量子力学习题集

马祥芸

August 24, 2022

Contents

1 薛定谔方程与一维定态问题

1.1 一维有限势场

定理 1.1. 势函数具有偶对称 $V(x) = V(-x)$,$\psi(x)$ 和 $\psi(-x)$ 均是波函数的解

证明.

$$\frac{d^2}{[d(-x)]^2} = \frac{d^2}{dx^2}$$

□

定理 1.2. 设 $V(x) = V(-x)$, 每一个$\psi(x)$ 都有确定的宇称 (奇偶性)(注意每一个解的宇称可以不相同)

证明. 由于定理 1.1，构造

$$f(x) = \psi(x) + \psi(-x)$$
$$g(x) = \psi(x) - \psi(-x)$$

$f(x)$ 为偶宇称，$g(x)$ 为奇宇称，它们均为能量 E 的解
而 $\psi(x)$ 与 $\psi(-x)$ 都可以用 $f(x)$ 和 $g(x)$ 表示

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x)]$$
$$\psi(-x) = \frac{1}{2}[f(x) - g(x)]$$

□

推论 1. 设 $v(-x) = v(x)$, 而且对应于能量本征值 E, 方程的解无简并, 则该能量本征态必有确定的宇称, 例如一维谐振子，一维对称方势阱

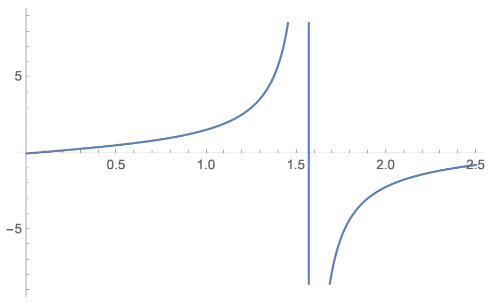
- 若 E 非简并　本征函数具有确定宇称 (两种宇称)

$$\psi(-x) = \hat{P}\psi(x) = c\psi \quad c = \pm 1$$

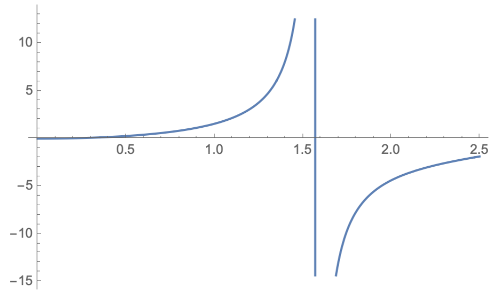
- 若 E 简并　$\psi(x)$ 和 $\psi(-x)$ 分别为独立的波函数，它们的线性组合是具有宇称的解

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi(x) \pm \psi(-x)]$$

偶宇称涉及到的函数图像如下

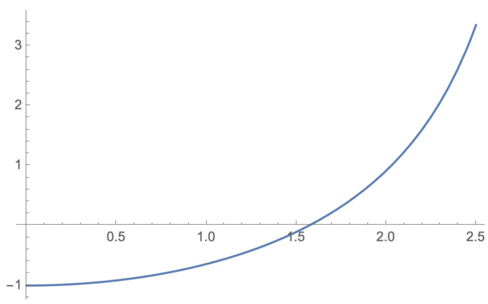


(a) $y = \tan x$

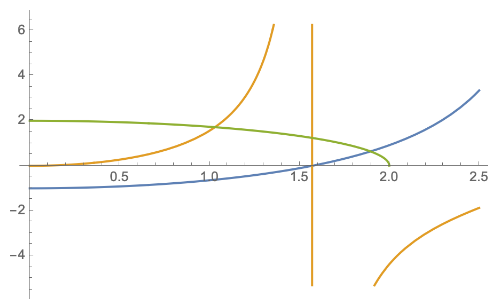


(b) $y = x\tan x$

奇宇称涉及到的函数图像如下



(a) $y = -x\cot x$



(b) 三个函数曲线

由于此题的势能函数具有偶对称, 因此波函数可能存在偶 or 奇宇称 (需要分开讨论), 此题中偶宇称至少存在一个交点, 而奇宇称有解必须有条件 $Q > \frac{\pi}{2}$, 由题意可知存在且仅存在一个束缚态，所以保留偶宇称的唯一解即可 $(Q < \frac{\pi}{2})$

1.2 一维 δ 势

先不考虑 $x \neq 0$ 的局部区域, 丢掉 $\delta(x)$ 势阱, 需要用到一阶微分变化值的关系

$$\triangle(\frac{d\psi}{dx}) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\hbar^2}{2\mu} V(x)\psi(x)dx$$

注意不要丢了 $\delta(x)$ 前面的参数，需要用到其积分性质

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x)\psi(x)dx = \psi(0)$$

在归一化中，由于在 $x \neq 0$ 其他的区域的波函数具有对称性，对其中一边积分时其值为 $\frac{1}{2}$

$$\int_{0}^{+\infty} A^2 e^{-2kx} dx = \frac{1}{2}$$

1.3 一维分段无限深势阱

2 力学量算符

3 表象

4 三维定态问题

5 近似方法

6 自旋

7 全同粒子体系

8 散射