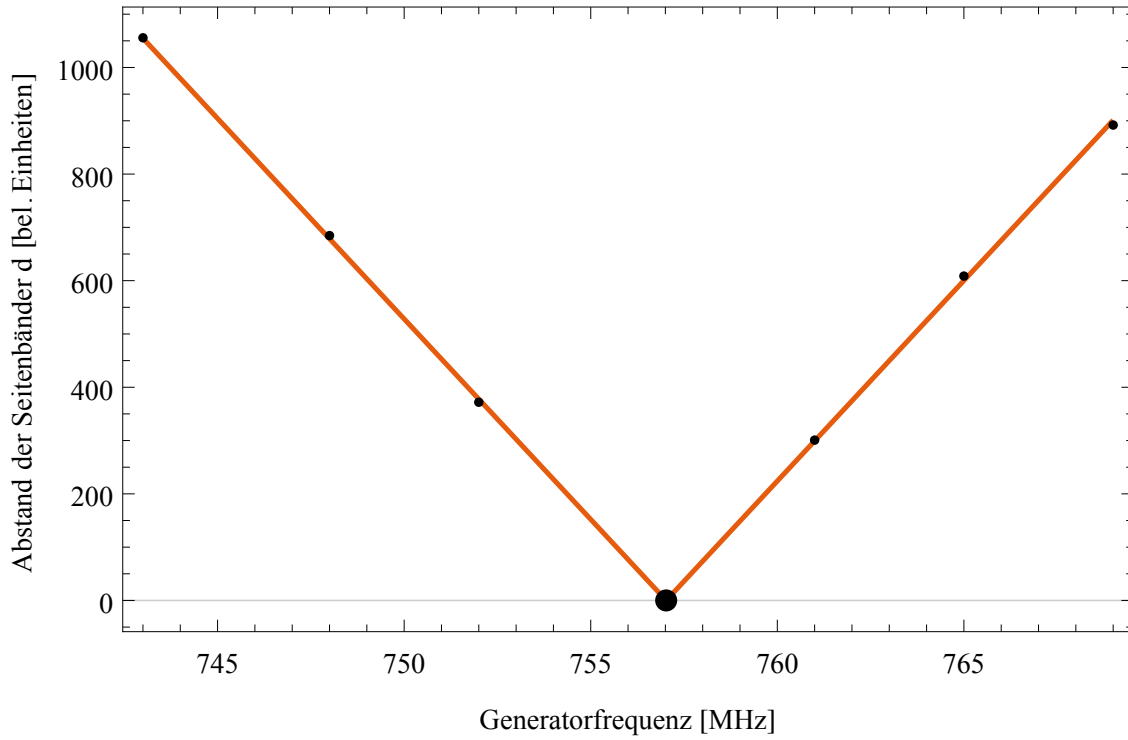


Abbildung 4.4: Lineare Regression zur Bestimmung des FSR. Der Betrag des Abstands der Seitenbänder wird gegen die Generatorfrequenz aufgetragen. Der dickere Punkt ist die Nullstelle der linearen Regression, die rechnerisch aus der Geradengleichung ermittelt wird. Sie entspricht nach Gl. (3.16) dem halben FSR.

Für die Bestimmung des Brechungsindex wird der *FSR* (mit und ohne Kristall) in Gl (2.35) eingesetzt. Für den ersten Kristalls ergibt sich:

$$n_o = 2,029 \pm 0,004 \quad (4.11)$$

$$n_a = 2,263 \pm 0,004 \quad (4.12)$$

Der Brechungsindex wurde mit anderen Quellen verglichen und in Abb. 4.5 und Abb. 4.6 aufgetragen. In den anderen Quellen wurde nicht in der gleichen Wellenlänge gemessen, aber durch Verwendung der Sellmeiergleichung kann auf den Brechungsindex bei einer Wellenlänge von 894,3 nm geschlossen werden. Die Sellmeiergleichung gibt den Brechungsindex in Abhängigkeit der Wellenlänge an. In den anderen Quellen wurde durch die Aufnahme mehrerer Messwerte die Sellmeiergleichung für Yttrium Vanadat bestimmt.

