MEMO NO.
DATE . .

Chapter5. 常微分方程数值解

一阶常微分方程的初值问题：(IVP问题)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=f(x,y) & x\in[a,b] \\ y(a)=y_0 \end{cases}$$

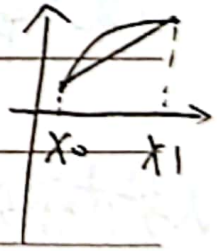
y_n 计算值、$y(x_n)$ 真实值

若无法得为解析解，在此时还有必要计算解函数 $y(x)$ 在一系列节点 $x_0 \cdots x_n$ 处的近似值

基本思想：求解区间和方程离散化

§1 欧拉方法：

欧拉公式：向前差商近似导数 $y'(x_0) \approx \frac{y(x_1)-y(x_0)}{h}$



$y(x_1) = y_0 + hf(x_0, y_0) \xrightarrow{\text{记为}} y_1$

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ $(n=0,1,\cdots N-1)$ 对于欧拉法：有初始值 y_0 就可以算出 y_{n+1}

误差会逐步积累

例 求初值问题：$\begin{cases} y'=y-\frac{2x}{y} & (0<x<1) \\ y(0)=1 \end{cases} \Rightarrow y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

$y_{n+1}=y_n+h\left(y_n-\frac{2x_n}{y_n}\right)$

误差会积累

MEMO NO.
DATE . .

隐式欧拉法：

向后差商：$y'(x_1) \approx \frac{y(x_1)-y(x_0)}{h}$

$y(x_1) = y(x_0) + h y'(x_1)$

$= y_0 + h f(x_1, y(x_1))$

$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad (n=0,1,\cdots N-1)$

y_{n+1} 同时出现在等式两边，不能直接得到，故称隐式

通常要解一个非线性方程。

梯形公式：显式，隐式的平均

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad n=0,\cdots N-1$

$= \frac{1}{2}[y_n + h f(x_n, y_n) + y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})]$

也是一个隐式的格式

从数值积分的角度来看：$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$

$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$

$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x)) dx$

$\approx y(x_0) + f(x_0, y_0) h$

$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$

MEMO NO.
DATE . .

均

以上称单步方法：有y_n即可求y_{n+1}

两步欧拉方法：

中心差商近似导数：$y'(x_1) \approx \frac{y(x_2)-y(x_0)}{2h}$

$\Rightarrow y(x_2) \approx y(x_0)+2hf(x_1, y(x_1))$

$\Rightarrow y(x_{n+1}) = y(x_{n-1})+2hf(x_n, y_n) \quad n=1, \cdots N-1$

显式格式，启动迭代需要2个初值

从数值积分角度：中矩形公式即可

改进欧拉方法：（预估校正法）

①显式欧拉给预测 $\overline{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

②将$\overline{y}_{n+1}$代入梯形公式右端，$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \overline{y}_{n+1})]$

或：$y_p = y_n + hf(x_n, y_n)$　$y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p)$

$y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_p + y_c)$

局部截断误差和方法的阶

单步法一般可写成：

$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, y_{n+1}, h)$　φ：增量函数

从x_0开始计算，每一步都会有误差，直到x_n，$e_n = y(x_n) - y_n$，称为该方法在x_n的整体截断误差；

仅考虑从x_n到x_{n+1}的误差：假设在x_n之前没有误差，$y_n = y(x_n)$

MEMO NO.
DATE . .

在假设 $y_n = y(x_n)$ 的前提下，即第 n 步计算是精确的前提下，若局部截断
$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ 称为局部截断误差。

$y_{n+1} = y_n + h\varphi(\ )$ $T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_n - h\varphi$

$= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi$

若某算法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，则称该算法有 p 阶精度。

因为整体截断误差比局部截断误差低一阶，

算法的精度看的是整体截断误差

求局部截断误差：

① 假设 $y_n = y(x_n)$，对于 Euler 则认为 x_{n+1} x_n 均严格成立。

② 将 y_{n+1} 在 x_n 处 Taylor 展开，$y(x_{n+1})$ 在 x_n 处 Taylor 展开。

③ 作差，比较 $T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$

隐式 Euler 法：书上说用在接近 $y(x_{n+1})$ 代替 y_{n+1} 不太严谨

MEMO NO.
DATE . .

§2. 龙格-库塔方法. Runge-Kutta

构造高精度单步方法的思想.

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)dx$

$= f(\xi)h$

改进的Euler方法: 相当于用了两个点的斜率的加权平均

改进的Euler书写:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h[\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2] \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + ph, y_n + phk_1) \quad 0 < p \le 1 \end{cases}$$

局部截断误差:

k_2 Taylor展开: 多元函数泰勒展开:

$f(x+h, y+k) = f(x,y) + (\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k)f + \cdots + \frac{1}{n!}(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k)^n f + \cdots$

$(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h^2 + \underbrace{\frac{2hk\partial^2 y}{\partial x \partial y}}_{\text{连续相}} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y^2}$

$k_2 = f(x_n, y_n) + phf_x(x_n, y_n) + phk_n f_y(x_n, y_n) + \cdots$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 p = \frac{1}{2} \end{cases}$ 无穷多个解: 2阶龙格-库塔格式

MEMO NO.
DATE . .

