Dualidade

Estudamos problemas de otimização linear, que modelam situações e suas variáveis significam alguma decisão a ser tomada:

- Quantidades de cada ingrediente em uma mistura;
- níveis de estoque de produtos em um determinado período;
- número de barras a serem cortadas segundo um padrão de corte;
- etc

Por outro lado, os valores dessas variáveis, dependem dos dados do problema:

- o estoque disponível dos ingredientes;
- capacidades de maquinas;
- a demanda dos itens;
- etc

embora sejam dados, em geral é conveniente um decisor examinar como as possíveis variações nos dados interferem na solução do problema.

As questões seguintes podem ser de interesse:

1. Em um problema de planejamento da produção, se o estoque de um matéria-prima aumentasse, como o custo de produção se alteraria?
2. Em um problema de distribuição de água em redes urbanas, se a capacidade de um reservatório de água fosse ampliada, como o consumo de energia para bombeamento de água seria afetado?
3. Em um problema de corte de material, se a demanda por um tamanho de um item fosse maior ou menor, como a perda de material seria alterada?

Ditas observações correspondem a analisar o modelo matemático desde um outro ponto de vista e introduzem um novo modelo de otimização linear, chamado problema dual, em correspondência ao original, que é chamado problema primal.

O Problema Primal:

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{Sujeito a :} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, o qual será denominado de problema primal

Propriedade:

Considere o seguinte problema primal:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{Sujeito a :} \quad & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

então o PROBLEMA DUAL é dado pelo seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & g(\lambda) = b^T \lambda \\ \text{Sujeito a :} \quad & \\ & A^T \lambda \leq c \end{aligned}$$

onde onde $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{m \times 1}$

Definição:

O conjunto de restrições $A^T\lambda \leq c$ é chamado de restrições duais, e todo vetor que satisfaça as restrições duais é chamado de solução dual viável.

Observações:

1. Problema dual é maximização;
2. O número de variáveis duais λ é igual ao número de restrições do primal;
3. O número de restrições duais é igual ao número de variáveis x do primal;
4. Os coeficientes da função objetivo dual são os coeficientes do vetor de recursos b do primal;
5. A matriz dos coeficientes das restrições duais é a transposta da matriz dos coeficientes do primal, A^T;
6. As restrições duais são do tipo $\leq$;
7. O vetor de recursos dual é formado pelos coeficientes c da função objetivo primal

Exemplo:

Considere o problema primal

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a :} \\ \begin{array}{ccccccc} \frac{4}{5}x_1 & + & \frac{2}{5}x_2 & & & = & 108 \\ & & \frac{3}{5}x_2 & + & \frac{9}{10}x_3 & = & 120 \end{array} \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0.$$

Na forma matricial:

$$\text{Minimizar} \quad f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{9}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 \\ 120 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim o seu respectivo problema dual é na forma matricial:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & g(\lambda) = \begin{bmatrix}108 & 120\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{bmatrix} \\
\text{Sujeito a :} & \\
& \begin{bmatrix}\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{9}{10}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}1 \\ 1 \\ 1\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ou de forma equivalente:

$$
\begin{array}{l}
\text{Maximizar } g(\lambda) = 108\lambda_1 + 120\lambda_2 \\
\text{sujeito a :} \\
\qquad \begin{array}{cccccc}
\frac{4}{5}\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & \leq & 1 \\
\frac{2}{5}\lambda_1 & + & \frac{3}{5}\lambda_2 & \leq & 1 \\
0\lambda_1 & + & \frac{9}{10}\lambda_2 & \leq & 1
\end{array}
\end{array}
$$

Além disso:

- O problema primal tem como solução ótima:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 200 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a qual fornece o valor ótimo:

$$\boxed{f(x^*) = 235}$$

- O problema dual tem como solução ótima:

$$\lambda^* = \begin{bmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

a qual fornece o valor ótimo:

$$\boxed{g(\lambda^*) = 235}$$

Propriedade:

O dual do problema dual é o problema primal.

