Giant Diffusion bei Brownschen Teilchen und Burstenden Neuronen

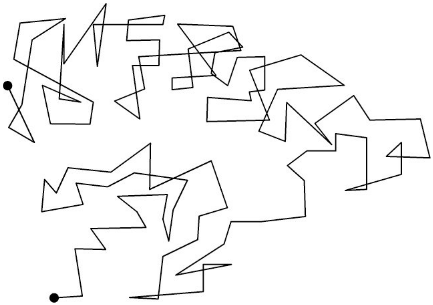
Richard Kullmann

11. Juni 2019

Klassische Brownsche Bewegung

- (unregelmäßige) Bewegung von Teilchen in viskosem Medium
- Langevin-Gleichung:

$$m\dot{v} = -\lambda v + \xi(t)$$



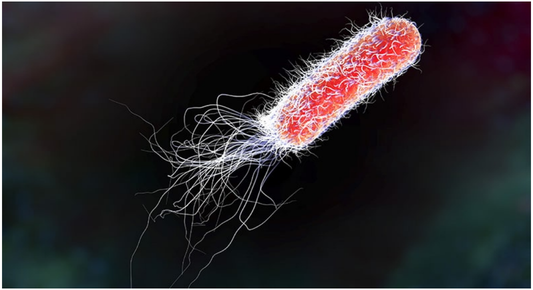
Random Walk eines Brownschen Teilchens[1]

[1] https://www.spektrum.de/lexika/images/physik/fff1491.jpg

Aktive Brownsche Bewegung

- beschreibt Bakterien/Zellen, die sich aus eigenem Antrieb fortbewegen
- Langevin-Gleichung:

$$\dot{v} = f(v) + g(v)\xi(t)$$



E. coli - Bakterium[1]

[1] $https : //www.biocote.com/wp - content/uploads/2016/07/Five - Facts - about - E - coli_img.jpg$

Größen von Interesse

- mittlere Geschwindigkeit (Feuerrate):

$$\langle v \rangle = lim_{t\to\infty} \frac{\langle x(t) - x(0) \rangle}{t} \left(= \frac{\langle N(t) \rangle}{t} \right)$$

- Diffusionskoeffizient:

$$D_{eff} = lim_{t\to\infty} \frac{\left\langle x^2(t) \right\rangle - \langle x(t) \rangle^2}{2t} \left(= \frac{\left\langle N^2(t) \right\rangle - \langle N(t) \rangle^2}{2t} \right)$$

- Fano-Faktor:

$$F = \frac{\left\langle \Delta N^2(t) \right\rangle}{\langle N(t) \rangle} = \frac{2D_{eff}}{\langle v \rangle}$$

Aktive Brownsche Teilchen

Grundlagen: Bewegungsgleichung

- nichtlineare Langevin-Gleichung:

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = f(v) + g(v)\xi(t)$$

mit

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2Q\delta(t - t')$$

- ABP: negativer Reibungsterm $f(v)$ bei betraglich geringen Geschwindigkeiten
- z.B. über bistabiles Geschwindigkeitspotential

Theorie: Modell

- Betrachtung an einfachem Modell mit $g(v) = 1$ und $f(v) = v - v^3 + F$[1]:

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = -\frac{dU(v)}{dv} + \xi(t)$$

wobei

$$U(v) = \frac{1}{4}v^4 - \frac{1}{2}v^2 - Fv$$

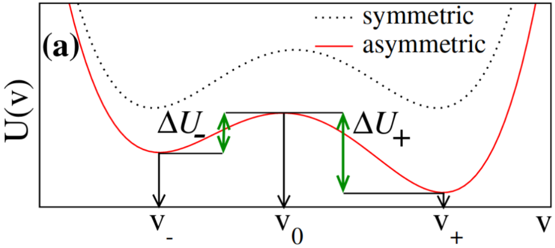
- symmetrisch unter Inversion von x, v, F

$$\rightarrow \langle v(F) \rangle = -\langle v(-F) \rangle \quad \text{und} \quad D_{\text{eff}}(F) = D_{\text{eff}}(-F)$$

[1] Benjamin Lindner und Ernesto M. Nicola, "Critical Asymmetry for Giant Diffusion of Active Brownian Particles," *Physical Review Letters 101*, 2008.

Theorie: Geschwindigkeitspotential

- Form von $U(v)$:

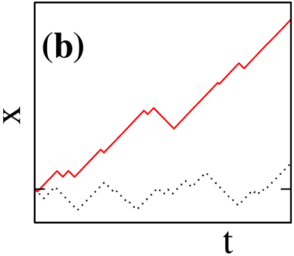


Geschwindigkeitspotential im vereinfachten Modell

- 2 Minima bei v_- und v_+ mit zugehörigen Barrieren $\Delta U_\pm = U(v_0) - U(v_\pm)$