Auffallend ist, dass der gemessene Brechungsindex in sowohl ordentlicher als auch außerordentlicher Richtung zu groß ist. Für die Phasenkompensation kommt es allerdings nur auf die Differenz der Brechungsindizes von ordentlicher und außerordentlicher Achse an. In Abb. 4.7 wird dieser auch im Vergleich mit anderen Quellen aufgetragen und auch dieser scheint zu groß zu sein. Allerdings ist hier der Unterschied kleiner.

Wird die Formel für den Brechungsindex in Gl. (2.35) angeschaut, kommen mehrere Fehlerquellen in Frage. Die Länge des Kristalls d könnte fehlerhaft bestimmt worden sein. Dass der Kristall schief im Resonator liegt und sich dadurch der optische Weg verlängert wurde, konnte weiter oben ausgeschlossen werden. Aber auch die Längenmessung mit dem Mikroskop kann die Abweichung keineswegs erklären. Es müsste hierbei nämlich ein Fehler von ca. 1 mm gemacht worden sein. Even-

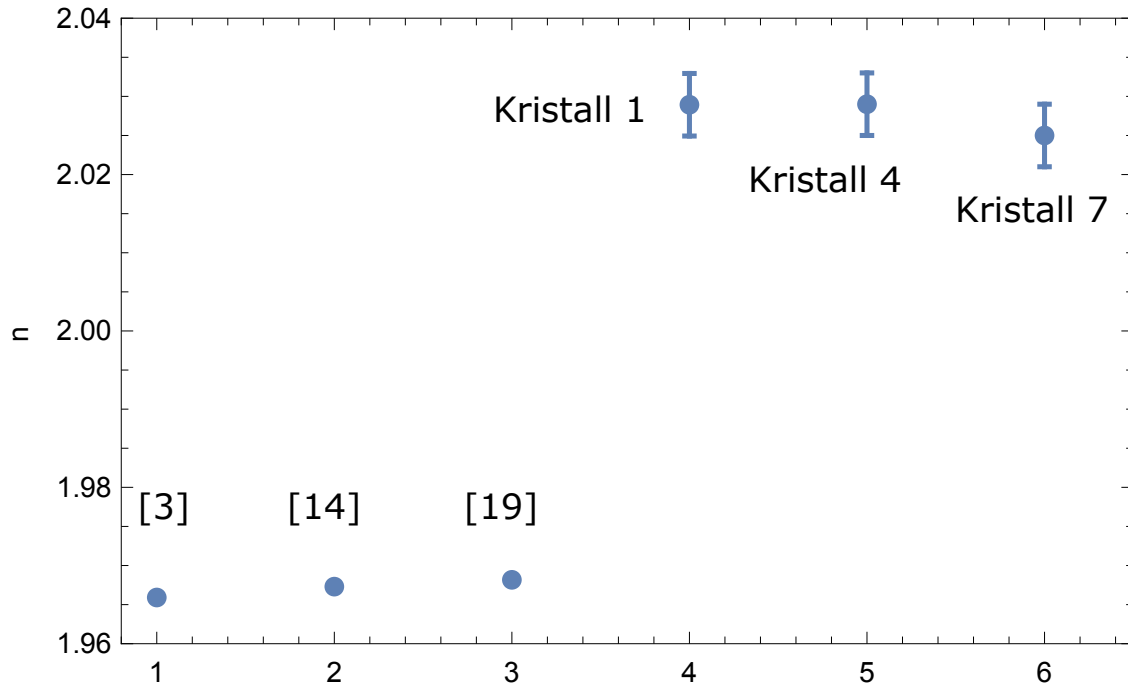


Abbildung 4.5: Brechungsindex der ordentlichen Achse im Vergleich mit anderen Quellen. Die ersten drei Punkte sind den Quellen entnommen [3, 14, 19]. Die Punkte dahinter entsprechen den eigenen Messungen der Brechungsindizes dreier verschiedener Kristalle.

tuell wurde der FSR falsch bestimmt. Allerdings konnte dieser an verschiedenen Messtagen reproduziert werden. Es könnte sich um einen systematischen Messfehler unbekannter Art handeln. Alternativ könnte der verwendete Kristall auch unrein sein und es sich nicht um reines Yttrium Vanadate handeln, womit sich ein anderer Brechungsindex ergäbe.

