Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Pisa, 5 giugno 2022 Parte A (suff: 6/11)

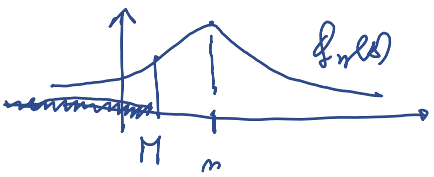
(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si studi la convergenza della successione $f_n(x) = n^2 e^{-(x-n)^2}$.
[6p]

Fissato x_0 $\quad n^2 e^{-(x_0-n)} \sim \frac{n^2}{e^{n^2}} \to 0$

$\Rightarrow f_n \to 0$ puntualmente su $\mathbb{R}$

$\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = n^2$ (si ha per $x = n$) $\Rightarrow f_n \not\to 0$ unif su $\mathbb{R}$



Preso un qualsiasi intervallo $(-\infty, M]$

definitivamente $n > M \Rightarrow f_n$ crescente su $(-\infty, M]$

Quindi $\sup_{(-\infty,M]} |f_n| = f_n(M) \to 0$ perché in M $f_n \to 0$.

Quindi $f_n \to 0$ unif su $(-\infty, M]$ comunque scelto M

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$.

(a). Si calcoli la derivata direzionale in $(0,0)$ rispetto al vettore $(\sqrt{3}/2, 1/2)$. [2p]

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{h\to 0} \frac{f\left(0+h\frac{\sqrt{3}}{2}, 0+h\frac{1}{2}\right) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \frac{3}{8}}{h \cdot h^2\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{3}{8}$$

(b). Si dica se f è continua e differenziabile in $(0,0)$. [3p]

$f(0,y) = f(x,0) \equiv 0 \Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 \Rightarrow$ se $\exists$, $d_{(0,0)}f \equiv 0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - d_{(0,0)}f\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$ coord polari $\rightsquigarrow$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^3} = \cos^2\theta \sin\theta$$ f $\underline{\underline{\text{non}}}$ è diff.

Invece $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \rightsquigarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2} = 0 = f(0,0)$

$\Rightarrow$ f è continua in $(0,0)$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Pisa, 5 giugno 2022 Parte B

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si consideri la funzione $f(x, y) = e^{-xy}$

(a). Si studino e si classifichino i punti critici di f su $\mathbb{R}^2$. [4p]

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -y\, e^{-xy} \\ -x\, e^{-xy} \end{pmatrix} = 0 \iff (x,y) = (0,0)$$

$$H_f = \begin{pmatrix} -y^2 e^{-xy} & -e^{-xy} + xy e^{-xy} \\ -e^{-xy} + xy e^{-xy} & -x^2 e^{-xy} \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (0,0) \text{ p}^{\text{to}} \text{ di sella}$$

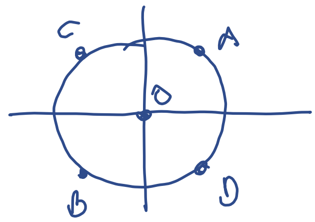
(b). Si determinino, se esistono, i punti di massimo e di minimo su $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. [4p]

Max e Min esistono per Weierstrass e $\nabla f = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

Sul bordo $\gamma = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $f|_{\gamma(\theta)} = e^{-\cos\theta \sin\theta}$

$$\frac{d}{d\theta} f|_{\gamma} = e^{(-\cos\theta\sin\theta)}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 0 \iff \sin^2\theta = \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$



$A = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad B = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$C = \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad D = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\underbrace{f(A) = f(B) = e^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt{3}}_{\text{MAX}}$ $\qquad \underbrace{f(D) = f(C) = e^{-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}}}_{\text{MIN}}$ $\qquad f(0,0) = 1$

(c). Si determinino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f su $\mathbb{R}^2$. [3p]

$\lim_{x \to +\infty} f(x,x) = e^{-x^2} = 0$ $\quad$ e $f(x,y) \geq 0$

$\Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} = 0$

$\lim_{x \to \infty} f(x,-x) = e^{x^2} = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$

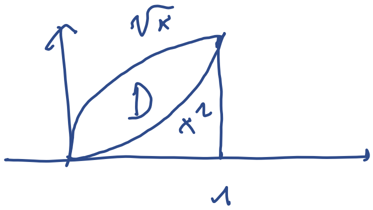
Esercizio 2. Data $\omega = 4x^3 y dx + (2y + x^4) dy$ si calcoli $\int_\gamma \omega$ con $\gamma = (t, \sin^2 t)$ e $t \in [0, \pi]$. [3p]

Si vede facilmente che ω è esatta e

$U(x,y) = x^4 y + y^2$ è un suo potenziale

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = U(\gamma(\pi)) - U(\gamma(0)) = U(\pi, 1) - U(0,0) = \pi^4 + 1$$

Esercizio 3. Sia D la regione di piano finita compresa tra $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$. Si calcoli $\iint_D x dx dy$. [2p]



$$\iint x \, dx dy = \int_0^1 x \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right] dx = \int_0^1 (x\sqrt{x} - x^3) \, dx =$$

$$= \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

$f(x,y)$
$\shortparallel$

Esercizio 4. Si consideri l'equazione differenziale $y'(x) = y + |x|$ con dato iniziale $y(0) = 1$.

(a). Si dica se la soluzione esiste almeno localmente, e se l'intervallo di esistenza della soluzione è $(-\infty, +\infty)$. [2p]

Abbiamo che f è continua in x, y e C^1 in y $\Rightarrow$ la soluzione esiste localmente.

Inoltre $|f(x,y)| \le |x| + |y| \le C + |y|$ per $|x| < C$

$\Rightarrow$ la soluzione esiste su $(-C, C)$ $\forall C$ $\Rightarrow$ la soluzione esiste su $\mathbb{R}$

(b). Si trovi la soluzione che parte con dato $y(0) = 1$. [4p]

Se $x \ge 0$ $\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$

omogenea

particolare

la sol generale è $y = Ae^x - (x+1)$

Con il dato iniziale $y = 2e^x - x - 1$

omog. particolare

Se $x \le 0$ $\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y = Ae^x + (x+1)$

Con il dato iniziale $y = x + 1$

$\Rightarrow$ la soluzione è $y(x) = \begin{cases} 2e^x - x - 1 & \text{per } x \ge 0 \\ x + 1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$