

# GERT 网络的矩阵式表达及求解模型

陶良彦<sup>1,3</sup>, 刘思峰<sup>2,3</sup>, 方志耕<sup>1,3</sup>, 陈 顶<sup>1,3</sup>

(1. 南京航空航天大学经济与管理学院, 江苏 南京 210016; 2. 英国 De Montfort 大学计算智能研究中心, 莱斯特 LE1 9BH; 3. 南京航空航天大学灰色系统研究所, 江苏 南京 210016)

**摘 要:** 图示评审技术(graphic evaluation and review technique, GERT)解析法一般利用信号流图的拓扑特征(梅森公式)和矩母函数进行求解,但当 GERT 网络节点较多且结构复杂(回路众多)时,拓扑结构特征的分析十分困难,易出现错判或遗漏情况。针对此问题,将 GERT 网络用矩阵形式进行表征,分析了以梅森公式为基础的解析法与矩阵变换的关系,设计了两类基于矩阵的 GERT 求解算法。首先给出 GERT 网络与信号流图增益矩阵、流图增益矩阵——对应关系,分析增益矩阵行列式变换与信号流图求解公式的对应关系,设计 GERT 网络的增益矩阵行列式变换求解算法。另外,研究 GERT 网络(信号流图)化简操作(消除自环、消除节点)在信号流图增益矩阵上的变换形式,提出了 GERT 网络解析的矩阵变换方法。最后用两个例子说明矩阵表征及求解模型的简便性和正确性,为 GERT 解析的计算机操作奠定基础。

**关键词:** 图示评审技术; 矩阵表达; 矩阵行列式解析法; 矩阵变换

中图分类号: C 93

文献标志码: A

DOI:10.3969/j.issn.1001-506X.2017.06.17

## Matrix representation model and its solution of GERT network

TAO Liangyan<sup>1,3</sup>, LIU Sifeng<sup>2,3</sup>, FANG Zhigeng<sup>1,3</sup>, CHEN Ding<sup>1,3</sup>

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;  
2. Centre for Computational Intelligence, De Montfort University, Leicester LE1 9BH, United Kingdom;  
3. Institute for Grey Systems Studies, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

**Abstract:** The typical analytical algorithm for graphic evaluation and review technique (GERT) is based on the topological properties of the signal flow graph (Mason formula) and the moment generating function, whereas it is tremendously difficult to analyze the topological characteristics of the GERT network when the network consists of a large number of nodes and complex structure (including many loops). The complexity of GERT network may lead to misjudge and false negative of the loops. For this problem, the matrix representation of the GERT network is explored, the corresponding relationship between the Mason formula-based algorithm and the matrix transform is analyzed, and two kinds of algorithms based on matrix for GERT network are designed. The first method is to give the gain matrix of the signal flow graph and gain matrix of the flow graph for a given GERT network firstly, and then to study the relationship between the determinant of the gain matrix and the Mason formula, and to design the resolving algorithm finally. The other method is to utilize the transform operators on the matrix to represent the simplification operators of the signal flow graph including eliminating self-loop and some unconcerned nodes. As a consequence, the algorithm based on matrix transform is introduced. Finally, two illustrative examples are presented to demonstrate the convenience and accuracy of the proposed methods, which may provide a tool for the computer calculation of the GERT network.

**Keywords:** graphic evaluation and review technique (GERT); matrix representation; matrix determinant solution; matrix transform

## 0 引 言

自 1966 年文献[1]提出图示评审技术(graphic evaluation

and review technique, GERT)以来,该技术已在可靠性评价、项目计划与进度、供应链管理、新产品开发管理、应急管理、主导产业选择等领域得到广泛应用。文献[2]构造了一种

收稿日期:2016-05-13; 修回日期:2016-10-03; 网络优先出版日期:2017-01-12。

网络优先出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2422.TN.20170112.1622.008.html>

基金项目: 欧盟第 7 研究框架玛丽居里国际人才引进计划 Fellow 项目(FP7-PIIF-GA-2013-629051); 国家自然科学基金(91324003, 71671090, 71671091); 国家社科基金重点项目(12AZD102); 中央高校基本科研业务费专项资金(NJ20140032, NP2015208); 江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(KYZZ15\_0092)资助课题

