
# Matemática Aplicada Matrizes/Sistemas de Equações Lineares

# 1 MATRIZES

Matriz é uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Por exemplo, ao recolhermos os dados referentes à altura, peso e idade de um grupo de quatro pessoas, podemos dispô-los na tabela:

| | Altura (m) | Peso (kg) | Idade (anos) |
|---|---|---|---|
| Pessoa 1 | 1,70 | 70 | 23 |
| Pessoa 2 | 1,75 | 60 | 45 |
| Pessoa 3 | 1,60 | 52 | 25 |
| Pessoa 4 | 1,81 | 72 | 30 |

Ao abstrairmos os significados das linhas e colunas, temos a matriz:

$$\begin{pmatrix} 1{,}70 & 70 & 23 \\ 1{,}75 & 60 & 45 \\ 1{,}60 & 52 & 25 \\ 1{,}81 & 72 & 30 \end{pmatrix}$$

Em problemas em que o número de variáveis e de observações é muito grande, essa disposição ordenada dos dados em forma de matriz torna-se absolutamente indispensável.

## 1.1 NOTAÇÃO

Representaremos uma matriz de *m* linhas e *n* colunas por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (A)_{ij} = a_{ij}$$

Exemplo: para a matriz $A_{2x2}$ temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A)_{11} = 2 \quad (A)_{12} = -3 \quad (A)_{21} = 7 \quad (A)_{22} = 0$$

Usaremos sempre letras maiúsculas para denotar matrizes e quando quisermos especificar a ordem de uma matriz A (isto é, o número de linhas e colunas), escreveremos $A_{mxn}$. Também são utilizadas outras notações para matriz além de colchetes, como parênteses ou duas barras.

Duas matrizes $A_{mxn}$ e $B_{rxs}$ são iguais, A = B, se elas têm o mesmo número de linhas (m = r) e colunas (n = s) e todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$).

## 1.2 TIPOS ESPECIAIS DE MATRIZES

Consideremos uma matriz com *m* linhas e *n* colunas que denotamos por $A_{mxn}$ .

### 1.2.1 Matriz quadrada

É aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$). Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [8]$$

Diagonal principal

Os elementos $a_{ij}$ , onde $i = j$, são os elementos da diagonal principal, no caso do exemplo acima: 1, 0 e 6.

No caso de matrizes quadradas $A_{mxm}$, costumamos dizer que A é uma matriz de ordem *m*.

### 1.2.2 Matriz nula

É aquela em que $a_{ij} = 0$ para todo *i* e *j*.

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 1.2.3 Matriz-coluna

É aquela que possui uma única coluna (n = 1). Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

### 1.2.4 Matriz-linha

É aquela onde $m = 1$. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

### 1.2.5 Matriz diagonal

É uma matriz quadrada (m = n) onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, isto é, os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

### 1.2.6 Matriz triangular superior

É uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos, isto é, m = n e $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

### 1.2.7 Matriz triangular inferior

É uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, isto é, m = n e $a_{ij} = 0$ para $i < j$. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}$$

### 1.2.8 Matriz simétrica

Matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$. A parte superior é um “reflexo” da parte inferior, em relação à diagonal principal. Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & k \end{bmatrix}$$

### 1.2.9 Matriz identidade

É uma matriz quadrada e diagonal onde todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1, ou seja, $a_{ij} = 1$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Este tipo de matriz será amplamente utilizada em diversas operações com matrizes, com será visto adiante. Exemplos de matriz identidade:

$$\mathbf{I_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 1.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES

### 1.3.1 Adição ou subtração de matrizes

A adição ou subtração de duas matrizes A e B, de mesmo tamanho, pode ser feita efetuando-se a adição/subtração de suas entradas correspondentes, gerando assim outra matriz denotada por A + B ou A – B. Isto é $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{mxn}$. Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

### 1.3.2 Multiplicação por escalar

Seja $A = [a_{ij}]_{mxn}$ e $k$ um número, então definimos uma nova matriz $kA = [ka_{ij}]_{mxn}$. Exemplo:

$$-2\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -20 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

### 1.3.3 Matriz transposta

Dada uma matriz A = $[a_{ij}]_{mxn}$, podemos obter uma outra matriz A’ = $[b_{ij}]_{nxm}$, cujas linhas são as colunas de A, isto é, $b_{ij} = a_{ji}$. A’ é denominada transposta de A. Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3x2} \qquad A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} -3 & 8 \end{bmatrix}$$

### 1.3.4 Multiplicação de matrizes

Antes da definição do processo de multiplicação de matrizes, vamos analisar um problema prático:

Suponhamos que a seguinte matriz forneça as quantidades das vitaminas A, B e C obtidas em cada unidade dos alimentos I e II.

$$\begin{array}{ll} & \quad\ \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \\ \text{Alimento I} & \multirow{2}{*}{$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$} \\ \text{Alimento II} & \end{array}$$

Se ingerirmos 5 unidades do alimento I e 2 unidades do alimento II, quanto consumiremos de cada tipo de vitamina?

