

Giant Diffusion in Systemen mit bistabiler Ratendynamik

Richard Kullmann

18. Mai 2020

Giant Diffusion

- ▶ "Giant Enhancement of (thermal) Diffusion"
- ▶ Bezeichnung um 2000 in verschiedenen Papers eingeführt
- ▶ meist bei bistabilen Systemen zu finden
- ▶ im Limes verschwindenden Rauschens divergiert Diffusionskoeffizient

$$D_{eff} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2}{2t} \left(= \frac{\langle N^2(t) \rangle - \langle N(t) \rangle^2}{2t} \right)$$

- ▶ für neuronale Systeme: große Verbesserung des Signal-zu-Rausch Verhältnis SNR erwartet

$$SNR \propto \frac{1}{D_{eff}}$$

Weitere Größen von Interesse

- ▶ mittlere Geschwindigkeit (Feuerrate):

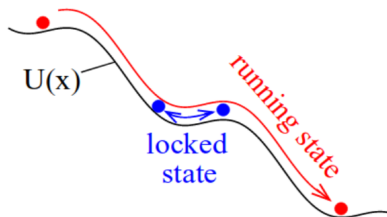
$$r = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle x(t) - x(0) \rangle}{t} \left(= \frac{\langle N(t) \rangle}{t} \right)$$

- ▶ Fano-Faktor:

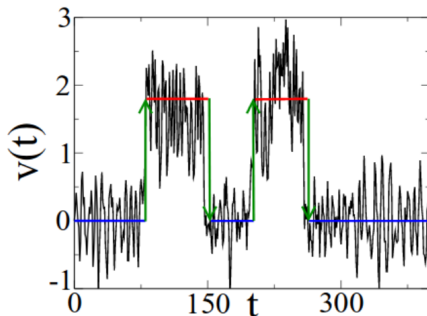
$$F = \frac{\langle \Delta N^2(t) \rangle}{\langle N(t) \rangle} = \frac{2D_{\text{eff}}}{Lr}$$

Brownsche Teilchen im gekippten periodischen Potential

Theorie - Potential

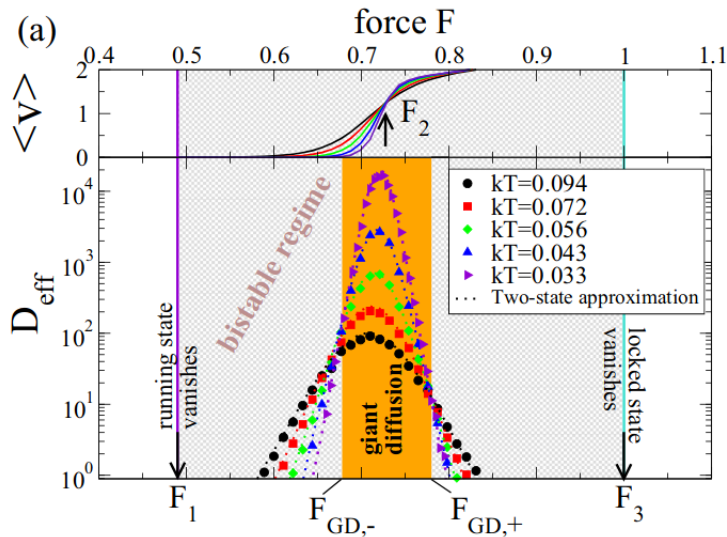


- Bewegung von Kugeln in einem gekippten Kosinuspotential (Lindner/ Sokolov, 2016.)



- Bistabilität der Geschwindigkeit

Simulation: Diffusionskoeffizient



Nervenmodelle

Übergang Brownsche Teilchen → Nervenmodell

| mechanical interpretation | neuroscience interpretation |
|----------------------------------|------------------------------------|
| position, phase | spike count |
| mean velocity | firing rate |
| diffusion coefficient | Fano factor x rate |
| Velocity power spectrum | Spike train power spectrum |
| temperature | inverse number of channels |

$I_{Na,p} + I_K$ Modell mit Andronov-Hopf- Bifurkation

Theorie: Modell

► $I_{Na,p} + I_K$ -Modell:

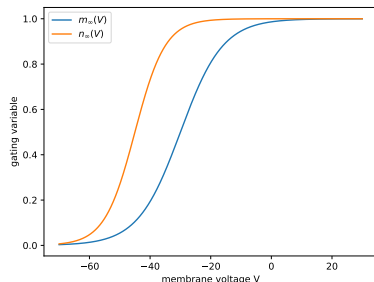
$$\begin{aligned} C\dot{V} &= I - g_L(V - E_L) - g_{Na}m_\infty(V)(V - E_{Na}) - g_Kn(V - E_K) + \sqrt{2D}\xi(t) \\ \dot{n} &= (n_\infty(V) - n)/\tau(V) \end{aligned}$$

Steady-State-Aktivierungsfunktion:

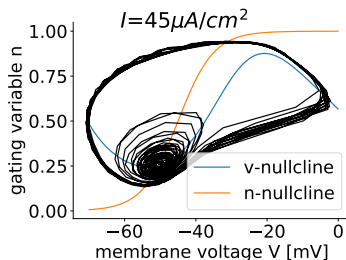
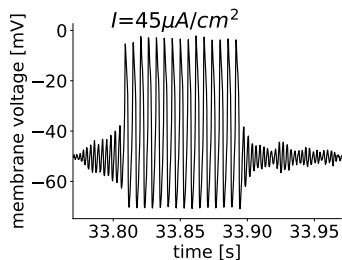
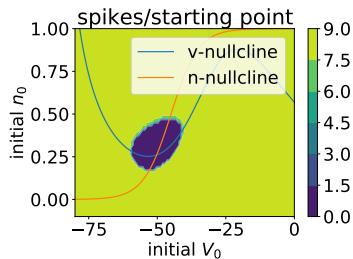
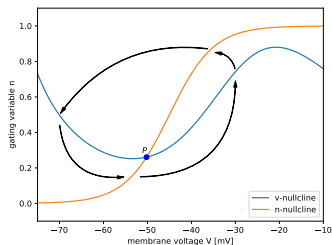
$$f_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\{(V_{1/2} - V)/k\}}$$

hierbei ist k die Steigung, sowie:

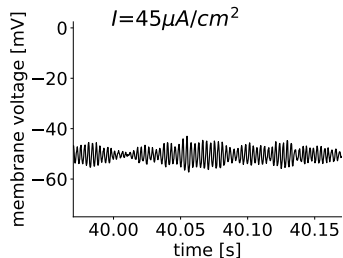
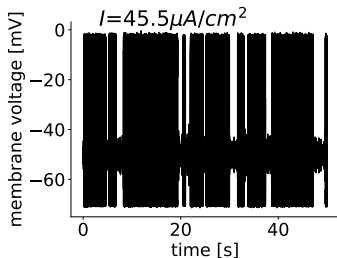
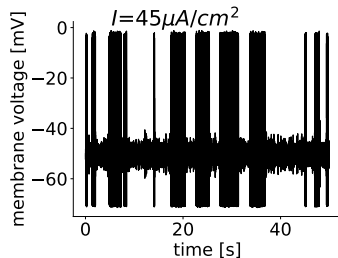
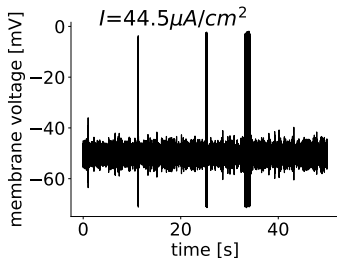
$$f_\infty(V_{1/2}) = 1/2$$