基于新的模糊运算法则的模糊 GERT 模型,并将此模型应用于评价军用飞机  $n$  次成功起落后的模糊可靠性;文献[3]提出了一类 F 系统与连续  $k/n$  系统结合的新模型,并采用 GERT 技术评估该系统可靠性;文献[4]针对 GERT 网络参数未知情况,提出了优化未知参数的 GERT 反问题模型,并将其应用在复杂装备进度计划中;文献[5]利用 GERT 模型分析了多团队多项目背景下的项目计划问题;文献[6]构造多层次 GERT 网络,分析了复杂装备主制造商和各级供应商进度之间的复杂关系;文献[7]构造了多阶段供应链系统的 GERT 模型,并以此为工具研究了订单分配及供应链成员库存状态问题,研究发现供应链成员间看似简单的供应需要关系对供应链的订单和库存状态具有显著影响;文献[8]建立了多级供应链系统成本的随机网络模型,给出了模型的结构性质特征及解析算法,分析了供应链系统成本构成以及企业生产成本波动对供应链系统成本的灵敏度;文献[9]针对在主制造商-供应商模式下的复杂产品质量管控问题,基于 GERT 网络技术设计了供应商质量损失传递网络模型,测量供应商质量损失及其波动对复杂产品质量影响程度,寻找供应商网络的关键质量源;在新产品开发项目管理上,文献[10]应用 GERT 描述并行新产品开发项目的开发流程,表征开发过程中信息和交互的复杂性,进而估计项目完成时间;文献[11]以能效传递关系为基础,构建了能源生产和供应业部门与其他部门之间能源传递 GERT 网络模型,分析各部门之间的等价转移概率,并根据结果给出主导产业选择上的建议。此外 GERT 在应急管理<sup>[12]</sup>、再制造工艺管理<sup>[13]</sup>等领域也得到广泛应用。

具体到 GERT 模型求解,除了蒙特卡罗等仿真解法<sup>[14]</sup>,以上模型均采用以梅森公式和矩母函数为基础的解析算法。该算法的基本思想是 GERT(仅含异或节点)网络本质是一类线性系统<sup>[15]</sup>,因此可以利用具有线性特征的信号流图模型来计算 GERT 各节点之间的传递关系以及整个网络的等价传递函数。求解过程是首先将矩母函数和发生概率结合组成 GERT 的传递函数,进而利用信号流图的梅森公式求解 GERT 网络的等价传递函数,最后利用矩母函数的性质反推出等价概率、各阶矩。但是,解析法求解比较复杂,存在以下两方面需要改进的地方。①利用解析法求解过程中,需要特别分析 GERT 网络结构的拓扑特征,识别各阶环。当 GERT 网络节点少,结构简单时,可以较容易分析其拓扑结构,但当 GERT 节点增多,网络结构复杂时,在分析其拓扑结构时容易发生遗漏、错判等情况。②以梅森公式为基础的解析法需要人工分析网络拓扑结构,计算量大,难以实现计算机自动操作。考虑到信号流图可以利用矩阵进行分析<sup>[16-17]</sup>,本文在此基础上,探讨 GERT 网络的矩阵式表达,并分别分析 GERT 网络解析法与矩阵变换的关系,提出两种基于 GERT 网络矩阵式表达的解析法——矩阵分析的行列式法、矩阵变换法。

## 1 GERT 网络的矩阵行列式解析法

首先将 GERT 网络的拓扑结构转化为矩阵形式,进而考虑到 GERT 网络具有信号流图特征,根据 GERT 网络与信号流图的对应关系,借助信号流图矩阵化分析技术,设计 GERT 矩阵行列式的求解算法,求解 GERT 的等价传递函数。

### 1.1 GERT 网络的增益矩阵

GERT 是一类箭杆活动(activity on arrow, AOA)型网络,可用  $G=(N, A)$  表示,其中  $N$  是代表状态的网络节点集合,且仅包括异或型节点,  $A$  是代表活动的网络箭线集合,网络传递参数是传递函数  $w$ 。

定义 1 GERT 基本结构的信号流图增益矩阵  $A_s$ 。已知 GERT 的基本结构如图 1 左所示,其中  $w_{ij}$  是传递函数,则图 1 右边所示矩阵  $A_s$  被定义为 GERT 基本结构的信号流图增益矩阵,其中元素  $a_{ji}$  是指第  $i$  个节点到第  $j$  个节点的传递函数  $w_{ij}$ ;若第  $i$  个与第  $j$  个节点间不存在箭线,则  $a_{ji}=0$ 。

