MEMO NO.
DATE

第七章、非线性方程求根

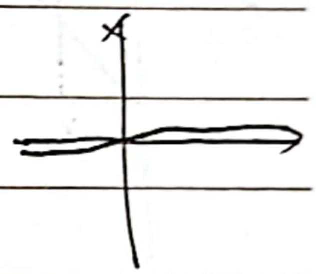
求$f(x)=0$的根：

$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)f(b)<0$，则$f(x)=0$在$[a,b]$内一定有实根，$[a,b]$称为$f(x)=0$的有根区间

§1 二分法：Bisection Method

将区间折半搜索

停止的条件：$\begin{cases} |x_k-x_{k+1}|<\varepsilon_1 \\ |f(x)|<\varepsilon_2 \end{cases}$ → 不能保证x的精度



误差：k步：$|x_k-x^*| \le (b-a)\cdot\frac{1}{2^k}$

不能求复根及偶重根；收敛慢

§ 简单迭代法：/不动点迭代

$f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=\varphi(x)$

$f(x)$的根 ⟷ $\varphi(x)$的不动点

$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 迭代，若$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$收敛，即$\exists x^*$使得$\lim x_k=x^*$，且φ连续

$\lim x_{k+1}=\lim \varphi(x_k)$ $\Rightarrow x^*=\varphi(x^*)$即$x^*$为$\varphi(x)$的不动点

但是通常，$\varphi(x)$的表达式可以有无穷多种形式，

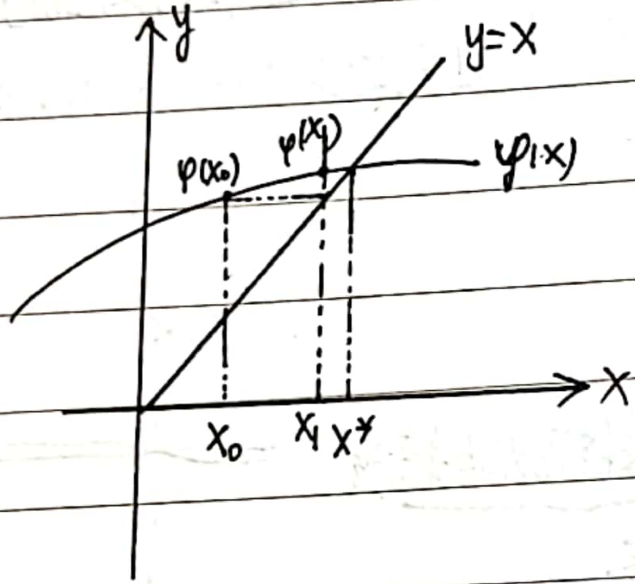
如何选取$\varphi(x)$才收敛，收敛的话如何收敛更快？

MEMO NO.

DATE

迭代过程的收敛性：

图示：$x=\varphi(x) \Rightarrow \begin{cases} y=x \\ y=\varphi(x) \end{cases}$ 的交点



▲定理：考虑 $x=\varphi(x)$ $\varphi(x)\in C[a,b]$，若：

(I) 当 $x\in[a,b]$ 时 $\varphi(x)\in[a,b]$ 一般不考虑这个，确定 $[a,b]$ 内有根则不用考虑

(II) $\exists\ 0\leq L<1$ 使得 $|\varphi'(x)|\leq L<1$，对 $\forall x\in[a,b]$ 成立.

则任取 $x_0\in[a,b]$ 由 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 得到的序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛于 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一不动点，并且有误差估计式：

① $|x^*-x_k|\leq \frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k|$

② $|x^*-x_k|\leq \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0|$ $\quad k=1,2,3\cdots$

且存在极限 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x^*-x_{k+1}}{x^*-x_k}=\varphi'(x^*)$

证明看PPT上有.

MEMO NO.
DATE

L越小收敛速度越快.

可将 $[a,b]$ 缩小定义局部收敛性：若在 x^* 的某 δ 邻域 $R=\{x \mid |x^*-x|<\delta\}$ 有 $\varphi\in C^1[a,b]$ 且 $|\varphi'(x^*)|<1$ 则由 $x_0\in R$ 开始迭代过程收敛

定义：若存在 x^* 的某个邻域 $R: |x-x^*|\le\delta$，使迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意初值 $x_0\in R$ 均收敛，则称迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在根 x^* 邻近具有局部收敛性

迭代法的收敛速度.