Podemos representar o consumo dos alimentos I e II (nesta ordem) pela matriz “consumo”:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 4+2\cdot 5 & 5\cdot 3+2\cdot 0 & 5\cdot 0+2\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

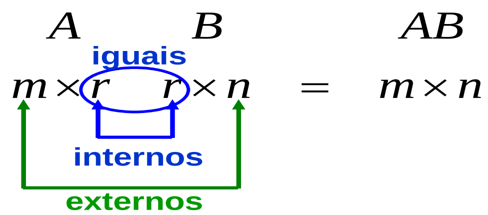
Isto é, serão ingeridas 30 unidades de vitamina A, 15 de B e 2 de C.

Outro problema que poderemos considerar em relação aos dados anteriores é o seguinte: Se o custo dos alimentos depender somente do seu conteúdo vitamínico e soubermos que os preços por unidade de vitamina A, B e C são, respectivamente, 1,5 ; 3 e 5 u.m., quanto pagaríamos pela porção de alimentos indicada anteriormente?

$$\begin{bmatrix}30 & 15 & 2\end{bmatrix} . \begin{bmatrix}1{,}5\\ 3\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}30\cdot 1{,}5+15\cdot 3+2\cdot 5\end{bmatrix} = [100]$$

Nos produtos de matrizes cada um dos elementos da matriz-resultado é obtido pela soma de produtos dos elementos de uma linha da primeira matriz pelos elementos de uma coluna da segunda matriz.

- Somente é possível multiplicar A $_{mxn}$ por B $_{pxq}$ se $n = p$. Ou seja, se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda. Nesse caso a matriz resultante terá dimensão *mxq*. Veja esquema abaixo:




Exemplo:

Considere as matrizes A $_{2x3}$ e B $_{3x4}$ abaixo. A multiplicação é possível porque o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Nesse caso a matriz resultante é uma matriz AB $_{2x4}$:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 6 & 0\end{bmatrix}_{2x3} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix}4 & 1 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 5 & 2\end{bmatrix}_{3x4} \quad ; \quad AB = \begin{bmatrix}12 & 27 & 30 & 13\\ 8 & -4 & 26 & 12\end{bmatrix}_{2x4}$$

$=_s$

$$26 = 2.4 + 6.3 + 0.5$$

- Observação importante: Geralmente AB $\neq$ BA. Por isso, a lei do cancelamento não é válida: AB = CB $\not\Rightarrow$ AC

### 1.3.5 Matriz inversa

Considere uma matriz A quadrada. Se existe uma matriz B tal que AB = BA = I, então A é invertível e B é a inversa de A. A matriz inversa de A é denotada por $A^{-1}$.

Se não existir a inversa de A, diz-se que matriz A é não-invertível ou singular.

Exemplo de matriz invertível:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que $AB = BA = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad B = A^{-1}$.

Uma matriz invertível tem apenas uma matriz inversa (teorema).

### 1.3.6 Propriedades da aritmética matricial

a) $A \pm B = B \pm A$

b) $A \pm (B \pm C) = (A \pm B) \pm C$

c) $A(BC) = (AB)C$

d) $A(B \pm C) = AB \pm AC$

e) $(A \pm B)C = AC \pm BC$

f) $a(B \pm C) = aB \pm aC$ ; a = escalar (número)

g) $(a \pm b)C = aC \pm bC$

h) $a(bC) = (ab)C$

i) $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

j) $A^n = AA \ldots A$ ($n$ vezes)

k) $A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}$ ($n$ vezes)

l) $A^r A^s = A^{r+s}$

m) $(A^r)^s = A^{rs}$

n) Uma matriz é simétrica se e somente se ela é igual à sua transposta: A = A’.

o) A’’ = A , isto é, a transposta da transposta de uma matriz é ela mesma.

p) (A + B)’ = A’ + B’

q) ($k$A)’ = kA’ , onde $k$ é um escalar qualquer.

r) (AB)’ = B’A’ , observe a ordem.

s) AI = IA = A , isto justifica o nome da matriz identidade.

### 1.3.7 Exercícios propostos

1) Sejam as matrizes A, B, C e D abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad ; \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que $AB = AC \neq BC$

b) Mostre que apesar de $A \neq 0$ e $D \neq 0$, $AD = 0$ (0 é a matriz nula)

2) Efetue as operações seguintes, quando possível:

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$, $3A = ?$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A + B = ?$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $A - B = ?$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $AX = ?$

e) $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $AX = ?$

f) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $AB = ?$ e $BA = ?$

g) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $AB = ?$ e $BA = ?$

h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $AB = ?$ e $BA = ?$

3) João pesa 81 quilos. Ele quer perder peso por meio de um programa de dieta e exercícios. Após consultar a Tabela 1, ele monta o programa de exercícios na Tabela 2. Quantas calorias ele vai queimar por dia se seguir esse programa?