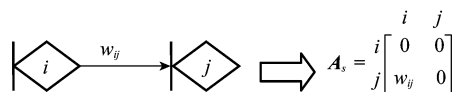


图 1 GERT 基本结构矩阵转化示意图

Fig. 1 Matrix conversion schematic of GERT's basic structure

在 GERT 网络图(信号流图)的每个节点各加上一个增益为 -1 的环,则可得到同一系统的流图,因此 GERT 基本结构流图增益矩阵就是将信号流图增益矩阵的对角线元素减 1 获得的矩阵,定义如下。

定义 2 GERT 基本结构的流图增益矩阵  $A$ 。已知 GERT 基本结构的信号流图增益矩阵  $A_s$ ,则其流图增益矩阵

$$A = A_s - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ w_{ij} & -1 \end{bmatrix}。$$

通过定义 1 和定义 2,可以给出 GERT 网络结构的信号流图增益矩阵和流图增益矩阵。以图 2 所示的多输入多输出型 GERT 为例<sup>[15]</sup>,说明 GERT 网络矩阵结构与其信号流图增益矩阵以及流图增益矩阵的对应关系。

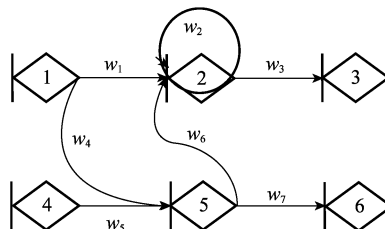


图 2 复杂多输入多输出型 GERT 网络示意图

Fig. 2 Diagram of complex multiple-input multiple-output GERT network

图 2 所示的 GERT 网络共有 6 个节点,则其信号流图增益矩阵为 6 阶矩阵,按照定义 1 的方法,给出其信号流图增益矩阵  $A_s$ ,然后依据定义 2 将  $A_s$  减去单位矩阵,获得流图增益矩阵  $A$ ,具体结果为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_s &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 & \omega_6 \\ 3 & 0 & \omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & \omega_4 & 0 & 0 & \omega_5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_7 \end{bmatrix} \Rightarrow \\
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & \omega_1 & \omega_2 - 1 & 0 & 0 & \omega_6 \\ 3 & 0 & \omega_3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & \omega_4 & 0 & 0 & \omega_5 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & \omega_7 & -1 \end{bmatrix} \quad (1)
 \end{aligned}$$

## 1.2 GERT 网络的矩阵行列式求解算法

在将 GERT 网络图转化为相对应的流图增益矩阵  $\mathbf{A}$  后,下一步的工作是以矩阵  $\mathbf{A}$  为研究对象,设计 GERT 网络的解析算法。由于 GERT 网络是一类类似于信号流图的线性系统,因此可以在流图矩阵分析技术的基础上设计 GERT 网络的矩阵行列式求解算法。

假设已知描述某信号流图的方程组<sup>[16]</sup>为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - b_1u = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - b_2u = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n - b_nu = 0 \end{cases}$$

利用克莱姆法对此进行求解,结果为

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u = \\
 \frac{1}{|\mathbf{A}|} &\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u
 \end{aligned}$$

则源点  $u$  到  $x_i$  的增益为

$$\frac{x_i}{u} = \frac{\sum_{j=1}^n A_{ji} b_j}{|\mathbf{A}|} \quad (2)$$

式中,  $|\mathbf{A}|$  是行列式值;  $A_{ji}$  是元素  $a_{ji}$  的代数余子式。

文献<sup>[16]</sup>证明  $\frac{x_i}{u} = \frac{\sum_{j=1}^n A_{ji} b_j}{|\mathbf{A}|}$  与求解流图中源点  $u$  到任意一点  $x_i$  增益的柯特斯公式的结果完全一致,  $j$  是源点  $u$  作用节点,即接触节点。因此可以利用式(2)求解 GERT 网络,具体操作步骤如下。

步骤 1 写出 GERT 网络的增益矩阵。根据定义 1 和

定义 2 分别给出 GERT 网络的信号流图增益矩阵和流图增益矩阵。

步骤 2 找出 GERT 网络的所有源节点和终节点。可以分别在 GERT 网络图或信号流图增益矩阵中分别识别源节点和终节点。在信号流图增益矩阵中,所有元素为 0 的行对应源节点,所有元素为 0 的列对应终节点。由式(1)可知,节点 1 和节点 4 是源节点,节点 3 和节点 6 是终节点。这与图 2 所显示的结果是相同的。