Observação:

são validas as seguintes equivalências:

$$\boxed{\min f(x) = -\max -f(x)}$$

e

$$\boxed{\max g(x) = -\min -g(x)}$$

Exemplo:

Considere o problema primal

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimizar } f(x) = x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeito a :} \\
\begin{array}{rcrcr}
-2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 5 \\
x_1 & - & x_2 & \leq & 2
\end{array} \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.
\end{array}
$$

Adicionando as variáveis de folga x_3, x_4 e x_5:

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimizar } f(x) = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{sujeito a :} \\
\begin{array}{rcrcccccccc}
-2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 3 \\
3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 5 \\
x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2
\end{array} \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.
\end{array}
$$

Na forma matricial:

$$\text{Minimizar} \quad f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim o seu respectivo problema dual é na forma matricial:

$$\text{Maximizar} \quad g(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :} \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou de forma equivalente:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Maximizar } g(\lambda) = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \text{sujeito a :} \\ \quad \begin{array}{ccccccc} -2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & \leq & 1 \\ \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & - & \lambda_3 & \leq & 2 \\ \lambda_1 & & & & & \leq & 0 \\ & & \lambda_2 & & & \leq & 0 \\ & & & & \lambda_3 & \leq & 0 \end{array} \end{array}}$$

Exemplo:

Considere o problema primal

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } f(x) = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a :} \\ \qquad \begin{array}{rcrcl} -2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \end{array} \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

Adicionando as variáveis de folga x_3, x_4 e x_5:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } f(x) = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{sujeito a :} \\ \begin{array}{rcrcccccccl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & + & x_4 & & & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 2 \end{array} \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0. \end{array}$$

Na forma matricial:

$$\text{Maximizar} \quad f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembremos que $\max f(x) = -\min -f(x)$, assim:

$$- \quad \text{Minimizar} \quad -f(x) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim o problema dual na forma matricial é:

$$-\quad \text{Maximizar} \quad g(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicamos $-\max g(\lambda) = \min -g(\lambda)$, assim:

$$\text{Minimizar} \quad -g(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ -\lambda_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ -\lambda_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazemos $h := -g$ e as mudanças de variáveis:

$$\mu_1 := -\lambda_1, \quad \mu_2 := -\lambda_2, \quad \mu_3 := -\lambda_3$$

e obtemos:

$$\text{Minimizar} \quad h(\mu) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de forma equivalente:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Mimimizar } h(\mu) = 3\mu_1 + 5\mu_2 + 2\mu_3 \\ \text{sujeito a :} \\ \begin{array}{ccccccc} -2\mu_1 & + & 3\mu_2 & + & \mu_3 & \geq & 1 \\ \mu_1 & + & 4\mu_2 & - & \mu_3 & \geq & 2 \end{array} \\ \\ \mu_1 \geq 0,\ \mu_2 \geq 0,\ \mu_3 \geq 0. \end{array}}$$

Exemplo:

Considere o problema primal

$$
\begin{array}{l}
\text{Maximizar } f(x) = x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeito a :} \\
\begin{array}{rcccccl}
-2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\
3x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 5
\end{array} \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ livre},\ x_3 \leq 0.
\end{array}
$$

Para transformar o problema acima na formatação padrão, fazemos:

$$x_2 = x_2^+ - x_2^-, \qquad \overline{x}_3 := -x_3,$$

e adicionamos as variáveis de folga x_4 e x_5 nas restrições:

$$
\begin{array}{l}
\text{Maximizar } f(x) = x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + 0\overline{x}_3 + 0x_4 + 0x_5 \\
\text{sujeito a :} \\
\begin{array}{rcccccccccl}
-2x_1 & + & x_2^+ & - & x_2^- & - & \overline{x}_3 & - & x_4 & & & = & 3 \\
3x_1 & + & 4x_2^+ & - & 4x_2^- & & & & & + & x_5 & = & 5
\end{array}
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2^+ \geq 0,\ x_2^- \geq 0,\ \overline{x}_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Na forma matricial:

$$\text{Maximizar} \quad f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ \overline{x}_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ \overline{x}_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ \overline{x}_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Lembremos que $\max f(x) = -\min -f(x)$, assim:

$$
- \quad \text{Minimizar} \quad -f(x) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & +2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ \overline{x}_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}
$$

$$
\text{Sujeito a :}
$$

$$
\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ \overline{x}_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ \overline{x}_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Assim o problema dual na forma matricial é:

$$-\quad \text{Maximizar} \quad g(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -1 & -4 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aplicamos $-\max g(\lambda) = \min -g(\lambda)$, assim:

$$\text{Minimizar} \quad -g(\lambda) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -1 & -4 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazemos $h := -g$ e as mudanças de variáveis:

$$\mu_1 := -\lambda_1, \quad \mu_2 := -\lambda_2$$

e obtemos:

$$\text{Minimizar} \quad h(\mu) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Sujeito a :}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \\ -1 & -4 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de forma equivalente:

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimizar } h(\mu) = 3\mu_1 + 5\mu_2 \\
\text{sujeito a :} \\
\begin{array}{rcrcr}
-2\mu_1 & + & 3\mu_2 & \geq & 1 \\
\mu_1 & + & 4\mu_2 & \geq & 2 \\
-\mu_1 & - & 4\mu_2 & \geq & -2 \\
-\mu_1 & & & \geq & 0 \\
-\mu_1 & & & \geq & 0 \\
 & & \mu_2 & \geq & 0
\end{array}
\end{array}
$$

ou de forma reduzida

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\text{Minimizar } h(\mu) = 3\mu_1 + 5\mu_2 \\
\quad \text{sujeito a :} \\
\begin{array}{rcrcr}
-2\mu_1 & + & 3\mu_2 & \geq & 1 \\
\mu_1 & + & 4\mu_2 & = & 2
\end{array} \\
\\
\mu_1 \leq 0,\ \ \mu_2 \geq 0.
\end{array}
}
$$

Regras para construção do problema dual

Primal (dual)		Dual (primal)	
Minimização		Maximização	
Vetor de recursos		Gradiente do objetivo	
Gradiente do objetivo		Vetor de recursos	
Restrição	$=$	Livre	Variável
	$\leq$	$\leq$	
	$\geq$	$\geq$	
Variável	$\geq$	$\leq$	Restrição
	$\leq$	$\geq$	
	Livre	$=$	

Exemplo:

Considere o problema primal

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x) = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a :} \\ \begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \end{array} \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{array}$$

Primal (dual)		Dual (primal)	
Minimização		Maximização	
Vetor de recursos		Gradiente do objetivo	
Gradiente do objetivo		Vetor de recursos	
Restrição	$=$	Livre	Variável
	$\leq$	$\leq$	
	$\geq$	$\geq$	
Variável	$\geq$	$\leq$	Restrição
	$\leq$	$\geq$	
	Livre	$=$	

Assim o seu respectivo problema dual é:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } g(\lambda) = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \text{sujeito a :} \\ \begin{array}{rcrcrcr} -2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & \leq & 1 \\ \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & - & \lambda_3 & \leq & 2 \end{array} \\ \\ \lambda_1 \leq 0,\ \lambda_2 \leq 0,\ \lambda_3 \leq 0. \end{array}$$

Exemplo:

Considere o problema primal

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } f(x) = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a :} \\ \begin{array}{rcrcc} -2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \end{array} \\ \qquad x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0. \end{array}$$

Primal (dual)		Dual (primal)	
Minimização		Maximização	
Vetor de recursos		Gradiente do objetivo	
Gradiente do objetivo		Vetor de recursos	
Restrição	$=$ $\leq$ $\geq$	Livre $\leq$ $\geq$	Variável
Variável	$\geq$ $\leq$ Livre	$\leq$ $\geq$ $=$	Restrição