Tabela 1 – Calorias queimadas por hora

| | **Atividade esportiva** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Peso** | **Caminhada** | **Corrida** | **Bicicleta** | **Jogar tênis** |
| 69 | 213 | 651 | 304 | 420 |
| 73 | 225 | 688 | 321 | 441 |
| 77 | 237 | 726 | 338 | 468 |
| 81 | 249 | 764 | 356 | 492 |

Tabela 2 – Disponibilidade diária de tempo para cada atividade

| | **Atividade esportiva** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Dia da semana** | **Caminhada** | **Corrida** | **Bicicleta** | **Jogar tênis** |
| Segunda-Feira | 1,0 | 0 | 1,0 | 0 |
| Terça-Feira | 0 | 0 | 0 | 2,0 |
| Quarta-Feira | 0,4 | 0,5 | 0 | 0 |
| Quinta-Feira | 0 | 0 | 0,5 | 2,0 |
| Sexta-Feira | 0,4 | 0,5 | 0 | 0 |

4) Uma empresa fabrica três produtos. Suas despesas de produção estão divididas em três categorias. Em cada uma dessas categorias, faz-se uma estimativa do custo de produção de um único exemplar de cada produto. Faz-se também, uma estimativa da quantidade de cada produto a ser fabricado por trimestre. As estimativas são dadas nas tabelas 1 e 2 abaixo. A empresa gostaria de apresentar a seus acionistas uma única tabela mostrando o custo total por trimestre de cada uma das três categorias: matéria-prima, pessoa e despesas gerais.

Tabela 1 – Custo de produção por categoria

| | Produto | | |
|---|---|---|---|
| **Gastos** | **A** | **B** | **C** |
| Matéria-prima | 0,10 | 0,30 | 0,15 |
| Pessoal | 0,30 | 0,40 | 0,25 |
| Despesas gerais | 0,10 | 0,20 | 0,15 |

Tabela 2 – Quantidade produzida por trimestre

| | Estação | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Produto** | **Verão** | **Outono** | **Inverno** | **Primavera** |
| A | 4000 | 4500 | 4500 | 4000 |
| B | 2000 | 2600 | 2400 | 2200 |
| C | 5600 | 6200 | 6000 | 6000 |

## 1.4 DETERMINANTES

É possível associar a cada matriz quadrada $A_{nxn}$ um escalar (número), denominado como determinante de A (det(A)), cujo valor vai nos dizer se a matriz é ou não invertível.

### 1.4.1 Notação

O determinante de uma matriz A geralmente é denotado colocando-se o arranjo de seus elementos entre retas verticais, colocando-se a letra da matriz entre retas verticais ou simplesmente escrevendo det(A). Exemplo: Considere a matriz A abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

O determinante pode ser denotado por:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3*1)-(4*2) = -5$$

### 1.4.2 Cálculo do determinante para matriz quadrada de ordem 2

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11*}a_{22} - a_{12*}a_{21}$$

$$- \qquad +$$

### 1.4.3 Cálculo do determinante para matriz quadrada de ordem 3

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. = \begin{array}{r} a_{11*}a_{22*}a_{33} + a_{12*}a_{23*}a_{31} + a_{13*}a_{21*}a_{32} \\ -(a_{12*}a_{21*}a_{33}) - (a_{11*}a_{23*}a_{32}) - (a_{13*}a_{22*}a_{31}) \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

### 1.4.4 Cálculo do determinante para matriz quadrada de ordem $n > 3$

Para matrizes quadradas de ordem $n > 3$, pode-se calcular o determinante através de cofatores: det(A) = $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ , onde $A_{ij}$ é a submatriz obtida de $A$ retirando-se a $i$-ésima linha e a $j$-iésima coluna. Neste caso, deve-se escolher uma linha, ou coluna, de preferência a que tiver mais zeros, e calcular o somatório acima determinando assim o determinante da matriz $A$.

### 1.4.5 Propriedades dos determinantes

Sendo A e B matrizes quadradas de ordem n:

a) Se A contém uma linha ou coluna de zeros então det(A) = 0.
b) det(A) = det(A')
c) Se A é uma matriz triangular (superior, inferior ou diagonal), então det(A) é o produto das entradas da diagonal principal da matriz.
d) Se multiplicarmos uma linha ou coluna da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.
e) Se trocarmos de posição duas linhas ou colunas da matriz, o determinante troca de sinal.
f) Se a matriz tiver duas linhas, ou colunas, iguais, ou proporcionais, o determinante é zero.
g) Somar um múltiplo de uma linha a uma outra não altera o valor do determinante.
h) det(A+B) $\neq$ det(A) + det(B)
i) det(AB) = det(A) * det(B)
j) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ , esta propriedade garante que uma matriz A é invertível somente se o seu determinante é diferente de zero.

### 1.4.6 Exercícios propostos

1. Verifique se as matrizes abaixo são invertíveis:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 & 8 \\ 6 & 15 & 13 & 12 \\ 1 & 9 & 7 & 2 \\ 0 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

2. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) det(A) + det(B) b) det(A + B) c)det(AB)

3. Calcule cada um dos determinantes a seguir:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \end{vmatrix}$

*Respostas: a) 1 ; b) -39 ; c) 0 ; d) 58 ; e) 116 (compare com o resultado do ex. d) ; f) -116 ; g) 0 ; h) 0 ; i) -4 ; j) 2262*

## 1.5 MÉTODO PARA CALCULAR MATRIZ INVERSA

Seja uma matriz quadrada A de ordem $n$. Vimos que se o $\det(A) \neq 0$, essa matriz é inversível. Através de operações com as linhas da matriz, conseguimos encontrar qual a sua matriz inversa correspondente.

