Komputerowe wspomaganie decyzji – jak wśród wielu możliwości wybrać tę najlepszą?

MGR INŻ. MARIUSZ DRABECKI (MARIUSZ.DRABECKI.DOKT@PW.EDU.PL)

INSTYTUT AUTOMATYKI I INFORMATYKI STOSOWANEJ, POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Literatura

Treść wykładu oraz przykłady zostały zaczerpnięte z:

- Ogryczak W. *Wspomaganie Decyzji* (skrypt), Politechnika Warszawska, Ośrodek Kształcenia na Odległość „OKNO”, Warszawa 2006
- Toczyłowski E., *Podstawy Badań Operacyjnych. Materiały Wykładowe.*, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych, Politechnika Warszawska
- Boyd S., Vanderberghe L., *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009
- Pulleyblank W., *Winter School on Optimization and Operations Research. Study Materials*, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Zinal, 2019

Zajęcia 2: Zadanie optymalizacji

Zadanie optymalizacji

- Rozwiązanie zadania optymalizacji polega na podjęciu najlepszej decyzji ze zbioru możliwych wyborów
- Istotne by określić znaczenie słowa „najlepsza”
- **Rozwiązanie optymalne** zadania – rozwiązanie, które znajduje się w zbiorze dopuszczalnych wyborów i maksymalizuje/minimalizuje zadany wskaźnik jakości

Postać standardowa zadania optymalizacji

$$\min f_0(\boldsymbol{x})$$

subject to:

$$f_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$$

$$h_i(\boldsymbol{x}) = 0$$

x – wektor zmiennych decyzyjnych i stanu

Funkcja celu – wskaźnik jakości

Ograniczenia nierównościowe

Ograniczenia równościowe

Postać uproszczona zadania

$$\min f_0(\boldsymbol{x})$$

subject to:

$$\boldsymbol{x} \in Q$$

Q – zbiór dopuszczalny zadania

- Zbiór dopuszczalny wyznaczony jest przez ograniczenia
- Na zbiorze dopuszczalnym poszukujemy rozwiązania optymalnego
- Często jest ono oznaczane jako $\boldsymbol{x}^*$

Równoważność zadań maksymalizacji i minimalizacji

$$\min f_0(\boldsymbol{x})$$

subject to:

$$\boldsymbol{x} \in Q$$

$\Leftrightarrow$

$$\max -f_0(\boldsymbol{x})$$

subject to:

$$\boldsymbol{x} \in Q$$

- Rozwiązanie optymalne zadania minimalizacji jest równe rozwiązaniu optymalnemu zadania maksymalizacji funkcji domnożonej przez -1

Jak rozwiązujemy zadanie optymalizacji?

1. Budujemy model matematyczny w jednym ze znanych języków modelowania: GAMS, AMPL, CVX, etc.
2. Model przesyłamy do specjalistycznego oprogramowania (zbioru algorytmów) – solwera
3. Solwer zwraca rozwiązanie optymalne. W zależności od tego jaki solwer wykorzystamy, to rozwiązanie będzie otrzymane szybciej lub wolniej. Najbardziej znane solwery komercyjne to: CPLEX, GUROBI, FICO, a niekomercyjne GLPK, SeDuMi

UWAGA:
SOLWER MUSI BYĆ ODPOWIEDNI DO DANEJ KLASY ZADANIA!

Programowanie Liniowe (LP – Linear Programming)

Zadanie programowania liniowego

Polega na znalezieniu optymalnych wartości zmiennych decyzyjnych $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ maksymalizujących funkcję celu

$$\max_{x} x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

przy spełnieniu ograniczeń równościowych

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

gdzie c_j, a_{ij}, b_i znane współczynniki oraz $m < n$

- Zadanie o liniowej funkcji celu i liniowych ograniczeniach
- Ciągłe, rzeczywiste zmienne
- Rozwiązywane algorytmami typu simplex i jego rozwinięć

Przykład

Firma wytwarza dwa rodzaje farb – do malowania wnętrz (W) i na zewnątrz (Z).

Do produkcji tych farb niezbędne są dwa podstawowe składniki A i B. Maksymalne dzienne zapasy tych składników wynoszą odpowiednio 6 i 8 kg, natomiast ich zużycie na 1 tonę farby jest następujące:

Składniki	Farba *W*	Farba *Z*
A	2 kg	1 kg
B	1 kg	2 kg

Badania rynkowe pokazały, że dzienny zbyt na farbę W nigdy nie przekracza 2 ton i nie jest wyższy od zbytu na farbę Z o więcej niż 1 tonę. Zysk ze sprzedaży 1 tony farby W wynosi 20 tys. zł, a farby Z 30 tys. zł.

