Seja n o número de ingredientes que podem ser utilizados na produção da mistura e m o número de componentes relevantes para a mistura. Um dos passos fundamentais para se escrever um modelo matemático é identificar as incógnitas (variáveis do problema), ou seja, o que se deseja determinar. No problema da mistura, as variáveis são as quantidades dos ingredientes. Assim, definimos a variável:

x_j: a quantidade do ingrediente j que deve ser utilizada em uma unidade de mistura, $j=1, 2,\ldots, n$.

Uma unidade de mistura pode ser, por exemplo, 1kg. Essas variáveis devem ser não-negativas, pois um valor negativo para x_j não tem significado, isto é: $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$ são restrições do modelo. Para escrever as demais restrições, relativas à composição da mistura e seu custo, usamos a seguinte notação:

a_{ij} a fração do componente i no ingrediente j, $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$,

b_i a fração do componente i na mistura, $i = 1, ..., m$,

c_j o custo de uma unidade do ingrediente j, $j = 1, ..., n$.

Como a_{ij} é a fração do componente i no ingrediente j, isto é, a quantidade do componente i em uma unidade da mistura, então $a_{ij}\, x_j$ é a quantidade do componente i em x_j unidades do ingrediente j. Portanto, $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n$ é a quantidade total do componente i em uma unidade da mistura (ver as hipóteses de linearidade na Seção 2.3). Como a quantidade do componente i em uma unidade da mistura deve ser b_i, escrevemos

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Nas m equações anteriores, supõe-se que não há alterações na composição dos ingredientes quando estes se misturam. Por exemplo, no caso da ração, a quantidade total de cálcio na mistura é a soma das quantidades de cálcio presentes nos ingredientes. Essas hipóteses são fundamentais para se escrever um modelo linear e são discutidas na Seção 2.3.

Como x_j, $j = 1, ..., n$, são as quantidades dos ingredientes a serem utilizadas em uma unidade da mistura, então a soma dessas quantidades deve resultar em uma unidade da mistura, ou seja, $x_1 + \ldots + x_n = 1$.

O custo de uma unidade da mistura é a soma dos custos de todos os ingredientes utilizados para sua obtenção, ou seja, $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

Desejamos minimizar esse custo, portanto, o problema da mistura é escrito como:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimizar} & f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
 & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
 & \quad x_1 + \quad x_2 + \ldots \quad + x_n = 1 \\
 & \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, \quad x_n \geq 0.
\end{array}$$

Exemplo 2.1 Uma agroindústria deve produzir um tipo de ração para determinado animal. Essa ração é produzida pela mistura de farinhas de três *ingredientes* básicos: osso, soja e resto de peixe. Cada um desses três ingredientes contém diferentes quantidades de dois *nutrientes* necessários a uma dieta nutricional balanceada: proteína e cálcio. O nutricionista especifica as necessidades mínimas desses nutrientes em 1kg de ração. Cada ingrediente é adquirido no mercado com um certo custo unitário ($/kg). Na Tabela 2.1, os dados do problema são apresentados. Por exemplo, a farinha de osso é constituída de 20% de proteína e 60% de cálcio; a ração deve ser composta de *pelo menos* 30% de proteína e 50% de cálcio; 1kg da farinha de osso custa $0,56

Tabela 2.1
Dados para o problema da ração.

	Ingredientes			
Nutrientes	*Osso*	*Soja*	*Peixe*	*Ração*
Proteína	0,2	0,5	0,4	0,3
Cálcio	0,6	0,4	0,4	0,5
Custos ($/kg)	0,56	0,81	0,46	

(os ingredientes podem ser constituídos por outros elementos, mas que não são importantes para o problema em questão).

Deve-se determinar em que quantidades os ingredientes devem ser misturados de modo a produzir uma ração que satisfaça às restrições nutricionais com o mínimo custo. Defina a variável de decisão x_j como a quantidade (em kg) do ingrediente j que deve ser utilizada em uma unidade (1kg) da ração, j = osso, soja, peixe. Com isso, o custo da mistura é dado por:

$$f(x_{osso}, x_{soja}, x_{peixe}) = 0{,}56\, x_{osso} + 0{,}81\, x_{soja} + 0{,}46\, x_{peixe}$$

e as restrições de composição são dadas por:

$$\begin{aligned} 0{,}2\, x_{osso} + 0{,}5\, x_{soja} + 0{,}4\, x_{peixe} &\geq 0{,}3 \\ 0{,}6\, x_{osso} + 0{,}4\, x_{soja} + 0{,}4\, x_{peixe} &\geq 0{,}5. \end{aligned}$$

Observe a pequena diferença no enunciado, que resulta em restrições de desigualdade (em vez de igualdade), pois foram estabelecidos percentuais mínimos dos componentes na mistura.

Temos também que a soma dos ingredientes resulta em uma unidade da mistura, ou seja,

$$x_{osso} + x_{soja} + x_{peixe} = 1$$

e que esses ingredientes podem ser utilizados ou não, isto é,

$$x_{osso} \geq 0,\ x_{soja} \geq 0,\ x_{peixe} \geq 0.$$

O modelo matemático completo fica, então:

$$\text{Minimizar}\quad f(x_{osso}, x_{soja}, x_{peixe}) = 0{,}56\, x_{osso} + 0{,}81\, x_{soja} + 0{,}46\, x_{peixe}$$

$$\begin{aligned} 0{,}2\, x_{osso} + 0{,}5\, x_{soja} + 0{,}4\, x_{peixe} &\geq 0{,}3 \\ 0{,}6\, x_{osso} + 0{,}4\, x_{soja} + 0{,}4\, x_{peixe} &\geq 0{,}5 \\ x_{osso} + x_{soja} + x_{peixe} &= 1 \\ x_{osso} \geq 0,\ x_{soja} \geq 0,\ x_{peixe} &\geq 0. \end{aligned}$$

A melhor solução, chamada solução ótima deste modelo, é dada por: $x^*_{osso} = 0{,}5$, $x^*_{soja} = 0$ e $x^*_{peixe} = 0{,}5$, o que significa que a ração deve ser constituída de 50% de farinha de osso e 50% de farinha de peixe. O leitor pode determinar o custo dessa solução e procurar por soluções alternativas. Um dos principais objetivos deste capítulo é o de fornecer ferramentas para determinar soluções ótimas de modelos de otimização linear.