### 1.5.1 Matriz A de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad ; \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### 1.5.2 Matriz A de ordem $n \geq 3$

Para encontrar a matriz inversa de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 3$, existem dois métodos (apenas o segundo será visto em detalhes):

(i) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} adj(A)$ , onde adj(A) é a matriz adjunta de A. A matriz adj(A) é a matriz transposta dos cofatores de A.

Os cofatores de A são determinados por:

$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , onde $M_{ij}$ é o determinante menor de $a_{ij}$. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

(ii) Através de operações com linhas, transformar [A | I] em [I | A$^{-1}$]. Exemplo:

**Operações possíveis:**

- Trocar de posição duas linhas
- Multiplicar uma linha por um número real não-nulo
- Substituir uma linha por sua soma com um múltiplo de outra linha

Exemplo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1=-L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3=L_3+L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1=L_1+2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3=L_3+L_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1=L_1+2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

### 1.5.3 Exercícios propostos

1. Encontre a inversa de cada uma das matrizes abaixo:

a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

*Respostas:*

*a)* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3/2 & -1 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ -1 & 1/3 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

*f)* $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *g)* $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3/5 & 6/5 & -1 \\ -2/5 & -1/5 & 0 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} -1/2 & -1 & -1/2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$

## 2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Provavelmente o problema mais importante em matemática é resolver um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em alguma etapa. Usando os métodos da matemática moderna, muitas vezes é possível reduzir um problema sofisticado a um único sistema de equações lineares. Sistemas lineares aparecem em aplicações em áreas como administração, economia, sociologia, ecologia, demografia, genética, eletrônica, engenharia e física.

Vamos analisar um problema prático, que apesar de simples, ilustra bem a aplicabilidade dos sistemas de equações lineares e a forma como podem ser montados:

> "Um determinado produtor rural possui duas fazendas, Morro Branco e Riacho Seco, onde deseja plantar soja e trigo. Devido às condições de solo específicas, o lucro anual esperado para a soja é de \$ 4,00/ha (hectare) na Morro Branco e de \$ 6,00/há na Riacho Seco; e o lucro anual previsto para o trigo é de \$ 8,00/há na Morro Branco e de \$ 4,00/ha na Riacho Seco. Sabe-se ainda que: a área de soja a ser plantada na Morro Branco deve ter a mesma dimensão da área plantada de soja do Riacho Seco; a área de trigo plantado na Riacho Seco deve ter a mesma dimensão da área plantada de trigo na Morro Branco; o lucro anual total da Morro Branco e da Riacho Seco deve ser \$160,00 e \$ 120,00 respectivamente; as fazendas têm área suficiente para atender aos anseios do produtor."

Para determinar as áreas de soja e trigo a serem cultivadas em cada uma das fazendas, tal situação pode ser facilmente apresentada por um sistema de equações lineares, com as seguintes incógnitas:

$x_1$ = número de hectares de soja a serem plantados em cada fazenda;

$x_2$ = número de hectares de trigo a serem plantados em cada fazenda.

Assim, o sistema de equações que representa o problema é dado por:

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = 160 \\ 6x_1 + 4x_2 = 120 \end{cases}$$

## 2.1 DEFINIÇÃO

Uma equação linear com *n* incógnitas (variáveis) é uma equação da forma:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ , onde $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ e $b$ são números reais e $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ são as variáveis. Um sistema de equações lineares com *m* equações e *n* incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Uma solução do sistema é um *n*-upla de números ($x_1$, $x_2$, ..., $x_n$) que satisfaça simultaneamente estas *m* equações.
- Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se, toda solução de um é solução de outro.

## 2.2 CLASSIFICAÇÃO

Um sistema de equações lineares pode possuir uma única solução, infinitas soluções ou simplesmente não possuir nenhuma solução possível. Neste caso, os sistemas podem sem classificados como:

(i) Sistema possível e determinado – admite uma única solução.

(ii) Sistema possível e indeterminado – admite infinitas soluções.

(iii) Sistema impossível – sistema que não admite nenhuma solução.

Exemplos:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 = 4 \end{cases}$

O sistema a) tem como solução o par ordenado (1,2). E por isso, ele é **possível e determinado.**

O sistema b) possui infinitas soluções com a primeira variável igual a 2. As soluções podem ser representadas pela tripla ordenada (2, $\alpha$, $\alpha$), onde $\alpha$ é um número qualquer. Nesse caso o <u>**sistema é possível e indeterminado**</u>.

O sistema c) não possui solução. Nesse caso, o <u>**sistema é impossível**</u>.

- Se um sistema linear tem mais equações do que incógnitas (m > n) em geral (mas nem sempre), tais sistemas são impossíveis.
- Se um sistema linear tem mais incógnitas do que equações (m < n) em geral tais sistemas são possíveis e indeterminados.