Um zu prüfen ob die Messung mit dem optischen Resonator grundsätzlich funktioniert, wurde zusätzlich der Brechungsindex von einem PBS vermessen. Hierbei handelt es sich um Schott Glas N-SF1.

$$n_{\text{PBS}} = 1,71 \pm 0,01 \quad (4.13)$$

$$n_{\text{PBS Literatur}} = 1,70 \quad (4.14)$$

Hier liegt der Messwert deutlich dichter am Literaturwert [3] und innerhalb dem Fehlerintervall. Dies deutet darauf hin, dass es sich bei den vermessenen Kristallen und den Kristallen der anderen Quellen tatsächlich um verschiedene Stoffe handelt.

n	Kristall 1	Kristall 4	Kristall 7
ordentlich	2,029	2,029	2,025
außerordentlich	2,263	2,266	2,264

Tabelle 4.2: Messergebnisse für die drei vermessenen Kristalle. Die Unsicherheit beträgt 0,003. Sie ergibt sich aus der Standardabweichung des FSR über zehn Messungen, die über Fehlerfortpflanzung auf die Unsicherheit für den Brechungsindex führt. Dabei fließt außerdem die Unsicherheit für die Länge des Kristalls ein.

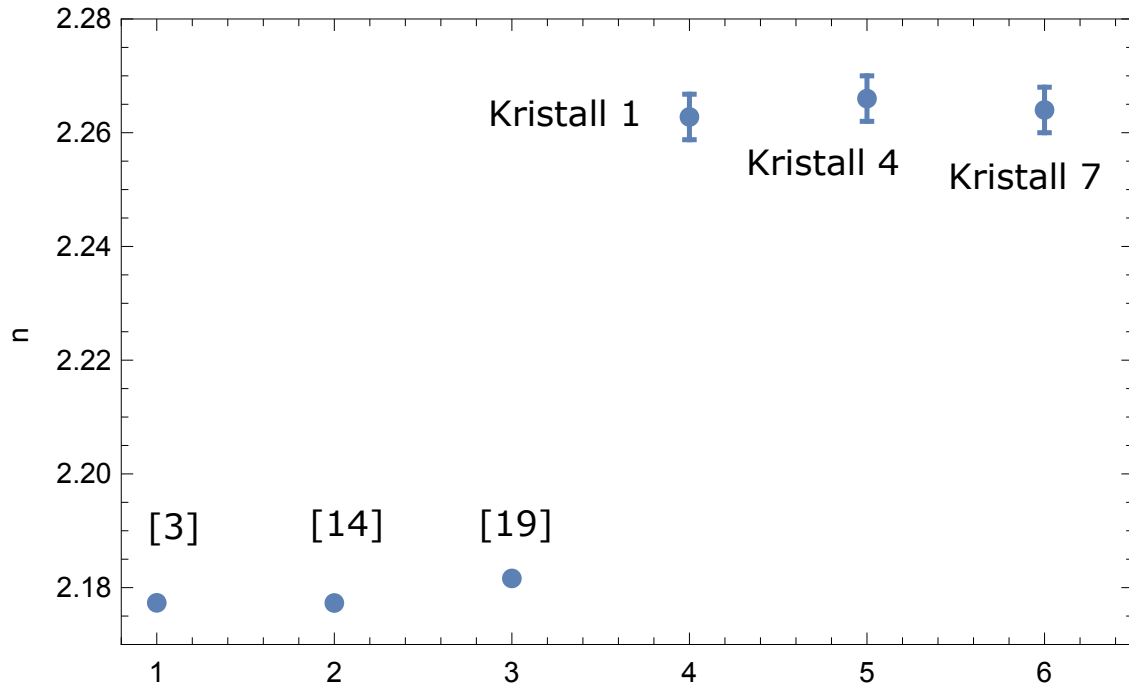


Abbildung 4.6: Brechungsindex der außerordentlichen Achse im Vergleich mit anderen Quellen. Die ersten drei Punkte sind den Quellen entnommen [3, 14, 19]. Die Punkte dahinter entsprechen den eigenen Messungen der Brechungsindizes dreier verschiedener Kristalle.

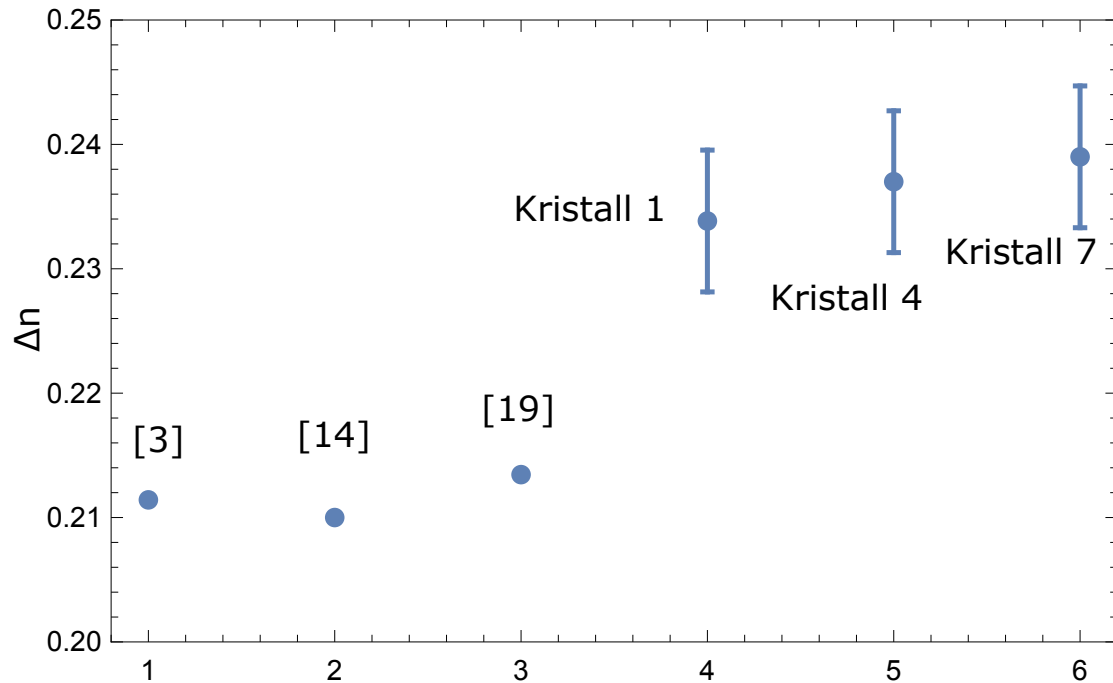


Abbildung 4.7: Differenz der Brechungsindizes der ordentlichen und außerordentlichen Achse im Vergleich mit anderen Quellen. Die ersten drei Punkte sind den Quellen entnommen [3, 14, 19]. Die Punkte dahinter entsprechen den eigenen Messungen der Brechungsindizes dreier verschiedener Kristalle.

