El tiempo total esperado desde el momento de llegada de un auto hasta que se lava es $W_s = 0.3736$ horas (aproximadamente 22 minutos) que es menor que $W_s \cong 30$ minutos para el caso cuando todos los autos son admitidos en la instalación (ejemplo 15.5-1). Esta reducción de aproximadamente 25% se logra a costa de perder un promedio de 6.25% de los autos que llegan por día, debido a la falta de espacios de estacionamiento. ◀

Ejercicio 15.5-3

En el ejemplo 15.5-2, calcule:

(a) La probabilidad de que un carro que llegue reciba servicio inmediatamente.
[*Resp.*: 0.36541.]

(b) El tiempo estimado de espera hasta que un servicio comienza.
[*Resp.*: 12.4 minutos.]

(c) El número esperado de lugares de estacionamiento ocupados.
[*Resp.*: 0.7879 lugar.]

15.5.3 $(M/M/c):(DG/\infty/\infty)$ 6

En este modelo los clientes llegan con una tasa constante λ y un máximo de c clientes pueden ser atendidos simultáneamente. La tasa de servicio por servidor activo es también constante e igual a μ. De la sección 15.4.2 tenemos que $\lambda_{ef} = \lambda$.

El efecto último de usar c servidores paralelos es acelerar la tasa de servicio al permitir servicios simultáneos. Si el número de clientes en el sistema, n, es igual o excede a c, la tasa combinada de salidas de la instalación es $c\mu$. Por otra parte, si n es menor que c, la tasa de servicio es igual a $n\mu$. Así, en términos del modelo generalizado (sección 15.4.1), tenemos

$$\lambda_n = \lambda, \qquad n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n \leq c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

Calculamos así p_n para $n \leq c$ como

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu)\cdots(n\mu)}\, p_0 = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\, p_0$$

y para $n \geq c$, se tiene

$$p_n = \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\cdots(c-1)\mu\underbrace{(c\mu)(c\mu)\cdots(c\mu)}_{(n-c)\text{ veces}}}\, p_0$$

$$= \frac{\lambda^n}{c!\,c^{n-c}\mu^n}\, p_0$$

Si hacemos $\rho = \lambda/\mu$, el valor de p_0 se determina de la expresión $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, que da

$$p_0 = \left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^{n-c}}{c^{n-c}}\right\}^{-1} = \left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^j\right\}^{-1}$$

$$= \left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\left(\frac{1}{1-\rho/c}\right)\right\}^{-1}, \qquad \frac{\rho}{c} < 1$$

Entonces

$$p_n = \begin{cases} \left(\dfrac{\rho^n}{n!}\right)p_0, & 0 \le n \le c \\ \left(\dfrac{\rho^n}{c^{n-c}c!}\right)p_0, & n > c \end{cases} \qquad (M/M/c):(DG/\infty/\infty)$$

$$p_0 = \left\{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!(1-\rho/c)}\right\}^{-1}$$

donde

$$\frac{\rho}{c} < 1 \quad \text{o bien} \quad \frac{\lambda}{\mu c} < 1$$

La expresión para L_q se obtiene como sigue

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)p_n = \sum_{k=0}^{\infty} kp_{k+c} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\rho^{k+c}}{c^k c!} p_0$$

$$= p_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} = p_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c}\left[\frac{1}{(1-\rho/c)^2}\right]$$

$$= \left[\frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2}\right]p_0 = \left[\frac{c\rho}{(c-\rho)^2}\right]p_c$$

Obtenemos así

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} p_0 = \left[\frac{c\rho}{(c-\rho)^2}\right]p_c$$

$$L_s = L_q + \rho$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Las operaciones asociadas con este modelo pueden ser tediosas. Morse [(1958), pág. 103] da dos aproximaciones útiles para p_0 y L_q. Para ρ mucho menor que 1,

$$p_0 \cong 1 - \rho \qquad \text{y} \qquad L_q \cong \frac{\rho^{c+1}}{c^2}$$

y para ρ/c muy próxima a 1.