heorie: Geschwindigkeitspotential

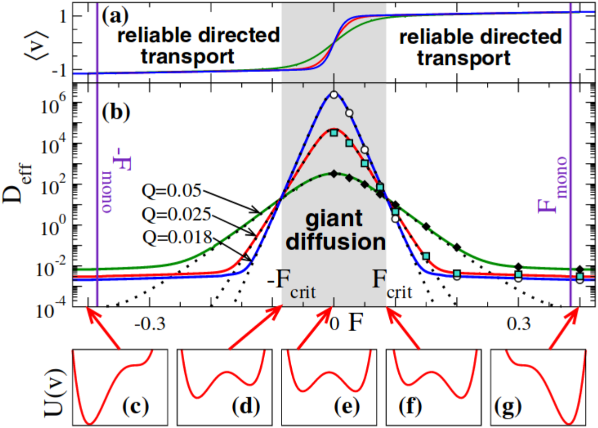
- bistabiles Geschwindigkeitspotential ruft bidirektionale Bewegung hervor



x-t-Diagramm bei symmetrischem und asymmetrischem Geschwindigkeitspotential

- Asymmetrie führt zu nichtverschwindendem $\langle v \rangle$

Simulation



Bestimmung von Geschwindigkeit und Diffusionskoeffizient

Zwei-Zustands-System

- geringes Rauschen: Verhalten des Systems durch Übergange zwischen Zuständen bestimmt
- für Übergangsraten wird Arrhenius-Gleichung angenommen:

$$r_{\pm} = r_{0,\pm} e^{-\frac{\Delta U_{\pm}}{Q}}$$

- r_{-}: rückwärts zu vorwärts, r_{+} umgekehrt, Q: Rauschintensität
- D_{eff} aus Raten und $\Delta v = v_{+} - v_{-}$:

$$D_{\text{eff}} = \frac{(\Delta v)^2 r_{+} r_{-}}{(r_{+} + r_{-})^3}$$

Zwei-Zustands-System

- gesucht: F_{crit}
- nahe Schnittpunkt: $D_{\text{eff}}(Q,F){=}D_{\text{eff}}(F)$
- Einsetzen:

$$D_{\text{eff}} = \frac{(\Delta v)^2 r_{0,+} r_{0,-} e^{-\frac{\Delta U_+ + \Delta U_-}{Q}}}{\left(r_{0,+} e^{\frac{-\Delta U_+}{Q}} + r_{0,-} e^{\frac{-\Delta U_-}{Q}}\right)^3}$$

$$= \frac{(\Delta v)^2 r_{0,+} r_{0,-}}{\left(r_{0,+} e^{-\frac{3\Delta U_+ - \Delta U_+ - \Delta U_-}{3Q}} + r_{0,-} e^{-\frac{3\Delta U_- - \Delta U_+ - \Delta U_-}{3Q}}\right)^3}$$

$$= \frac{(\Delta v)^2 r_{0,+} r_{0,-}}{\left(r_{0,+} e^{-\frac{2\Delta U_+ - \Delta U_-}{3Q}} + r_{0,-} e^{-\frac{2\Delta U_- - \Delta U_+}{3Q}}\right)^3}$$

Zwei-Zustands-System

- Grenzfall $Q \to 0, \Delta U_+ > \Delta U_-$:

$$D_{\text{eff}} = \frac{(\Delta v)^2 r_{0,+}}{r_{0,-}^2} e^{-\frac{\Delta U_+ - 2\Delta U_-}{Q}}$$

- bei $\left| \frac{d}{dF} \left(\frac{(\Delta v)^2 r_{0,+}}{r_{0,-}^2} \right) / \frac{d}{dF} D_{\text{eff}} \right| \ll 1$:

$$\Delta U_+ = 2\Delta U_-$$

- symmetrisches Problem $\to$ 2. Schnittpunkt bei

$$\Delta U_- = 2\Delta U_+$$

- $\Delta U_\pm = 2\Delta U_\mp$

Brownsche Teilchen im gekippten periodischen Potential

Theorie: Bewegungsgleichungen

- Langevin-Gleichung:

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = -\gamma v - U'(x) + \sqrt{2\gamma kT}\,\xi(t)$$

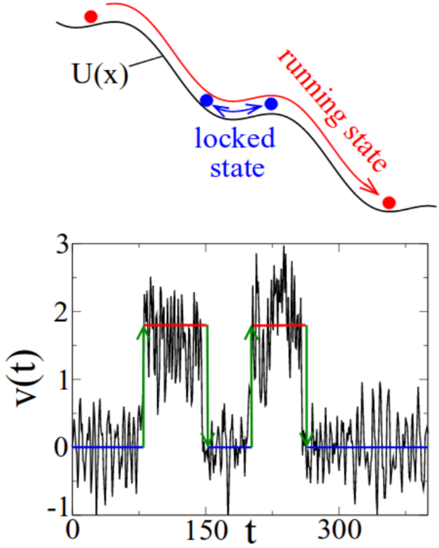
mit[1]

$$U(x) = -Fx - d\cos(x)$$

- γ: Reibungskoeffizient, $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$, $d = 1$