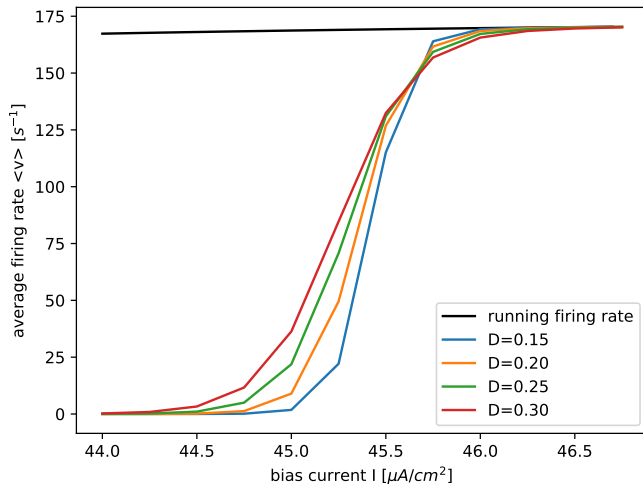
Phasenraum



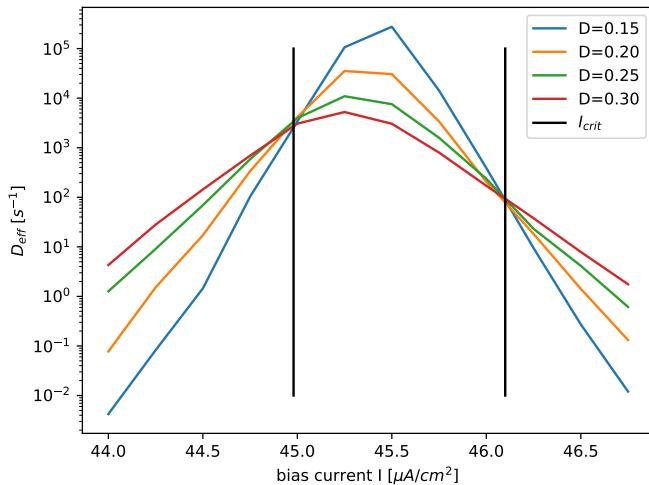
Variation von I



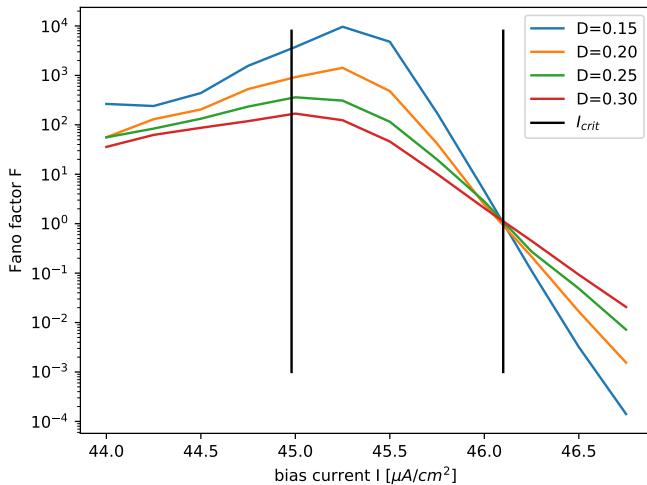
Simulation: Feuerrate



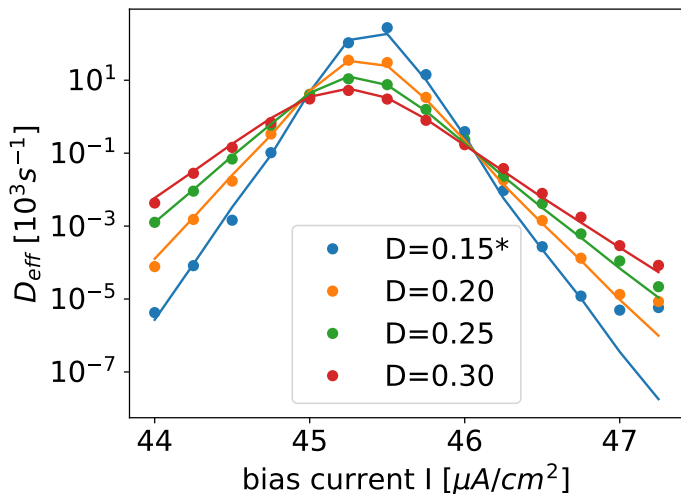
Simulation: Diffusionskoeffizient



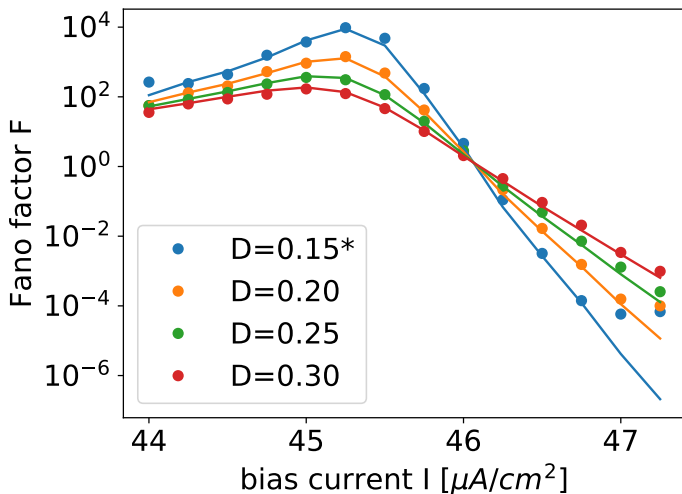
Simulation: Fano-Faktor



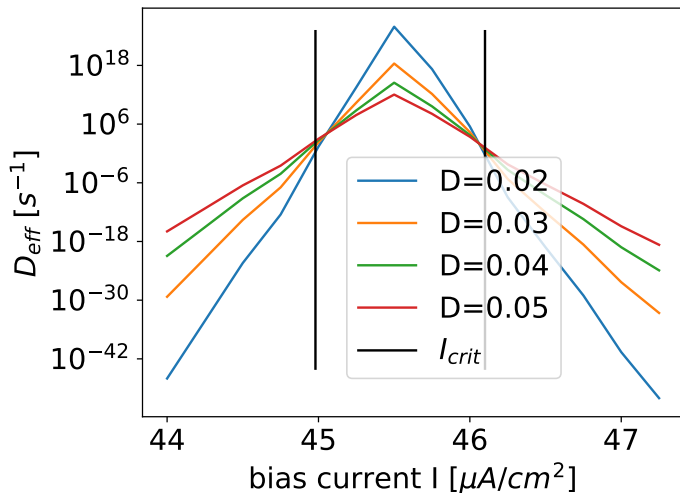
Vergleich mit Zwei-Zustands-Modell: D_{eff}



Vergleich mit Zwei-Zustands-Modell: F



Vorhersage des Zwei-Zustands-Modells



Konsequenzen für Signalübertragung

