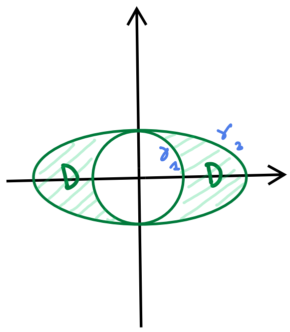
Università di Pisa - CdL Ingegneria Ed-Architettura, Pisa - 6/6/2019

(Cognome) (Nome) (Matricola)

Per passare è necessario realizzare almeno 8 punti sui 16 disponibili nei primi 2 esercizi e almeno 18 in totale

Esercizio 1. (a). [8p] Si trovino massimo e minimo di $f(x,y) = x + 3y$ su

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ , \ x^2 + y^2 \geq 1, \ \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1 \right\}$$



f continua, D compatto $\Rightarrow \exists$ max e min

$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ max e min $\in \partial D$

Su γ_1 $\quad x^2+y^2=1$ $\qquad \begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 1 = \lambda x \\ 3 = \lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

$g = x^2+y^2-1$

$\begin{cases} y = \frac{3}{\lambda} = 3x \\ x^2+9x^2=1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x^2 = \frac{1}{10} \\ y^2 = \frac{9}{10} \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{10}}{10} \\ y = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases}$ $\qquad \max_{\gamma_1} f = \frac{\sqrt{10}}{10} + \frac{9\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$

$\min_{\gamma_1} f = -\sqrt{10}$

Su γ_2 $\quad \frac{x^2}{2}+y^2=1$ $\qquad \begin{cases} 1 = \lambda \frac{x}{2} \\ 3 = \lambda y \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} y = \frac{3}{\lambda} = \frac{3}{2}x \\ \frac{x^2}{2} + \frac{9}{4}x^2 = 1 \end{cases}$ $\qquad x = \pm \frac{2\sqrt{11}}{11}$ $\quad y = \pm \frac{3\sqrt{11}}{11}$

$g \quad \frac{x^2}{2}+y^2-1$

$\max_{\gamma_2} f = \frac{2\sqrt{11}}{11} + \frac{9\sqrt{11}}{11} = \sqrt{11}$

$\min_{\gamma_2} f = -\sqrt{11}$

$\Rightarrow \quad \max_D f = \sqrt{11} \qquad \min_D f = -\sqrt{11}$

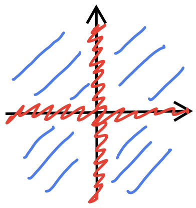
(b). [3p] Si determini $\iint_{D\cap\{x\geq 0\}} f(x,y)dxdy$

$$\iint_{D\cap\{x>0\}} \overset{\text{simmetria}}{=} \iint_{D\cap\{x\geq 0\}} x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}} x\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\Big|_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2-2y^2}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2-2y^2-1+y^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1-y^2 = \frac{1}{2}\left[y-\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right] = \frac{2}{3}$$

Esercizio 2. (a). [3p] Dato il campo vettoriale $F = \left(\frac{1}{x^2y}, \frac{1}{xy^2}\right)$, si determini il suo campo di esistenza in $\mathbb{R}^2$ e si dica se F è irrotazionale e conservativo sul dominio $\{x > 0, y > 0\}$.

C.E. $x \neq 0$ e $y \neq 0$



$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{1}{x^2y^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \Rightarrow \operatorname{rot} F = 0$$

$\{x>0, y>0\}$ sempl connesso $\Rightarrow$ F conservativo

[Potenziale $U = -\frac{1}{xy}$]

(b). [3p] Si calcoli il lavoro del campo F lungo la curva $\gamma = (t, 1)$ per $-1 \leq t \leq 1$.

$\gamma \not\subset$ C.E. $\Rightarrow$ non si può calcolare il lavoro

Esercizio 3. Sia $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \log\left(1 + \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a). [2p] Si dica se f è continua in $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \rightsquigarrow \lim_{\rho\to 0} \underbrace{\rho^2}_{\to 0} \underbrace{\cos^2\theta}_{\geq 0} \underbrace{\log\left(1 + \sin^2\theta\right)}_{\geq 0} = 0$$

$\Rightarrow$ f è continua

(b). [3p] Si dica se f è differenziabile in $(0,0)$

$f(x,0) \equiv 0$, $f(0,y) \equiv 0$ $\Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - d_{(0,0)}f\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 \log\left(1 + \frac{k^2}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\rightsquigarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos^2\theta \log(1+\sin^2\theta)}{\rho} = 0 \Rightarrow f \text{ è diff in } (0,0)$$

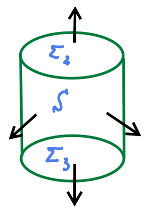
(c). [3p] Si calcolino l'estremo superiore e inferiore della funzione su $\mathbb{R}^2$

$f(0,0) = 0$ e $f(x,y) \geq 0 \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}^2} f = 0$

$$f(x,x) = x^2 \log\left(1 + \frac{x^2}{2x^2}\right) = x^2 \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$$

$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$

Esercizio 4. (a). [4p] Si calcoli il flusso di $F = (xz, x, 0)$ uscente da $S = \{x^2 + y^2 = 1,\ -1 \le z \le 1\}$



$F \cdot n$ su Σ_2 e su Σ_3 $\Rightarrow$

$\Phi(F, \Sigma_2) = \Phi(F, \Sigma_3) = 0$

Per il th divergenza

per simmetria $\Downarrow$

$$\Phi(F,S) = \Phi(F,S) + \Phi(F,\Sigma_1) + \Phi(F,\Sigma_3) = \iiint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ -1\le z\le 1}} \operatorname{div} F = \iiint_{\substack{x^2+y^2\le 1\\ -1\le z\le 1}} z = 0$$

(b). [4p] Si calcoli $\iint_S z^2 d\sigma$

Parametrizzo S come $r(\theta, h) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ h \end{pmatrix}$ $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$, $\quad -1 \le h \le +1$

$\phi_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \qquad \phi_h = (0, 0, 1)$

$$\phi_\theta \times \phi_h = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\phi_\theta \times \phi_h| = 1$$

$$\iint_S z^2 d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} h^2 \, dh \, d\theta = 2\pi \left. \frac{h^3}{3} \right|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi$$