MEMO NO.
DATE

# Chapter 4. 数值积分:

## §数值积分的基本概念:

定积分: $I=\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

被积函数 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$

积分中值定理: $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)\quad \xi\in[a,b]$

求近似 $f(\xi)$ 即可, 只是具体 $\xi$ 的位置不知道

- 梯形公式: $\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$
- 中矩形公式: $\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)f(\frac{a+b}{2})$
- Simpson公式: $\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)\frac{1}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$

$f(\xi)$: 结点处的函数值的加权平均来近似 $f(\xi)$

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)=(b-a)\sum_{k=0}^{n}c_k f(x_k)$$ : 机械求积法

$x_k$: 求积节点. $A_k$: 求积系数/权

① 精确性和衡量标准

② 求积公式的具体构造问题

③ 误差:

代数精度: 如果某个求积公式对所有次数不超过 $m$ 次的多项式都准确成立, 又对 $m+1$ 次不一定, 则称该求积公式具有 $m$ 次代数精度.

也即对 $m$ 次多项式, 余项 $R=\int_a^b f(x)dx-\sum A_k f(x_k)$ 为 0

具有 $m$ 阶代数精度, 只需对 $1, x, x^2 .. x^m$ 均精确成立, 一直找到不成立的即可

MEMO NO.
DATE

求积公式的构造：

$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 至少

若给定 $x_k$，则 $n+1$ 个待定系数 $A_k$，~~最高~~可达到 $n$ 次代数精度

$x_k$ 也不给定，则 $x_k$，$A_k$ $2n+2$ 个待定系数，至可达 $2n+1$ 次代数精度

插值型求积公式：

给定 $x_0\ x_1 \cdots x_n$，已知函数 $f(x)$，则可构造 $n$ 次插值多项式 $L_n(x)$

$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_k) l_k(x) \qquad l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_k) l_k(x) dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_k f(x_k)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_k = \int_a^b l_k(x)dx}$$

称为：

插值型求积公式

余项 $R[f] = \int_a^b [f(x) - L_n(x)]dx$

$$= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)dx$$

充要条件：形如 $\sum A_k f(x_k)$ 的求积公式至少有 $n$ 次代数精度 $\Leftrightarrow$ 该公式为插值型 $A_k = \int_a^b l_k(x)dx$

充要条件：

§2. Newton-Cotes公式:

等间距节点，插值型求积公式导出Newton-Cotes公式

节点等间距分布时: $x_k=a+kh$  $h=\frac{b-a}{n}$  $k=0,1,\dots,n$

$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$

$=\int_a^b \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{j=n} \frac{(x-x_j)}{(x_k-x_j)}dx$  令$x=a+th$

$=\int_0^n \prod_{\substack{j=0\\ k\neq j}}^{n}\frac{(t-j)h}{(k-j)h}\,h\,dt=\frac{(b-a)}{n}\frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\int_0^n \prod_{t\neq j}(t-j)dt$

Cotes系数 $C_k^{(n)}$   n表示n+1个点，n个等分
k表示第k个积分节点

Cotes表: n: n+1个节点对应的n.

Cotes系数之和为1.  $n\geq 8$时Cotes系数有正有负，稳定性得不到保证.

$R(T)=-\frac{1}{12}h^3f''(\xi)$ 梯形求积公式的余项 $h=b-a$

$R(S)=-\frac{1}{90}h^5f^{(4)}(\xi)$ Simpson求积公式的余项 $h=\frac{b-a}{2}$ 一定要记住

$=-\frac{1}{2880}h'^5f^{(4)}(\xi)$  $h'=(b-a)$
Cotes公式  至少

当n是偶数时，代数精度为n+1

求积公式的收敛性和稳定性:

定义: 收敛性: 在求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$ 若: $\lim_{\substack{n\to\infty\\ h\to 0}}\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=\int_a^b f(x)dx$，其中$h=\max(x_i-x_{i-1})$ 则称求积公式收敛。

稳定性: $\tilde{f}_k$: 输入计算机之后的值，$f(x_k)-\tilde{f}_k$ 相当于舍入误差
误差不会被放大.

