暑假班中期考试

数学试卷-平面向量部分

本试卷共 6 页，150 分. 考试时长 120 分钟. 测试分三个部分：填空、证明和计算. 计算题仅给出最后结果不给分.

一、　填空题：8 小题，共 45 分.

1. (5 分) 设 P 是线段 P_1P_2 上的一点，点 P_1、P_2 的坐标分别是 (x_1, y_1)、(x_2, y_2).

   (I) 当 P 是线段 P_1P_2 的一个三等分点时，点 P 的坐标是____________；

   (II) 当 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda\overrightarrow{P_1P_2}(\lambda \neq -1)$ 时，点 P 的坐标是________________.

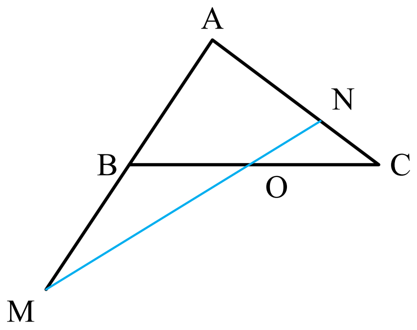
2. (5 分) 已知 $\boldsymbol{a} = (4,\ 2)$，与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量的坐标为____________.

3. (5 分) 已知 $A(2, 3)$、$B(4, -3)$，点 P 在线段 AB 的延长线上，且 $|\overrightarrow{AP}| = \dfrac{3}{2}|\overrightarrow{PB}|$，点 P 的坐标为____________.

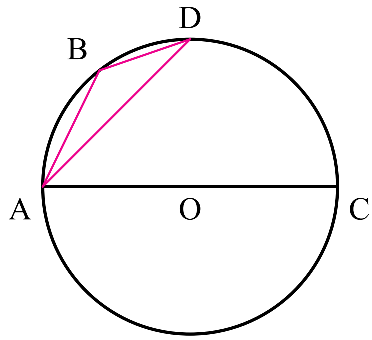
4. (5 分) 已知向量 $\boldsymbol{a} = (1,\ 0)$、$\boldsymbol{b} = (1,\ 1)$、$\boldsymbol{c} = (-1,\ 0)$，$\boldsymbol{c} = \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b}$, 则 $\lambda =$ ____________，$\mu =$ ____________.

5. (5 分) 若 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 60° 的两个单位向量，则 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$，　$\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为____________.

6. (5 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 O 是 BC 的中点，过点 O 的直线分别交直线 AB、AC 于不同的两点 M、N. 设 $AB = m\,AM$，$AC = n\,AN$，则 $m + n =$ ____________.



(第 5 题)



(第 8 题)

7. (10 分) O 是 $\triangle ABC$ 内一点，定理 $S_{\triangle BOC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{\triangle AOC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{\triangle AOB} \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ 成立. 记 $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} : S_{\triangle AOB} = x : y : z$, 三边长为 a, b, c, 三个角为 A, B, C.

   (I) 若 O 为 $\triangle ABC$ 重心，则 $x : y : z =$ ____________.

   (II) 若 O 为 $\triangle ABC$ 内心，则 $x : y : z =$ ____________.

   (III) 若 O 为 $\triangle ABC$ 外心，则 $x : y : z =$ ____________.

   (IV) 若 O 为 $\triangle ABC$ 垂心，则 $x : y : z =$ ____________.

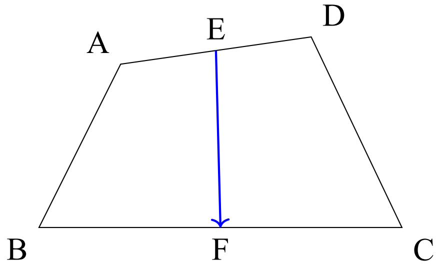
8. (5 分) 如图，B、D 是以 AC 为直径的圆上的两点，其中 $AB = \sqrt{t+1}$，　$AD = \sqrt{t+2}$，则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} =$ ____________.

二、　证明题：8 小题，共 60 分.

9. (5 分) 根据平面向量运算的定义，证明：对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，有

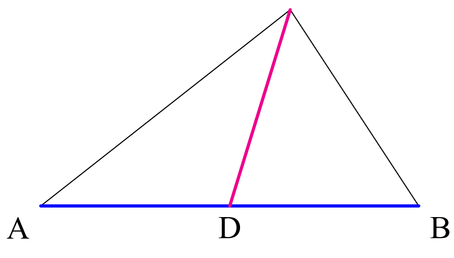
$$\begin{cases} (1) \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}, \\ (2) \quad (\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}), \\ (3) \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}. \end{cases}$$

10. (5 分) 如图，在任意四边形 $ABCD$ 中，E,F 分别为 $AD,\ BC$ 的中点，求证：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\,\overrightarrow{EF}$.



(第 10 题)

11. (5 分) 如图，CD 是 $\triangle ABC$ 的中线；且 $CD=\dfrac{1}{2}AB$. 用向量方法证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形.



(第 11 题)

12. (5 分) 用向量法证明：直径所对的圆周角是直角.

13. (5 分) 用向量方法证明两角差的余弦公式

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

14. (5 分) 用向量方法证明：对于任意的 $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$，恒有不等式

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

15. (20 分) 根据要求分别证明以下定理或推论.

(I) 用向量法证明余弦定理: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

(II) 用向量法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

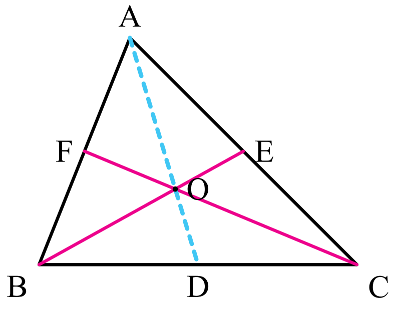
(III) 根据正弦定理证明：

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

(IV) 证明：设三角形的外接圆半径为 R，则

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

16. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中，BE 和 CF 分别是两条中线，交于点 O；D 为边 BC 的中点. 证明：A、O、D 三点共线，且 $AO = 2OD$.



(第 16 题)

三、 计算题：4 小题，共 50 分.

17. (10 分) 已知点 C 为扇形 AOB 的弧 AB 上任意一点，且 $\angle AOB=\dfrac{\pi}{3}$，若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}\quad(\lambda,\mu\in R)$，求 $\lambda+\mu$ 的取值范围.

18. (12 分) 已知 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$ 均为单位向量, 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\dfrac{1}{2}$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}\geq 0$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\geq 0$, $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}\quad(x,y\in R)$，求 $3x+y$ 的最小值.

19. (10 分) 假设二维空间中有两个点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$，O 为坐标原点，余弦相似度为向量 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 夹角的余弦值，记作 $\cos(A, B)$，余弦距离为 $1-\cos(A, B)$. 已知 $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$，$R(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$，若 P, Q 的余弦距离为 $\dfrac{1}{3}$，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=\dfrac{1}{7}$，求 Q, R 的余弦距离.

20. (13 分) 设点 P 在单位圆的内接正八边形 $A_1A_2\cdots A_8$ 的边 A_1A_2 上，求 $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2+\cdots+\overrightarrow{PA_8}^2$ 的取值范围.