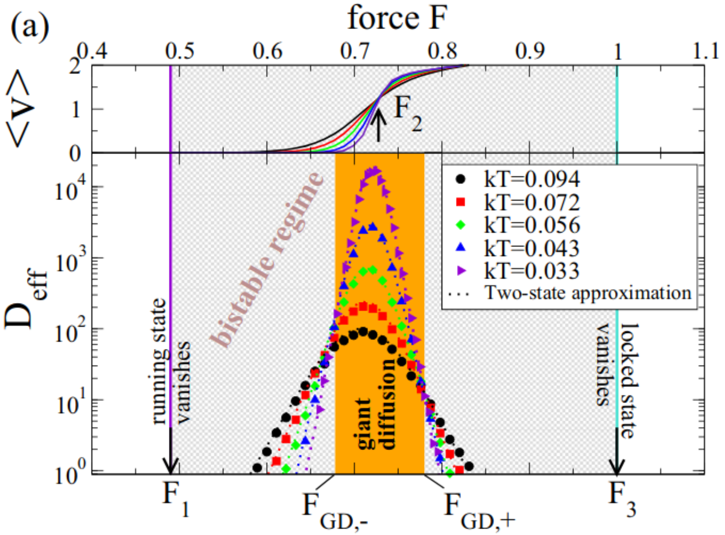
[1] Benjamin Lindner und Igor M. Sokolov, "Giant diffusion of underdamped particles in a biased periodic potential," *Physical Review E 93*, 2016.

Theorie - Potential

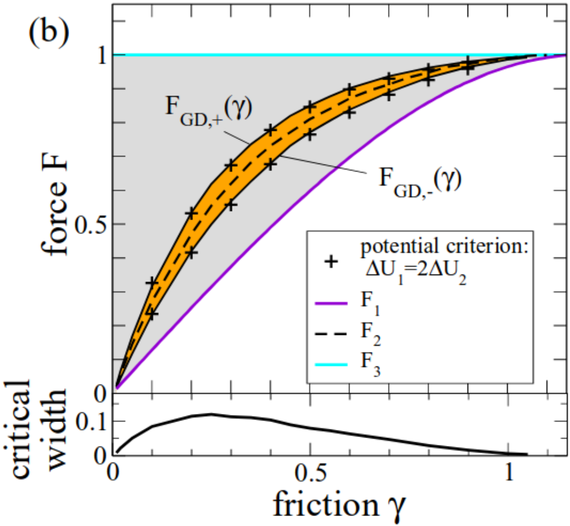


- Bewegung von Kugeln in einem gekippten Kosinuspotential
- Bistabilität der Geschwindigkeit

Simulation: Diffusionskoeffizient



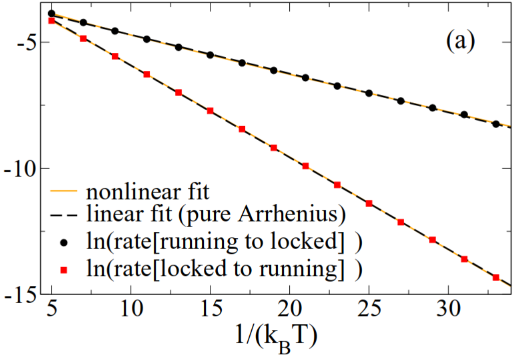
Simulation - kritischer Bereich



Berechnung effektiver Potentialbarrieren

- Annahme: Übergangsraten zeigen Kramers-ähnliches Verhalten:

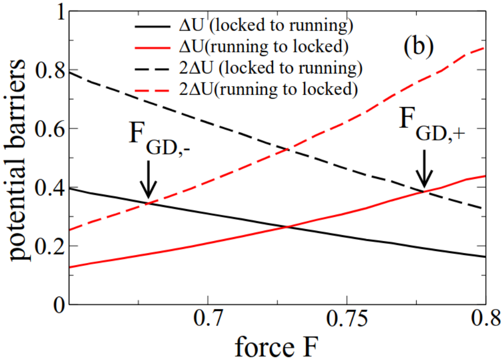
$$r \propto T^{\alpha} e^{-\frac{\Delta U}{kT}}$$



- Fits für $\alpha = 0$ und $\alpha \neq 0$ liefern ähnliche Barrieren

Berechnung effektiver Potentialbarrieren

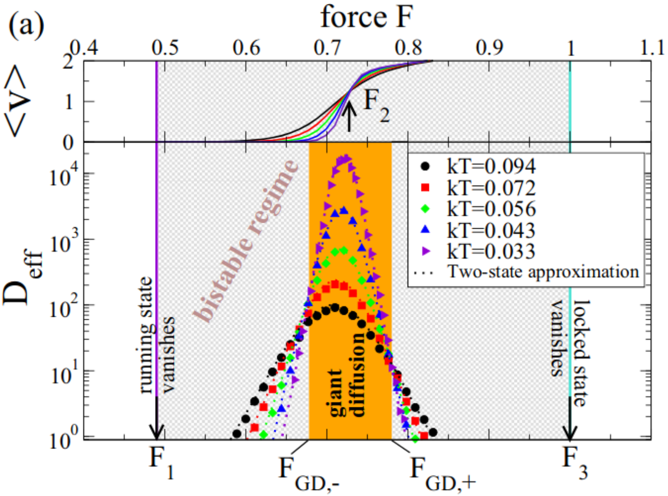
- Plotten von ΔU und $2\Delta U$ für verschiedene Kräfte