Bestimmung des SNR

- ▶ System mit schwachem Cosinus-Signal:

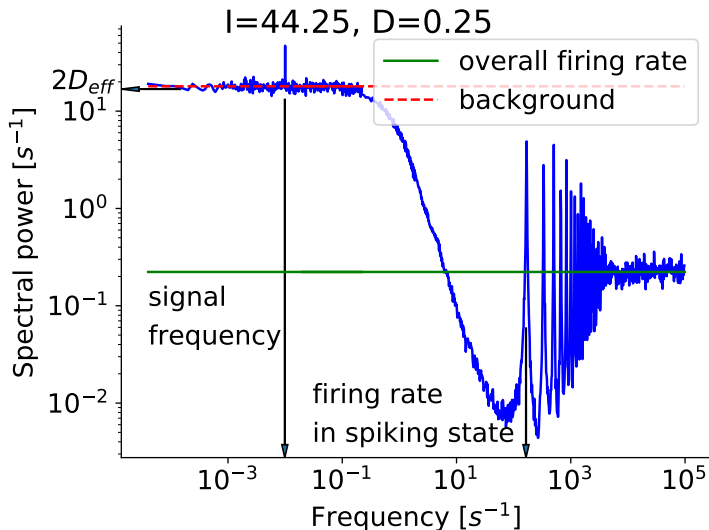
$$C\dot{V} = f(V, n, t) \rightarrow C\dot{V} = f(V, n, t) + \varepsilon \cos(\omega t + \phi)$$

- ▶ Spektrum aus Fourier-Trafo des δ -Spike-trains
- ▶ Signal-zu-Rausch Verhältnis SNR kann aus Feuerrate und D_{eff} berechnet werden:

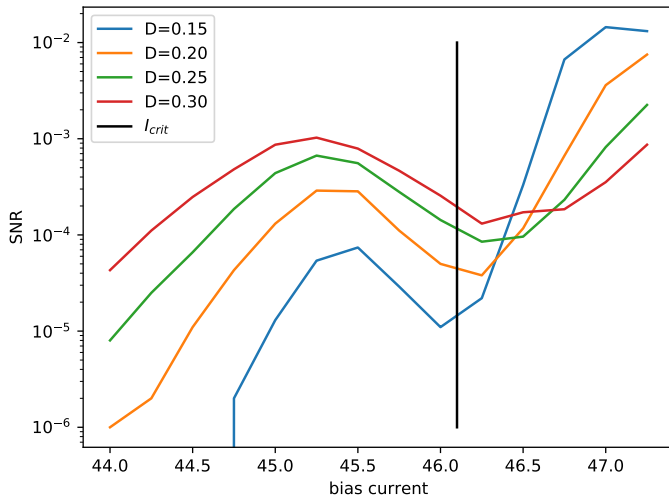
$$SNR = \frac{\varepsilon^2 T}{4} \frac{|\chi(\omega)|^2}{S_0(\omega)} = \frac{\varepsilon^2 T |dr/dl|^2}{8 \cdot D_{eff}}$$