MEMO NO.
DATE

对 $\forall \varepsilon>0$ 若存在 $\delta>0$ 只要 $|f(x_k)-\tilde{f}_k|<\delta$，就有 $\left|\sum_{k=0}^{n} A_k[f(x_k)-\tilde{f}_k]\right|\leq\varepsilon$，则称求积公式是稳定的。

定理：$\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ 中的系数 $A_k>0$ 则求积公式是稳定的

§3 复化求积：

由于插值型求积公式是由插值函数导出的，

高次插值多项式会导致 Runge 现象 对 Cotes 公式（等间距）

分段低次插值 ⇒ Newton-Cotes 复化求积公式

复化梯形公式：$h=\frac{b-a}{n}$ $n$ 个区间。$x_k=a+kh$ $(k=0,1,\cdots n)$

在 $[x_{k-1},x_k]$ 上用梯形公式：

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx\approx\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})[f(x_{k-1})+f(x_k)] \quad k=1,2,\cdots n$$

$$\Rightarrow\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{k-1})+f(x_k)]$$

$$=\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)\right]$$ 记作 $T_n$ → $n$ 个区间

两个端点都只加了一次，中间的点都加了2次

误差：$$R[f]=\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{h^3}{12}f''(\xi_k)\right]$$

$$=\frac{-h^2}{12}(b-a)\frac{\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)}{n}$$ 平均值

$$=\boxed{\frac{-h^2}{12}(b-a)f''(\xi)}$$ $\xi\in(a,b)$ $h=\frac{b-a}{n}$

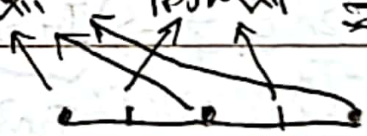
复化Simpson公式 $h=\frac{b-a}{n}$ $x_k=a+kh$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h}{6}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{6}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{h}{6}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})]$$ 记作 $S_n$ $h=\frac{b-a}{n}$

奇数点 偶数点 n个区间



误差: $\sum_{k=0}^{n-1} -\frac{h^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$

$$=-\frac{h^4}{2880}\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f^{(4)}(\xi)$$

$$=\frac{-h^4(b-a)}{2880}\cdot\frac{\sum_{k=0}^{n-1}f^{(4)}(\xi)}{n}$$

$$=\boxed{\frac{-h^4}{2880}(b-a)f^{(4)}(\xi)} \quad \boxed{h=\frac{b-a}{n}}$$

当$h\to0$时 复化Simpson的误差是复化梯形误差的无穷小量，误差更小

收敛速度:

若一个积分公式的误差满足 $\lim_{h\to0}\frac{R[f]}{h^p}=C<\infty$ 且 $C\neq0$，则称该积分公式是p阶收敛的

$T_n \sim O(h^2)$ $S_n \sim O(h^4)$ $C_n \sim O(h^6)$

复化求积公式一定是收敛的

MEMO NO.

DATE

$$R[f] = -\frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$$

$$= -\frac{h^2}{12}\sum_{k=1}^{n}\underline{[f''(\xi_k)\cdot h]}$$

像一个定积分 $h\to 0$时，微分求和的形式

$$= -\frac{h^2}{12}\int_a^b f''(x)dx = -\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

对$T_n$有：$R_{2n} \approx \frac{1}{4}R_n$ $h$缩小了一半，

$$\frac{I-T_{2n}}{I-T_n} \approx \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\underbrace{I-T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)}_{T_{2n}\text{的误差}}} = \frac{1}{2^2-1}(T_{2n}-T_n)$$

事后误差估计

之前的方法称事前估计：利用公式的余项，和误差限，直接求n

有时事前估计不好求，用事后估计

$$I-T_{2n} = \frac{1}{2^2-1}(T_{2n}-T_n)$$

$$\Rightarrow I = T_{2n} + \frac{1}{2^2-1}(T_{2n}-T_n) = \frac{2^2T_{2n}-T_n}{2^2-1} = S_n$$ (未给证明).

事后误差估计方法：

$T_{2n}$作$I$的近似值：$\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)$为截断误差，

若$\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n) < \varepsilon$ 则取$T_{2n}$作为近似值，否则继续

将区间等分求$T_{4n}$…

若是复化Simpson公式则有 $\frac{I-S_{2n}}{I-S_n} = \frac{1}{2^4} \Rightarrow I-S_{2n} = \frac{1}{2^4-1}(S_{2n}-S_n)$

MEMO NO.
DATE

照样可用复化 Simpson 公式作事后误差估计：$\boxed{I-S_{2n}=\frac{1}{2^4-1}(S_{2n}-S_n)}$

§4. Romberg 算法（龙贝格算法）

梯形法的递推化：

$T_n$：$n$ 等分，$n+1$ 个节点，将区间二分一次，则分点有 $2n+1$ 个，差节点有 $n+1$ 个

$$T_{2n}=\frac{1}{2}T_n+\frac{b-a}{2n}\sum_{H}^{n}f(x_i)\ x_i 为新节点$$

$$=\frac{1}{2}T_n+\boxed{\frac{b-a}{2n}}\sum_{k=1}^{n}f\left[a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right]\ 只有新节点$$

Romberg 算法：提高收敛速度：

$$\underbrace{I-T_{2n}=\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)}_{误差}\Rightarrow I=\frac{4}{3}T_{2n}-\frac{1}{3}T_n$$ 更精确，把误差加上去，就更准确

Simpson 公式：

一般：$\frac{2^2T_{2n}-T_n}{2^2-1}=S_n$

$$\frac{2^4S_{2n}-S_n}{2^4-1}=C_n$$

$$\frac{2^6C_{2n}-C_n}{2^6-1}=R_n$$ 龙贝格算法 Romberg 序列.