Należy określić dzienne wielkości produkcji farb W i Z przynoszące ***największy łączny zysk****.*

Model Programowania Liniowego

- zmienne decyzyjne:
  x_W – dzienna wielkość produkcji farby *W* (w tonach)
  x_Z – dzienna wielkość produkcji farby *Z* (w tonach)

- funkcja celu

$$\max x_0 = 20x_W + 30x_Z \qquad (0)$$

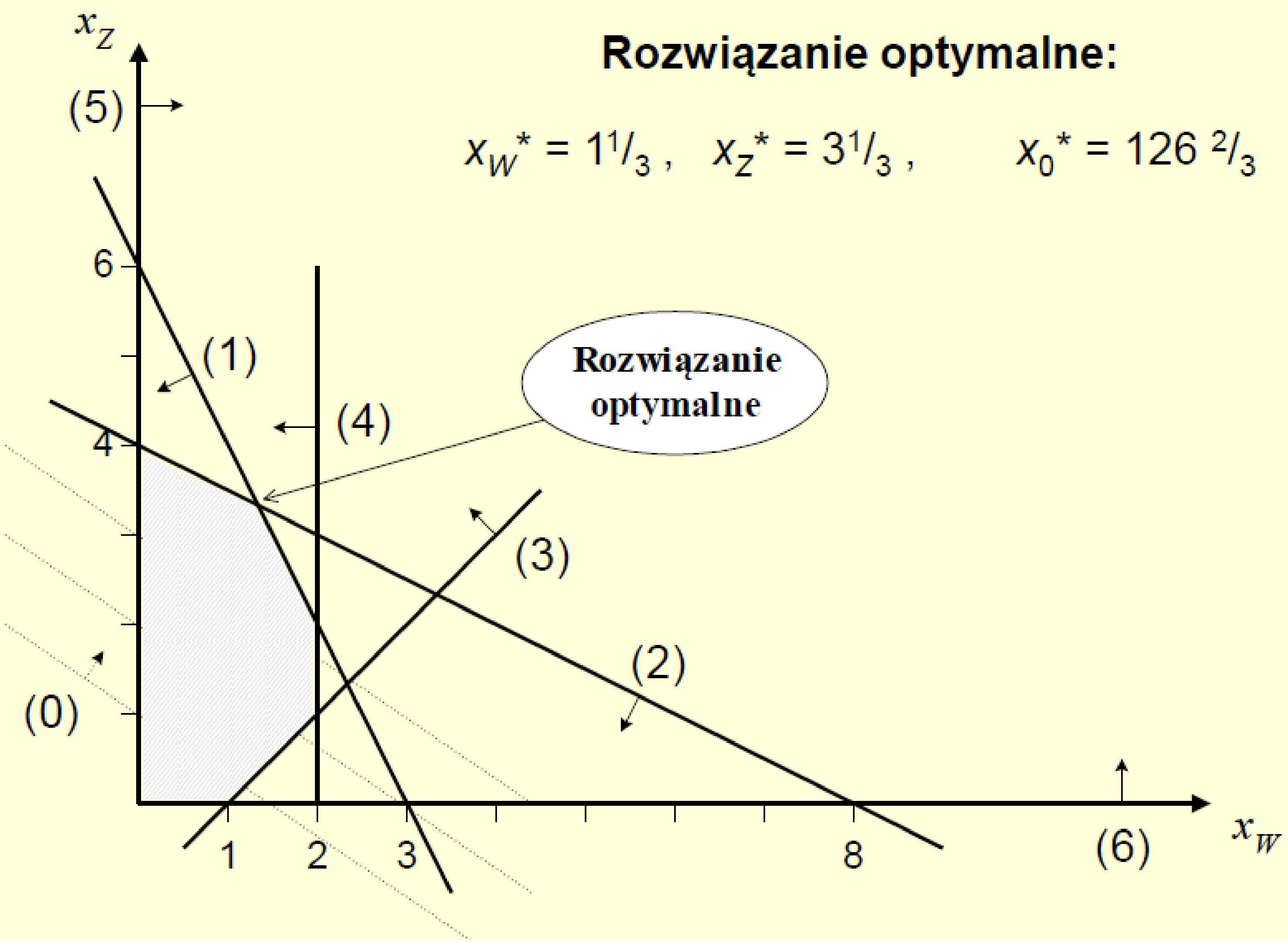
- Ograniczenia nierównościowe

$$2x_W + x_Z \leq 6 \qquad (1)$$
$$x_W + 2x_Z \leq 8 \qquad (2)$$
$$x_W - x_Z \leq 1 \qquad (3)$$
$$x_W \leq 2 \qquad (4)$$
$$x_W \geq 0 \qquad (5)$$
$$x_Z \geq 0 \qquad (6)$$