4.4 Messung der Änderung des Brechungsindex mit der Temperatur

Der Brechungsindex von Yttrium Vanadate verändert sich mit der Temperatur. Dies zeigt sich auch daran, dass die Resonanzen auf dem Oszilloskop beim Erwärmen des Kristalls wandern. Durch die Änderung des Brechungsindex verändert sich die optische Weglänge im optischen Resontor und damit kommt es nach Gl. (2.30) zu anderen Resonanzfrequenzen und einem anderen *FSR*. Der Ofen wird bei der Phasenkompensation zur Feinanpassung benutzt. Es stehen nur Kristalle mit einer minimalen Länge von 0,2 mm zur Verfügung. Berechnet sich bei der Phasenkompensation eine benötigte Länge, die nicht glatt durch 0,2 mm teilbar ist, könnte dies ohne Temperaturanpassung nicht realisiert werden. Der Brechungsindex des Kristalls wird so angepasst, dass sich die Phasenkompensation mit den gegebenen Kristalllängen realisieren lässt.

Da sich der Kristall durch die Erhitzung ausdehnt und damit zu einer veränderten optischen Weglänge führt muss noch der Wärmeausdehnungskoeffizient betrachtet werden. Dieser beträgt $\alpha = 4,43 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}$ und gibt die relative Längenänderung pro Kelvin an [12]. Er würde bei den verwendeten Werten zu einer Längenänderung in der fünften Nachkommastelle führen. Da die Längenmessung der Kristalle nur auf drei Nachkommastellen genau ist, kann dieser Aspekt vernachlässigt werden.

Der Brechungsindex wurde bei Temperaturen von 20 °C bis 60 °C gemessen. Es wurde alle 10 °C eine Messung durchgeführt. Der Brechungsindex ist allerdings in der erreichten Genauigkeit dieser Messmethode der gleiche. Es konnte also keine Änderung des Brechungsindex gemessen werden. Um dennoch eine Aussage darüber zu treffen, wie viel sich der Brechungsindex bei Temperaturänderung verändert, kann man sich die wandernden Resonanzen zu Nutze machen. Wie im Abschnitt 2.2.1 beschrieben, kann hiermit auf die Änderung des Brechungsindex geschlossen werden, sofern der absolute Brechungsindex in etwa bekannt ist. Mit der Phasenmodulation wird die Skala kalibriert und gemessen um wie viel Hz die Resonanzen bei Temperaturänderung wandern. Mit Gl. (2.41) wird die Änderung im Brechungsindex bestimmt. Es hat sich gezeigt, dass zumindest im Bereich zwischen 20 °C und 60 °C der Brechungsindex linear mit der Temperatur ansteigt. Es ergibt sich

$$\frac{\Delta n_o}{\Delta T} = 3,0 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}} \quad (4.15)$$

$$\frac{\Delta n_a}{\Delta T} = 1,9 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}} \quad (4.16)$$

Das Ergebnis ist in der Größenordnung auch mit Zelmon et al. konsistent [19]. Hier wurde bei einer Temperaturänderung von ca. 200 °C für die ordentliche Achse eine Brechungsindexänderung von ca. $4 \cdot 10^{-3}$ gemessen. Da die Änderung gerade einmal in der vierten Nachkommastelle des Brechungsindex liegt zeigt sich auch warum bei der Absolutmessung diese Abweichung nicht gemessen werden konnte. Insbesondere ist außerdem die Änderung der Differenz des Brechungsindex von ordentlicher und außerordentlicher Achse von Interesse, da diese für die Phasenkompensation relevant ist. Diese liegt bei

$$\frac{\Delta(n_a - n_o)}{\Delta T} = \frac{\Delta n_a - \Delta n_o}{\Delta T} = -1,1 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}} \quad (4.17)$$

4.4.1 Beispielrechnung zur Temperaturabstimmung

Mit Hilfe der gemessenen Brechungsindexänderung lässt sich abschätzen, wie stark der Kristall erhitzt werden muss, um eine gewünschte Phasenkompensation zu erhalten.