步骤 3 确定需要分析的源节点和终节点。根据分析问题的需求,确定需要分析的起始节点和终节点。然后将所有的源节点和不需要分析的终节点所对应的行和列删除。假设需要分析源节点 1 到终节点 3 的等价传递函数,则删除源节点 4、源节点 1 和终节点 6 所在行与列,所得到的新的信号流图增益矩阵和流图增益矩阵为

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & \omega_2 & 0 & \omega_6 \\ 3 & \omega_3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & \omega_2 - 1 & 0 & \omega_6 \\ 3 & \omega_3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

步骤 4 确定源节点作用节点  $j$  及传递函数  $b_j$ 。式(1)的信号流图增益矩阵的第一列显示,从源点 1 共作用两个节点:节点 2 和节点 5,这与图 2 显示结果是相同的。两节点在式(3)流图增益矩阵中所在行分别为 1 和 3,其中增益值分别为  $b_1 = -\omega_1$ ,  $b_3 = -\omega_4$ 。

步骤 5 计算代数余子式值  $A_{ji}$ 。通过步骤 3 可知,源点作用节点是节点 2 和节点 5,节点 2 和节点 5 在式(3)流图增益矩阵中所在的行分别为第 1 行和第 3 行,即  $j=1$  或 3。需要分析的终节点是 3,在式(3)流图增益矩阵中所在的列为第 2 列,即  $i=2$ 。具体  $A_{ji}$  计算步骤是在式(3)右半部分的流图增益矩阵  $\mathbf{A}$  划去第  $i$  列和第  $j$  行,最终代数余子式为

$$\begin{cases} A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} \omega_3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \omega_3 \\ A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} \omega_2 - 1 & \omega_6 \\ \omega_3 & 0 \end{bmatrix} = \omega_3 \omega_6 \end{cases} \quad (4)$$

步骤 6 计算等价传递函数  $\frac{x_i}{u} = \frac{\sum_{j=1}^n A_{ji} b_j}{|\mathbf{A}|}$ 。首先计算式(3)

矩阵  $\mathbf{A}$  的行列式

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \omega_2 - 1 & 0 & \omega_6 \\ \omega_3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \omega_2 - 1$$

综合步骤 4 和步骤 5,可知节点 1 到节点 3 的等价传递函数为

$$w_E = \frac{x_i}{u} = \frac{\sum_{j=1}^n A_{ji} b_j}{|\mathbf{A}|} = \frac{A_{23} b_2 + A_{53} b_3}{\omega_2 - 1} = \frac{\omega_1 \omega_3 + \omega_3 \omega_4 \omega_6}{1 - \omega_2}$$

结果与文献<sup>[15]</sup>完全相同。

## 2 GERT 网络的矩阵变换解析法

GERT 网络求解的另一方向是进行化简,消除所有和输入输出无关的自环、中间节点等。本部分基本思想是从信号流图与信号流图增益矩阵  $A_s$  (见式(3)) 的一一对应关系出发,分析 GERT 网络(信号流图)化简操作(主要包括消自环与消节点操作)与矩阵变换的对应关系<sup>[17-18]</sup>,设计 GERT 网络的矩阵变换解析法。这里直接利用第 1 节定义的信号流图增益矩阵  $A_s$ 。

### 2.1 GERT 网络消自环操作与增益矩阵变换关系

首先定义 GERT 网络增益矩阵的消自环操作,进而分析矩阵消自环操作与 GERT 网络消自环操作对应关系。

**定义 3** GERT 网络增益矩阵  $A_s$  消自环操作。假设增益矩阵  $A_{n \times n}$  的第  $i$  个对角线元素  $a_{ii}$  非零,则通过下列变换得到新信号流通增益矩阵  $A'$  的过程定义为增益矩阵  $A$  消自环操作:

$$\begin{cases} a'_{ik} = \frac{a_{ik}}{1-a_{ii}}, k=1,2,\dots,n; k \neq i \\ a'_{kj} = a_{kj}, k,j=1,2,\dots,n; k \neq i; j \neq i \\ a'_{ii} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $a'_{ik}, a'_{kj}, a'_{ii}$  是新信号流图增益矩阵的  $A'$  元素。