Interpretacja graficzna zadania PL

Rozwiązanie optymalne:

$x_W^* = 1^1/_3$, $x_Z^* = 3^1/_3$, $x_0^* = 126\ ^2/_3$



Programowanie całkowitoliczbowe – Mixed Integer (Linear) Programming

- Dotyczy problemów decyzyjnych, w których pewne zmienne decyzyjne mogą przyjmować tylko dyskretne wartości np.:
  - całkowitoliczbowe
  - binarne (0 lub 1)

- W zależności od rodzaju występujących zmiennych wyróżniamy zadania programowania
  - całkowitoliczbowego
  - binarnego
  - mieszanego – występują zmienne ciągłe i dyskretne

Sytuacje, w których stosuje się zmienne dyskretne

- natura poszukiwanych rozwiązań jest dyskretna
  - wyznaczanie liczby niepodzielnych obiektów np. procesorów, zadań, pracowników itp.
  - określanie permutacji lub kombinacji pewnego zbioru obiektów (problemy kombinatoryczne)
- wybór decyzji spośród wielu wariantów
- modelowanie funkcji kawałkami liniowych, np. uwzględnianie kosztów stałych

Problemy z rozwiązywaniem - przykład

$$\max z = 7x_1 + 8x_2$$

przy ograniczeniach

$$3x_1 + 4x_2 \leq 4$$

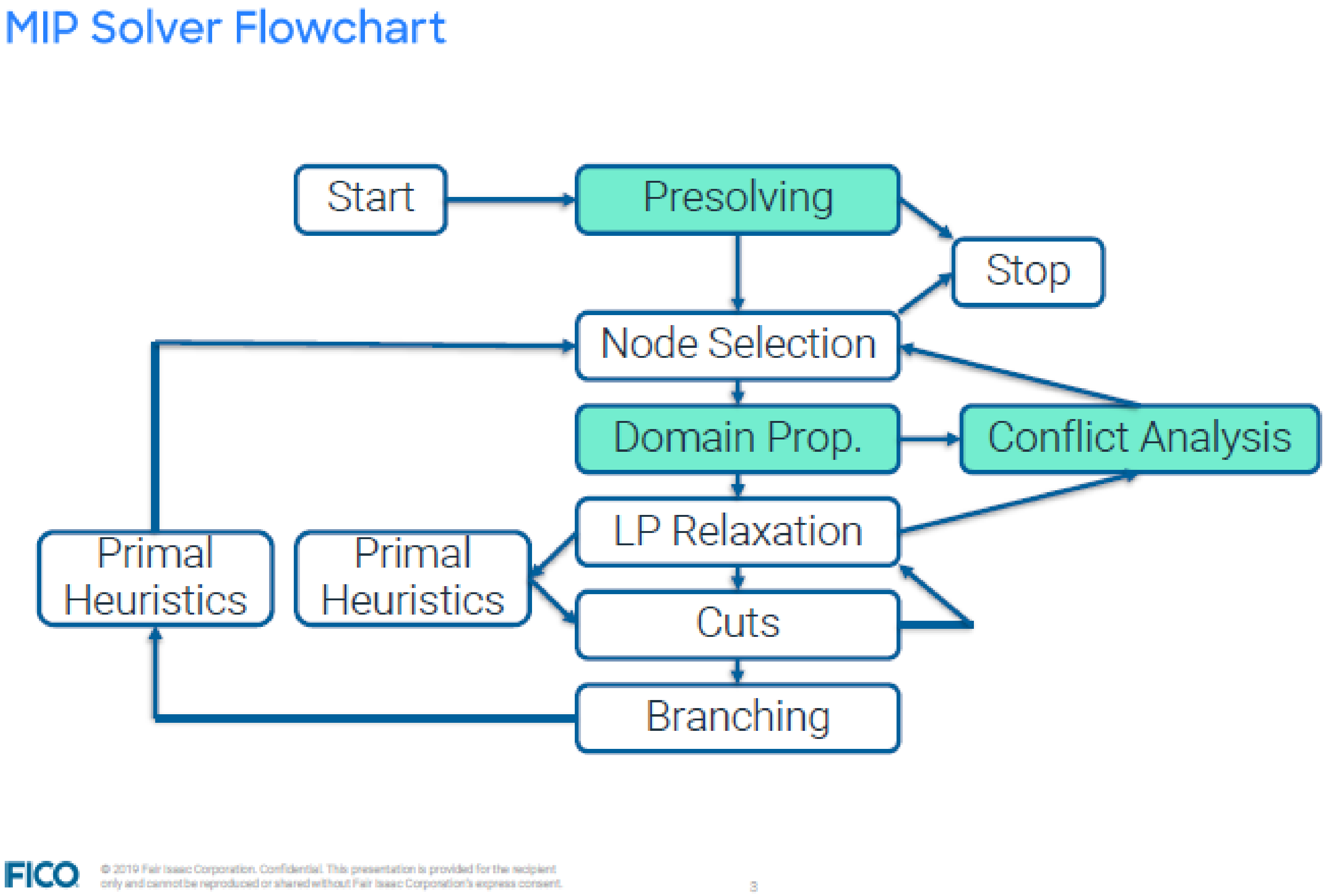
$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