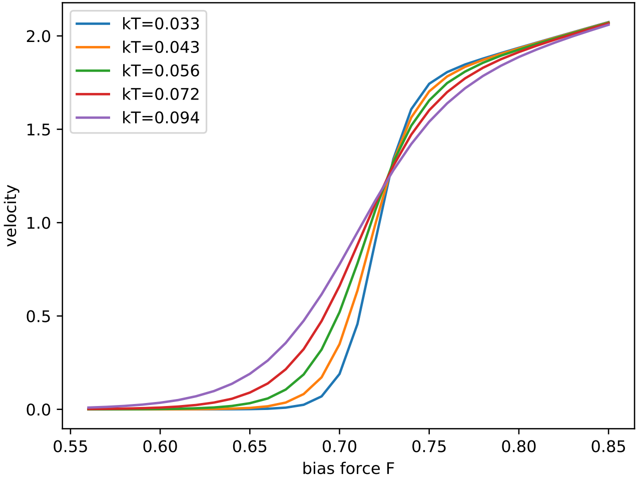
- Schnittpunkte etwa bei $F = 0.68$ und $F = 0.78$

Berechnung effektiver Potentialbarrieren

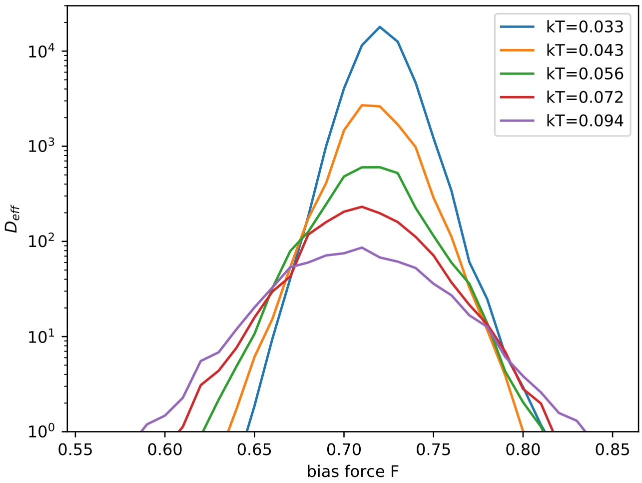
- Vergleich mit Simulation



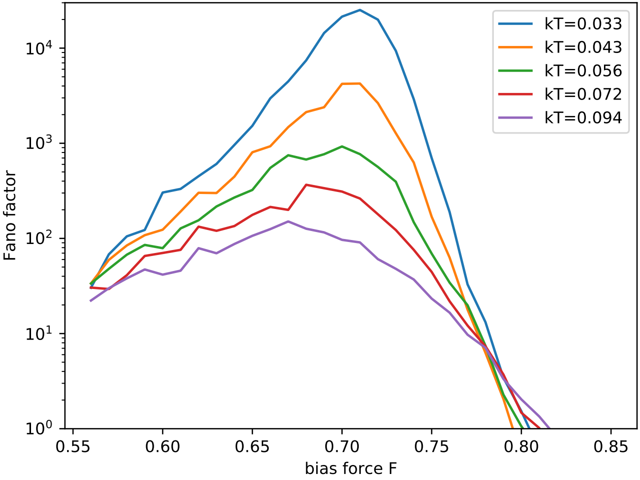
Reproduktion: Geschwindigkeit



Reproduktion: Diffusionskoeffizient



Reproduktion: Fano - Faktor



Zwei-Zustands-System

- gesucht: mögliche Schnittpunkte im Fano-Faktor

$$F = \frac{2D_{\text{eff}}}{\langle v \rangle}$$

- Mittelwert der Geschwindigkeit:

$$\langle v \rangle = v_+ \frac{r_-}{r_+ + r_-}$$

- Einsetzen der Übergangsraten:

$$F = \frac{2v_+ r_+}{(r_+ + r_-)^2} = \frac{2v_+ r_{0,+} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta U_+}{Q}}}{\left(r_{0,+} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta U_+}{Q}} + r_{0,-} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta U_-}{Q}}\right)^2}$$

$$= \frac{2v_+ r_{0,+}}{\left(r_{0,+} \mathrm{e}^{-\frac{2\Delta U_+ - \Delta U_+}{2Q}} + r_{0,-} \mathrm{e}^{-\frac{2\Delta U_- - \Delta U_+}{2Q}}\right)^2}$$

Zwei-Zustands-System

- Grenzfall $Q \ll 1 \rightarrow$ zwei Lösungen
- $\Delta U_+ > \Delta U_-$:

$$F = \frac{2v_+ r_{0,+}}{r_{0,-}^2} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta U_+ - 2\Delta U_-}{Q}} \rightarrow \Delta U_+ = 2\Delta U_-$$

- $\Delta U_+ < \Delta U_-$:

$$F = \frac{2v_+}{r_{0,+}} \mathrm{e}^{-\frac{\Delta U_+ - 2\Delta U_+}{Q}} \rightarrow \Delta U_+ = 0$$

