惯性导航及组合导航算法研究

代码说明

**王成宾**

**2019年9月**

**修订记录**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 修订时间 | 版次 | 修订原因/内容 | 修订者 |
| 20190910 | V1.0 | 建立文档。 | 王成宾 |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

# 设定及声明

## 坐标系设定

* 惯性坐标系系
* 地心坐标系系
* 导航坐标系系（东E北N天U）[后面的公式都以此来推导]
* 载体坐标系系（右前上）[欧拉角的旋转顺序为航向-俯仰-横滚((-z)xy(-3)12)]

（这里注意，因为Z轴朝上为正，为了符合右手规则和推导公式简洁对称，除非特别说明，后面将航向角定义为北偏西为正，且取值范围）

* 由位置计算误差引起的 虚假的导航坐标系系，有的文献也写为系
* 由姿态计算误差引起的 虚假的导航坐标系系

## 符号设定

* 位置表示(纬度-经度-高程) 单位 弧度 m

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.2‑1) |

* 速度表示(东E-北N-天U)

Vn = [v\_e v\_n v\_u]T

* 姿态表示

俯仰pitch(x轴)-横滚roll(y轴)-航向yaw(z轴) 欧拉角转动顺序 (-z)-x-y

Att = [pitch roll yaw]T

G\_ 表示全局变量

T\_ 表示临时变量

函数名首字母大写区分

# 初始化

# 惯导实现基本原理

## 速度微分方程

由加计输出，推导相对地球速度微分方程。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑1) |

推导过程如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | |  | (2.1‑2) | |
|  |  | | | (2.1‑3) |

将其在系下投影，就有：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1‑4) |

## 位置微分方程

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2‑1) |

## 姿态微分方程

由陀螺输出，推导姿态微分方程。

### 方向余弦阵与等效旋转矢量

* **关系公式**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑1) |

其中，和，代表旋转矢量，表示动坐标系系绕转轴转过角后，系相对参考坐标系系的变换矩阵为。

* **推导过程**

参见图 2‑1，三维空间中的某矢量绕另一单位矢量转动（设）角度，得矢量，以下求解转动前后两矢量与之间的几何运算关系。



图 2‑1等效旋转矢量

不妨假设矢量和单位矢量具有共同的起始点，记的矢端在上的投影为。若以为圆心、为半径作圆，则的矢端也在该圆周上。在圆上取一点使得，则有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑2) |

转动前的矢量相对于单位矢量可分解为平行于的分量和垂直于的分量，如下

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑3) |

同理，转动后的矢量相对于也可以分解为平行分量和垂直分量，如下

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑4) |

其中

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑5) |

至此，将式(2.3‑3)和式(2.3‑5)代入式(2.3‑4)，可详细展开为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑6) |

|  |
| --- |
| **三重矢积公式**    若令，则有  其中，记模值。将上式移项，可得 |

依据三重矢积公式则有，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑7) |

将式(2.4‑2)代入式(2.4‑1)，得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑8) |

其中记

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑9) |

式(2.4‑4)称为罗德里格（Rodrigues）旋转公式，它建立了转动前后两矢量与之间的线性变换关系，该变换是转轴及转角的函数。[这里可以这样理解：转动发生后，矢量在系下的坐标为，在系下的坐标为，即]

矩阵正好是从参考坐标系系到动坐标系系的过渡矩阵，它也是从系到系的坐标变换矩阵，可重新记式为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑10) |

进一步，若记和，则有，将其代入式上式，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑11) |

这里称为等效旋转矢量（Rotation Vector），根据图 2‑1，等效旋转矢量的矢量方向表示转轴方向，而模值大小表示旋转角度大小。从转动的物理含义上看，表示的是相同的转动，这可通过将其代入式(2.3‑9)进行验证，即与的取值无关。如果限定转角的取值范围，则等效旋转矢量和方向余弦阵之间存在一一对应关系。从坐标系的定轴转动中可以看出，等效旋转矢量（或单位转轴）是一种比较特殊的矢量，它在系和系下的坐标值完全相等，即有（或）。有时为了更加明确地显示系相对于系的转动关系，可利用下角标进行标注，比如（或）。

将式(2.3‑9)与向量反对称阵的矩阵函数式(7.3‑1)对比，可看出两者形式上完全一致



这说明式(7.3‑1)中三维向量具有等效旋转矢量的物理含义。根据式(7.3‑2)还可以看出，方向余弦阵的一个特征值恒为1（），与其对应的单位特征向量（）表示转轴方向；方向余弦阵的另外两个共轭特征值（和）即为等效旋转矢量模值的幂指函数，特征值的幅角表示等效旋转矢量的转角大小。

若将方向余弦阵看作是等效旋转矢量的函数，可简记为



并且有



特别地，若分别取、和，则有







上述三式分别称为以坐标轴为旋转轴的基本转动矩阵，或称Givens矩阵或初等旋转矩阵，空间的任意转动都可以由三次基本转动合成。

由等效旋转矢量与方向余弦阵之间的一一对应关系可知，方向余弦阵虽然含有9个元素，但它只有3个独立参数，包含了6个约束条件，即行向量之间两两正交（3个）及每个行向量模值均为1（3个）。3个独立参数即为3个自由度，这与三维空间中的转动自由度数目是一致的。

### 方向余弦阵微分方程

假设动坐标系（系）和参考坐标系（系）具有共同的原点，系相对于系转动的角速度为，从系到系的坐标系变换矩阵记为，它是时变矩阵，再假设在系中有一固定矢量，则固定矢量在两坐标系下投影的转换关系（即坐标变换），为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑12) |

将上式两边同时微分，得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑13) |

注意到，是系中的固定矢量，则有[两边求导，是分别在各自的坐标系下求导，因此在系下的求导为0]；由于系相对于系的角速度为，则在系上观察的角速度应为（或写为），并且有[这个是关键]，因而式（2.3-2）可化为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 即 | (2.3‑14) |