## 2.3 NOTAÇÃO MATRICIAL

Podemos escrever um sistema de equações lineares através de uma forma matricial. Isto facilita muito a sua análise e resolução.

Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Escrito na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

ou

**A.X = B**

Onde a primeira matriz da multiplicação acima (**A**) é a matriz dos coeficientes das variáveis. A segunda é a matriz das incógnitas (**X**). A matriz após a igualdade (**B**) é a matriz dos resultados (termos independentes).

Outra matriz que podemos associar ao sistema é a *matriz ampliada*. Esta matriz é do formato [A|B] e consiste em se colocar numa mesma matriz os coeficientes e os termos independentes (valores do lado direito da igualdade). Exemplo:

Para o sistema: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$

Temos a forma matricial: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

e a *matriz ampliada* do sistema segundo o formato [A|B] : $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right]$

A notação matricial, sobretudo a matriz ampliada, é utilizada na resolução do sistema de equações lineares. Para resolver o sistema (por algum dos métodos que serão vistos adiante) pode-se proceder operações, conhecidas como elementares, sobre as linhas de uma matriz ampliada:

**Operações elementares sobre as linhas de uma matriz ampliada**

(i) Trocar de posição duas linhas

(ii) Multiplicar uma linha por um número real não-nulo

(iii) Substituir uma linha por sua soma com um múltiplo de outra linha

### 2.3.1 Exercícios propostos

1) Escreva cada uma das matrizes abaixo através da notação matricial e também as correspondentes matrizes ampliadas:

a) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 2 \\ \quad\;\; -2x_2 = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ \quad\;\; 2x_2 + x_3 = 5 \\ \qquad\quad 3x_3 = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ \quad\;\; 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ \qquad\quad -x_3 + 2x_4 = -1 \\ \qquad\qquad 4x_4 = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ \quad 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1 \\ \qquad 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ \qquad\quad x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

2) Escreva por extenso o sistema de equações que corresponde a cada uma das matrizes ampliadas a seguir:

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 7 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & 8 \\ 5 & 1 & 3 & -2 & 7 \end{array}\right]$

## 2.4 MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

### 2.4.1 Substituição

Este método é o mais adequado para sistemas de duas equações ou que estão na forma triangular (a matriz dos coeficientes é uma matriz triangular). Exemplos:

$$\text{(i)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases} \qquad \text{(ii)} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + x_3 = 5 \\ \phantom{x_1 + 2x_2 +{}} 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Para resolver o sistema (i), basta isolar uma das variáveis em uma das equações e substituir o resultado na outra equação, encontrando assim o valor de uma das variáveis. Depois que se tem o valor de uma das variáveis, substitui-se esse valor na outra equação e acha-se o valor da segunda variável.

Quanto ao sistema (ii), verifique que a matriz de coeficientes é uma matriz triangular superior. Para resolver o sistema (ii) procede-se a substituição das variáveis de baixo para cima.

### 2.4.2 Forma triangular

Como vimos acima, se um sistema de equações lineares tiver associado a ele uma matriz de coeficientes triangular, é possível resolver o sistema por substituição.

Se a matriz de coeficientes não for triangular, geralmente (mas não sempre) é possível transformá-la nesse tipo através de sucessivas operações nas linhas da matriz ampliada do sistema até que a matriz de coeficientes fique no formato triangular. As operações possíveis são:

**Operações elementares sobre as linhas de uma matriz ampliada**

(i) Trocar de posição duas linhas

(ii) Multiplicar uma linha por um número real não-nulo

(iii) Substituir uma linha por sua soma com um múltiplo de outra linha

Exemplo:

Resolver o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

A esse sistema temos associada a matriz ampliada do sistema. Efetuando-se as operações elementares é possível transformar a matriz dos coeficientes para a forma triangular:

Primeiro temos que eleger um elemento chamado de pivô, que será utilizado para eliminar os elementos abaixo dele em sua coluna. Essa operação é feita sucessiva vezes até chegarmos no formato triangular.

$$\begin{array}{r} \text{Pivô} \rightarrow \\ \text{Elementos a serem eliminados} \left\{ \rightarrow \right. \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \boxed{3} & -1 & -3 & -1 \\ \boxed{2} & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Efetuando-se as operações elementares temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3=L_3-2L_1]{L_2=L_2-3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3=(-7)*L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 7 & 7 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3=L_3+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Na última matriz verificamos que $x_3 = 4$. Com o valor dessa variável é possível proceder a substituição de baixo para cima e encontrar o valor das outras variáveis.

- Resumindo: Em geral, se um sistema linear $n \times n$ puder ser reduzido a uma forma triangular, então ele terá uma única solução que pode ser obtida por substituição.

### 2.4.2.1 Exercícios propostos

Resolva os sistemas abaixo.

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

*R: a) (1,-2) ; b) (1,1,2) ; c) (2,-1,3,2)*

### 2.4.3 Forma escada

Vimos acima que geralmente é possível reduzir um sistema linear $n \times n$ a uma forma triangular e proceder a resolução via substituição. Entretanto, esse método falha se, em qualquer etapa do processo de redução, todas as escolhas possíveis para o elemento pivô em uma determinada coluna são nulas, ou seja, se aparecer algum elemento nulo na diagonal principal. Além disso, se a matriz dos coeficientes não for quadrada, também não será possível reduzi-la à forma triangular. Em ambos os casos utilizaremos a redução à forma escada e com o resultado poderemos verificar se o sistema é possível ou não e se é determinado.