$I_{Na,p} + I_K$ Modell mit Andronov-Hopf- Bifurkation

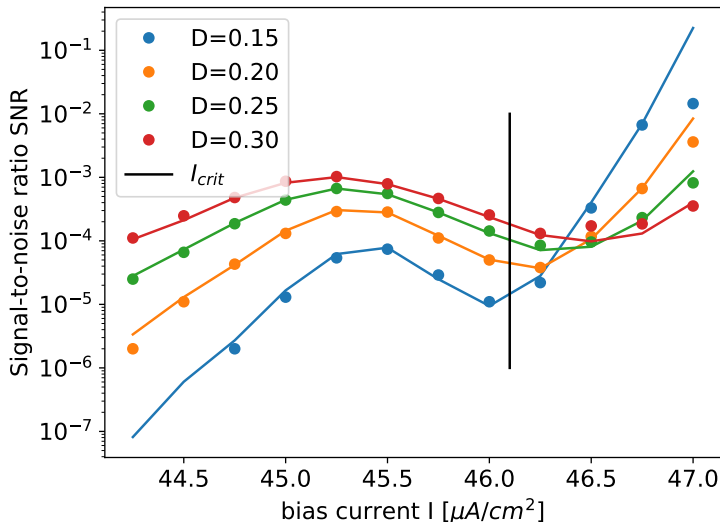
Spektrum mit Andronov-Hopf-Bifurkation



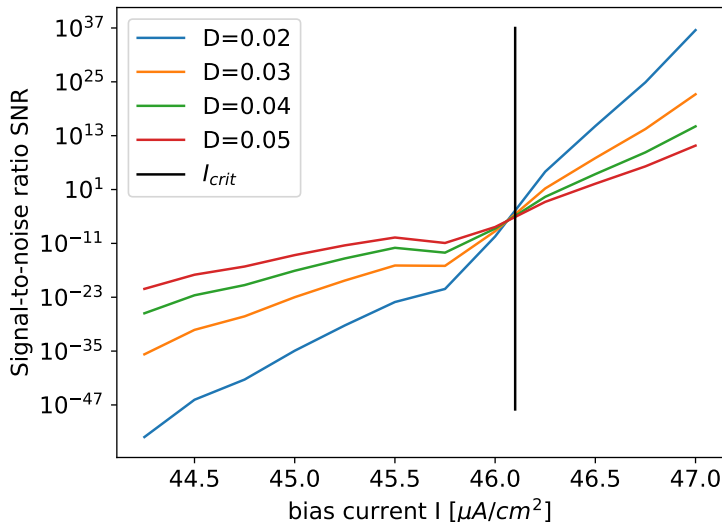
SNR



Vergleich SNR - Zwei-Zustands-Theorie



Vorhersage mit Zwei-Zustands-Theorie



Zusammenfassung und Ausblick

- ▶ analog zu Brownschen Teilchen wurde in verschiedenen bistabilen Nervenmodellen ein Bereich gefunden, in dem Giant Diffusion auftritt
→ Bistabilität scheinbar einzige Voraussetzung für Giant Diffusion in Neuronen
- ▶ kritische Punkte, an denen D_{eff} von Rauschen unabhängig
- ▶ Zwei-Zustands-Theorie liefert gute Beschreibung
- ▶ starke Verbesserung des SNR beobachtet
- ▶ als nächstes: experimentelle Untersuchung bistabiler Neuronen

Zusammenfassung und Ausblick

Fragen?

