MEMO NO.

DATE

数值分析

柴振华: hustczh@hust.edu.cn

闭卷: 数值实验报告: 20%-30%

考试占: 70%-80%

数值实验报告:

题目范围: 教材每章后面的数值实验题, 自选三题(至少)

提交时间: 第12周, 周三上午

报告中必须包含详细的代码、数值结果(图,表), 以及必要的结果描述与分析(科研的基本过程)(好的地方,原因, 不好的地方,不足在哪,可以怎么改进,其他什么更好的方法)

A4纸双面打印.

绪论

问题: 线性方程组的求解; 积分,微分; 微分方程的求解

解析解; 近似数值解: 数值分析

$$\sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad |x|<+\infty$$

Taylor展开

求解线性方程组: $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$

$\vdots$

$a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n$

MEMO NO.
DATE

根据Cramer法则:

i 系数行列式D不为0, 有唯一解.

$x_k = \frac{D_k}{D}$ $k=1,2,\cdots n$

D_k是把D的第k列 $(a_{1k}, a_{2k} \cdots a_{nk})^T$ 换成 $(b_1\ b_2 \cdots b_n)^T$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

项数: $C_n^1 C_{n-1}^1 \cdots C_1^1 = n!$

每一项来自不同行不同列, 每项n个乘法

所有元素

误差, 稳定性, 收敛性

Chapter1 误差.

真实值与计算值之间的差异

分类
- 模型误差 $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y}$
- 观测误差/测量误差.
- △ 截断误差/方法误差 } 更多的关注这两个.
- △ 舍入误差: 计算机字长有限

数值方法: 精度/误差.
效率

计算: $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

MEMO NO.
DATE

被积函数没有/找不到原函数

解法1: e^{-x^2} Taylor展开然后积分.

$e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}$ $|x^2|<+\infty$ $e^x=\sum_{x=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

注: $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ $|x|<+a$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^ndx$

一般有: $\neq\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 a_nx^ndx$ 只有当满足一致收敛性才可以

$|\frac{1}{3}-0.333|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$ $\frac{1}{3}$舍入成0.333. 舍入误差<最低位的$\frac{1}{2}$

解法2: 利用定积分的定义计算: 以直代曲

$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i)+R_N$

误差的
2. 传播与积累

例 $I_n=\frac{1}{e}\int_0^1x^ne^xdx$, $n=0,1,2,\cdots$

已知: $I_n=1-nI_{n-1}$: 此公式精确成立

迭代 $I_0=\frac{1}{e}\int_0^1e^xdx=1-\frac{1}{e}\approx0.6321\,2056$ 记为I_0^*

初始误差 $|E_0|=|I_0-I_0^*|<\frac{1}{2}\times10^{-8}$

计算机利用 $I_n=1-nI_{n-1}$ 来迭代计算. $\frac{1}{e(n+1)}<I_n<\frac{1}{n+1}$

观察第n步的误差 $|E_n|=|I_n-I_n^*|=|(1-nI_{n-1})-(1-nI_{n-1}^*)|=n|E_{n-1}|$

$\cdots=n!|E_0|$

MEMO NO.
DATE

初始的误差迅速累积：不稳定的算法
所以不能从 I_0^*.. I_1^*… 一直往后，误差会增大

方式二：$I_n = 1 - nI_{n-1} \Rightarrow I_{n-1} = \frac{1}{n}(1-I_n)$

从 $I_N^* \cdots I_2^* \cdot I_1^* I_0^*$ 往前算：$|E_{n-1}| = \frac{1}{n}|E_n|$ 误差会减小

$|E_n| = \frac{1}{N(N-1)\cdots(n+1)}|E_N|$ ：误差逐渐减小，稳定的算法

计算步数越多越容易引入误差　　可取 $I_N^* = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e(N+1)} + \frac{1}{N+1}\right]$

§误差与有效数字：

绝对误差：$e^* = x^* - x$　　x^* 近似值，x 准确值

不同地方定义有点小区别：$x - x^*$　$|x - x^*|$ 都有

$|e^*|$ 的上限记为 ε^*　　$|e^*| \le \varepsilon^*$ 绝对误差限

$x^* - \varepsilon^* \le x \le x^* + \varepsilon^*$　通常记为 $x = x^* \pm \varepsilon^*$

