暑假班中期考试
数学试卷-平面向量部分

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。测试分三个部分：填空、计算和证明。计算题仅给出最后结果不给分。

一、 填空题：本题共。。。

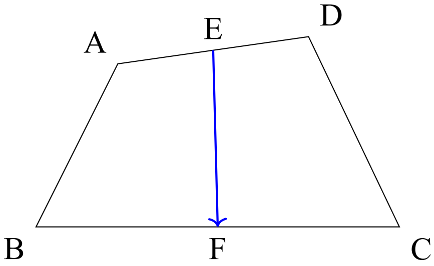
1. 设 P 是线段 P_1P_2 上的一点，点 P_1、P_2 的坐标分别是 (x_1, y_1)、(x_2, y_2)。
   (I) 当 P 是线段 P_1P_2 的中点时，P 的坐标是____________；
   (II) 当 P 是线段 P_1P_2 的一个三等分点时，点 P 的坐标是____________；
   (III) 当 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda\overrightarrow{P_1P_2}(\lambda \neq -1)$ 时，点 P 的坐标是________________。
2. 已知 $\boldsymbol{a} = (4,\,2)$，与 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量的坐标为____________。
3. 已知 $A(2,3)$、$B(4,-3)$，点 P 在线段 AB 的延长线上，且 $|\overrightarrow{AP}| = \dfrac{3}{2}|\overrightarrow{PB}|$，点 P 的坐标为____________。
4. 已知向量 $\boldsymbol{a} = (1,\,0)$、$\boldsymbol{b} = (1,\,1)$、$\boldsymbol{c} = (-1,\,0)$，$\boldsymbol{c} = \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b}$, 则 $\lambda =$____________，$\mu =$____________.
5. 若 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 是夹角为 60° 的两个单位向量, 则 $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为____。

二、 证明题：本题共 10 小题，70 分。

6. (10 分) 根据平面向量运算的定义，证明：对于向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 和实数 λ，有

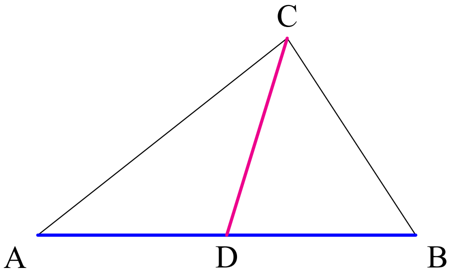
$$\begin{cases} (1) \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}, \\ (2) \quad (\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}), \\ (3) \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}. \end{cases}$$

7. 如图，在任意四边形 $ABCD$ 中，E, F 分别为 AD, BC 的中点，求证：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\,\overrightarrow{EF}$.



(第 15 题)

8. 如图，CD 是 $\triangle ABC$ 的中线；且 $CD=\dfrac{1}{2}AB$。用向量方法证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形。



(图 6.3-5)

9. 用向量法证明：直径所对的圆周角是直角.

10. 用向量方法证明两角差的余弦公式

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

11. 用向量方法证明：对于任意的 $a, b, c, d \in \boldsymbol{R}$，恒有不等式

$$(ac+bd)^2 \leq \left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right).$$

12. (Ⅰ) 用向量法证明余弦定理: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

(II) 用向量法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

(III) 根据正弦定理证明：

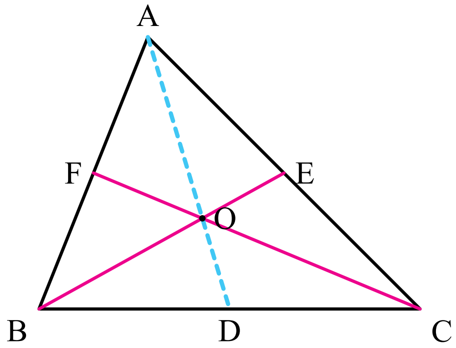
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

(IV) 证明：设三角形的外接圆半径为 R，则

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

(V) 在 $\triangle ABC$ 中，求证： $c\big(a\cos B - b\cos A\big) = a^2 - b^2.$

13. 在 $\triangle ABC$ 中，BE 和 CF 分别是两条中线，交于点 O；D 为边 BC 的中点。证明：A、O、D 三点共线，且 $AO = 2OD$.



(第 ** 题)

三、 计算题：本题共 80 分。

14. 选择题

15. 选择题