GERT 网络增益矩阵  $A_s$  消自环操作实质<sup>[18]</sup>是将所有流向该节点的增益除以  $1-a_{ii}$ ,将对角线元素  $a_{ii}$  设置为 0,其余所有增益值不变。

**定理 1** GERT 网络(信号流图)增益矩阵消自环操作与 GERT 消自环操作等价。

**证明** GERT 网络(信号流图)消自环操作是将所有流向所选自环节点  $i$  的增益除以  $1-a_{ii}$ ,这与定义 3 所描述的增益矩阵  $A_s$  消自环操作是相同的,因此二者是等价的。

证毕

### 2.2 GERT 网络消节点操作与增益矩阵变换关系

除了消除自环操作,在 GERT 网络(信号流图)化简过程中另外一项重要工作是消除与输入和输出无关的节点。

**定义 4** GERT 网络增益矩阵消节点操作。假设选定消除 GERT 网络增益矩阵  $A_{n \times n}$  中的第  $k$  个节点(不含自环),则通过下列矩阵变换得到新 GERT 网络增益矩阵  $A'$  的过程定义为增益矩阵  $A$  消节点操作。

$$a'_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj} + a_{ij}, k=1,2,\dots,n; i \neq k; j \neq k \quad (6)$$

且删除第  $k$  行和第  $k$  列。

下面需要说明 GERT 网络增益矩阵消节点操作与 GERT 网络(信号流图)消节点操作的对应关系。

**定理 2** GERT 网络增益矩阵消节点操作与 GERT 网络(信号流图)消节点操作等价。

这里证明详见文献<sup>[16-17]</sup>。

### 2.3 矩阵变换解析法

在给出增益矩阵消自环、消节点操作以及它们与 GERT 网络(信号流图)相应化简操作的对应关系后,GERT 网络

(信号流图)化简工作就可以转化为对应信号流图增益矩阵的操作。由于 GERT 网络(仅仅含异或节点)本质是信号流图系统,因此第 2.1 节和第 2.2 节介绍的信号流图增益矩阵消自环和消节点可以适用于 GRRT 网络的增益矩阵。下面给出 GERT 网络解析求解过程的矩阵变换分析法的主要步骤。

**步骤 1** 确定信号流图增益矩阵。按照定义 1 和定义 2 给出待分析 GERT 的信号流图增益矩阵。分析需要分析的源节点和终节点,将不需要分析的源节点和终节点删去,得到信号流图增益矩阵。

**步骤 2** 消自环。首先分析源节点和需要分析的终节点,按照定义 3 方法消除增益矩阵的自环。

**步骤 3** 消节点。给定需要消除的中间节点,观测相应的对角线元素是否为 0(即判断是否有自环),如果对角线元素非 0(有自环),则转回步骤 2;若没有环,则按照定义 4 的消节点操作。

**步骤 4** 重复步骤 2 和步骤 3。选定需要继续删除的节点,重复步骤 2 和步骤 3,直到只剩下需要分析的源节点和终节点。最终获得一个  $2 \times 2$  矩阵,其中第 2 行第 1 列元素即是从源节点和终节点的等价传递函数。

## 3 算例研究

### 3.1 单输入单输出型 GERT 网络的行列式解法

本文利用文献<sup>[1,15]</sup>提供的一个复杂 GERT 网络作为算例说明所提模型的使用方法和简便性,具体模型如图 3 所示。对于此问题,常用方法是通过分析网络的拓扑结构,根据梅森公式求解。由文献<sup>[15]</sup>可知,若利用构造闭环回路的方法,该 GERT 网络共包括 7 个一阶环、5 个二阶环、3 个一阶环。寻找各阶环的过程十分复杂,很容易漏判和错判。如果 GERT 网络结构的复杂程度进一步提高,对于其拓扑结构的分析会变得更加困难。本节将利用本文提出的矩阵表示法对该图中的网络结构进行表征,进而利用提出的矩阵运算方法进行求解。