由于上式对于任意系固定矢量都成立，任选三个不共面的非零矢量、和[阐明非特殊性！]，则有



显然矩阵可逆，所以必定有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑15) |

这便是方向余弦阵微分方程，或称为姿态阵微分方程，它建立了动坐标系相对于参考坐标系之间方向余弦阵与动坐标系运动角速度之间的关系。

此外，通过如下矢量运算关系



比较上式两边，可得反对称阵的相似变换公式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑16) |

根据式(2.4‑4)和式(2.4‑5)，并考虑到是单位正交阵，即有，容易证明以下四种方向余弦阵微分方程是相互等价的：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑17) |

### 方向余弦阵微分方程的求解

以下讨论微分方程的求解，为了书写简便，略去各量的上下角标，但明确写出时变量的时间参数，并记反对称阵，将姿态阵微分方程表示为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑18) |

显然，这是一个典型的时变系数齐次微分方程，需采用毕卡（Peano-Baker/Picard）法求解。

首先，对式（2.3-7）在时间段上积分，得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑19) |

由于上式右边第二项被积函数依然含有待求的，重复使用上式右边整体代入积分号内，第一次代入，得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑20) |

第二次代入，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑21) |

依此不断代入，便可得到以无限重积分表示的所谓的毕卡级数

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑22) |

上述级数是收敛的，但一般情况下得不到闭合形式的解（初等解），只有在所谓的定轴转动特殊情形下才容易得到闭合解。

考虑时间段，对于任意时间参数，假设转动角速度满足如下可交换性条件

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑23) |

则有

 即 

现计算以下微分

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑24) |

注意，上式的最后一个等号是在式(2.3‑23)条件下才能成立的。根据式(2.3‑24)，有如下积分成立

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑25) |

同理，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑26) |

等等。

至此，在可交换条件(2.3‑23)下，毕卡级数式(2.3‑22)可简化成闭合解形式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑27) |

下面说明可交换条件式(2.3‑23)的几何含义。

设角速度的分量形式为和，则有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑28) |
|  |  | (2.3‑29) |

令上述两式相等，可解得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑30) |

如果式(2.3‑30)中所有的角速率分量都不为0，则有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑31) |

这表示在时间段内，系相对于系的转动角速度方向始终不变，即为定轴转动；如果式(2.3‑30)中某些角速率分量为0，也容易得出该转动是定轴转动的结论；如果所有角速度分量均为0，即为静止，它亦可视为定轴转动的特殊情形。综合上述三种情况，说明闭合解式(2.3‑27)只有在定轴转动情形下才能严格成立。

针对时间段，记角增量且模值，考虑到矩阵指数函数式(2.3‑27)，则有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑32) |

的求解参考附录1中的“反对称阵的矩阵指数函数”。

因此，式(2.3‑27)在时刻的解可简写为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑33) |

其中

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑34) |

若将时间区间从更改为，且假设已知时刻的方向余弦阵为，时间段的角增量为且记模值，则求解时刻的姿态阵的公式为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑35) |
|  |  | (2.3‑36) |

上述两式便是姿态阵离散化更新的递推计算公式。值得注意的是，式（2.3-26）严格成立的前提条件是系在时间内必须是定轴转动，该式与式（2.2-23）相比，两者在形式上完全一致，因而可以认为定轴转动时角增量是以系为参考，系相对于系转动的等效旋转矢量；否则，如果可交换性条件式（2.3-12）不成立，依然简单地利用式（2.3-26）进行计算将会引起姿态求解的不可交换误差，不可交换性是高维时变系统（时变矩阵微分方程）的普遍特性。从数学角度上看，转动的不可交换性在于/等价于矩阵乘法的不可交换性；反之，姿态可交换矩阵对应于定轴转动，即若有，则由和所代表的两转轴之间必定相互平行。

同理，类似于式（2.3-25）和（2.3-26），可求得另一种姿态阵微分方程表示形式的更新公式，为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.3‑37) |
|  |  | (2.3‑38) |

其中，、。显然，有成立。

对于非定轴转动下的姿态更新方法，主要是通过等效旋转矢量算法进行不可交换误差补偿，这些内容将在本章后续小节详细介绍。

## 参数计算方程

* **地球常数(WGS84)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑1) |

* **参数计算**

其中，代表纬度。

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑2) |
|  |  | (2.4‑3) |
|  |  | (2.4‑4) |
|  |  | (2.4‑5) |
|  |  | (2.4‑6) |

### 外推公式

速度的外推，其中是上一时刻速度的增量：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑7) |

位置的外推：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑8) |
|  |  | (2.4‑9) |
|  |  | (2.4‑10) |

### 欧拉角\_2\_DCM

姿态：

俯仰pitch(x轴)-横滚roll(y轴)-航向yaw(z轴) 欧拉角转动顺序 z-x-y计算出来的航向是北偏西为正，输入也是一样，切记！！！

由导航系转动到载体系的转动顺序为航向z—俯仰x—横滚y，因此从b系转到n系，反过来就是：横滚roll(y轴)—俯仰pitch(x轴)—航向yaw(z轴)，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑11) |
|  |  | (2.4‑12) |

### DCM \_2\_欧拉角

如果已知方向余弦矩阵，通过观察式(2.4‑11)，可得提取姿态角的数值方法如下所述。

1. 当时，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑13) |

其中，数值为用户根据具体需求而设定的略小于1的数值；为标准Ｃ语言函数库中的求反正切函数，包含象限判断功能，但两个输入参数和不得同时为０，以为例，它在的第三行向量为单位向量且时是可以保证和不同时为０的。

2）当时，有，作近似和，则可近似为



由上式可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑14) |

3）当时，有，作近似和，则可近似为



由上式可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑15) |

式(2.4‑14)和(2.4‑15)显示，当俯仰角在附近时，横滚角和航向角之间是无法单独分离的，或者说两者都存在多值性，只有当指定其中某一个值之后才能够确定另外一个，比如一般可令。

综合前面分析，得由姿态阵求解欧拉角的完整算法如下

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑16) |

### 四元数\_2\_DCM

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑17) |

将姿态阵与四元数之间转换关如下

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑18) |

### DCM\_2\_四元数

根据式(2.4‑18)的对角线元素，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑19) |
|  |  | (2.4‑20) |

