GEOMETRÍA DIFERENCIAL: GEOMETRÍA GAUSSIANA

6 de diciembre de 2017

Ricardo Stuardo T.

Índice general

1. Curvas **1**
1.1. Concepto de Curva 1
1.1.1. Parametrización Regular 2
1.1.2. Curvas Regulares 2
1.1.3. Longitud de Arco 3
1.1.4. Parametrización Natural 3
1.2. Curvatura y Torsión 5
1.3. Teoría de las Curvas 5

2. Superficies **6**
2.1. Concepto de Superficie 6
2.2. Formas Fundamentales 6
2.2.1. Primera Forma Fundamental 6
2.2.2. Segunda Forma Fundamental 6
2.3. Teoría de Superfices 6
2.4. Geometria Intrínseca 6

"Pure mathematics is, in its way, the poetry of logical ideas."

Albert Einstein.

Capítulo 1

Curvas

1.1. Concepto de Curva

Una curva es un mapeo diferenciable desde un conjunto abierto I de $\mathbb{R}$ a una región $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} M : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto x^i = x^i(t) \qquad , i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

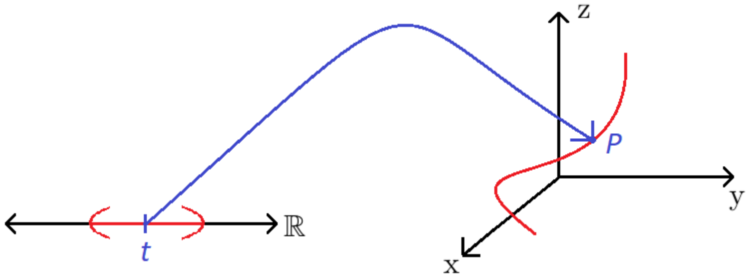

Figura 1.1: Idea de Curvas

El punto $t \in \mathbb{R}$ es mapeado en el punto $P \in \mathcal{C}$. La imagen de I de $\mathbb{R}$ es la linea roja mostrada en $\mathcal{C}$, y la linea azul representa el mapeo de I en $\mathcal{C}$.

Así tenemos que uno asocia cada pundo de $\mathbb{R}$, con un punto en $\mathcal{C}$, el cual es llamado el punto imagen de t, El conjunto de todos los puntos imagenes es la noción ordinaria de curva. Esta definición asocia a cada punto de $\mathcal{C}$ un valor de t, es decir, tenemos una curva parametrizada con un parámetro t:

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3 : t \in I \right\}$$

Donde se dice que $(\mathbf{x}, I)$ es una representación paramétrica de $\mathcal{C}$, y a t se le llama *parámetro* de la curva .

Cuando pedimos que sea un mapeo diferenciable, queremos decir que las coordenadas de los puntos imagenes ($x^i = x^i(t)$) son funciones diferenciables. Así una curva $\mathcal{C}$ queda descrita por las ecuaciones:

$$x^i = x^i(t)$$

o bien

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$$

1.1.1. Parametrización Regular

Sea una función vectorial:

$$x^i = x^i(t) \quad , t \in I$$

Se dice que es una representación paramétrica regular de parametro t si se satisfacen las siguientes propiedades:

- $x^i(t)$ es de clase C^1 en I.
- $\frac{dx^i}{dt} = x'^i \neq 0$ para todo t en I (que es equivalente a $|\mathbf{x}'| \neq 0$).

Una representación paramétrica regular, puede poseer puntos multiples, es decir, pueden existir t_1 y t_2, tal que $t_1 \neq t_2$ para los cuales $x^i(t_1) = x^i(t_2)$. Sin embargo, localmente, esto no ocurre.

1.1.2. Curvas Regulares

Una función numérica $t = t(\theta)$ en un intervalo I_θ es un cambio admisible de parámetro si:

- $t = t(\theta)$ es de clase C^1 en I_{theta}.
- $\frac{dt}{d\theta} \neq 0$ para todo θ en I_θ.

Teorema: Si $t = t(\theta)$ representa un cambio admisible de parámetro en I_θ, entonces :

- $t = t(\theta)$ es una aplicación inyectiva de I_{theta} en un intervalo $I_t = t(I_\theta)$
- La función inversa $\theta = \theta(t)$ es a su vez un cambio admisible de parámetro en I_t

Notemos que, $x^i = x^i(t)$ determina unicamente una curva $\mathcal{C}$ que consta de todas las representaciones que se relacionan con ella a partir de un cambio admisible de parámetro. Sin embargo, puede ocurrir que la parametrización $x^i = x^i(t)$ tenga una propiedad que no sea neesariamente una propiedad de la curva. Por otro lado, las propiedades de la curva deben ser comúnes a todas las parametrizaciones, es decir, las propiedades de la curva son *independientes del parámetro.*

Un ejemplo de esto son las llamadas curvas simples, que corresponde a una curva regular sin puntos multiples.