O exemplo apresentado, bem como os demais que se seguem, tem como objetivo apenas ilustrar uma situação. Os dados utilizados não correspondem a valores reais, que podem ser obtidos em tabelas nutricionais ou por análise laboratorial. ■

Para uma refeição humana,[2] na qual a palatabilidade é importante, além das necessidades nutricionais, deve-se considerar novas restrições, como a proporcionalidade entre os alimentos. Por

2 Bornstein e Namen (2004) apresentam uma revisão dos modelos de dietas e desenvolvem uma ferramenta computacional para avaliação dos modelos.

exemplo, uma refeição pode incluir uma salada composta dos ingredientes: maionese, salsa, maçã e batata. Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 as quantidades em gramas desses ingredientes na salada (conseqüentemente, na refeição). Tais ingredientes devem aparecer nas restrições nutricionais, contribuindo para o valor nutricional da refeição. Entretanto, a quantidade total da salada deve estar entre 100g e 200g e deve ser composta de 4% a 6% de maionese, 4% a 6% de salsa, 30% a 40% de maçã e 50% a 60% de batata. Note que a quantidade de salada é dada por: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Assim, deve-se adicionar ao modelo da mistura as seguintes restrições:

$$
\begin{aligned}
0{,}04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &\leq x_1 \leq 0{,}06(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\\
0{,}04(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &\leq x_2 \leq 0{,}06(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\\
0{,}30(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &\leq x_3 \leq 0{,}40(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\\
0{,}50(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &\leq x_4 \leq 0{,}60(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\\
100 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 200.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.2 Na implantação de uma barragem de grande consumo de concreto, decidiu-se utilizar como fontes de agregados graúdos: (i) britas graníticas obtidas pelo desmonte da rocha local; (ii) seixos rolados disponíveis nos vales próximos à barragem; e (iii) pedra britada comercial, ilustrados na Figura 2.1. Os custos baseados na exploração, britagem, transporte e preparo para a utilização desses agregados e composições granulométricas estão nas Figuras 2.1 e 2.2.

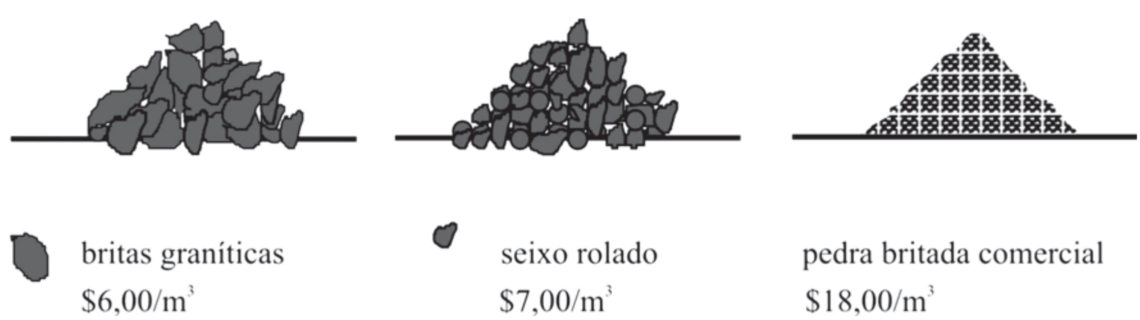

Figura 2.1 Agregados graúdos.

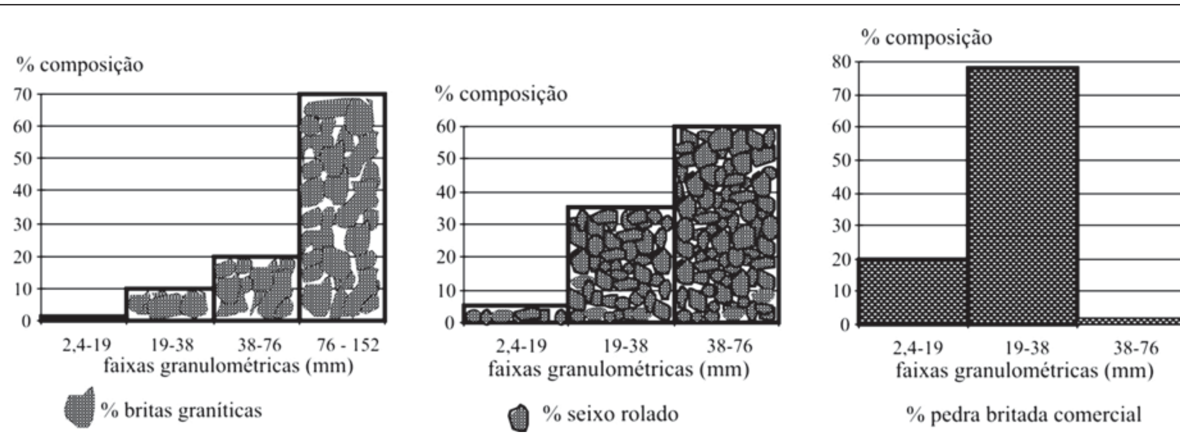

Figura 2.2 Composições granulométricas dos agregados graúdos.