Assim o seu respectivo problema dual é:

$$\begin{array}{l} \text{Mimimizar } g(\lambda) = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ \text{sujeito a :} \\ \begin{array}{rcrcrcc} -2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 & \geq & 1 \\ \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & - & \lambda_3 & \geq & 2 \end{array} \\ \\ \qquad \lambda_1 \geq 0, \;\; \lambda_2 \geq 0, \;\; \lambda_3 \geq 0. \end{array}$$

Exemplo:

Considere o problema primal

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } f(x) = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a :} \\ \begin{array}{ccccccc} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 5 \end{array} \\ \quad x_1 \geq 0, x_2 \text{ livre}, \ x_3 \leq 0. \end{array}$$

Primal (dual)		Dual (primal)	
Minimização		Maximização	
Vetor de recursos		Gradiente do objetivo	
Gradiente do objetivo		Vetor de recursos	
Restrição	$=$	Livre	Variável
	$\leq$	$\leq$	
	$\geq$	$\geq$	
Variável	$\geq$	$\leq$	Restrição
	$\leq$	$\geq$	
	Livre	$=$	

Assim o seu respectivo problema dual é:

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } g(\lambda) = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ \text{sujeito a :} \\ \begin{array}{ccccc} -2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & \geq & 1 \\ \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & = & 2 \\ \lambda_1 & & & \leq & 0 \end{array} \\ \quad \lambda_1 \leq 0, \ \lambda_2 \geq 0. \end{array}$$

Relações Primais-Duais

Denotemos:

- O conjunto de soluções viáveis do Problema Primal por:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b,\ x \geq 0\}$$

- O conjunto de soluções viáveis do Problema Dual por:

$$D = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^m \,:\, A^T\lambda \leq c\right\}$$

Propriedade:
Para todo $\lambda \in D$ e para todo $x \in P$ se verifica

$$g(\lambda) \leq f(x).$$

Propriedade:
Suponha que $P \neq \emptyset$. Então:

O problema Primal não tem solução ótima $\Longleftrightarrow D = \emptyset$

Exemplo:

Considere o par de problemas primal-dual

$$\text{Primal :}$$
$$\text{Maximizar } f(x) = x_1 + x_2$$
$$\text{sujeito a :}$$
$$\begin{array}{ccccc} -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & \leq & 1 \end{array}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$$P \neq \emptyset$$

porém $f(x) \longrightarrow +\infty$

$$\text{Dual :}$$
$$\text{Minimizar } g(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2$$
$$\text{sujeito a :}$$
$$\begin{array}{ccccc} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & \geq & 1 \\ \lambda_1 & - & 2\lambda_2 & \geq & 1 \end{array}$$
$$\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0$$

$$D = \emptyset$$

Propriedade:
Suponha que $D \neq \emptyset$. Então:

$$\text{O problema Dual não tem solução ótima} \iff P = \emptyset$$

Caso quando o primal e o dual são inviáveis

Exemplo:

Considere o par de problemas primal-dual

$$\text{Primal :}$$

$$\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x_1) = -x_1 \\ \text{sujeito a :} \\ \qquad 0\,x_1 = 1 \\ \qquad x_1 \geq 0 \end{array}$$

$$\text{Dual :}$$

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } g(\lambda_1) = \lambda_1 \\ \text{sujeito a :} \\ \qquad 0\,\lambda_1 \leq -1 \end{array}$$

equação impossível

$$P = \emptyset$$

desigualdade impossível

$$D = \emptyset$$

$\therefore$ Primal e Dual são inviáveis.

Propriedade:

O problema primal tem solução ótima $\iff$ o dual tiver solução ótima.