- eine Barriere muss verschwinden $\rightarrow$ Rand des Gültigkeitsbereichs der Zwei-Zustands-Theorie erreicht
- rechter Schnittpunkt bleibt erhalten, linker verschiebt sich weiter nach links

Nervenmodell

Übergang Brownsche Teilchen → Nervenmodell

mechanical interpretation	neuroscience interpretation
position, phase	spike count
mean velocity	firing rate
diffusion coefficient	Fano factor x rate
Velocity power spectrum	Spike train power spectrum
temperature	inverse number of channels

Theorie: Modell

- $I_{Na,p} + I_K$-Modell:

$$C\dot{V} = I - g_L(V - E_L) - g_{Na} m_\infty(V)(V - E_{Na}) - g_K n(V - E_K) + \sqrt{2D}\xi(t)$$
$$\dot{n} = (n_\infty(V) - n)/\tau(V)$$

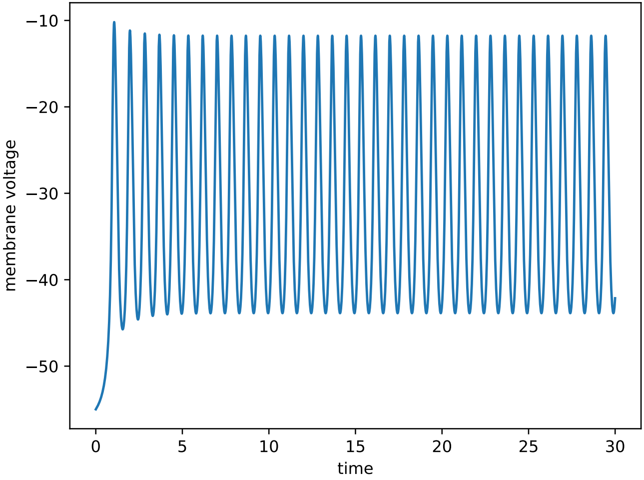
- Steady-State-Aktivierungsfunktion:

$$f_\infty(V) = \frac{1}{1 + \exp\{(V_{1/2} - V)/k\}}$$

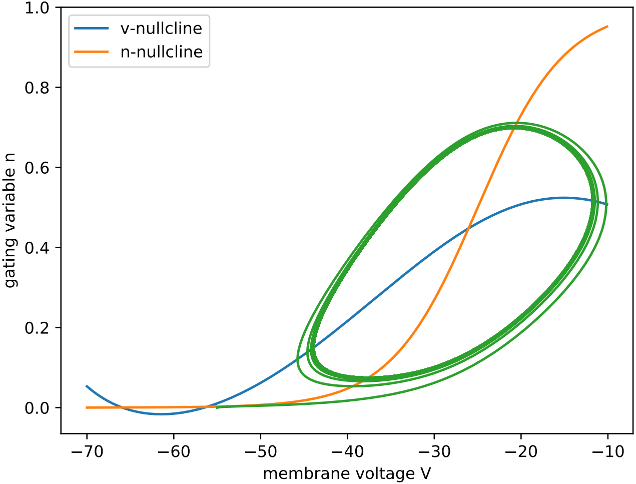
- hierbei ist k die Steigung, sowie:

$$f_\infty(V_{1/2}) = 1/2$$

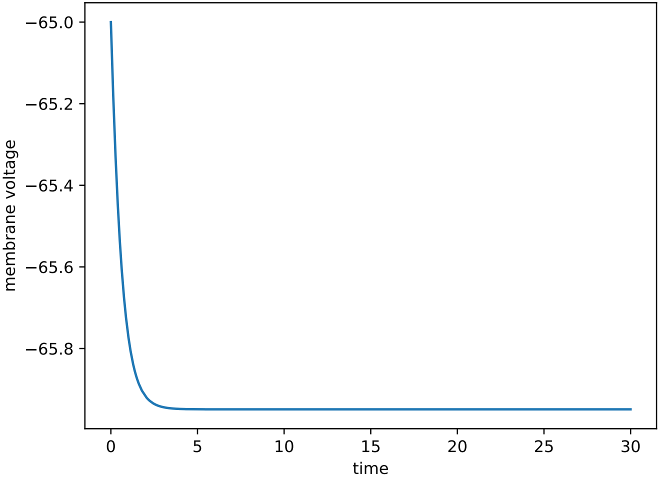
Deterministisches Verhalten: Bursten



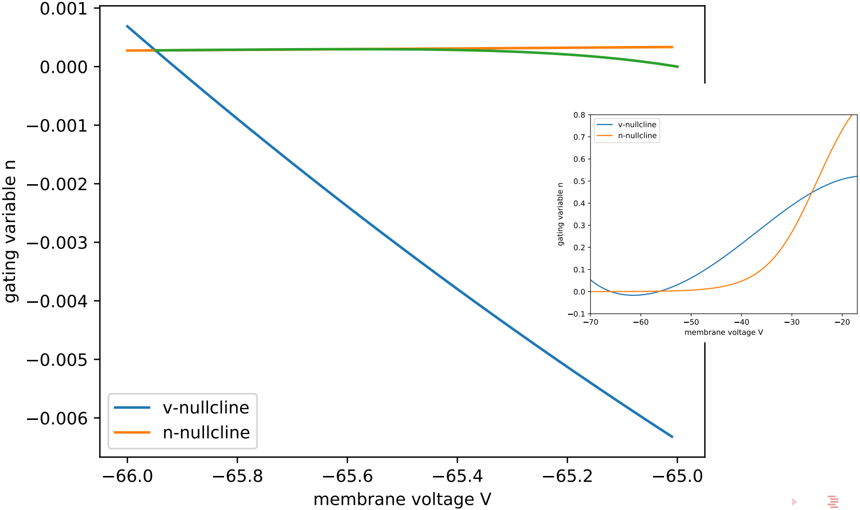
Deterministisches Verhalten: Bursten



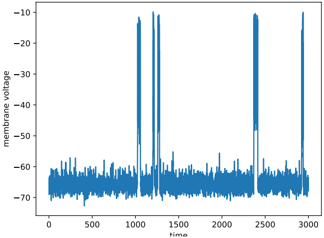
Deterministisches Verhalten: Ruhen

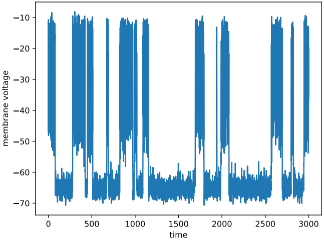


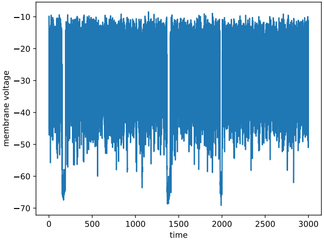
Deterministisches Verhalten: Ruhen

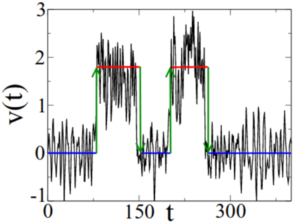


Verhalten unter Rauschen

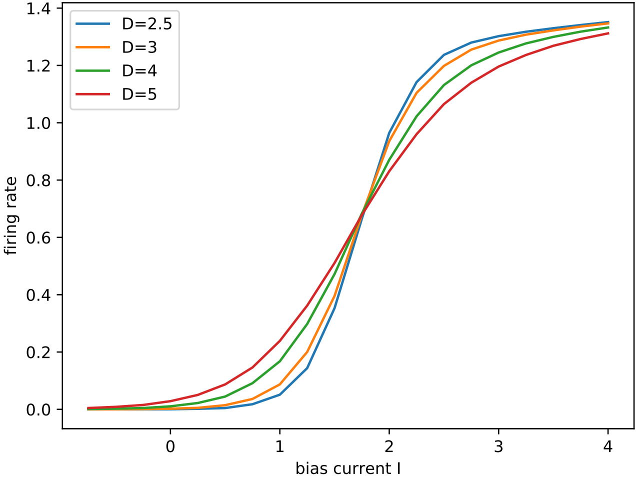