Zwei-Zustands-System

- ▶ geringes Rauschen: Verhalten des Systems durch Übergänge zwischen Zuständen bestimmt
- ▶ für Übergangsraten wird Arrhenius-Gleichung angenommen:

$$w_{\pm} = w_{0,\pm} e^{-\frac{\Delta U_{\pm}}{Q}}$$

- ▶ w_- : ruhend zu laufend, w_+ umgekehrt, Q : Rauschintensität
- ▶ D_{eff} aus Raten und $\Delta r = r_+ - r_-$:

$$D_{\text{eff}} = \frac{(\Delta r)^2 w_+ w_-}{(w_+ + w_-)^3}$$

Zwei-Zustands-System

- ▶ gesucht: F_{crit}
- ▶ nahe Schnittpunkt: $D_{eff}(Q, F) = D_{eff}(F)$
- ▶ Einsetzen:

$$\begin{aligned}
 D_{eff} &= \frac{(\Delta r)^2 w_{0,+} w_{0,-} e^{-\frac{\Delta U_+ + \Delta U_-}{Q}}}{\left(w_{0,+} e^{\frac{-\Delta U_+}{Q}} + w_{0,-} e^{\frac{-\Delta U_-}{Q}} \right)^3} \\
 &= \frac{(\Delta r)^2 w_{0,+} w_{0,-}}{\left(w_{0,+} e^{-\frac{3\Delta U_+ - \Delta U_+ - \Delta U_-}{3Q}} + w_{0,-} e^{-\frac{3\Delta U_- - \Delta U_+ - \Delta U_-}{3Q}} \right)^3} \\
 &= \frac{(\Delta r)^2 w_{0,+} w_{0,-}}{\left(w_{0,+} e^{-\frac{2\Delta U_+ - \Delta U_-}{3Q}} + w_{0,-} e^{-\frac{2\Delta U_- - \Delta U_+}{3Q}} \right)^3}
 \end{aligned}$$

Zwei-Zustands-System

$$D_{\text{eff}} = \frac{(\Delta r)^2 w_{0,+} w_{0,-}}{\left(w_{0,+} e^{-\frac{2\Delta U_+ - \Delta U_-}{3Q}} + w_{0,-} e^{-\frac{2\Delta U_- - \Delta U_+}{3Q}} \right)^3}$$

- Fall 1: $\Delta U_+ > \Delta U_-$:

$$D_{\text{eff}} \approx \frac{(\Delta r)^2 w_{0,+}}{w_{0,-}^2} e^{-\frac{\Delta U_+ - 2\Delta U_-}{Q}}$$

- bei $\left| \frac{d}{dF} \left(\frac{(\Delta r)^2 w_{0,+}}{w_{0,-}^2} \right) / \frac{d}{dF} D_{\text{eff}} \right| \ll 1$:

$$\Delta U_+ = 2\Delta U_-$$

- symmetrisches Problem \rightarrow 2. Schnittpunkt bei

$$\Delta U_- = 2\Delta U_+$$

- $\Delta U_{\pm} = 2\Delta U_{\mp}$

Zwei-Zustands-System

- ▶ gesucht: mögliche Schnittpunkte im Fano-Faktor

$$F = \frac{2D_{\text{eff}}}{r}$$

- ▶ Mittelwert der Geschwindigkeit:

$$r = r_+ \frac{w_-}{w_+ + w_-}$$

- ▶ Einsetzen der Übergangsraten:

$$\begin{aligned} F &= \frac{2r_+ w_+}{(w_+ + w_-)^2} = \frac{2r_+ w_{0,+} e^{-\frac{\Delta U_+}{Q}}}{\left(w_{0,+} e^{-\frac{\Delta U_+}{Q}} + w_{0,-} e^{-\frac{\Delta U_-}{Q}} \right)^2} \\ &= \frac{2r_+ w_{0,+}}{\left(w_{0,+} e^{-\frac{2\Delta U_+ - \Delta U_+}{2Q}} + w_{0,-} e^{-\frac{2\Delta U_- - \Delta U_+}{2Q}} \right)^2} \end{aligned}$$

Zwei-Zustands-System

$$F = \frac{2r_+ w_{0,+}}{\left(w_{0,+} e^{-\frac{2\Delta U_+ - \Delta U_-}{2Q}} + w_{0,-} e^{-\frac{2\Delta U_- - \Delta U_+}{2Q}} \right)^2}$$