再由式(2.4‑18)的非对角线元素，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑21) |
|  |  | (2.4‑22) |

若仅根据式(2.4‑20)将难以确定四元数各元素的正负符号。如果已知四元数的某一个元素，则根据式(2.4‑22)可求解其它元素，但须避免该已知元素为0。由四元数归一化条件可知，必然有成立，也就是说，四个元素中必然存在某个。实际应用时，可先根据式(2.4‑20)计算获得某一个较大的元素（不妨取为正值），再根据式(2.4‑22)计算剩余的其它三个元素。

在式(2.4‑20)中，等价于，即；同理，有等价于；以及等价于。由此可得计算四元数各元素的伪代码如下



### 欧拉角\_2\_四元数

在实际惯导的姿态更新算法中经常使用的是四元数，需要涉及到四元数和欧拉角的转换问题。根据单位四元数的含义式(2.4‑17)(2.4‑18)，在“东-北-天312”欧拉角定义下，由欧拉角求解四元数的公式为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑23) |

### 四元数\_2\_欧拉角

仅根据式(2.4‑23)，由四元数直接求解欧拉角并不容易。实际上，可通过姿态阵作为中间过渡量，先由四元数计算姿态阵，再由姿态阵计算欧拉角，分别如式(2.4‑18)和式(2.4‑16)，综合之后结果为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.4‑24) |

## 速度更新

速度理论公式：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑1) |

速度更新流程如下：

1. 外推(m-1/2)时刻的速度、位置信息、；
2. 基于(m-1/2)时刻的、计算对应的、、；
3. 计算(m-1/2)时刻对应的、、 、
4. 计算陀螺和加计的增量信息、 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑2) |
|  |  | (2.5‑3) |

1. 速度更新计算如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑4) |
|  |  | (2.5‑5) |
|  |  | (2.5‑6) |
|  |  | (2.5‑7) |
|  |  | (2.5‑8) |

其中，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑9) |
|  |  | (2.5‑10) |

其中，因为采用了前一时刻的速度和角度信息，其中、为前一时刻的角度和速度增量，、为当前时刻的角度和速度增量。

1. 速度更新推导如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑11) |

假设与变换矩阵相对应的等效旋转矢量为，角增量为；而与相对应的等效旋转矢量为，角增量为。根据变换阵与等效旋转矢量之间的关系式，当等效旋转矢量为小量时，可取如下一阶近似

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑12) |
|  |  | (2.5‑13) |

将式(2.5‑12)和(2.5‑13)代入式**错误!未找到引用源。**，展开并忽略和之间乘积的二阶小量，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑14) |

下面进一步详细讨论上式右端的后两个积分的计算方法。

暂且先分析上式右端的第三积分项。由于

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑15) |

上式移项整理，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑16) |

[注：这里右边保留一个1/2的，是为了(2.5‑23)可以进行参数的消除！]

在时间段内，对上式两边同时积分，得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑17) |

其中记

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | (2.5‑18) | |
|  | |  | | (2.5‑19) |
|  | |  | | (2.5‑20) |

称为速度的旋转误差补偿量，它因解算时间段内比力方向在空间旋转变化引起；称为划桨误差补偿量，其含义将在后面解释。

一般情况下式(2.5‑20)不能求得精确解，为了近似处理，假设陀螺仪角速度和加速度计比力测量均为线性模型，即

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑21) |

其中，均为常值向量，则相应的角增量和速度增量表达式为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑22) |

将式(2.5‑21)和式(2.5‑22)代入式(2.5‑19)并积分，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑23) |

若陀螺仪和加速度计在内均进行两次等间隔采样，采样时刻分别为和，且记

和，则可得采样增量

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑24) |

由上式可反解得到以采样增量表示的线性模型系数，即

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑25) |

再将上式代入式(2.5‑23)，便得二子样速度划桨误差补偿算法

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑26) |

至于式(2.5‑14)右端的第二积分项，其在形式上与第三积分项完全相同。若记

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑27) |

类比于式(2.5‑18)、(2.5‑19)和(2.5‑26)，则有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑28) |

若作近似，则上式变为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑29) |

至此，求得了导航系比力速度增量的完整算法，即式**错误!未找到引用源。**可表示为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑30) |

在式(2.5‑29)中，若时间段内的比力变化不大，进一步作近似，则式(2.5‑29)还可简化为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑31) |

这时式(2.5‑30)简化为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.5‑32) |

## 位置更新

在速度更新之后，利用m时刻的速度值，进行外推位置：

捷联惯导系统的位置（纬度、经度和高度）微分方程式如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.6‑1) |

将它们改写成矩阵形式，为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.6‑2) |

其中，记

， ，

与捷联惯导姿态和速度更新算法相比，位置更新算法引起的误差一般比较小，可采用比较简单的梯形积分法对式(2.6‑2)离散化，得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.6‑3) |