Angenommen es ergibt sich, dass für die Kompensation eine Kristalllänge von 9,99 cm benötigt wird. Dies soll mit Kristallen von wenigstens 0,2 mm umgesetzt werden. Einer der Kristalle kann erhitzt werden, um dies zu realisieren. Es werden Kristalle aneinandergereiht, sodass sich eine Gesamtlänge von 10 cm ergibt. Dies ist 0,1 mm zu viel und entspricht einer optischen Weglänge von

$$\Delta W = (n_a - n_o)d = \Delta n \cdot d = 0,23 \cdot 0,1 \text{ mm} = 23 \mu\text{m} \quad (4.18)$$

haben. Einer der Kristalle mit der Länge d^* wird erhitzt um die optische Weglänge um diesen Betrag zu verkleinern. Bei Raumtemperatur kompensiert er die optische Weglänge

$$W^* = d^* \cdot \Delta n(T_{\text{Raum}}) \quad (4.19)$$

Nach dem Erhitzen soll er eine optische Weglänge von

$$W^* = d^* \cdot \Delta n(T_{\text{Raum}}) - \Delta W \quad (4.20)$$

kompensieren. Die optische Weglänge soll sich durch Temperaturänderung gerade um $W = 23 \mu\text{m}$ verkürzen. Durch Erhitzen wird der Brechungsindexunterschied Δn zwischen ordentlicher und außerordentlicher Achse kleiner und beträgt

$$W^* = \Delta n(T) d^* \quad (4.21)$$

Gleichsetzen von Gl. (4.20) und Gl. (4.21) ergibt

$$\Delta n(T_{\text{Raum}}) - \Delta n(T) = \frac{\Delta W}{d^*} \quad (4.22)$$

Damit die Temperaturänderung möglichst gering ausfällt (die Temperatur des Ofens ist limitiert) sollte ein längerer Kristall von $d^* = 2 \text{ cm}$ erhitzt werden. Die Temperaturänderung sollte den Brechungsindexunterschied im betrachteten Fall um $1,15 \cdot 10^{-3}$ verkleinern. Falls sich tatsächlich der lineare Zusammenhang bis in höhere Temperaturen bewahrheitet, entspricht dies nach Gl. (4.17) einer Temperaturänderung von

$$\Delta T \approx 100^\circ\text{C} \quad (4.23)$$

Mit dem verwendeten Ofen lässt sich eine Temperaturänderung von 40°C erreichen. Hiermit ließe sich die Länge von 0,1 mm nicht kompensieren. Es müsste also ein Ofen verwendet werden der höhere Temperaturen erreicht oder mehrere Kristalle geheizt werden. Dazu ist ggf. ein weiterer Ofen notwendig. Bei 3 geheizten Kristallen der Länge 2 cm reichen 30°C Temperaturänderung aus, um 0,1 mm zu kompensieren.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Der Brechungsindex von Yttrium Vanadat konnte auf drei Nachkommastellen genau bestimmt werden. Die Messmethode lässt sich auch mit genauerer Längenmessung des Kompensationskristalls nicht maßgeblich verbessern. Die gemessenen Werte weichen allerdings stark von den in der Literatur angegebenen Werten ab. Ein möglicher Grund wäre, dass es sich bei den verwendeten Kristallen nicht um reines Yttrium Vanadat handelt. Daher ist es umso wichtiger die Eigenschaften des Kristalls, der als Kompensator eingesetzt werden soll, genau zu vermessen. In dieser Arbeit wurde erfolgreich ein Versuch zur verlässlichen Messung der optischen Weglänge beschrieben.

Die Messung war leider nicht genau genug um eine Änderung im Brechungsindex bei Temperaturänderung festzustellen. Bei verschiedenen Temperaturen ergab sich in der Genauigkeit der gleiche Brechungsindex. Allerdings konnte mit einer verwandten Methode die Änderung des Brechungsindex genauer gemessen werden. Hier wurde nicht der Absolutwert bestimmt, sondern nur die Brechungsindexänderung mit der Temperatur. Hier konnte der Wert gut mit Literaturwerten in Einklang gebracht werden können. Eine Beispielrechnung hat gezeigt, dass mit Temperaturänderungen von ca. 100 °C eine Feinanpassung durchgeführt werden kann.