Exemplo:

Considere o seguinte sistema representado pela matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \leftarrow \text{Linha do pivô}$$

Se efetuarmos as operações elementares para anular os últimos quatro elementos da primeira coluna, obteremos a matriz:

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Nesse estágio a redução a uma forma triangular não pode continuar. Todas as escolhas possíveis para o elemento pivô na segunda coluna são iguais a zero. Como nosso objetivo é simplificar ao máximo o sistema dado, deve-se passar para a terceira coluna e anular os três últimos elementos.

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Na quarta coluna todas as escolhas possíveis para o pivô são iguais a zero; logo, novamente passaremos para a próxima coluna. Usando a terceira linha como pivô, anulamos os dois últimos elementos da quinta coluna e chegamos à forma escada.

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Traduzindo a forma matricial para a forma de equações, as duas últimas linhas representam as equações:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -4$

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -3$

Como não existem quíntuplas (números $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ) capazes de satisfazerem essas equações o sistema é impossível.

Suponha agora que se modificarmos os números à direita do sinal de igualdade de modo a obter um sistema possível, teríamos, por exemplo, a matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$$

Procedendo a redução da matriz à forma escada teríamos:

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, as duas últimas linhas da matriz representam um subsistema que pode ser resolvido por quaisquer quíntuplas:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$

Logo, o sistema torna-se possível, mas indeterminado e temos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_5 &= 3 \end{aligned}$$

E, consequentemente, identificando as variáveis livres $x_2$ e $x_4$ (que correspondem às colunas que foram puladas no processo de redução da matriz à forma escada) temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 1 - x_2 - x_4 \\ x_3 + 2x_5 = -x_4 \\ x_5 = 3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 + 4 \\ x_3 = -x_4 - 6 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

Logo, para cada par ordenado ($x_2$ e $x_4$) temos uma solução e consequentemente teremos infinitas soluções.

- **Definição**

Uma matriz está reduzida à forma escada se:

(i) o primeiro elemento não-nulo de cada linha é 1;

(ii) se a linha $k$ não consiste apenas em zeros, o número de zeros no início da linha $k + 1$ é maior do que o número de zeros no início da linha $k$;

(iii) se existirem linhas com todos os elementos iguais a zero, elas ficam abaixo de todas as linhas não-nulas.

- O processo no qual se usam as operações elementares para transformar um sistema linear em outro cuja matriz dos coeficientes está em forma escada é chamado de **método de Gauss.**

Exemplos:

As matrizes a seguir estão em forma escada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

As matrizes a seguir não estão em forma escada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Observe que se a matriz ampliada do sistema, quando reduzida à forma escada, tiver uma linha da forma $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \mid n \end{bmatrix}$ o sistema é impossível. Caso contrário o sistema é possível.
- Se o sistema é possível e as linhas não-nulas da matriz em forma escada representam um sistema triangular, então o sistema tem uma única solução (é determinado) ou possui infinitas soluções (é indeterminado). Em ambos os casos basta proceder a substituição de baixo para cima para encontrar a(s) solução(ões).

Analisando a matriz ampliada do sistema reduzida à forma escada, é possível determinar o tipo de sistema de equações lineares associado (quanto à sua classificação). Exemplos de situações:

***(i) Sistemas com mais equações do que incógnitas***

Sistemas desse tipo geralmente (mas nem sempre) são impossíveis. Vejamos abaixo três exemplos desses sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

Vamos proceder a análise da classificação dos sistemas, quanto à resolução, em cada um dos casos:

Para o sistema a), procedendo a redução da matriz ampliada à forma escada temos:

$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$. Verifica-se, pela última linha da matriz, que o sistema é impossível.

Para o sistema b), procedendo a redução da matriz ampliada à forma escada temos:

$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Usando substituição, vemos que o sistema tem exatamente uma solução ($\frac{-9}{10}, \frac{-3}{10}, \frac{3}{2}$). A solução é única, pois as linhas não-nulas da matriz reduzida formam um sistema triangular.

Para o sistema c), procedendo a redução da matriz ampliada à forma escada temos:

$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$. Resolvendo para $x_2$ e $x_1$ em termos de $x_3$, obtemos:

$\begin{array}{l} x_2 = -0{,}2x_3 \\ x_1 = 1 - 2x_2 - x_3 = 1 - 0{,}6x_3 \end{array}$. Logo o conjunto solução é o conjunto de todas as triplas ordenadas da forma ($1 - 0{,}6\alpha$ ; $-0{,}2\alpha$ ; $\alpha$), onde $\alpha$ é um número real. O sistema é possível e indeterminado (tem infinitas soluções) por causa da variável $x_3$.

***(ii) Sistemas com menos equações do que incógnitas***

Embora um sistema desse tipo possa ser impossível de ser resolvido, eles são em geral possíveis e indeterminados. Um tal sistema nunca pode ser possível e determinado (isto é, ter uma única solução).