$x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛到 x^*，设 $e_k=x_k-x^*$，~~若~~

若 $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C>0$，则称该迭代为 $\boxed{p\text{阶收敛}}$；C 称渐近误差常数.

$$\begin{cases} p=1: \text{线性收敛}\ (C<1) \\ p=2\ \text{平方收敛} \end{cases}$$

定理：设 x^* 为 $x=\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi\in C^p(R(x^*))$ $p\ge2$ △重要,要记住
$\varphi'(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$ 且 $\varphi^{(p)}(x^*)\ne0$，则 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在 $R(x^*)$ 内 p 阶收敛。

加速算法没讲。

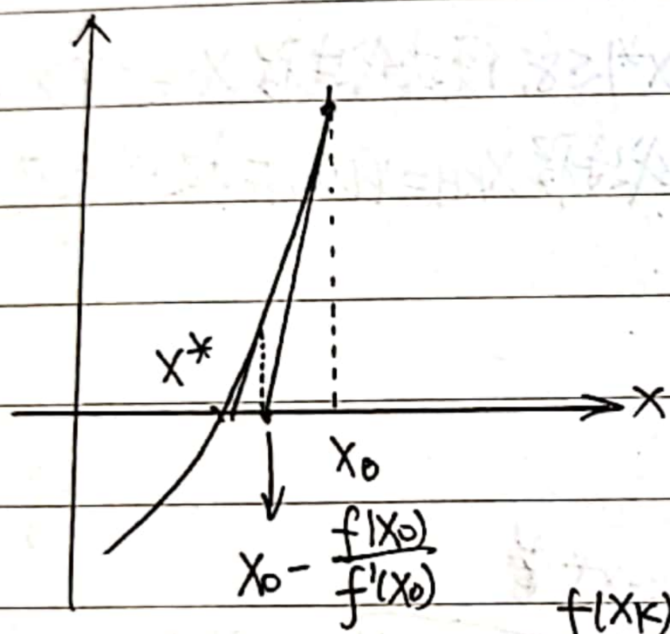
§牛顿法：也是一种不动点迭代法：
原理：将非线性方程线性化 —— Taylor展开.
$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$ ξ 位于 x 和 x_0 之间
近似 $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$0 = f(x^*) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0)$

$\Rightarrow x^* \approx x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow$ 迭代形式：$\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

图示



迭代形式：$x_{k+1} = \varphi(x_k) = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$　　$\varphi(x) = \boxed{x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}}$

只对单根只有二阶收敛，因为要求 $f'(x^*) \neq 0$

$f \in C^2[a,b]$，若 x^* 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的根，且 $\boxed{f'(x^*) \neq 0}$ 则 $\exists$ x^* 的邻域 $R(x^*)$ 使得 $\forall x_0 \in R(x^*)$，Newton迭代收敛到 x^* 且满足：

$$\lim \frac{x^* - x_{k+1}}{(x^* - x_k)^2} = \boxed{-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}}$$

2 P阶收敛速度

Newton迭代法的收敛性依赖于 x_0 的选取。

Newton下山法没讲：如何选取一个合适的x_0。

重根：$f'(x^*)=0$ Newton迭代是否仍然收敛

$f(x^*)=0 \Leftrightarrow f(x)=(x-x^*)g(x)$

2重根：$f(x)=(x-x^*)^2 g(x)$.

设x^*是$f(x)=0$的m重根$(m\geq 2)$，$f(x)$在x^*的某邻域内有m阶连续导数.

则 $f(x^*)=f'(x^*)=\cdots f^{(m-1)}(x^*)=0$ $f^{(m)}(x^*)\neq 0$.

由Taylor公式得：$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$ 可认为.

$$f(x)=f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)+\cdots+\frac{f^{(m-1)}(x^*)}{(m-1)!}(x-x^*)^{m-1}+\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-x^*)^m.$$

$\Rightarrow f(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_1)}{m!}(x-x^*)^m$. 同理：

$$\begin{cases} f'(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_2)}{(m-1)!}(x-x^*)^{m-1} \\ f''(x)=\frac{f^{(m)}(\xi_3)}{(m-2)!}(x-x^*)^{m-2}. \end{cases}$$

ξ_1 ξ_2 ξ_3都在x与x^*之间

可得：$\boxed{\varphi'(x^*)}=\lim_{x\to x^*}\varphi'(x)=\boxed{1-\frac{1}{m}}\neq 0$，即：

对于重根，只有1阶收敛速度

改进Newton迭代法，让其对重根具有更好的性质：

$\overline{\varphi}(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)}$ m是重数

则有 $\overline{\varphi'}(x^*)=0$.（省略大量计算过程，具体参见课本或PPT）

MEMO NO.
DATE

重数m不知道时：→ 可求 $u'(x^*)$ 的值,发现不为0,所以是单根.

$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ x^*是单重根，将求$f(x)$的重根，

将Newton迭代中的$f(x)$换成$u(x)$，迭代函数变为 $g(x)=x-\frac{u(x)}{u'(x)}$

对重根也有二阶收敛速度.