Grundsätzlich lässt sich eine Messung eines Brechungsindex mit Hilfe eines optischen Resonators durchführen. Die bevorzugte Methode zur Kalibrierung der Frequenzachse ist die der Phasenmodulation. Die Methode, welche sich der Durchstimmung der Laserfrequenz bedient, führte auf unterschiedliche freie Spektralbereiche zwischen verschiedenen Resonanzfrequenzen. Mit zunehmender Frequenz nahm der *FSR* ab. Der Grund war hier vermutlich die Nichtlinearität beim Durchstimmen der Laserfrequenz. Der freie Spektralbereich konnte daher mit dieser Methode nicht zur Bestimmung des Brechungsindex verwendet werden.

Für den Einsatz eines Y.V.Kristalls in der Photonenpaarquelle der AG Nanooptik bedeuten die Ergebnisse, dass die Doppelbrechung stärker als in bisherigen Literaturangaben ist. Für Präzisionsanwendungen sind die Angaben bei nichtlinearen Kristallen mit Vorsicht zu bewerten. Für eine mögliche Feinabstimmung der Kompensation durch Temperaturänderung sollte ein Ofen beschafft werden, der höhere Temperaturen erreicht. Alternativ könnten auch mehrere Öfen gleichen Typs verwendet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] *Caesium D1 \hat{A} » Absorption Spectroscopy \hat{A} » Scientific & Industrial Fields \hat{A} » Applications / Sacher Lasertechnik Group.* http://www.sacher-laser.com/applications/overview/absorption_spectroscopy/caesium_d1.html
- [2] *Quantum Repeaters.* <http://quantumrepeaters.eu/index.php/qcomm/quantum-repeaters>
- [3] *RefractiveIndex.INFO - Refractive index database.* <http://refractiveindex.info/>
- [4] ASPELMEYER, Markus ; KIPPENBERG, Tobias J. ; MARQUARDT, Florian: Cavity optomechanics. In: *Reviews of Modern Physics* 86 (2014), Dezember, Nr. 4, 1391–1452. <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.86.1391>. – DOI 10.1103/RevModPhys.86.1391. – ISSN 0034–6861, 1539–0756
- [5] BRUSS, Dagmar: *Quanteninformation.* Fischer-Taschenbuch-Verlag, 2003. – ISBN 9783596155637
- [6] GRIFFITHS, David J.: *Quantenmechanik: Eine Einf \hat{A} $\frac{1}{4}$ hrung.* Pearson, 2012. – ISBN 9783868941142
- [7] HECHT, Eugene: *Optik.* Oldenbourg, 2009. – ISBN 9783486588613
- [8] KREISSL, Thomas: Erzeugung polarisationsverschränkter Photonen in einem nichtlinearen gefalteten Kristall. In: *Diplomarbeit an der Humboldt-Universität zu Berlin* (2015)
- [9] LOIKO, Pavel A. ; YUMASHEV, Konstantin V. ; MATROSOV, Vladimir N. ; KULESHOV, Nikolai V.: Dispersion and anisotropy of thermo-optic coefficients in tetragonal GdVO 4 and YVO 4 laser host crystals. In: *Applied optics* 52 (2013), Nr. 4, 698–705. <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?uri=ao-52-4-698>
- [10] PENG, Xiaoyuan ; ASUNDI, Anand ; CHEN, Yihong ; XIONG, Zhengjun: Study of the Mechanical Properties of Nd:YVO4 Crystal by use of Laser Interferometry and Finite-Element Analysis. In: *Applied Optics* 40 (2001), Nr. 9, 1396. <http://dx.doi.org/10.1364/AO.40.001396>. – DOI 10.1364/AO.40.001396. – ISSN 0003–6935, 1539–4522
- [11] RADLOFF, Wolfgang: *Laser in Wissenschaft und Technik.* Springer-Verlag, 2010. – ISBN 9783827424280