Richardson 外推法：由低阶公式产生高阶公式的一种方法：

$h\neq0$. $T_0(h)$ 近似 $I$，由 Taylor 展开有：假设

$T_0(h)-I=\alpha_1h+\alpha_2h^2+\alpha_3h^3+\cdots$ 误差 $O(h)$.

$h$ 对折：$T_0(\frac{h}{2})-I=\alpha_1\frac{h}{2}+\alpha_2(\frac{h}{2})^2+\alpha_3(\frac{h}{2})^3+\cdots$

MEMO NO.
DATE . .

$\therefore \dfrac{2T_0(\frac{h}{2})-T_0(h)}{2-1}-I=\underbrace{-\frac{1}{2}\alpha_2 h^2-\frac{3}{4}\alpha_3 h^3\cdots}$ 误差变成$O(h^2)$

记作 $T_1(h)=\dfrac{2T_0(\frac{h}{2})-T_0(h)}{2-1}=I+\beta_1 h^2+\beta_2 h^3+\cdots$ 误差$O(h^2)$.

$T_2(h)=\dfrac{2^2T_1(\frac{h}{2})-T_1(h)}{2^2-1}=I+\gamma_1 h^3+\cdots \quad O(h^3)$.

$\cdots$

$T_m(h)=\dfrac{2^m T_{m-1}(\frac{h}{2})-T_{m-1}(h)}{2^m-1}=I+\delta_1 h^{m+1}+\delta_2 h^{m+2}\cdots$

定理: $f(x)\in C^\infty[a,b]$ 则有

梯形公式: $T(h)=I+\alpha_1 h^2+\alpha_2 h^4+\cdots \alpha_l h^{2l}+\cdots$ $\alpha_i$与$h$无关

记 $T_1(h)=\dfrac{2^2T(\frac{h}{2})-T(h)}{2^2-1}=I+\beta_1 h^4+\beta_2 h^6+\cdots$ $\beta_i$与$h$无关

实际就是$S_n$ 消去$h^4$得到$T_2(h)$

$T_2(h)=\dfrac{2^4T_1(\frac{h}{2})-T_1(h)}{2^4-1}=I+\gamma_1 h^6+\gamma_2 h^8+\cdots$ $\gamma_i$与$h$无关

实际就是Cotes序列

$\cdots$

$T_0 h=T(h)$ 则经过m步以上: $T_m(h)=\dfrac{2^{2m}T_{m-1}(\frac{h}{2})-T_{m-1}(h)}{2^{2m}-1} \quad O(h^{2m+2})$

以上称Richardson外推加速算法

龙贝格求积算法: $T_0^k$表示k次二分求得的梯形值. $T_m^k$表示$\{T_0^k\}$的m次加速值, 则上式$T_m(h)$变成:

$T_m^k(h)=\dfrac{2^{2m}T_{m-1}^{k+1}-T_{m-1}^{k}}{2^{2m}-1}$、龙贝格求积算法

MEMO NO.
DATE

§5 高斯型积分：

克服Runge现象 $\begin{cases}\text{低次分段插值} \to \text{复化求积} \\ \text{chebyshev插值多项式} \to \text{Gauss型积分}\end{cases}$

插值型求积公式：求积节点给定，确定n+1个求积系数，n阶代数精度

n+1个求积节点未知，n+1个系数也未知，→确定2n+2个参数，2n+1阶代数精度

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

构造至少具有2n+1阶代数精度的求积公式：节点 $x_0\, x_1 \cdots x_n$ 和求积系数 $A_0\ A_1 \cdots A_n$ 都作为待定系数

$x_0\, x_1 \cdots x_n$ 称为 Gauss点，公式称为Gauss型求积公式。

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k) \qquad \boxed{A_k=\int_a^b \rho(x)l_k(x)dx}$$

由n+1个求积节点的求积公式具有2n+1阶代数精度 ⟺ Gauss型求积公式

Gauss型求积公式仍然是插值型求积公式，关键求Gauss点

若Gauss点已知，求$A_k$ $\boxed{A_k=\int_a^b \rho(x)l_k(x)dx}$ 仍是插值型积分.

① 取 $f(x)=l_j(x)$ $\int_a^b l_j(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_k l_j(x_k)=A_j$

~~$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$~~

② $f(x)=1, x \cdots x^n$ 代入求$A_k$.