Exemplos:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$

Vamos analisar a matriz reduzida à forma escada para cada um dos casos:

Para o sistema a), procedendo a redução da matriz ampliada à forma escada temos:

$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Verifica-se que o sistema é impossível.

Para o sistema b), procedendo a redução da matriz ampliada à forma escada temos:

$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$. Verifica-se que o sistema é possível, mas como existem duas variáveis livres ($x_2$ e $x_3$), o sistema é indeterminado. Procedendo a substituição teríamos:

$\begin{array}{l} x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = -1 \end{array}$, portanto para quaisquer $\alpha$ e $\beta$ reais, a quíntupla (1-$\alpha$-$\beta$, $\alpha$, $\beta$, 2 , -1) é uma solução do sistema.

### 2.4.4 Forma escada reduzida por linhas

Como visto acima, uma vez que a matriz ampliada de um sistema estiver na forma escada, é possível efetuar a resolução do sistema através de substituição. Contudo, existe uma ampliação do método de redução à forma escada. Este método facilita a identificação das soluções do sistema. Neste caso efetuamos operações elementares na matriz ampliada do sistema e obtemos a matriz forma escada reduzida por linhas. Uma matriz está em forma escada reduzida por linhas quando:

(i) a matriz está em forma escada;

(ii) o primeiro elemento não-nulo de cada linha é o único elemento diferente de zero na sua coluna.

- O processo de usar operações elementares para colocar uma matriz em forma escada reduzida por linhas é conhecido como método de Gauss-Jordan.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 2.4.4.1 Exercícios propostos

1. Quais das matrizes a seguir estão em forma escada? Quais estão em forma escada reduzida por linhas?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Cada uma das matrizes aumentadas a seguir está em forma escada. Para cada uma delas, indique se o sistema linear correspondente é possível ou não. Se o sistema tiver uma única solução, encontre-a.

a) $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ c) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ e) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ f) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

*R: b) (4, -1) ; c) $(2\alpha - 11, \alpha, 3)$ ; d) (4,5,2) ; f) (5,3,2)*

3. Cada uma das matrizes aumentadas a seguir está em forma escada reduzida por linhas. Para cada uma delas, encontre o conjunto solução do sistema linear correspondente.

a) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ c) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

d) $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$ e) $\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ f) $\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

*R: a) (-2,5,3) ; c) $(3\alpha + 2, \alpha, -2)$ ; d) $(5 - 2\alpha + \beta, \alpha, -3\beta + 4, \beta)$ ;*
*e) $(-5\alpha + 2\beta + 3, \alpha, \beta, 6)$ ; f) $(\alpha, 2, -1)$*

4. Use o método de Gauss-Jordan para resolver cada um dos sistemas a seguir:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

*R: a) (0, -1) ; b)* $(\frac{5}{2}+\frac{5}{6}\alpha, -\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\alpha, 2-\frac{4}{3}\alpha, \alpha)$ *; c) (0, -$\alpha$, $\alpha$) ; d)* $(-\frac{4}{3}\alpha, 0, \frac{1}{3}\alpha, \alpha)$

### 2.4.5 Resolução por matriz inversa

Outra forma de resolver um sistema de equações lineares é através da matriz inversa da matriz dos coeficientes. Este método se aplica a sistemas de equações lineares onde o número de equações é igual ao número de incógnitas.

Lembrando que qualquer sistema de equações lineares pode ser escrito da forma A.X = B, onde A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz das incógnitas e B é a matriz dos termos independentes, é fácil verificar que é possível resolver a matriz das incógnitas através da expressão:

$$\boxed{\mathbf{X = A^{-1}B}}$$

Pois,

$AX=B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow I_nX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

Contudo, vale ressaltar que essa relação somente é válida se existir a matriz inversa da matriz dos coeficientes A, isto é, se existir $A^{-1}$. Em outras palavras, se o $\det(A) \neq 0$.

Exemplo:

Resolva o sistema abaixo através da matriz inversa dos coeficientes:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 8x_3 = 17 \end{cases}$$

Escrevendo na forma matricial temos AX = B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Como $\det(A) = -1$ e, portanto, $\det(A) \neq 0$, é possível calcular a inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

E, resolvendo através da inversa, temos:

$X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Logo, $x_1 = 1$; $x_2 = -1$ e $x_3 = 2$

### 2.4.6 Regra de Cramer

Outro método de resolução é a regra de Cramer. Os requisitos para a aplicação deste método são os mesmos para a aplicação da matriz inversa, ou seja, o número de equações tem que ser igual ao número de incógnitas e a matriz dos coeficientes tem que ser invertível. Por esta regra, tem-se:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \cdots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

onde $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ são as incógnitas e $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ são as matrizes em que a coluna $n$ é substituída pelos valores independentes do sistema de equações lineares. Exemplo:

Resolva o sistema abaixo através da regra de Cramer:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 5 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Temos $\det\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = -1$, ou seja, $\det(A) \neq 0$, então: AX = B

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det(A_1) = 49$ $\det(A_2) = –9$ $\det(A_3) = –18$