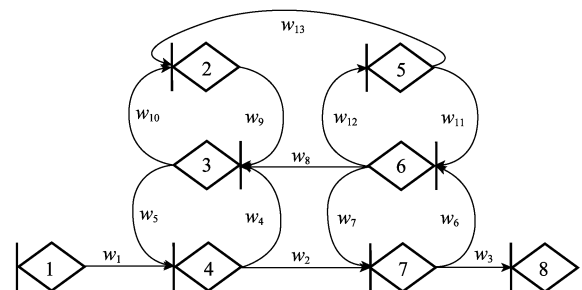


图 3 GERT 网络示意图

Fig. 3 Diagram of GERT network

**步骤 1** 写出 GERT 网络的流图增益矩阵。由上文分析可知,GERT 网络结构是一类信号流图模型,首先给出图 3 网络结构的流图增益矩阵。由于节点 1 是作用于节点 4 的开始节点,不需要出现在流图增益矩阵。先写出信号流图

的增益矩阵  $A_s$ , 然后将此增益矩阵的对角线元素减 1 获得流图增益矩阵  $A$ , 具体结果为

$$A_s = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & w_{10} & 0 & w_{13} & 0 & 0 & 0 \\ w_9 & 0 & w_4 & 0 & w_8 & 0 & 0 \\ 0 & w_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{11} & 0 & w_6 & 0 \\ 0 & 0 & w_2 & 0 & w_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_3 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & w_{10} & 0 & w_{13} & 0 & 0 & 0 \\ w_9 & -1 & w_4 & 0 & w_8 & 0 & 0 \\ 0 & w_5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & w_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{11} & -1 & w_6 & 0 \\ 0 & 0 & w_2 & 0 & w_7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_3 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

步骤 2 计算流图增益矩阵  $A$  的行列式  $|A|$  以及元素  $a_{37}$  的代数余子式  $A_{37}$ 。根据前面论述步骤, 开始节点是直接作用于节点 4, 另外节点 8 是输出节点, 节点 4 和节点 8 分别第 3 行和第 7 列, 因此划去增益矩阵  $A$  的第 3 行和第 7 列, 计算元素  $a_{37}$  代数余子式  $A_{37}$ 。通过 Matlab 软件计算结果为

$$|A| = -1 + (w_4 w_5 + w_6 w_7 + w_2 w_5 w_6 w_8 + w_9 w_{10} + w_{11} w_{12}) + w_2 w_5 w_6 w_9 w_{12} w_{13} - w_4 w_5 (w_6 w_7 + w_{11} w_{12}) - w_6 w_7 w_9 w_{10} - w_9 w_{10} w_{11} w_{12}$$

$$A_{37} = (-1)^{3+7} \begin{vmatrix} -1 & w_{10} & 0 & w_{13} & 0 & 0 \\ w_9 & -1 & w_4 & 0 & w_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & w_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{11} & -1 & w_6 \\ 0 & 0 & w_2 & 0 & w_7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$w_2 w_3 (1 - w_9 w_{10} - w_{11} w_{12} + w_9 w_{10} w_{11} w_{12})$$

步骤 3 利用公式  $\frac{x_i}{u} = \frac{\sum_{j=1}^n A_{ji} b_j}{|A|}$  计算等价传递函数

$w_E$ 。由于节点 4 是接触节点且在增益矩阵中处于第 3 行, 那么  $b_3 = -w_1$ , 代入公式得

$$w_E = w_{18} = \frac{A_{37} \cdot b}{|A|} = \frac{-w_1 \cdot A_{37}}{|A|} =$$

$$\frac{-w_1 \cdot w_2 w_3 (1 - w_9 w_{10} - w_{11} w_{12} + w_9 w_{10} w_{11} w_{12})}{|A|}$$

通过对比文献[15]可知, 本文所提方法的结果与梅森公式计算结果完全相同。与梅森公式相比, 矩阵式运算方法不需要分析识别 GERT 网络的环及相互关系, 计算过程大大简化, 避免了拓扑结构分析过程中的遗漏和差错。另

外, 矩阵运算可以借助 Matlab 等分析工具, 计算复杂度进一步降低。GERT 网络结构越复杂, 矩阵式运算技术的简便性、优越性越凸显。

### 3.2 多输入多输出型 GERT 网络的矩阵变换求法

假设需要分析的 GERT 网络如图 2 所示, 下面运用第 2 节提出的方法分析节点 1 到节点 3 的等价传递函数。由式(3)知增益矩阵, 由于节点 4 和节点 6 不需要分析, 因此这两个节点所在行与列可以删去, 最后获得的信号流图增益矩阵与矩阵变换过程为

$$A_s = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_1 & w_2 & 0 & w_6 \\ 0 & w_3 & 0 & 0 \\ w_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\text{消节点 2 自环}}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{w_1}{1-w_2} & 0 & 0 & \frac{w_6}{1-w_2} \\ 0 & w_3 & 0 & 0 \\ w_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\text{消节点 2}}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{w_1 w_3}{1-w_2} & 0 & \frac{w_3 w_6}{1-w_2} \\ w_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \xrightarrow{\text{消节点 5}}$$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{w_1 w_3 + w_3 w_4 w_6}{1-w_2} & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