龙格库塔的一般格式

$$y_{n+1}=y_n+h\sum_{i=1}^{r}\lambda_i k_i \qquad \sum\lambda_i=1$$

$$c_i\le 1$$

$$k_1=f(x_n,y_n)$$

$$k_2=f(x_n+c_2h,\ y_n+a_{21}hk_1)$$

$$k_3=f(x_n+c_3h,\ y_n+c_3h(a_{31}k_1+a_{32}k_2))$$

、、、

$$k_i=f\left(x_n+c_ih,\ y_n+c_ih\left(\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}k_j\right)\right)\quad i=1,2,\cdots,r \qquad \sum a_{ij}=1$$

（$\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}k_j$：包含之前所有的k）

四级4阶龙格-库塔方法：要记住的

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}h(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{h}{2}k_1) \\ k_3=f(x_n+\frac{h}{2},\ y_n+\frac{h}{2}k_2) \\ k_4=f(x_n+h,\ y_n+hk_3) \end{cases}$$

MEMO NO.
DATE . .

§3. 收敛性和稳定性：整体截断误差比局部截断误差低一阶

收敛性：若某算法对于任意固定的 $x=x_n=x_0+nh$ 当 $h\to 0$ $n\to\infty$ 时，有 $y_n\to y(x_n)$ 则称该算法是收敛的。 一阶方法

稳定性：若某算法在计算过程中任一步产生的误差在以后的计算中都逐步衰减，则称该方法是绝对稳定的。

△ 一般只考虑以下模型试验方程：

$\begin{cases} y'=\lambda y \\ \lambda \text{的实部小于} 0 \end{cases}$ 模型(试验)方程 $y=ce^{\lambda x}$ 解的形式

$|y|=|c|e^{\lambda x}$

$\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$

取步长 h 时，将某算法应用于上式并假设仅在初值产生误差 $\varepsilon_0=y_0-\bar{y}_0$

若此误差以后逐步衰减，就称该算法相对于 $\bar{\lambda}=\lambda h$ 绝对稳定。$\bar{\lambda}$ 的全体构成绝对稳定区域。绝对稳定区域更大，则算法更稳定。

例：显式欧拉法：$y_{i+1}=y_i+h\lambda y_i=(1+h\lambda)^{i+1}y_0$

$\varepsilon_0=y_0-\bar{y}_0$ $\bar{y}_{i+1}=(1+h\lambda)^{i+1}\bar{y}_0$

$\varepsilon_{i+1}=y_{i+1}-\bar{y}_{i+1}=(1+h\lambda)^{i+1}\varepsilon_0=(1+\bar{\lambda})^{i+1}\varepsilon_0$

要误差逐步衰减，则 $\Rightarrow |1+\bar{\lambda}|<1$ $\bar{\lambda}=\lambda h$

模长↘ 对应复平面上 $(-1,0)$ $R=1$ 的圆

隐式欧拉法：$y_{i+1}=y_i+h\lambda y_{i+1}\Rightarrow y_{i+1}=\frac{1}{1-\bar{\lambda}}y_i$

$\Rightarrow \varepsilon_{i+1}=\left(\frac{1}{1-\bar{\lambda}}\right)^{i+1}\varepsilon_0\Rightarrow \left|\frac{1}{1-\bar{\lambda}}\right|<1\Rightarrow |1-\bar{\lambda}|>1$

对应复平面上 $(1,0)$ $R=1$ 的圆的外面

MEMO NO.
DATE . . .

稳定性和精度的求解步骤掌握

多线性多步法：

单步：$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,y_{n+1},h)$ 只需 y_n 即可求 y_{n+1}

2步 $y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$

用3个节点的 y_n 和 y' 来构造 y_{n+1}

$y_{n+1}=a_0y_n+a_1y_{n-1}+\cdots+a_ky_{n-k}+h(b_{-1}f_{n+1}+b_0f_n+\cdots+b_kf_{n-k})$

$f_j=f(x_j,y_j)$

Adams公式设计：

基于Taylor展开的构造法：

将右端各项 $y_{n-1}\cdots y_{n-k}$ f_{n+1}，$f_n\cdots f_{n-k}$ 在 x_n 点Taylor展开，与精确解 $y(x_{n+1})$ 在 x_n 的Taylor展开作比较，通过同类项系数相等得到关于 a_0 $a_1\cdots$ b_{-1} $b_0\cdots$ 的方程组。