Rozwiązanie niecałkowitoliczbowe: $x_1 = 4/3$, $x_2 = 0$, $z = 28/3$

Przy dodatkowym warunku: x_1, x_2 - całkowitoliczbowe

Rozwiązanie całkowitoliczbowe: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $z = 8$

Struktura wewnętrzna komercyjnego solwera MIP (Na przykładzie FICO)



Timo Berthold, Presolving. Co@Work 2020 TU Berlin

MI(L)P - podsumowanie

- Problemy, w których występują zmienne typu całkowitoliczbowego są problemami trudnymi do rozwiązania ze względu na ich kombiniatoryczny charakter
- Sposób rozwiązywania sprowadza się do „mądrego" sprawdzenia możliwych rozwiązań – już nie tylko chodzimy po wierzchołkach zbioru dopuszczalnego
- Nowe solwery komercyjne radzą sobie jednak dobrze z rozwiązywaniem tego typu problemów poprzez łączenie metod heurystycznych z dokładnymi i przez zrównoleglanie obliczeń. Jednakże *know-how* firm, które je budują nie jest powszechnie znane
- Generalnie, zmienne dyskretne dają wiele możliwości modelowania, jednak im jest ich mniej w problemie, tym lepiej

Modelowanie zależności

Warunek wyboru

- Warunkiem wyboru nazywamy jednej lub kilku możliwości z pewnej ograniczonej puli (zbioru) możliwości Q. Warunek wyboru możliwości wyraża zmienna x taka że $x \in \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$
- Modelujemy ten wybór wykorzystując zmienne binarne $u_i, \in \{0,1\}$ $dla\ i = 1, 2, \ldots, k$

$$x = \sum_{i=1}^{k} q_i u_i, \quad \sum_{i=1}^{k} u_i = 1$$

Minimalizacja odchyłek / programowanie celowe

- Niech Y_i oznacza pożądaną wartość (cel) pewnej funkcji liniowej $\sum_j X_{ji}\, b_i$, a $\epsilon_i = Y_i - \sum_j X_{ji}\, b_i$ - odchyłkę od tego celu
- Niech również ϵ_i^+ i ϵ_i^- oznaczają odpowiednio część dodatnią i ujemną odchyłki oraz $\epsilon_i = \epsilon_i^+ + \epsilon_i^-$. W optymalności $\epsilon_i^* = \epsilon_i^{+*} + \epsilon_i^{-*} = 0$ zatem zadanie programowania celowego (minimalizacji odchyłek) można zapisać jako

$$Min \sum_i (\epsilon_i^+ + \epsilon_i^-)$$

$$s.t.\ \epsilon_i^+ - \epsilon_i^- + \sum_j X_{ji} b_i = Y_i \text{ for all i}$$

$$\epsilon_i = \epsilon_i^+ - \epsilon_i^- \text{ for all i}$$

$$\epsilon_i, b_i \in \mathbb{R}, \epsilon_i^+, \epsilon_i^- \geq 0$$

Flaga dodatniości

- Flagą dodatniości będziemy nazywać binarną zmienną $u \in \{0,1\}$, która przyjmuje wartość 1, gdy $x \in [0, M]$ jest większe od zera, czyli $x > 0 \Rightarrow u = 1$,
- M – duża stała
- Modelujemy to jako:

$$0 \leq x \leq Mu$$

Warunki logiczne

- Proste i złożone warunki logiczne mogą być także modelowane poprzez zmienne binarne.
- Niech $x_1, x_2 \in \{0,1\}$ oznaczają pewne zmienne binarne, wtedy prawdziwe są zależności:

warunek logiczny	warunek binarny
$X_1 \vee X_2$	$x_1 + x_2 \geq 1$
$X_1 \wedge X_2$	$x_1 = 1,\ x_2 = 1$
$X_1 \otimes X_2$	$x_1 + x_2 = 1$
$X_1 \Rightarrow X_2$	$x_1 - x_2 \leq 0$
$X_1 \Leftrightarrow X_2$	$x_1 - x_2 = 0$