由信号流图增益矩阵的化简最终结果可知, 节点 1 到节点 3 的增益为  $\frac{w_1 w_3 + w_3 w_4 w_6}{1-w_2}$ , 即源点 1 到终点 3 的等价传递函数是  $\frac{w_1 w_3 + w_3 w_4 w_6}{1-w_2}$ 。此结果与第 1 节获得的结果是相同的。因此此方法也是求解 GERT 网络解析解的一个有效方法。但是当 GERT 网络节点增多, 矩阵变换的计算量大大提高。例如, 如果用矩阵变换法处理第 3.1 节例子, 计算过程十分复杂, 这时可利用 Matlab 编程求解。

## 4 结 论

GERT 网络在可靠性设计、进度规划、新产品开发等领域具有广泛应用。经典 GERT 的解析法是从网络的拓扑结构出发, 利用梅森公式进行求解。但是求解过程中需要分析网络结构, 辨识各阶环。当网络结构复杂时, 极易出现遗漏、错判等情况。针对此问题, 本文提出了 GERT 网络的两种基于矩阵运算的解析算法, 简化了 GERT 解析解的计算量, 一定程度上减少了对 GERT 网络拓扑结构的分析。首先利用 GERT 网络与流图增益矩阵、信号流图增益矩阵的对应关系, 将 GERT 网络转化为矩阵形式; 考虑通过

克莱姆法则计算线性系统方程的结果与柯特斯公式完全等价,设计了 GERT 网络求解的矩阵行列式解析法并给出了具体步骤。将信号流程图矩阵中与输入输出无关的节点以及自环节点消去的方法是求解 GERT 网络的另一个方法,本文从分析 GERT 网络(信号流图)化简操作(主要指消自环与消节点操作)与信号流图增益矩阵变换的对应关系,设计了 GERT 网络的矩阵变换求法。最后算例的计算表明本文所提方法降低了 GERT 网络拓扑结构分析难度,减少了计算量。

本文设计的两类以矩阵为基础的 GERT 解析算法为编制 GERT 解析的相关软件提供了基础。借助 GERT 的矩阵运算解析法,编制 GERT 解析法的计算软件是个重要研究方向,下一步工作是利用 Matlab 图形用户界面将相关程序编成一套 GERT 矩阵法求解工具。