上式移项，便得位置更新算法

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.6‑4) |

其中，采用、计算。

## 姿态更新

求解时刻的姿态矩阵，利用如下公式：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.7‑1) |

每一个更新历元，计算

对应的四元数；

对应的四元数；

对应上一时刻的四元数，这样每次更新就有：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.7‑2) |

然后做一次变换得到。

（1） 的计算

其中，对于的更新，先考虑

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.7‑3) |

其中，

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.7‑4) |

利用更新的来计算，建议采用《shin》的办法，利用前一时刻的速度进行速度外推，然后再外推出，为简单起见，现在先直接采用，【后面实验能有多大误差！】

（2） 的计算

利用，如上求出

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.7‑5) |

再求出

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.7‑6) |

（3） 姿态更新

利用上面（1）、（2）的结果，更新四元数，然后反求姿态矩阵！

（4） 其它

通过旋转矢量求出对应的四元数，然后再求出对应的DCM，如下

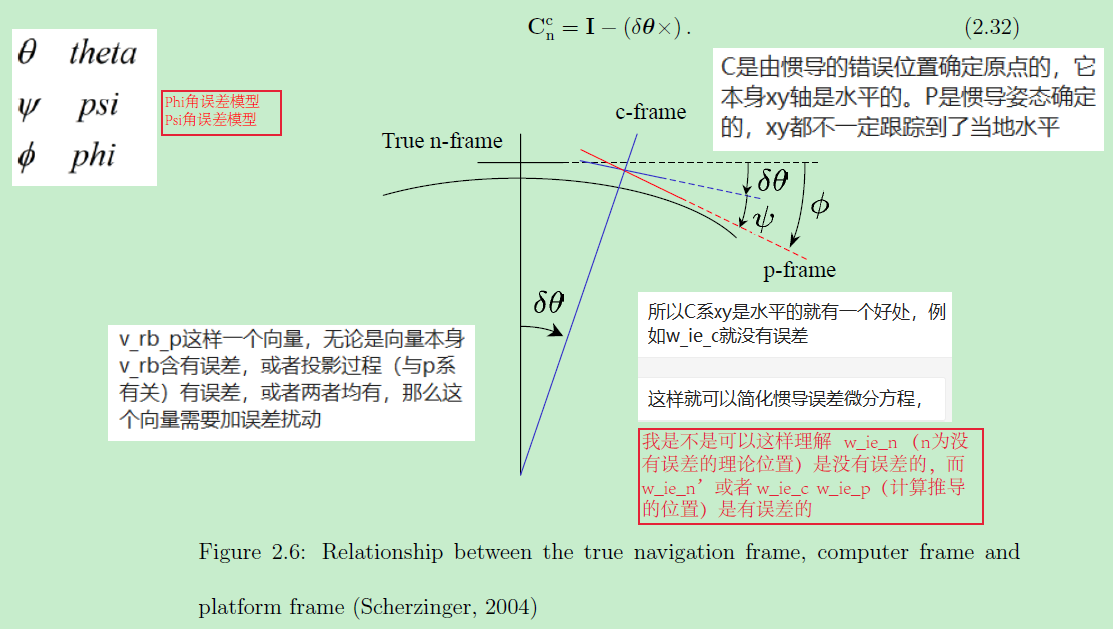
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | (2.7‑7) |
|  |  | | | (2.7‑8) |
|  | |  | (2.7‑9) | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.7‑10) |

# 惯导误差方程

**Phi角误差模型**是以**真实导航坐标系系为参考**，利用小扰动方式推导误差模型。

**Psi角误差模型**是以**计算的导航坐标系系为参考**，利用位置误差转动和航向误差来进行误差模型的推导。



## Phi角误差模型[小失准角模型]

Phi角误差模型，以真实导航坐标系系为参考(也叫Geographic-Consistent GC模型)，但系统实际运行过程因为各种原因，计算量都会有误差。

### 姿态误差方程

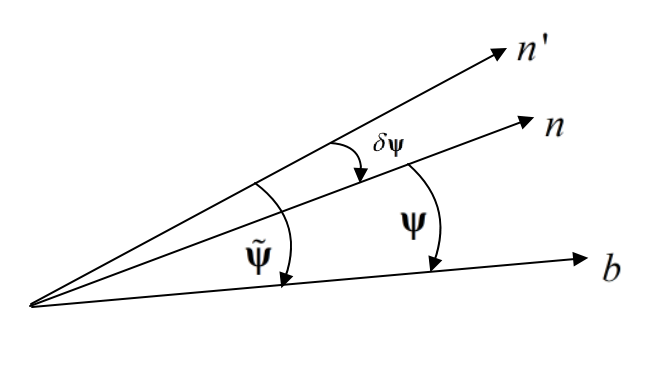
假设理想的从导航坐标系（系）到载体坐标系（系）的捷联惯导姿态矩阵为，而导航计算机中解算给出的姿态矩阵为，两者之间存在偏差。对于变换矩阵和，一般认为它们的系是重合的，而将与对应的导航坐标系称为计算导航坐标系，简记为系，所以也常将计算姿态阵记为。因此，与之间的偏差在于系与系之间的偏差。

根据矩阵链乘规则，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑1) |

将对应的姿态表示为，求出的姿态包含有误差量，则理论值对应的姿态为，系与系与之间的姿态表示为，也就是说就姿态而言，意味着，当然这里姿态的计算不能直接相加，欧拉角是不满足加法运算的！

导航坐标系系和真实的导航坐标系系之间有角度误差，以欧拉角的形式来表示，和姿态角对应，分别表示俯仰、横贯、航向；载体坐标系右前上，导航坐标系去东北天。



那么，根据2.3.2节方向余弦矩阵的微分方程，有，则求解理想姿态矩阵的公式(2.3‑15)如下

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑2) |

而实际计算时各量是含误差的，表示为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑3) |

其中

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑4) |
|  |  | (3.1‑5) |

为陀螺测量误差【目前仅考虑常值零偏和白噪声！】；为导航解算的速度等误差引起的导航坐标系转动角速度计算误差。

对(3.1‑1)两边求导，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑6) |

将(3.1‑2)和(3.1‑3)带入上式，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑7) |
|  |  | (3.1‑8) |
|  |  | (3.1‑9) |
|  |  | (3.1‑10) |

最终得到失准角微分方程为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑6) |

以系作为参考坐标系，记从系至系的等效旋转矢量为（后面简记为），常称其为失准角误差。假设为小量，【先以小量做实验，后面考虑大失准角的情况】根据等效旋转矢量与方向余弦阵关系式：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑11) |

并依据(3.2‑1)，有转动顺序为—(姿态角)—>—(失准角)—>。

由可知，求出姿态角和失准角后，再用左乘一个，得到最终的姿态信息，当从系至系的等效旋转矢量为为小角度时，有近似：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑12) |

上式转置，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑13) |

将式(3.2‑4)代入式(3.2‑1)，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑14) |

求解理想姿态矩阵的公式如下

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑15) |

而实际计算时各量是含误差的，表示为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑16) |

其中

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑17) |
|  |  | (3.1‑18) |

为陀螺测量误差【目前仅考虑常值零偏和白噪声！】；为导航系计算误差，详细后面的推导。

将式(3.2‑5)两边同时微分【这里使用了为小量假设】，其右端应当正好等于式(3.2‑7)的右端，即有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑19) |