选互异节点 $x_0 \cdots x_n$（n+1个求积节点），使插值型求积公式的代数精度为2n+1，则称该求积公式为Gauss型的，称这些节点为Gauss点。

MEMO NO.
DATE

Gauss点与正交多项式零点的关系：
一般利用正交多项式求Gauss点

定理：$x_0\ x_1 \cdots x_n$ 为Gauss点 $\Leftrightarrow$ $\omega_{n+1}(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$ 与任意次数不大于n的多项式 $p(x)$ 带权正交 $\int_a^b \rho(x)\omega_{n+1}(x)p_n(x)dx=0$
n+1次，

构造正交多项式序列 $\{Q_0, Q_1, \ldots Q_{n+1}\}$

$$Q_{n+1}=(x-a_{k+1})Q_n-b_kQ_{n-1}$$

$$Q_0=1$$

$$a_{k+1}=\frac{(x\varphi_k,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)} \quad b_k=\frac{(\varphi_k,\varphi_k)}{(\varphi_{k-1},\varphi_{k-1})}$$

$x_0\ x_1 \cdots x_n$ 为Gauss点 $\Leftrightarrow$ $\omega_{n+1}(x)=\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$ 与任次数不超过n的多项式带权正交

$$\int_a^b\rho(x)\omega_{n+1}(x)p(x)dx=0 \quad p(x)\in H_n(x)$$

不超过n次多项式

$\Updownarrow$

构造正交多项式系列 $\{Q_0, Q_1 \cdots Q_{n+1}\}$，取 $\omega_{n+1}$
n+1次

正交多项式的零点
$\omega_{n+1}$的零点

正交多项式有性质：$g_{k+1}=(x-a_{k+1})g_k-b_kg_{k-1}$

$$a_{k+1}=\frac{(xg_k,g_k)}{(g_k,g_k)} \quad b_0=0 \quad b_k=\frac{(g_k,g_k)}{(g_{k-1},g_{k-1})}$$

Gauss求积公式中取 $f(x)=\omega_{n+1}^2(x)$，左边 $\int_a^b\rho(x)f(x)dx>0$
右边 $\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=0$，所以 n+1个节点的~~插值型~~Gauss求积公式

MEMO NO.
DATE

n+1个节点：插值型求积公式

的最高代数精度为 $2n+1$： $n \le$ 代数精度 $\le 2n+1$

例 求形如 $\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$ 两点的Gauss型求积公式：

设：$\varphi_2 = x^2 + bx + c$ $\varphi_2$：2次多项式

$\varphi_2$ 与 $\varphi_0$ $\varphi_1$ 都正交 $\Rightarrow \begin{cases} \int_a^b \sqrt{x}(x^2+bx+c)\cdot 1\, dx = 0 \\ \int_a^b \sqrt{x}(x^2+bx+c)\, x\, dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{10}{9} \\ c = \frac{5}{21}. \end{cases}$

求 $\varphi_2 = 0$ 的2个根，即为Gauss点 $x_0$，$x_1$

再求 $A_0$ 和 $A_1$

特殊的正交多项式族：

① Legendre多项式族：$[-1,1]$上，$\rho(x) \equiv 1$.

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k (x^2-1)^k}{dx^k}$$ Gauss-Legendre多项式

② chebyshev多项式族，定义在$[-1,1]$上，$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x)$$ Gauss-chebyshev多项式

Gauss-legendre求积公式：

不是$[-1,1]$，而是$[a,b]$ $x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$，转化成$[-1,1]$

MEMO NO.
DATE . .

Gauss-chebyshev多项式：$[-1,1]$上 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}f(x)dx \approx \sum A_k f(x_k)$

$n+1$次切比雪夫多项式的零点 $\Rightarrow$

$\boxed{A_k=\frac{\pi}{n+1}}$ 求积系数的形式非常好

但是要注意，有$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的权函数，剩下的部分才是$f(x)$

Gauss公式的余项

$R[f]=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$

$n+1$个点、只有$2n+1$阶代数精度，

$n+1$个点上的插值多项式只有$2n+1$阶 $\longrightarrow$ Hermite多项式

$R[f]=\int_a^b[f(x)-H(x)]dx$

$=\int_a^b\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}w^2(x)dx$

$\boxed{=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b w^2(x)dx}$

收敛性：$f(x)$在$[a,b]$上连续 则当$n\to+\infty$ Gauss型求积公式收敛到

$\int_a^b \rho(x)f(x)dx$

稳定性：$A_k=\sum_{j=0}^{k}A_j l_k^2(x_j)=\int_a^b \rho(x)\underbrace{l_k^2(x)}_{2n次}dx>0$ 稳定.