### 参考文献:

- [1] PRITSKER A A B. GERT: graphical evaluation and review technique, RM-4973-NASA[R]. Santa Monica: RAND Corporation, 1966.
- [2] LIN K P, WEN W, CHOU C C, et al. Applying fuzzy GERT with approximate fuzzy arithmetic based on the weakest  $t$ -norm operations to evaluate repairable reliability[J]. Applied Mathematical Modeling, 2011, 35(11): 5314-5325.
- [3] MOHAN P, AGARWA M, SEN K. Combined  $m$ -consecutive- $k$ -out-of- $n$  F & consecutive  $k$ -out-of- $n$ ; F systems [J]. IEEE Trans. on Reliability, 2009, 58(2): 328-337.
- [4] MOORE L J, TAYLOR III B W. Multi-team, multi-project research and development planning with GERT[J]. Management Science, 1977, 24(4): 401-410.
- [5] 刘红旗, 方志耕, 陶良彦. 复杂装备研制项目进度规划 GERT 网络“反问题”模型[J]. 系统工程与电子技术, 2015, 37(12): 2758-2763.  
LIU H Q, FANG Z G, TAO L Y. Complex equipment development project planning GERT network “inversion problem” model[J]. Systems Engineering and Electronics, 2015, 37(12): 2758-2763.
- [6] 陶良彦, 刘思峰, 方志耕, 等. 基于多层次 GERT 的复杂产品研制进度规划“超冲突均衡”博弈模型[J]. 控制与决策, 2014, 29(11): 2002-2010.  
TAO L Y, LIU S F, FANG Z G, et al. “Super-conflict equalization” game model for complex product development scheduling based on multi-level GERT[J]. Control and Decision, 2014, 29(11): 2002-2010.
- [7] LI C, LIU S. Random network models and sensitivity algorithms for the analysis of ordering time and inventory state in multi-stage supply chains[J]. Computers & Industrial Engineering, 2014, 70(4): 168-175.
- [8] 李翀, 刘思峰, 方志耕, 等. 多级供应链系统成本分析随机网络模型及算法研究[J]. 中国管理科学, 2013, 21(4): 105-111.  
LI C, LIU S F, FANG Z G, et al. The study of multi-stage supply chain cost distribution based on GERT model[J]. Chinese Journal of Management Science, 2013, 21(4): 105-111.
- [9] 刘远, 方志耕, 刘思峰, 等. 基于供应商图示评审网络的复杂产品关键质量源诊断与探测问题研究[J]. 管理工程学报, 2011, 25(2): 212-219.  
LIU Y, FANG Z G, LIU S F, et al. Diagnosis and detection of critical quality resource of complex product based on supplier GERT model[J]. Journal of Industrial Engineering and Engineering Management, 2011, 25(2): 212-219.
- [10] NELSON R G, AZARON A, AREF S. The use of a GERT based method to model concurrent product development processes[J]. European Journal of Operational Research, 2016, 250(2): 566-578.
- [11] 郭本海, 方志耕, 俞斌, 等. 基于能效视角的主导产业选择多参量 GERT 网络模型[J]. 系统工程理论与实践, 2011, 31(5): 944-953.  
GUO B H, FANG Z G, YU B, et al. Multi-parameter GERT network model of leading industry choice based on energy efficiency perspective[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2011, 31(5): 944-953.
- [12] 方志耕, 杨保华, 陆志鹏. 基于 Bayes 推理的灾害演化 GERT 网络模型研究[J]. 中国管理科学, 2009, 17(2): 102-107.  
FANG Z G, YANG B H, LU Z P. The GERT network model study of disaster evolution based on Bayes inference[J]. Chinese Journal of Management Science, 2009, 17(2): 102-107.
- [13] 李成川, 李聪波, 曹华军, 等. 基于 GERT 图的废旧零部件不确定性再制造工艺路线模型[J]. 计算机集成制造系统, 2012, 18(2): 298-305.  
LI C C, LI C B, CAO H J, et al. Uncertain remanufacturing process routings model for used components based on GERT network[J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2012, 18(2): 298-305.
- [14] WU D D, KEFAN X, GANG C, et al. A risk analysis model in concurrent engineering product development[J]. Risk Analysis, 2010, 30(9): 1440-1453.
- [15] 冯允成. 随机网络及其应用[M]. 北京: 北京航空学院出版社, 1987.  
FENG Y C. Stochastic network and its application[M]. Beijing: Beijing University of Aeronautics and Astronautics Press, 1987.
- [16] 赵国枝, 刘志决. 流图矩阵分析[J]. 太原机械学院学报, 1989, 10(1): 96-103.  
ZHAO G Z, LIU Z J. A matrix analysis method of flow graph[J]. Journal of Taiyuan Institute of Machinery, 1989, 10(1): 96-103.
- [17] 曾建平, 雷宏. 系统传递函数的矩阵求解法[J]. 太原机械学院学报, 1991, 12(2): 65-73.  
ZENG J P, LEI H. The matrix method for solving the system transfer function[J]. Journal of Taiyuan Institute of Machinery, 1991, 12(2): 65-73.
- [18] 罗涛, 何振亚. 信号与系统分析的流图矩阵法[J]. 通信学报, 1993, 14(6): 73-79.  
LUO T, HE Z Y. Analysis of signals and systems by flow graph matrix method[J]. Journal of Chinese Institute of Communications, 1993, 14(6): 73-79.

### 作者简介:

陶良彦(1988-),男,博士研究生,主要研究方向为复杂装备研制管理、GERT 网络。

E-mail: lytao@nuaa.edu.cn

刘思峰(1955-),男,教授,博士,主要研究方向为复杂装备研制管理、灰色系统。

E-mail: sfliu@nuaa.edu.cn

方志耕(1962-),男,教授,博士,主要研究方向为复杂装备研制管理、质量与可靠性管理。

E-mail: zhigengfang@163.com

陈顶(1990-),男,博士研究生,主要研究方向为质量与可靠性管理。

E-mail: 15151875620@163.com