再将式(3.2‑6)、(3.2‑7)、(3.2‑8)和(3.2‑9)代入上式，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑20) |

上式两边同时右乘，展开略去关于误差量的二阶小量，整理得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑21) |

在上式右边第一项中运用公式，并在第三项中运用反对称阵的相似变换，则上式简化为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑22) |

所以有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑23) |

上式称为SINS姿态误差方程，也是经典的Phi角误差模型，反映了计算导航系（系）相对于理想导航系（系）的失准角变化规律。

### 速度误差方程

理想情况下，速度方程是

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑24) |

但是在实际计算过程中，因为误差的原因，实际速度方程是按照如下进行计算：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑25) |

其中：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑26) |
|  |  | (3.1‑27) |
|  |  | (3.1‑28) |
|  |  | (3.1‑29) |
|  |  | (3.1‑30) |
|  |  |  |

为加速度计测量误差【目前仅考虑常值零偏和白噪声，以后可以加入标度因数和非正交误差！】；分别为地球自转角速度计算误差、导航系旋转计算误差和重力计算误差。

用(3.1‑25)和(3.1‑24)相减，并将误差量表达式分别带入有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.1‑31) |

【注：先不考虑标度因数误差、安装非正交误差等的估计，仅考虑器件的零偏，将其当做常值白噪声】

误差方程的推导有两种经典方式，一种是Phi-Angle误差模型，一种是Psi-Angle误差模型。

第一种是考虑计算过程中导航坐标系系和计算导航坐标系系的坐标原点是一样的，但是姿态角度有区别。

第二种是考虑计算过程中，导航坐标系系和计算导航坐标系系的坐标原点不一样，有个距离误差，但是假设水平姿态都是一样的，都是水平的。

下面从文献中摘录并推导。

两种误差模型的推导是从 平台式惯导系统 延续而来，现在的捷联惯导，可以仅考虑Psi角误差模型，具体的推导过程如下所示，就不在考虑这两种误差模型了！

## INS误差方程

### 小角度姿态误差方程

[注记：这里仅考虑了姿态误差引起的变化，不考虑位置误差引起的变化！就像在上图中，位置误差引起的姿态变化相对来说非常小，因此，在总误差中，仅考虑误差就可以了！但是，后面的位置误差如何处理！]

假设理想的从导航坐标系（系）到载体坐标系（系）的捷联惯导姿态矩阵为，而导航计算机中解算给出的姿态矩阵为，两者之间存在偏差。对于变换矩阵和，一般认为它们的系是重合的，而将与对应的导航坐标系称为计算导航坐标系，简记为系，所以也常将计算姿态阵记为。因此，与之间的偏差在于系与系与之间的偏差。

根据矩阵链乘规则，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑1) |

以系作为参考坐标系，记从系至系的等效旋转矢量为（后面简记为），常称其为失准角误差。假设为小量，【先以小量做实验，后面考虑大失准角的情况】根据等效旋转矢量与方向余弦阵关系式：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑2) |

并依据(3.2‑1)，有转动顺序为—(姿态角)—>—(失准角)—>。

由可知，求出姿态角和失准角后，再用左乘一个，得到最终的姿态信息，当从系至系的等效旋转矢量为为小角度时，有近似：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑3) |

上式转置，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑4) |

将式(3.2‑4)代入式(3.2‑1)，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑5) |

求解理想姿态矩阵的公式如下

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑6) |

而实际计算时各量是含误差的，表示为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑7) |

其中

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑8) |
|  |  | (3.2‑9) |

为陀螺测量误差【目前仅考虑常值零偏和白噪声！】；为导航系计算误差，详细后面的推导。

将式(3.2‑5)两边同时微分【这里使用了为小量假设】，其右端应当正好等于式(3.2‑7)的右端，即有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑10) |

再将式(3.2‑6)、(3.2‑7)、(3.2‑8)和(3.2‑9)代入上式，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑11) |

上式两边同时右乘，展开略去关于误差量的二阶小量，整理得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑12) |

在上式右边第一项中运用公式，并在第三项中运用反对称阵的相似变换，则上式简化为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑13) |

所以有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑14) |

上式称为SINS姿态误差方程，也是经典的Phi角误差模型，反映了计算导航系（系）相对于理想导航系（系）的失准角变化规律。

### 速度误差方程

速度误差是指惯导系统导航计算机中的计算速度与理想速度之间的偏差，描述这一偏差变化规律的微分方程称为速度误差（微分）方程。计算速度表示为，可简记为，则速度误差定义为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑15) |

对上式两边同时求微分，得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑16) |

比力方程的理论公式如下

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑17) |

在实际计算时，表示为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑18) |

其中

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑19) |
|  |  | (3.2‑20) |
|  |  | (3.2‑21) |
|  |  | (3.2‑22) |

为加速度计测量误差【目前仅考虑常值零偏和白噪声，以后可以加入标度因数和非正交误差！】；分别为地球自转角速度计算误差、导航系旋转计算误差和重力误差，见后面分析。

将式(3.2‑18)减去式(3.2‑17)，得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑23) |

再将式(3.2‑17)~(3.2‑22)代入上式，展开并略去关于误差的二阶小量，得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑24) |

这便是SINS速度误差方程。

### 位置误差方程

分别对SINS位置（纬度、经度和高度）微分方程式(2.6‑1)求偏差，但考虑到式中在短时间内变化很小，视为常值，可得

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑25) |
|  |  | (3.2‑26) |
|  |  | (3.2‑27) |

其中，、和分别表示纬度误差、经度误差和高度误差，并且记惯导速度分量和速度误差分量。

### 误差系数表达

（1）的表达式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑28) |

 为位置误差。

（2）的表达式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑29) |
|  |  | (3.2‑30) |

（3）的表达式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑31) |
|  |  | (3.2‑32) |



实际中，除非惯导高度或高度误差比较大，对误差传播的影响很小，一般可以忽略不计【也就是说误差项里面不考虑的影响】。注意，这里只是简单采用了正常重力计算公式，而没有考虑实际地球的重力异常和垂线偏差影响。

