Campo Magnetico

Vettore campo e vettore induzione

Campo e induzione sono due cose distinte, ma si relazionano tra loro; rispettivamente:

- $\bar{B}$ = Induzione magnetica o anche densità di flusso.
- $\bar{H}$ [A/M] = Campo magnetico

Si relazionano secondo:

$$\boxed{\bar{B} = \mu_0 \mu_r \bar{H}}$$

con μ_r = Permeabilità relativa del materiale (può essere $\gg 1$)

Legge di Ampere

In qualsiasi sistema, vale la relazione per cui:

$$\int_{\Gamma} \bar{H}\, d\bar{l} = I$$

In sistemi in cui il vettore $\bar{H}$ ha modulo costante lungo la curva Γ, allora si può scrivere

$$\bar{H} = \frac{I}{2\pi r}\hat{\theta}$$

Concetti da ricordare

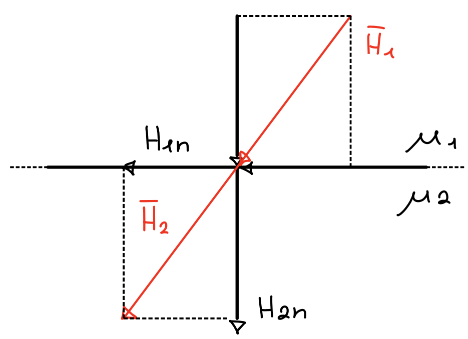
- $\Phi(\bar{B}) = \int_{\Sigma} \bar{B}\, d\bar{s}$ [Wb] (in percorsi chiusi è nullo $\oint \bar{B} d\bar{s} = 0$)
- $w = \frac{1}{2}\bar{B}\cdot\bar{H}$ (densità di energia magnetica) [J/m^3]
- $e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$
- $\bar{F} = q\bar{v}\wedge\bar{B} = i\bar{l}\wedge\bar{B}$

Condizioni di interfaccia (rifrazione)

Quando si ha un interfaccia tra due materiali con μ_r diverso, il campo varia mantenendo la componente normale di $\bar{B}$ e quella tangenziale di $\bar{H}$ costanti.

$$\left.\begin{aligned} \tan\theta_1 &= \frac{B_{1t}}{B_{1n}} = \frac{\mu_1 H_{1t}}{H_{1n}} \\ \tan\theta_2 &= \frac{B_{2t}}{B_{2n}} = \frac{\mu_1 H_{2t}}{H_{2n}} \end{aligned}\right\}$$

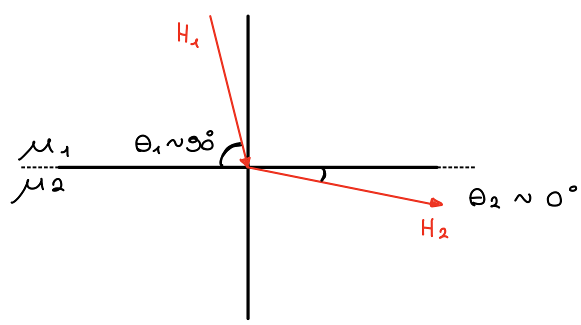
Legge di Snell



$$\frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Quindi per $\mu_1 \gg \mu_2 \Rightarrow \tan\theta_1 \longrightarrow \infty$

$$\begin{cases} \theta_1 \longrightarrow \pi/2 \\ \theta_2 \longrightarrow 0 \end{cases}$$



⚠ Più $\mu_1 \neq \mu_2$ e più il vettore viene deviato da un mezzo a un altro, per cui

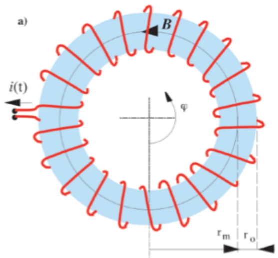
Materiali ferromagnetici

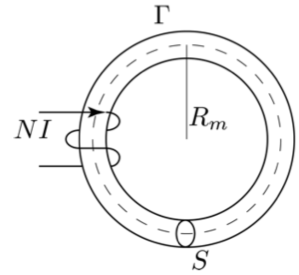
Sono materiali con μ_r molto elevato $(10^3 \sim 10^4)$ che convogliano le linee di campo al loro interno, per cui alterano lo spazio vettoriale adiacente.
Si comportano come i conduttori, che attirano le cariche all'interno, solo con le linee di campo.
Questa proprietà è alla base dei circuiti magnetici, consideriamone uno composto da un toro (ciambella) avvolto da un certo numero di spire N in cui passa corrente.
Ipotizziamo che per μ_r molto grande: $\underline{B \simeq \text{costante su } \Sigma \text{ e su } \gamma}$, applichiamo la legge di Ampere:

$$\int_\gamma \bar{H} \cdot d\bar{l} = I = 2\pi R_m H \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi R_m}$$