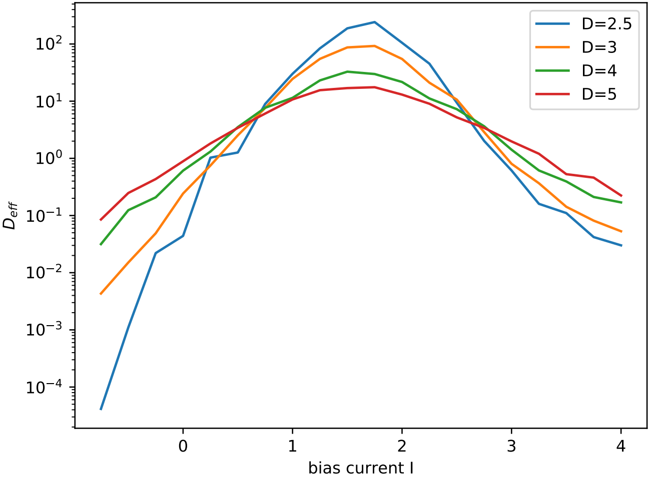




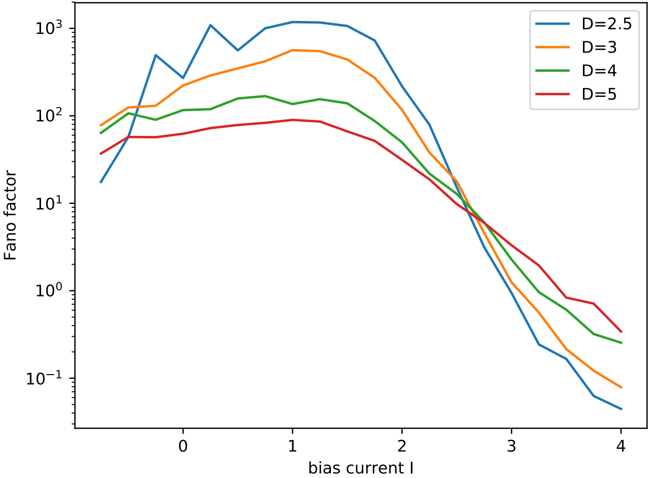
Simulation: Feuerrate



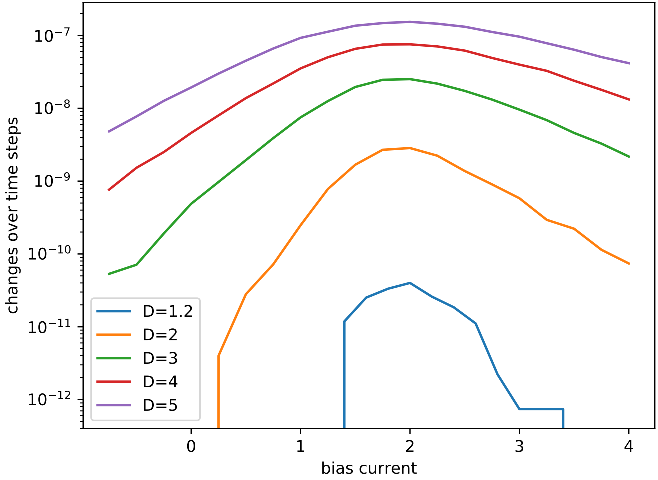
Simulation: Diffusionskoeffizient



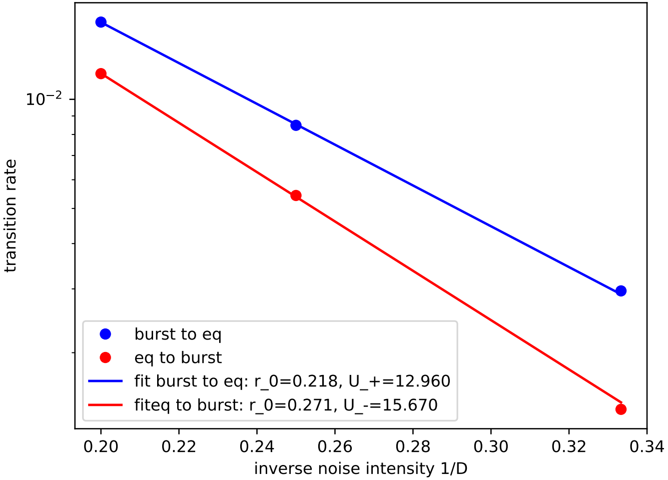
Simulation: Fano-Faktor



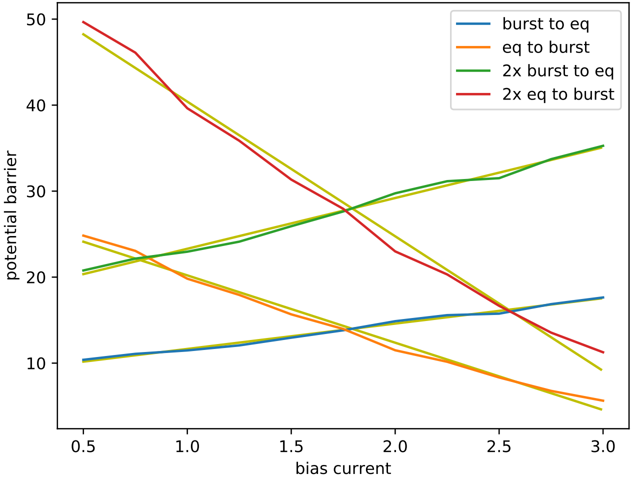
Anzahl der Übergänge



Arrhenius-Fit



Barrieren für verschiedene Ströme



Wiederholung: Zwei-Zustands-System

- Übergangsraten:

$$r_\pm = r_{0,\pm} e^{-\frac{\Delta U_\pm}{Q}}$$

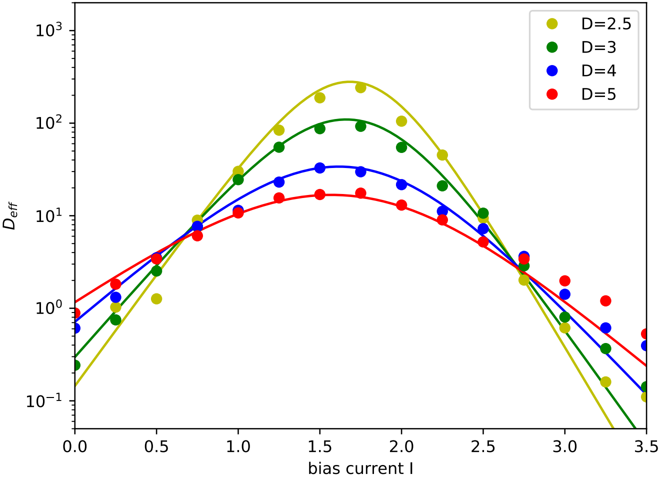
- aus Fits:

$$r_{0,\pm} = const$$
$$\Delta U_\pm = a_\pm \cdot I + b_\pm$$

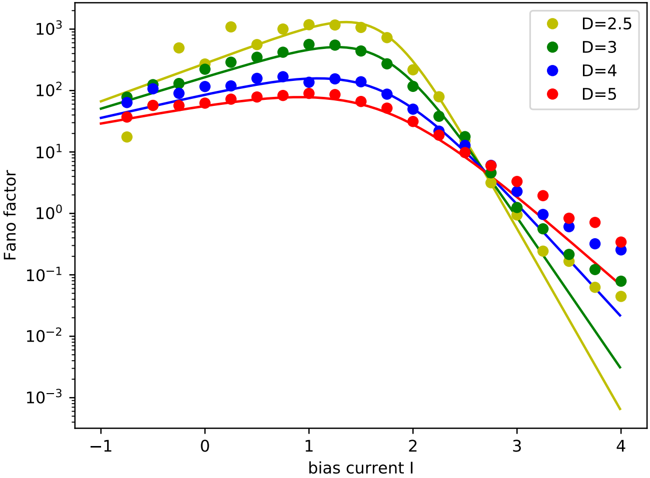
- D_{eff} und F aus Raten und $\Delta v = v_+ - v_-$:

$$D_{\text{eff}} = \frac{v_+^2 r_+ r_-}{(r_+ + r_-)^3}$$
$$F = \frac{2 v_0 r_+}{(r_+ + r_-)^2}$$

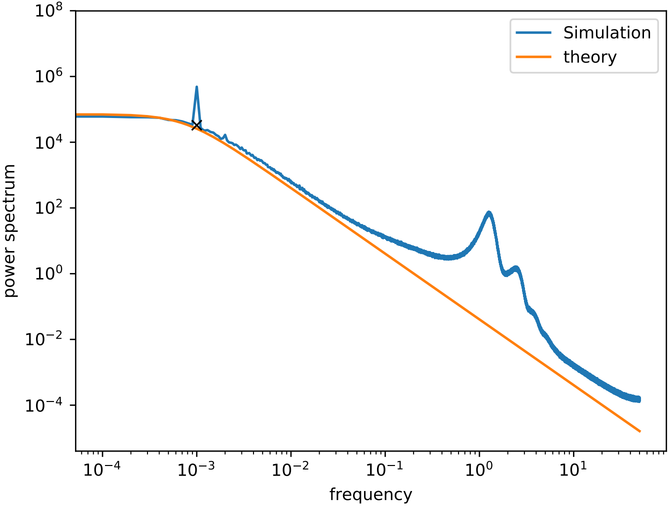
Vergleich mit Zwei-Zustands-Modell: D_{eff}



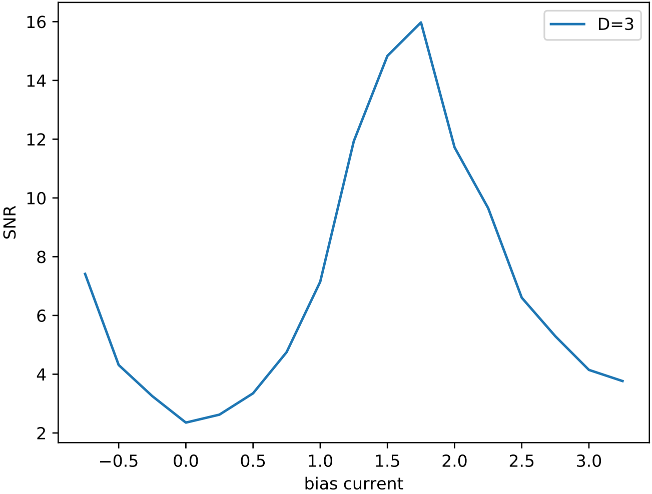
Vergleich mit Zwei-Zustands-Modell: F



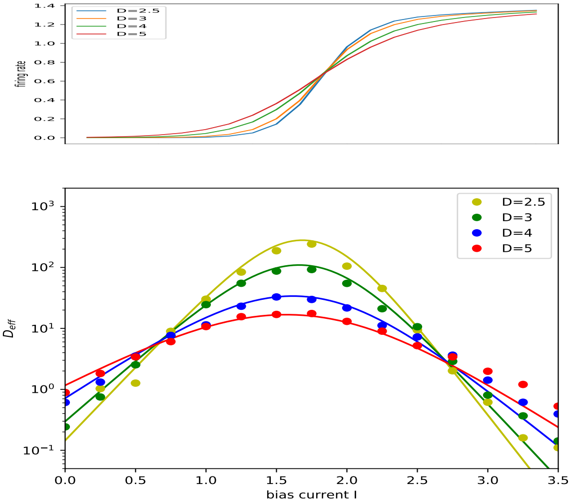
Spektrum mit schwachem periodischen Signal



Spektrum mit schwachem periodischen Signal



Vergleich mit D_{eff}, Feuerrate



Zusammenfassung und Ausblick

- analog zu Brownschen Teilchen wurde im Nervenmodell ein Bereich gefunden, in dem Giant Diffusion auftritt
- kritische Punkte, an denen D_{eff} von Rauschen unabhängig
- Zwei-Zustands-Theorie liefert gute Beschreibung
- als nächstes: Untersuchung der Abhängigkeit des SNR von Rauschintensität