（3）姿态误差的表达式

上面推导有：

此处仅考虑 中的零偏

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑33) |

其中有：

（4）速度误差的表达式

此处不考虑重力误差的影响，仅考虑中的零偏

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑34) |



（5）位置误差的表达式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑35) |

， 

### 误差方程分量

在大多数情况下，比如在惯导系统标定比较准确或者运载体机动不大时，可以忽略刻度系数矩阵误差和的影响，将姿态误差方程式(3.2‑33)、速度误差方程式(3.2‑34)和位置误差方程式(3.2‑35)展开成分量形式。

各矢量的分量形式表达为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑36) |
|  |  | (3.2‑37) |
|  |  | (3.2‑38) |
|  |  | (3.2‑39) |
|  |  | (3.2‑40) |

#### 姿态误差分量表达

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑41) |
|  |  | (3.2‑42) |
|  |  | (3.2‑43) |
|  |  | (3.2‑44) |

#### 速度误差分量表达

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑45) |
|  |  | (3.2‑46) |
|  |  | (3.2‑47) |
|  |  | (3.2‑48) |

#### 位置误差分量表达

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (3.2‑49) |
|  |  | (3.2‑50) |
|  |  | (3.2‑51) |

### 误差状态方程



# 松组合导航方案

## 离散Kalman公式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.1‑1) |
|  |  | (4.1‑2) |

Kalman滤波全套算法，可划分为五个基本公式，如下：

1. 状态一步预测

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.1‑3) |

1. 状态一步预测均方误差

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.1‑4) |

1. 滤波增益

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 或 | (4.1‑5) |

1. 状态估计

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.1‑6) |

1. 状态估计均方误差

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.1‑7) |

不难证明（读者作为练习），以下两种滤波增益计算公式等价

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.1‑8) |
|  |  | (4.1‑9) |

还有下列四种均方误差计算公式也相互等价

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.1‑10) |
|  |  | (4.1‑11) |
|  | 选用： | (4.1‑12) |
|  |  | (4.1‑13) |

上述式(4.1‑12)常称为Joseph算法，它的对称性和数值稳定性相对式(4.1‑10)和式(4.1‑11)稍好些，但并没有明显的数值计算优势。式(4.1‑13)存在多个求逆运算，在标准Kalman滤波算法中一般不采用。

## 连续Kalman离散化

### 系统方程的离散化

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑1) |

离散化为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑2) |
|  |  | (4.2‑3) |
|  |  | (4.2‑4) |
|  |  | (4.2‑5) |

推导过程如下：

对于连续时间线性随机系统（或线性随机微分方程）：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑6) |

式中：是关于时间参数的确定性矩阵函数；而是零均值的高斯白噪声向量，它满足如下统计特性：

 （5.3-2）

其中：是白噪声的方差强度矩阵，一般为非负定的常值矩阵；是狄拉克冲激函数。特别注意，对于单位冲激时间信号，由于其在整个时间轴上的积分为1（无量纲单位），因而的幅值单位为1/s，的量纲单位与功率谱密度的单位一致，实际上反映的正是噪声的功率谱强度（比如当为标量时，单位假设为，则称为噪声系数，单位为）。

根据线性系统理论，式(4.2‑6)的离散化形式为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑7) |

其中

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑8) |
|  |  | (4.2‑9) |
|  |  | (4.2‑10) |

记离散化时间间隔，当在较短的积分区间内变化不太剧烈时，且设，则一步转移矩阵式(4.2‑9)可近似为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑11) |

式(4.2‑10)表明是关于高斯白噪声的线性变换，其结果仍是正态分布的随机向量函数，因而可使用一、二阶统计特征来描述和等效。以下详细分析的一阶和二阶统计特征。

首先是均值，不难得出下式：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑12) |

其次，对于二阶统计特征，当时和的被积函数——噪声和之间的时间参数互不重叠，因此和之间必然是不相关的，即有



而当时，有



再假设噪声分配矩阵在区间内变化也比较平缓，继续推导上式，有

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑13) |

当满足时，式(4.2‑13)还可进一步近似为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑14) |

因此，若令，则连续时间随机系统式(4.2‑6)可进行如下近似离散化等效：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑15) |

其中







注意到，它与等效噪声（或）方差的量纲单位一致。

并且当选取其中仅为陀螺和加计的零偏误差时，，就有

### 量测方程的离散化

对于一般的量测方程：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 其中 | (4.2‑16) |

离散化为：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑17) |
|  |  | (4.2‑18) |

注意，上面的量测噪声方差，相当于通过采样来平均了，其实在高频采样时，是放大了量测噪声方差，原理如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.2‑19) |
|  |  | (4.2‑20) |

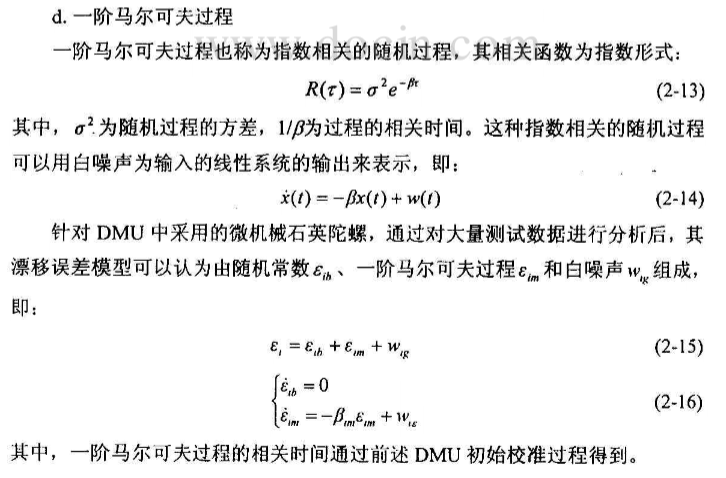
## LC组合KF实现

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (4.3‑1) |
|  |  | (4.3‑2) |
|  |  | (4.3‑3) |
|  |  | (4.3‑4) |
|  |  | (4.3‑5) |