1.1.3. Longitud de Arco

Sea $I = (a, b) \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto, y sea $\mathcal{C} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada con parámetro t ($x^i = x^i(t)$). La longitud de arco de la curva desde $\mathbf{x}(t_0)$ a $\mathbf{x}(t)$ es:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt'} \right| dt' = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt'}\right)^2} dt'$$

1.1.4. Parametrización Natural

Del teorema fundamenteal del cálculo, sabemos que:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt'} \right| dt' = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|$$

Donde $x^i = x^i(t)$ es una curva parametrizada con parámetro t. Esta curva puede ser parametrizada con parámetro s si y solo si $s = s(t)$ es un cambio admisible de parámetro en I. De acuerdo con el teorema recién planteado, $s = s(t)$ será un cambio admisible de parámetro en I si:

- $s = s(t)$ es de clase C^1 en I.
- $\frac{ds}{dt} \neq 0$ para todo t en I.

Ya que $x^i = x^i(t)$ es una parametrización regular, tenemos que $\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| \neq 0$ y de esto vemos que $\frac{ds}{dt} \neq 0$. Luego, si $s(t)$ es de clase C^m en I, tenemos que $s = s(t)$ es un cambio admisible de parámetro, por lo que, **la longitud de arco s puede ser usada como parámetro a lo largo de la curva**. A s se le llama *parámetro natural*, y a $x^i = x^i(s)$ se le llama *parametrización natural*.

Ejemplo: Encontremos el parámetro natural, y reparametrizemos la siguiente curva:

$$\mathbf{x} = (e^t \cos(t))\hat{\imath} + (e^t \sin(t))\hat{\jmath} + e^t \hat{k} \qquad , \text{con} -\infty < t < \infty$$

De donde:

$$\begin{aligned} x^1 &= e^t \cos(t) \\ x^2 &= e^t \sin(t) \\ x^3 &= e^t \end{aligned}$$

Veamos que:

$$\begin{aligned} \frac{dx^1}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(e^t \cos(t)\right) = e^t \cos(t) - e^t \sin(t) \\ \frac{dx^2}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(e^t \sin(t)\right) = e^t \sin(t) + e^t \cos(t) \\ \frac{dx^3}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(e^t\right) = e^t \end{aligned}$$

Por lo que:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| &= \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2} \\
&= \sqrt{(e^t\cos(t) - e^t\sin(t))^2 + (e^t\sin(t) + e^t\cos(t))^2 + (e^t)^2} \\
&= \sqrt{e^{2t}\cos^2(t) - 2e^{2t}\cos(t)\sin(t) + e^{2t}\sin^2(t) + e^{2t}\sin^2(t) + 2e^{2t}\cos(t)\sin(t) + e^{2t}\cos^2(t) + e^{2t}} \\
&= \sqrt{3e^{2t}} \\
&= \sqrt{3}e^t
\end{aligned}
$$

Luego, para encontrar s integramos $\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|$ entre t_0 y t:

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{t_0}^{t} \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt'}\right| dt' \\
&= \int_{t_0}^{t} \sqrt{3}e^{t'} dt' \\
&= \sqrt{3}e^t\Big|_{t_0}^{t} \\
&= \sqrt{3}\left(e^t - e^{t_0}\right)
\end{aligned}
$$

Despejando t, obtenemos:

$$
t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right) \qquad , \text{con} \quad -\sqrt{3}e^{t_0} < s < \infty
$$

Introduciendo s como parámetro obtenemos:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= e^{\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)} \cos\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)\right) \\
x^2 &= (e^{\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)} \sin\left(\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)\right) \\
x^3 &= e^{\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + e^{t_0}\right)}
\end{aligned}
$$

Del ejemplo, vemos que, pareciera que el parámetro depende del punto del cual integremos el la longitud de la curva (t_0), lo que nos hace pensar, ¿Habrá más de un parámetro natural para una misma curva?. La respuesta esta en el siguiente teorema:

Teorema: Si $x^i = x^i(s)$ es una representación natural de $\mathcal{C}$, entonces:

- Si $x^i = x^{*i}(s^*)$ es cualquier otro tipo de representación natural de $\mathcal{C}$, entonces: $s = \pm s^* +$ constante.

Volviendo al ejemplo anterior, teniamos que el par°ámetro (o la parametrización) dependian de $e^{t_0} = c$ con c una constante positiva, de acuerdo al teorema anterior, esto es completamente normal, ya que depende en forma aditiva de esta constante, luego, podemos definir un $s^* = s - c'$ para eliminar la constante aditiva.

Desde ahora en adelante, usaremos la siguente notación:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \quad , \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \quad , \quad \mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad , \quad \mathbf{x}'' = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$$

1.2. Curvatura y Torsión

1.2.1. Vector Unitario Tangente

1.3. Teoría de las Curvas

Capítulo 2

Superficies

2.1. Concepto de Superficie

2.2. Formas Fundamentales

2.2.1. Primera Forma Fundamental

2.2.2. Segunda Forma Fundamental

2.3. Teoría de Superfices

2.4. Geometria Intrínseca