

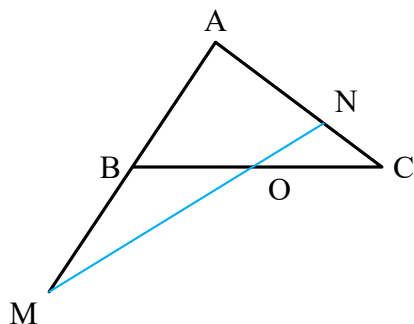
暑假班中期考试

数学试卷-平面向量部分

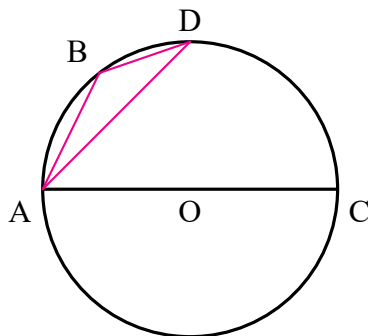
本试卷共 6 页, 150 分. 考试时长 120 分钟. 测试分三个部分: 填空、证明和计算. 计算题仅给出最后结果不给分.

一、 填空题: 8 小题, 共 45 分.

- (5 分) 设 P 是线段 P_1P_2 上的一点, 点 P_1 、 P_2 的坐标分别是 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) .
(I) 当 P 是线段 P_1P_2 的一个三等分点时, 点 P 的坐标是_____;
(II) 当 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{P_1P_2} (\lambda \neq -1)$ 时, 点 P 的坐标是_____.
- (5 分) 已知 $\mathbf{a} = (4, 2)$, 与 \mathbf{a} 垂直的单位向量的坐标为_____.
- (5 分) 已知 $A(2, 3)$ 、 $B(4, -3)$, 点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $|\overrightarrow{AP}| = \frac{3}{2} |\overrightarrow{PB}|$, 点 P 的坐标为_____.
- (5 分) 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 0)$ 、 $\mathbf{b} = (1, 1)$ 、 $\mathbf{c} = (-1, 0)$, $\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$, 则 $\lambda =$ _____, $\mu =$ _____.
- (5 分) 若 \mathbf{e}_1 、 \mathbf{e}_2 是夹角为 60° 的两个单位向量, 则 $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ 的夹角为_____.
- (5 分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 O 是 BC 的中点, 过点 O 的直线分别交直线 AB 、 AC 于不同的两点 M 、 N . 设 $AB = m AM$, $AC = n AN$, 则 $m + n =$ _____.



(第 ** 题)



(第 ** 题)

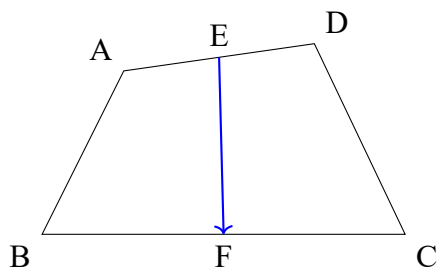
- (10 分) O 是 $\triangle ABC$ 内一点, 定理 $S_{\triangle BOC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{\triangle AOC} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{\triangle AOB} \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ 成立. 记 $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOC} : S_{\triangle AOB} = x : y : z$, 三边长为 a, b, c , 三个角为 A, B, C .
(I) 若 O 为 $\triangle ABC$ 重心, 则 $x : y : z =$ _____.
(II) 若 O 为 $\triangle ABC$ 内心, 则 $x : y : z =$ _____.
(III) 若 O 为 $\triangle ABC$ 外心, 则 $x : y : z =$ _____.
(IV) 若 O 为 $\triangle ABC$ 垂心, 则 $x : y : z =$ _____.
(5 分) 如图, B 、 D 是以 AC 为直径的圆上的两点, 其中 $AB = \sqrt{t+1}$, $AD = \sqrt{t+2}$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} =$ _____.

二、 证明题：8 小题，共 60 分.

9. (5 分) 根据平面向量运算的定义，证明：对于向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 和实数 λ ，有

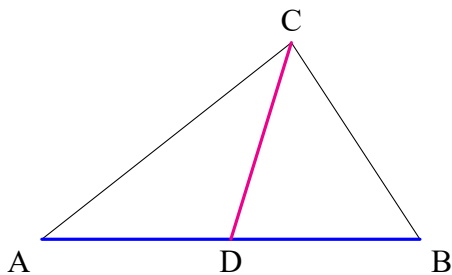
$$\begin{cases} (1) & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \\ (2) & (\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}), \\ (3) & (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \end{cases}$$

10. (5 分) 如图，在任意四边形 $ABCD$ 中， E, F 分别为 AD, BC 的中点，求证： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{EF}$.



(第 15 题)

11. (5 分) 如图， CD 是 $\triangle ABC$ 的中线；且 $CD = \frac{1}{2}AB$. 用向量方法证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形.



(图 6.3-5)

12. (5 分) 用向量法证明：直径所对的圆周角是直角.

13. (5 分) 用向量方法证明两角差的余弦公式

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

14. (5 分) 用向量方法证明：对于任意的 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ，恒有不等式

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

15. (20 分) 根据要求分别证明以下定理或推论.

(I) 用向量法证明余弦定理: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

(II) 用向量法证明正弦定理:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

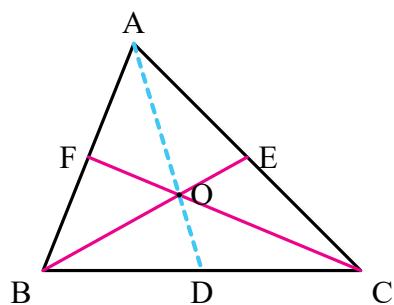
(III) 根据正弦定理证明:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

(IV) 证明: 设三角形的外接圆半径为 R , 则

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

16. (10 分) 在 $\triangle ABC$ 中, BE 和 CF 分别是两条中线, 交于点 O ; D 为边 BC 的中点. 证明: A 、 O 、 D 三点共线, 且 $AO = 2OD$.



(第 ** 题)

三、 计算题：4 小题，共 50 分.

17. (10 分) 已知点 C 为扇形 AOB 的弧 AB 上任意一点，且 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ ，若 $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$ ($\lambda, \mu \in R$)，求 $\lambda + \mu$ 的取值范围.

18. (12 分) 已知 \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{OB} 、 \overrightarrow{OC} 均为单位向量，满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}$ ， $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \geq 0$ ， $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \geq 0$ ， $\overrightarrow{OC} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB}$ ($x, y \in R$)，求 $3x + y$ 的最小值.

19. (10 分) 假设二维空间中有两个点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, O 为坐标原点, 余弦相似度为向量 \overrightarrow{OA} 、 \overrightarrow{OB} 夹角的余弦值, 记作 $\cos(A, B)$, 余弦距离为 $1 - \cos(A, B)$. 已知 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $Q(\cos \beta, \sin \beta)$, $R(\cos \alpha, -\sin \alpha)$, 若 P, Q 的余弦距离为 $\frac{1}{3}$, $\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{1}{7}$, 求 Q, R 的余弦距离.

20. (13 分) 设点 P 在单位圆的内接正八边形 $A_1A_2 \cdots A_8$ 的边 A_1A_2 上, 求 $\overrightarrow{PA_1}^2 + \overrightarrow{PA_2}^2 + \cdots + \overrightarrow{PA_8}^2$ 的取值范围.