### 离散系统噪声方差阵

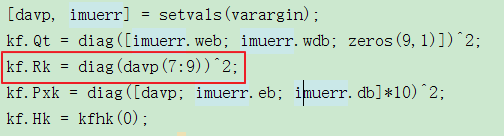


由初始设定的可以得到，假定其不随时间变化，一般仅考虑陀螺和加计零偏的方差，这里选择如下图所示方法，即为一阶马尔科夫过程中的白噪声方差。



### 离散观测噪声方差阵

3维观测方程的噪声方差阵，直接取GPS的定位误差的平方，如代码中



这里在实验过程中，使用的DGPS，对每个定位信息都有一个标准差估计，可以使用！

【注：做个实验，使用这个标准差，和随便初始设定一个5m的误差，有啥区别！】

### 初始预测方差阵

使用初始姿态、速度、位置、陀螺零偏、加计零偏的误差方差值。

# 代码实现

## 全局变量定义

### 数据类型定义

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **数据名称** | **成员** | **定义** |
| **IMU** | gyr (x,y,z) | 陀螺数据，单位：弧度/s，输入使用前记得进行单位转换 |
| acc(x,y,z) | 加计数据，单位：m/s2 |
| time(weeksencond,msecond) | 单个历元IMU的时间，采用的是GPS的UTC周内秒，精确到 ms |
| **MAG** | x,y,z | 磁强计的数据，单位：待定 |
| **GPS** | lat、lon、h | 纬度、经度(单位：度，使用前要转成弧度)，高程，单位：m |
| UTC.weeksecond | GPS的UTC周内秒， |
| **IMU\_CONFIG**  配置参数 | gyr\_bias | 陀螺零偏，单位：deg/h |
| gyr\_arw | 陀螺的角度随机游走(Angular Random Walk ARW)，单位：deg/sqrt(h)  【注：角度随机游走是角速率白噪声积分的结果，单位如何转化】 |
| gyr\_sqrtROG  gyr\_TauG | gyro correlated bias，认为陀螺输出含有一阶马尔科夫噪声，deg/h以及相关时间TauG单位 s【后面考虑怎么使用！】 |
| gyr\_dKG  (xx xy xz  yx yy yz  zx zy zz) | 陀螺的刻度因数误差 xx，yy，zz 单位：ppm  陀螺的安装误差yx zx xy zy xz yz，单位：arcsec 角秒，一般为0.0 |
| acc\_bias | 加计零偏，单位：ug |
| acc\_vrw | 加计的速度随机游走(Velocity Random Walk VRW)，单位：ug/sqrt(Hz)  【注：是加速度白噪声积分的结果，单位如何转化】 |
| acc\_sqrtROG  acc\_TauG | acc correlated bias，认为加计输出含有一阶马尔科夫噪声，ug以及相关时间TauA单位 s【后面考虑怎么使用！】 |
| acc\_dKA  (xx xy xz  yx yy yz  zx zy zz) | 加计的刻度因数误差 xx，yy，zz 单位：ppm  加计的安装误差yx zx xy zy xz yz，单位：arcsec 角秒，一般为0.0 |
| **SYS\_CONFIG** | imu\_sample | IMU采样频率，单位 Hz |
| imu\_uptime | IMU惯导解算更新时间 单位 s (=1/imu\_sample) |
| **EARTH**  地球  参数定义 | w | 7.2921151467e-5 弧度/s |
| f | 0.003352813177897 |
| Re | 6378137 单位：m |
| Rm |  |
| Rn |  |
| e | sqrt(2\*glv.f-glv.f^2) |
| e2 | e^2 |
| g0 | 9.7803267714 |
| mg | 1.0e-3\* g0 |
| ug | 1.0e-6\* g0 |
| mGal | 1.0e-3\*0.01; 单位：m/s2  %重力场的量纲是厘米每二次方秒，规定1cm/s2为1gal；1gal的1/1000为1毫伽，又称为米盖； |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| **NAV**  输出信息 | pos(lat,lon, h) | 位置信息，纬度经度高程，单位 弧度 m |
| att(pitch,roll,heading) | 姿态信息，俯仰 横滚 航向，单位：弧度 |
| vel(x,y,z) | 速度信息，按照载体系定义xyz输出，单位：m/s2 |
| time(weeksencond,msecond) | 单个历元IMU的时间，采用的是GPS的UTC周内秒，精确到 ms |
|  |  |  |
|  |  |  |

### 数据变量声明

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **数据名称** | **成员** | **定义** |
| 单位  宏定义 | UNIT\_PI | 3.141592653589793; %后面使用为pi，C语言中宏定义 |
| UNIT\_D2R | PI/180.0; %度转弧度 |
| UNIT\_R2D | 180.0/PI; %弧度转度 |
| UNIT\_mil | 2\*PI/6000.0; %一个密位 转成 弧度 |
| UNIT\_nm | 1853.0; %一海里 单位:m |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

## 函数模块定义

### 全局单位定义

|  |  |
| --- | --- |
| 函数名称 | 定义 |
| unit\_initial() |  |
|  |  |

### 配置参数设置

|  |  |
| --- | --- |
| 函数名称 | 定义 |
| config\_imu\_set(input\_config\_imu) | 配置IMU参数，将输入的常规单位参数，转化为计算单位！ |
|  |  |

### 地球参数计算相关earth\_get\_

|  |  |
| --- | --- |
| 函数名称 | 定义 |
| earth\_initial() |  |
| earth\_get\_Rmh(EARTH,POS) |  |
| earth\_get\_Rnh(EARTH,POS) |  |
| earth\_get\_w\_ie\_n(EARTH,POS) |  |
| earth\_get\_w\_en\_n(EARTH,POS,vn) |  |
| earth\_get\_w\_in\_n(EARTH,POS,vn) |  |
| earth\_get\_g\_n(EARTH,POS) |  |
|  |  |
|  |  |