Propriedade:

Sejam $x^* \in P$ e $\lambda^* \in D$.

$$\text{Se } f(x^*) = g(\lambda^*) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x^* \text{ é solução ótima primal} \\ \text{e} \\ \lambda^* \text{ é solução ótima dual} \end{array} \right.$$

Propriedade:(folgas complementares)

As soluções $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$ são ótimas, primal e dual respectivamente, se e somente se:

$$\begin{array}{cl} Ax = b, \quad x \geq 0 & (x \text{ é primal viável}) \\ A^T\lambda + \mu = c, \quad \mu \geq 0 & (\lambda \text{ é dual viável}) \\ \mu_j x_j = 0 \quad j = 1, \ldots, n & (\text{folgas complementares}) \end{array}$$

Exemplo:
Considere o par de problemas primal-dual

Primal :

$$
\begin{array}{l}
\text{Minimizar } f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{sujeito a :} \\
\begin{array}{ccccccc}
\frac{4}{5}x_1 & + & \frac{2}{5}x_2 & & & = & 108 \\
 & & \frac{3}{5}x_2 & + & \frac{9}{10}x_3 & = & 120
\end{array} \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

Dual :

$$
\begin{array}{l}
\text{Maximizar } g(\lambda) = 108\lambda_1 + 120\lambda_2 \\
\text{sujeito a :} \\
\begin{array}{ccccc}
\frac{4}{5}\lambda_1 & + & 0\lambda_2 & \leq & 1 \\
\frac{2}{5}\lambda_1 & + & \frac{3}{5}\lambda_2 & \leq & 1 \\
0\lambda_1 & + & \frac{9}{10}\lambda_2 & \leq & 1
\end{array}
\end{array}
$$

Consideremos a solução $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (35, 200, 0)$. Calculemos uma solução dual que verifique as folgas complementares

$$
\left.\begin{array}{l}
\mu_1 x_1^* = 0 \\
\mu_2 x_2^* = 0 \\
\mu_3 x_3^* = 0
\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0
$$

$$
A^T\lambda + \mu = c, \quad \mu \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{9}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l}
\frac{4}{5}\lambda_1 = 1 \\
\frac{2}{5}\lambda_1 + \frac{3}{5}\lambda_2 = 1 \\
\frac{9}{10}\lambda_2 + \mu_3 = 1
\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l}
\lambda_1 = \frac{5}{4} \\
\lambda_2 = \frac{5}{6} \\
\mu_3 = \frac{1}{4}
\end{array}\right.
$$

Assim

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (35, 200, 0)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6}\right)$$

verificam as folgas complementares. Portanto são soluções ótimas primal e dual. Além disso:

$$f(x^*) = 235 = g(\lambda)$$

Propriedade: (Dualidade forte)
As soluções $x^* \in P$ e $\lambda^* \in D$ são ótimas, primal e dual respectivamente $\iff \quad f(x^*) = g(\lambda^*)$.

Resumo:

Sejam

Primal:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{Sujeito a :} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dual:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & g(\lambda) = b^T \lambda \\ \text{Sujeito a :} & \\ & A^T \lambda \leq c \end{aligned}$$

Então:

1. O Primal tem solução ótima $\Longleftrightarrow$ o Dual também tiver solução ótima;
2. Se x^* é solução ótima primal e λ^* é uma solução ótima dual $\Longleftrightarrow f(x^*) = g(\lambda^*)$
3. Se $f(x) \longrightarrow -\infty \Longrightarrow D = \emptyset$
4. Se $g(\lambda) \longrightarrow +\infty \Longrightarrow P = \emptyset$
5. Pode acontecer que $P = \emptyset$ e $D = \emptyset$

Bibliografia

1. Arenales, Marcos; Armentano, Vinícius; Morabito, Reinaldo; Yanasse, Horacio - Pesquisa Operacional - Elsevier - 1^a edição - (2007).
2. Taha, Hamdy A. - Pesquisa Operacional - Pearson/Prentice Hall - 8^a edição - (2007).
3. Hillier, Frederick S.; Lieberman, Gerald J. - Introdução à Pesquisa Operacional - Mc Graw Hill - 9^a edição - (2005).
4. Lachtermacher, Gerson - Pesquisa Operacional na Tomada de Decisões - Prentice Hall Brasil - 4^a edição - (2009).