$$\boxed{p_0 \cong \frac{(c-\rho)(c-1)!}{c^c}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{L_q \cong \frac{\rho}{c-\rho}}$$

Ejemplo 15.5-3

En una pequeña ciudad operan dos compañías de autos de alquiler. Cada una de las compañías posee dos autos de alquiler y se sabe que comparten el mercado casi en partes iguales. Esto lo hace evidente el hecho que las llamadas llegan a la oficina de despacho de cada compañía a la tasa de 10 por hora. El tiempo promedio por dejada es 11.5 minutos. La llegada de llamadas sigue una distribución de Poisson, mientras que los tiempos de dejada son exponenciales.

Las dos compañías fueron compradas hace poco por uno de los hombres de negocios de la ciudad. Después de tomar el mando de las dos compañías su primera acción fue intentar reunir las dos, en una oficina de despacho, con la esperanza de ofrecer un servicio más rápido a sus clientes. Sin embargo, observó que el uso (la razón de las llamadas que llegan por hora a las dejadas) de cada compañía es

$$100\,\frac{\lambda}{c\mu} = \frac{100 \times 10}{2 \times (60/11.5)} = 95.8\%$$

(Obsérvese que cada automóvil representa un servidor.) Como resultado, el costo de reubicar las dos compañías en una oficina puede no ser justificable puesto que cada una de las oficinas de despacho actuales parece estar "demasiado ocupada", como lo indica el elevado factor de uso.

Para analizar el problema del nuevo dueño, necesitamos básicamente hacer una comparación entre las dos situaciones que siguen:

1. Dos líneas de espera independientes, cada una del tipo $(M/M/2):(DG/\infty/\infty)$ con $\lambda = 10$ llamadas por hora y $\mu = 5.217$ dejadas por hora.
2. Una línea de espera del tipo $(M/M/4):(DG/\infty/\infty)$ con $\lambda = 2 \times 10 = 20$ llamadas por hora y $\mu = 5.217$ dejadas por hora.

Obsérvese que en ambos casos, μ representa el número de dejadas que puede hacer un *solo* automóvil por hora.

El factor de uso en la segunda situación es

$$\frac{100\lambda}{c\mu} = \frac{100 \times 20}{4 \times 5.217} = 95.8\%$$

que, desde luego, se mantiene igual a los factores de uso cuando las dos oficinas de despacho se mantienen sin reunir. Este resultado parece confirmar la sospecha

Problem title: Example 15.5-3
[Título del problema: Ejemplo 15.5-3]
Comparative measures: Nbr of scenarios = 2
Medidas comparativas: número de situaciones = 2

Nbr Número	c	Lambda	Mu	L'da_eff Lambda ef	Ls	Ws	Lq	Wq
1	2	10.000	5.217	10.000	23.531	2.353	21.614	2.161
2	4	20.000	5.217	20.000	24.786	1.239	20.952	1.048

Figura 15-7

del propietario de que la reunión no está justificada. Sin embargo, si consideramos otras medidas de desempeño, la imagen será diferente. Específicamente, calcularemos el tiempo de espera estimado de un cliente hasta que se le envía un taxi. La figura 15-7 proporciona las salidas de TORA para las dos situaciones.

Los resultados muestran que $W_q = 2.161$ horas para el caso de dos líneas de espera y 1.048 horas cuando están unidas. Esto significa que el tiempo estimado de espera hasta que llega un taxi se reduce aproximadamente en un 50%. La conclusión es que la **unión de servicios** conducirá normalmente a una operación más efectiva, en cuanto a ofrecer un servicio más rápido a los clientes, aun si la utilización de ambos servicios por separado es alta (o sea, de 95.8% en este ejemplo). (Desde luego, el dueño tiene más por qué preocuparse ya que, aun después de reunir las dos compañías, esperar más de una hora por un servicio de 10 minutos es demasiado. Evidentemente, necesita incrementar el número de taxis.) ◀

Ejercicio 15.5-4

En el ejemplo 15.5-3, utilice TORA para determinar:

(a) La probabilidad que *todos* los autos de las dos compañías reciben llamadas. [*Resp.*: 0.938.]