► $\Delta U_+ > \Delta U_-$:

$$F = \frac{2r_+ w_{0,+}}{w_{0,-}^2} e^{-\frac{\Delta U_+ - 2\Delta U_-}{Q}} \rightarrow \Delta U_+ = 2\Delta U_-$$

► $\Delta U_+ < \Delta U_-$:

$$F = \frac{2r_+}{w_{0,+}} e^{-\frac{\Delta U_+ - 2\Delta U_+}{Q}} \rightarrow \Delta U_+ = 0$$

- eine Barriere muss verschwinden \rightarrow Rand des Gültigkeitsbereichs der Zwei-Zustands-Theorie erreicht
- rechter Schnittpunkt bleibt erhalten, linker verschiebt sich weiter nach links

SNR in Zwei-Zustands-Theorie

- Ableitung der Feuerrate:

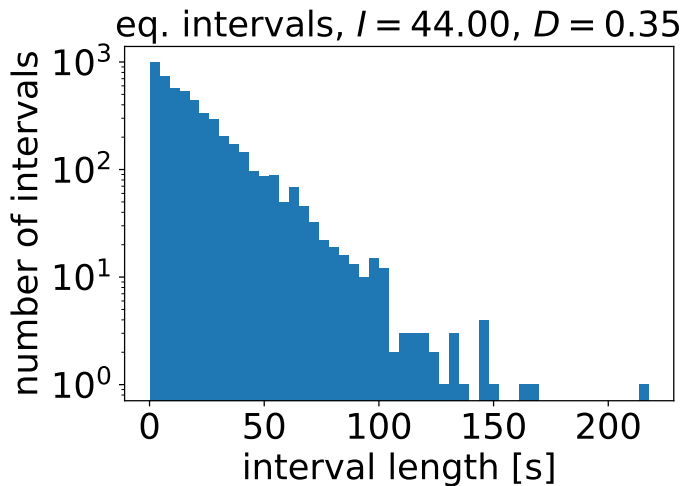
$$\begin{aligned}\frac{dr}{dl} &= \frac{d}{dl} \left(\frac{r_+ w_-}{w_+ + w_-} \right) = \frac{r'_+ w_-}{w_+ + w_-} + \frac{r_+ w'_-}{w_+ + w_-} - \frac{r_+ w_- (w'_+ + w'_-)}{(w_+ + w_-)^2} \\ &= \frac{r'_+ w_-}{w_+ + w_-} + \frac{r_+ (w_+ w'_- - w_- w'_+)}{(w_+ + w_-)^2}\end{aligned}$$

- Ableitung der Übergangsraten:

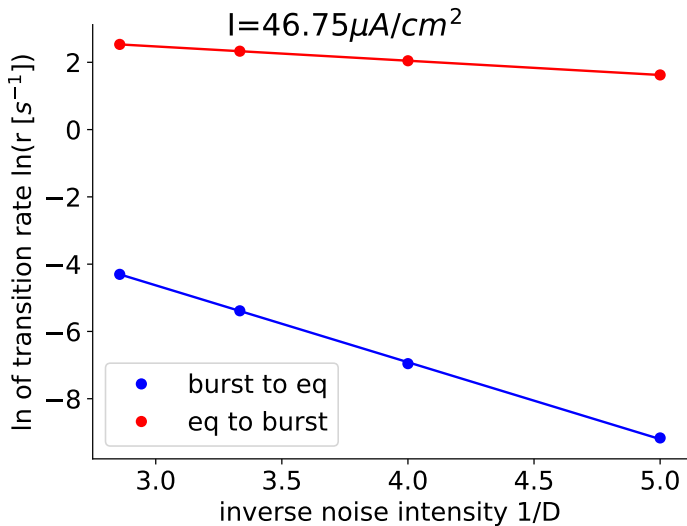
$$w'_\pm = \frac{w'_{0,\pm}}{w_{0,\pm}} w_\pm - \frac{\Delta U'_\pm}{D} w_\pm = \left(\frac{w'_{0,\pm}}{w_{0,\pm}} - \frac{\Delta U'_\pm}{D} \right) w_\pm$$

- r'_+ , $w'_{0,\pm}$ und $\Delta U'_\pm$ numerisch

Intervallstatistik



Arrhenius-Fit



Barrieren für verschiedene Ströme