Pela regra de Cramer:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \cdots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$ , logo

$$x_1 = \frac{49}{-1} = -49 \quad x_2 = \frac{-9}{-1} = 9 \quad x_3 = \frac{-18}{-1} = 18$$

### 2.4.7 Exercícios propostos

1. Resolva usando o método da matriz inversa: $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 \\ -x_1 - 2x_2 = -12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

*Resposta: (4 ; 4 ; -2,66)*

2. Resolva usando a Regra de Cramer: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}$

*Resposta: (1,56 ; -0,13 ; -0,82)*

## 3 LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das sentenças abaixo:

a) Se A é uma matriz 3x4 e B é uma matriz 4x5, então AB é 3x5 e não existe BA.

b) Se A é 2x4 e B é 4x2, então AB é 2x2 e BA é 4x4.

c) Se A e B são matrizes quadradas de ordem 3, então AB e BA também são.

d) Se A é 3x2, B é 2x4 e C é 4x3, então (AB)C é uma matriz quadrada de ordem 3.

e) Se A é 2x2, B é 2x1 e C é 2x1, então C(AB) é uma matriz 1x1.

*R: v,v,v,v,f*

2. Determine x e y tais que: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{vmatrix} = 1$ e $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8$

3. Na matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix}$ calcule

   a) seu determinante

   b) os valores de *x* que anulam esse determinante.

   *R: -3 ou 2.*

4. Calcule os valores de *a* para que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ ax - 4y = 0 \end{cases}$ seja possível e determinado.

   *R:* $a \neq -6$

5. Dado o sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + a^2 y + z = a^2 \\ 2x + 2y + (3 - a)z = b \end{cases}$,

   calcule os valores de *a* e *b* para que esse sistema seja possível e indeterminado. *R:* $a \pm 1$ *e b=2*

6. Considere o sistema $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = k \end{cases}$, é <u>FALSO</u> afirmar que:

a) Para $k = 6$, o sistema será possível e indeterminado.

b) Para $k \neq 6$, o sistema será indeterminado.

c) Para $k = 7$, o sistema é impossível.

d) (6,3) é uma solução para $k = 6$.

*R: v, f, v, v*

7. Sendo A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, calcule AB e BA, mostrando que AB $\neq$ BA.

8. Sendo A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, determine uma matriz B, tal que AB = $I_2$. *R:* $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

9. Resolva a equação: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}$

*R: (3, 2, 1)*

10. Descreva todas as possíveis matrizes 2x2 que estão na forma escada reduzida por linhas.

11. Encontre o valor de A, sendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

*R:* $\begin{bmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{bmatrix}$

12. Determine as matrizes A, X e B de modo que os sistemas possam ser expressos pela equação matricial AX = B:

a) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 7 \\ 9x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - 8x_4 = 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

13. Resolva os sistemas lineares abaixo representados por suas matrizes aumentadas.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ d) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

*R: a) (-37, -8, 5) ; b) (-10 + 13$\alpha$, 13$\alpha$ - 5, 2 - $\alpha$, $\alpha$) ;*

*c) (-7$\alpha$ + 2$\beta$ - 11, $\alpha$, -3$\beta$ -4, -3$\beta$ +9, $\beta$)*

14. Resolva utilizando a forma escada reduzida por linhas (método Gauss-Jordan):

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ y + z = 12 \\ z + w = 14 \\ w + x = 16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a + b - c = 2 \\ 2a + 3b - 5c = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 \\ 3x + 4y + 5z = 12 \\ 3x + 7y + 8z = 21 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u + v + w + t = 13 \\ -2u - 2v + 4w + 4t = 15 \\ -u - v + 5w + 5t = 28 \end{cases}$

*R: b) (-4-2$\alpha$, 6+3$\alpha$, $\alpha$) ; c) (0, 3, 0) ; d) ($\frac{37}{6}$ -$\alpha$, $\alpha$, $\frac{41}{6}$ -$\beta$, $\beta$)*

15. Resolva utilizando a matriz inversa ou a regra de Cramer:

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ x - z - 5 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2a - b + c = 3 \\ a - b + 2c = 3 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$

*R: a) (1, 2, 3) ; b) (6, 4, 1) ; c)($\frac{9}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{9}{5}$)*

16. Um modelo macroeconômico simples consiste de três equações:

Equação de Consumo: $C = \alpha_0 + \alpha_1 Y + \alpha_2 T$

Equação de Investimento: $I = \beta_0 + \beta_1 Y + \beta_2 K$

Identidade da Renda: $Y = C + I + G$

Nessas equações, C é o consumo, Y a renda, T os impostos, I o investimento, K o estoque de Capital e G os gastos do governo. Esse modelo poderia ser escrito em forma matricial como: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\beta_1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C \\ I \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_2 T \\ \beta_0 + \beta_2 K \\ G \end{bmatrix}$

Uma condição necessária para que esse modelo possua uma solução única é que a matriz A:

a) seja simétrica

b) seja diagonal

c) seja não invertível

d) seja idempotente ($A^2 = A$)

e) tenha determinante diferente de zero