(b) El porcentaje de tiempo que *todos* los autos de las compañías reunidas reciben llamadas. [*Resp.* 0.9093. Es interesante observar que el porcentaje de ocupación total es menor cuando las dos compañías están reunidas en una sola, aunque el tiempo de espera W_q se reduce a la mitad.]

(c) El número esperado de autos desocupados en los dos casos. [*Resp.*: 0.083 y 0.166.]

15.5.4 $(M/M/c):(DG/N/\infty)$, $c \leq N$

Esta situación de espera difiere de $(M/M/c):(DG/\infty/\infty)$ en que se impone un límite N sobre la capacidad del sistema (es decir, tamaño máximo de la línea de espera $= N - c$). En términos del modelo generalizado (sección 15.4.1) λ_n y μ_n para el modelo actual están dadas por

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq n < N \\ 0, & n \geq N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq c \\ c\mu, & c \leq n \leq N \end{cases}$$

Sustituyendo por λ_n y μ_n en la expresión general de p_n y observando que $\rho = \lambda/\mu$, se obtiene

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!} p_0, & 0 \le n \le c \\ \dfrac{\rho^n}{c!c^{n-c}} p_0, & c \le n \le N \end{cases} \qquad (M/M/c):(DG/N/\infty)$$

donde

$$p_0 = \begin{cases} \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c(1-(\rho/c)^{N-c+1})}{c!(1-\rho/c)}\right]^{-1}, & \rho/c \ne 1 \\ \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}(N-c+1)\right]^{-1}, & \rho/c = 1 \end{cases}$$

Nótese que la única diferencia entre p_n en este modelo y $(M/M/c):(DG/\infty/\infty)$ ocurre en la expresión de p_0. Obsérvese también que el *factor de uso* ρ/c no necesita ser menor que 1.

A continuación, calculamos L_q:

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{N} (n-c)p_n = \sum_{j=1}^{N-c} jp_{j+c} = p_0 \frac{\rho^c}{c!} \frac{\rho}{c} \sum_{j=1}^{N-c} j\left(\frac{\rho}{c}\right)^{j-1}$$

$$= p_0 \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \left\{1 - \left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\frac{\rho}{c}\right)\right\}$$

Por tanto, tenemos

$$L_q = \begin{cases} p_0 \dfrac{\rho^{c+1}}{(c-1)!(c-\rho)^2} \left\{1 - \left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c} - (N-c)\left(\dfrac{\rho}{c}\right)^{N-c}\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)\right\}, & \rho/c \ne 1 \\ p_0 \dfrac{\rho^c(N-c)(N-c+1)}{2c!}, & \rho/c = 1 \end{cases}$$

$$L_s = L_q + (c - \bar{c}) = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu}$$

donde

$$\bar{c} = \text{número estimado de servidores inactivos} = \sum_{n=0}^{c} (c-n)p_n$$

$$\lambda_{ef} = \lambda(1 - p_N) = \mu(c - \bar{c})$$

Obsérvese la interpretación de λ_{ef} en este caso. Como $(c - \bar{c})$ representa el número esperado de canales ocupados, $\mu(c - \bar{c})$ representa el número real de clientes atendidos por tiempo unitario y, por lo tanto, la tasa efectiva de llegadas.

Ejemplo 15.5-4

En el problema de la reunión de compañías de autos de alquiler unificada (ejemplo 15.5-3), aunque el dueño comprende que el tiempo de espera calculado es excesivo, no puede obtener fondos para comprar otras unidades. Para resolver el problema de la espera excesiva, pese a ello, instruyó a la oficina de despacho a dar una disculpa a los posibles clientes por la falta de disposición de automóviles una vez que la lista de espera ascienda a 16 clientes.

Para estudiar el efecto de la decisión del dueño sobre el tiempo de espera, comprendemos que tener una lista de espera de 16 clientes es equivalente a tener 16 + 4 = 20 clientes en el sistema, ya que la compañía tiene 4 automóviles (servidores).