相对误差：$e_r^* = \frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$

由于 x 未知，通常 $e_r^* = \frac{e^*}{x^*}$

相对误差上限：$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$

$$\frac{e^*}{x} - \frac{e^*}{x^*} = \frac{e^*(x^* - x)}{xx^*} = \frac{(e^*)^2}{x^*(x^* - e^*)}$$

有效数字：若近似值x^*的误差限是某一位的半个单位，该位到x^*的第一位非0数字共有n位，则x^*有n位有效数字

四舍五入，可以直接得到绝对误差限。

用科学记数法：记$x^* = \pm 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m$ $(a_1 \neq 0)$

若 $|x - x^*| \leq 0.5 \times 10^{m-n}$ 则称x^*有n位有效数字，精确到10^{m-n}

$\pi = 3.14159265358979 32\cdots$ $\pi^* = 3.1415$

$\pi^* = 0.31415 \times 10^1$

$|\pi - \pi^*| = 0.0000926 \leq 0.5 \times 10^{-3}$

4位有效数字，精确到第3位

有效数字与相对误差限：

(1) 已知x^*有n位有效数字，则其相对误差限为：

$$\varepsilon_r^* = \left|\frac{\varepsilon^*}{x^*}\right| = \frac{0.5 \times 10^{m-n}}{0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m} = \frac{10^{-n}}{2 \times 0.a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$$

(2) x^*的相对误差限可写为 $\varepsilon_r^* = \dfrac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$

$$\text{则 } |x - x^*| \leq \varepsilon_r^* \cdot |x^*| = \frac{10^{-n+1}}{2(a_1+1)} \times 0.a_1a_2\cdots a_n \times 10^m$$

$$< \frac{10^{-n+1}}{2(a_1+1)} (a_1+1) \times 10^{m-1} = 0.5 \times 10^{m-n}$$

可见x^*至少有n位有效数字。

MEMO NO.

DATE

§函数的误差估计

$A=f(x)$ 若用 x^* 取代 x

$e^*(x)=x^*-x \qquad e^*(A)=f(x^*)-f(x)$

$f(x^*)-f(x)=f'(\xi)(x^*-x)$ 中值定理

x^* 与 x 非常接近时：$f'(\xi)\approx f'(x^*)$

则有 $|e^*(A)|\approx\underbrace{|f'(x^*)|}_{\text{放大因子}}|e^*(x)|$

放大因子，绝对误差条件数.

$$|e_r^*(A)|\approx\left|\frac{x^*\cdot f'(x^*)}{f(x^*)}\right||e_r^*(x)|$$

例：$y=\ln x$ $x\approx 20$. x 取几位有效数字可保证 y 的相对误差 $<0.1\%$

MEMO NO.
DATE

§几点注意

1. 避免两个相近的数相减：为保留更多有效数字

$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{x}}$ $\quad \ln(x+\varepsilon)-\ln x=\ln(1+\frac{\varepsilon}{x})$

2. 避免小分母：避免造成浮点溢出

3. 避免大数吃小数：大数和小数作加减法时，小数可能被忽略掉

某报求和时：先算小数求和，从小到大

4. 先化简再计算，减少误差积累

5. 选择稳定的算法

Chapter2. 插值

给一个函数类(比如，多项式函数，三角函数等)

一般选多项式函数来逼近：

$\forall f(x)\in C[a,b]$ $\exists P_n\in \Pi_n$ (n次多项式)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n|=0$ 逼近定理

定义：

$y=f(x)$在$[a,b]$上有定义，$a\le x_0< x_1\cdots < x_n\le b$

若存在简单函数$p(x)$使得 $p(x_i)=y_i$

就称$p(x)$为$f(x)$的插值函数 $x_0\cdots x_n$为插值节点，$[a,b]$为插值区间

$p(x_i)=y_i$称插值条件

若$p(x)$为不超过n次的代数多项式，$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ a_i为实数