# 备注

## 待完善

1. 代码中，由DCM求姿态，或者由Q求姿态，代码有待验证！
2. 代码中，对于 “高精度解算”的考虑，和“低精度近似解算”的对比：

比如：有标准数据后，测试一下，如果仅用角增量计算，和，增加圆锥补偿和划桨补偿，到底有多大区别！！！！

# 附录1 反对称矩阵

## 基本定义

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.1‑1) |

## 基本性质

如果是实向量（以后在涉及反对称阵时未特别说明均作此假设），显然有

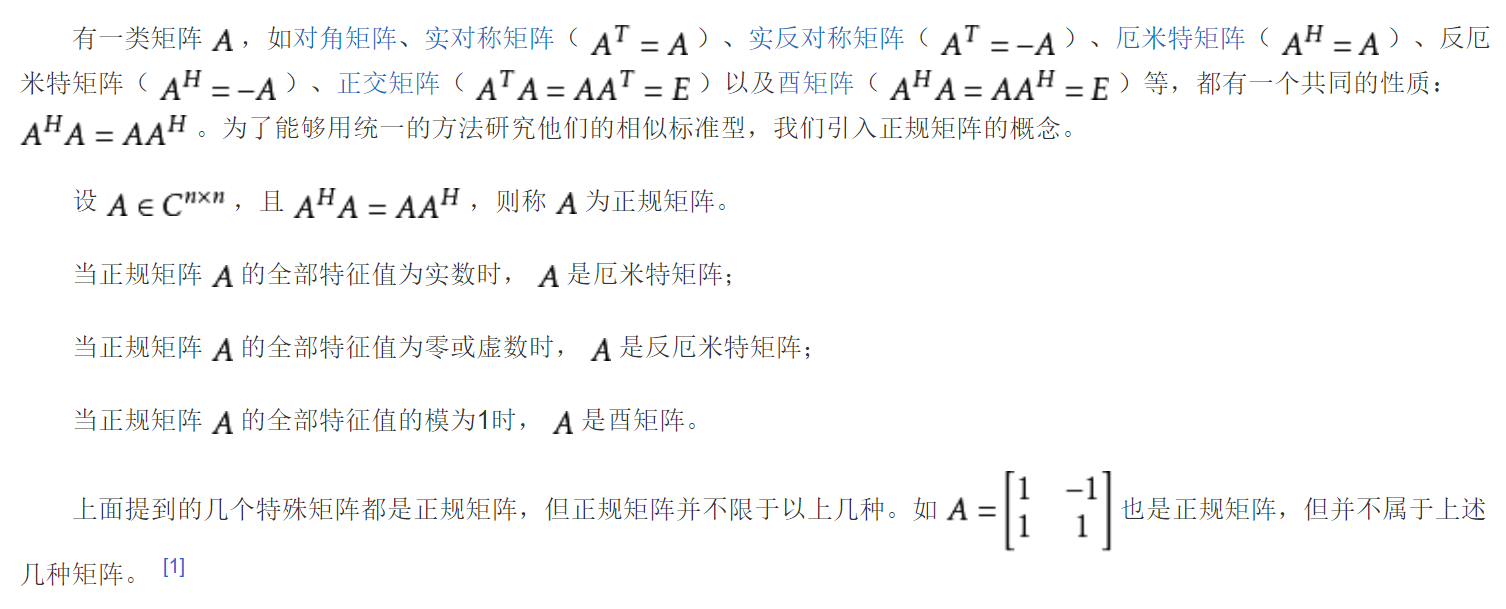
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.2‑1) |

其中，右上标“”表示Hermite转置，即共轭转置。

不难验证下式成立：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.2‑2) |

可见，反对称阵是正规矩阵(Normal Matrix)。

根据矩阵理论知，正规矩阵可酉相似于对角阵，且不同[特征值](http://baike.baidu.com/view/689250.htm)对应的[特征向量](http://baike.baidu.com/subview/475996/475996.htm)两两正交。下面求解与对角阵之间的相似变换关系。

首先，计算的特征多项式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.2‑3) |

其中，是向量的模值。

令特征多项式，可解得的三个特征值如下



当时，不难求得与上式三个特征值相对应的单位特征向量，分别为



而当（甚至）时，可选择单位正交特征向量如下



实际上，反对称阵的复单位特征向量是不唯一的。

如记



可验证有，因此是酉矩阵。

根据矩阵特征值与特征向量之间的关系，有



上式两边同时左乘，得



至此，验证了可酉相似于对角阵，并求得了相应的相似变换矩阵。

最后，给出反对称阵的幂方公式，如下















综上，可写出通式

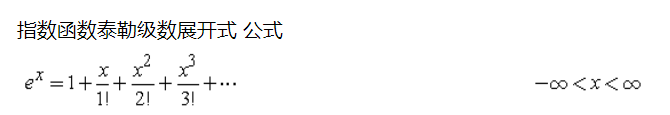
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.2‑4) |

## 反对称阵的矩阵指数函数

根据哈密顿—凯莱（Hamilton-Cayley）定理，矩阵指数函数可以展开成的有限项级数形式，即



其中，、和为待定系数。



有



上式两边矩阵都展开成元素分量形式，可得



将特征值代入上式，比较两边对角线元素，可得如下方程组

 即 

从上式可解得待定系数



再将这些待定系数重新代回，有反对称阵的矩阵函数求解公式

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.3‑1) |

其中，是向量的模值。

实际上，若直接利用反对称阵的幂方公式，亦可求得上式，即



此外，依据



据此可得



对比上式与，可知与反对称阵具有相同的特征向量，它们均为矩阵的列向量；并且矩阵函数与对角阵具有相同的特征值，分别为

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.3‑2) |

根据以上特征值，易知有成立，所以是酉矩阵。由于多个酉矩阵之乘积仍然是酉矩阵，可知也是酉矩阵；此外，若是实向量，则是实矩阵，所以必定是单位正交阵，这一点亦可证明如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (7.3‑3) |

值得指出的是，由于，所以，在所有三阶单位正交阵中只有行列式为1者才可以表示成的形式，事实上，行列式为1的单位正交阵可称为右手直角坐标变换矩阵（反之，行列式为-1者可称为左手矩阵）。