Problem title: Example 15.5-4
[Título del problema: Ejemplo 15.5-4]
Scenario 1 — (M/M/4):(GD/20/*)
[Situación 1 — (M/M/1):(DG/20/*)]

Lambda =	20.00000	Lambda eff = Lambda ef =	19.31347
Mu =	5.21700	Rho = Ro =	3.83362
Ls =	9.55634	Lq =	5.85431
Ws =	0.49480	Wq =	0.30312

Values of p(n) for n=0 to 20, else p(n) < .00001
[Valores de p(n) para n = 0 hasta 20, si no p(n) < 0.00001]

0 0.00753	1 0.02886	2 0.05531	3 0.07068	4 0.06774
5 0.06492	6 0.06222	7 0.05963	8 0.05715	9 0.05478
10 0.05250	11 0.05031	12 0.04822	13 0.04622	14 0.04429
15 0.04245	16 0.04068	17 0.03899	18 0.03737	19 0.03582
20 0.03433				

Cumulative values of p(n) for n=0 to 20
[Valores acumulados de p(n) para n = 0 hasta 20]

0 0.00753	1 0.03638	2 0.09169	3 0.16237	4 0.23011
5 0.29503	6 0.35726	7 0.41689	8 0.47404	9 0.52882
10 0.58132	11 0.63163	12 0.67985	13 0.72607	14 0.77036
15 0.81281	16 0.85349	17 0.89249	18 0.92986	19 0.96567
20 1.00000				

Figura 15-8

Por lo tanto, el modelo de espera se reduce a $(M/M/4):(DG/20/\infty)$, donde λ = 20 por hora y μ = 5.217 por hora. En la figura 15-8 se da la salida de TORA.

El tiempo de espera estimado W_q antes de fijar un límite sobre la capacidad del sistema era de 1.05 horas, que es tres veces mayor que el nuevo tiempo de espera calculado de 0.303 (≅ 18 minutos). Nótese que esta notable reducción se logra a expensas de perder cerca de 3.4% de los clientes potenciales (p_{20} = 0.03433). Desde luego, el resultado no indica qué efecto tendrá, a la larga, la posible pérdida de la buena voluntad de los clientes en la operación de la compañía. ◄

Ejercicio 15.5-5

En el ejemplo 15.5-4, obtenga:

(a) El número esperado de taxis inactivos.
[*Resp.* $\bar{c}$ = 0.298.]

(b) La probabilidad de que a un cliente que llame se le dirá que no hay autos disponibles.
[*Resp.* p_{20} = 0.03433.]

15.5.5 $(M/M/\infty):(DG/\infty/\infty)$—MODELO DE AUTOSERVICIO

En este modelo, el número de servidores es ilimitado porque el cliente mismo es también el servidor. Este es normalmente el caso en los establecimientos de autoservicio. Un ejemplo común es tomar la parte escrita de una prueba para obtener la licencia de conductor. Sin embargo, debemos tener cuidado de que situaciones como las gasolineras de autoservicio o los bancos con servicio las 24 horas no se clasifiquen en esta categoría de modelo. Esta conclusión se obtiene porque en estos casos los servidores son en realidad la bomba de gasolina y la computadora del banco, aunque el cliente es el que opera el equipo.

Una vez más en términos del modelo generalizado se tiene

$$\lambda_n = \lambda, \qquad \text{para toda } n \geq 0$$
$$\mu_n = n\mu, \qquad \text{para toda } n \geq 0$$

La sustitución directa en la expresión de p_n produce

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\,p_0 = \frac{\rho^n}{n!}\,p_0$$

Ya que $\Sigma_{n=0}^{\infty} p_n$ = 1, se deduce que

$$p_0 = \frac{1}{1 + \rho + \dfrac{\rho^2}{2!} + \cdots} = \frac{1}{e^\rho} = e^{-\rho}$$

Como resultado,

$$\boxed{p_n = \frac{e^{-\rho}\rho^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (M/M/\infty):(DG/\infty/\infty)}$$