- [12] RAST, H. E. ; CASPERS, H. H. ; MILLER, S. A.: Infrared Spectral Emittance and Optical Properties of Yttrium Vanadate. In: *Phys. Rev.* 169 (1968), Mai, Nr. 3, 705–709. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.169.705>. – DOI 10.1103/PhysRev.169.705
- [13] SALEH, Bahaa E. A. ; TEICH, Malvin C.: *Grundlagen der Photonik*. Wiley-VCH, 2008. – ISBN 9783527406777
- [14] SATO, Yoichi ; TAIRA, Takunori: Highly accurate interferometric evaluation of thermal expansion and dn/dT of optical materials. In: *Optical Materials Express* 4 (2014), Mai, Nr. 5, 876. <http://dx.doi.org/10.1364/OME.4.000876>. – DOI 10.1364/OME.4.000876. – ISSN 2159–3930
- [15] SHASHI P. KARNA ; ALAN T. YEATES: Nonlinear Optical Materials: Theory and Modeling. Version: Mai 1996. <http://dx.doi.org/10.1021/bk-1996-0628.ch001>. In: *Nonlinear Optical Materials* Bd. 628. American Chemical Society, Mai 1996. – ISBN 0–8412–3401–9, 1–22
- [16] STEINLECHNER, Fabian ; RAMELOW, Sven ; JOFRE, Marc ; GILABERTE, Marta ; JENNEWEIN, Thomas ; TORRES, Juan. P. ; MITCHELL, Morgan W. ; PRUNERI, Valerio: Phase-stable source of polarization-entangled photons in a linear double-pass configuration. In: *Optics Express* 21 (2013), Mai, Nr. 10, 11943. <http://dx.doi.org/10.1364/OE.21.011943>. – DOI 10.1364/OE.21.011943. – ISSN 1094–4087
- [17] STEINLECHNER, Fabian ; TROJEK, Pavel ; JOFRE, Marc ; WEIER, Henning ; PEREZ, Daniel ; JENNEWEIN, Thomas ; URSIN, Rupert ; RARITY, John ; MITCHELL, Morgan W. ; TORRES, Juan P. ; OTHERS: A high-brightness source of polarization-entangled photons optimized for applications in free space. In: *Optics express* 20 (2012), Nr. 9, 9640–9649. <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?uri=oe-20-9-9640>
- [18] YOUNG, Matt: *Optik, Laser, Wellenleiter*. Springer-Verlag, 2013. – ISBN 9783642603693
- [19] ZELMON, David E. ; LEE, Julie J. ; CURRIN, Kelly M. ; NORTHRIDGE, Jessica M. ; PERLOV, Dan: Revisiting the optical properties of Nd doped yttrium orthovanadate. In: *Applied Optics* 49 (2010), Februar, Nr. 4, 644. <http://dx.doi.org/10.1364/AO.49.000644>. – DOI 10.1364/AO.49.000644. – ISSN 0003–6935, 1539–4522

Danksagung

Zunächst bedanke ich mich bei Prof. Benson, der mir die Möglichkeit gab eine Bachelorarbeit in der Nanooptik AG schreiben zu können. Für die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre danke ich der gesamten Arbeitsgruppe. Ich bin hier auf sehr viel Hilfsbereitschaft gestoßen, die mir beim Verfassen der Arbeit sehr geholfen hat. Insbesondere hervorheben möchte ich hier Otto Dietz, Chris Müller und Andreas Ahlrichs für zahlreiche Hilfestellungen und Korrekturen beim Verfassen der Bachelorarbeit.

Außerdem gilt mein Dank meinem Physiklehrer des Gymnasiums, Herr Platte. Er hat die Begeisterung für die Physik in mir wecken können, was ein wichtiger Beweggrund für mich war, das Physikstudium anzutreten.

Zuletzt danke ich meiner Familie und meinen Freunden, die mich im Studium und auf meinem gesamten Lebensweg immer unterstützt haben.

$$\frac{\Delta n_o}{\Delta T} = (2 \pm 1) \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}} \quad (1)$$

$$\frac{\Delta n_a}{\Delta T} = (1,5 \pm 1) \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}} \quad (2)$$

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Berlin, den 16. Juni 2015