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{I}{2\pi R_m}$$

$$\Phi = \int_S \bar{B}\, d\bar{S} = \frac{\mu_0 \mu_r S}{2\pi R_m} NI$$



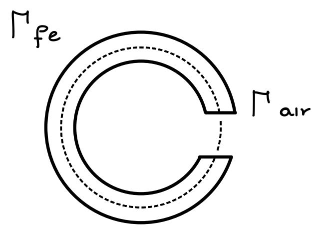


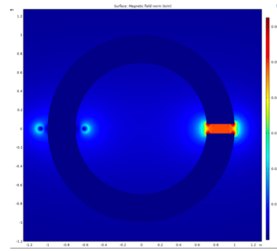
$\triangledown$ Vale solo per le ipotesi fatte, che osservando con un software si rivelano vere. Abbiamo quindi confermato che il campo è confinato nel materiale.

Caso di vuoto d'aria o traferro

In presenza di un traferro, l'ipotesi di $\bar{B}$ costante non è più valida; tuttavia si può supporre che $\underline{\bar{B}_{fe} = \bar{B}_{air}}$, mostrando che:
(divido Γ in Γ_{fe} e Γ_{air})

$$\mu_0 \mu_{fe} H_{fe} = \mu_0 H_{air} \xrightarrow{\mu_{fe} \gg \mu_0} H_{fe} \simeq 0$$





$$H_{air} = \frac{I}{d} \text{ (da ampere)}, \quad H_{fe} = 0, \quad B_{fe} = 0$$

$$\boxed{B_{air} = \frac{\mu_0 \mu_r I}{d}}$$

Vantaggi dei ferromagnetici

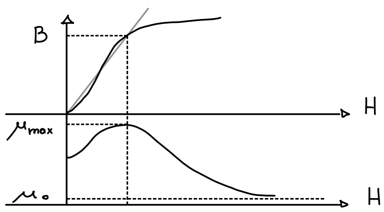
1. Concentrano il campo in zone specifiche, così da generare elevati valori di campo
2. Concentrano l'energia nei traferri

Esempio numerico

$I = 10$ A, $d = 1$mm da cui $\bar{H}_{air} = 10\ \text{KA}\cdot\text{m}^{-1}$ nel vuoto otterrei lo stesso valore ponendoci ad una distanza molto piccola da un filo infinito (0,16 mm).
Quindi con un traforo è possibile avere valori alti di $\bar{H}$ con basse correnti.

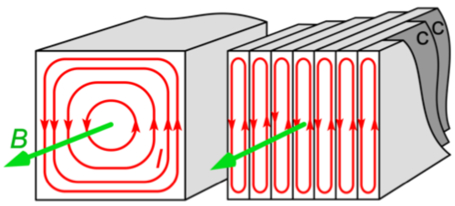
Problematiche dei materiali F.M.

1. Non linearità, ossia da un certo valore di μ_r in poi, B non è lineare, per cui è conveniente operare in condizioni di linearità.



2. Isteresi, ossia un ciclo di magnetizzazione, per cui quando si applica una corrente a un F.M., questo si magnetizza, ma ciò significa che per smagnetizzarsi richiederà una corrente opposta per cui, come intuibile, il ciclo consuma energia.

3. Correnti parassite o di Focol
Al variare del campo nel materiale si inducono correnti vorticose che cercano di opporsi a tale variazione per cui dissipano energia.
Un modo per ridurre questo effetto è usare laminati, al posto di ferro massiccio, in modo da ridurre la sezione



Legge di Hopkinson e riluttanza

Come avevamo visto, campo e vettore di induzione erano legati, per la legge di Ampere, con l'espressione:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H}\, d\bar{l} = I \quad \Rightarrow \quad I = \oint \frac{\bar{B}}{\mu_0 \mu_r}\, d\bar{l}$$

Considerando l'ipotesi di $\bar{B}$ uniforme $\forall$ sezione S del materiale si ha inoltre che:

$$\Phi(\bar{B}) = \int_S \bar{B} \cdot \bar{S} = B \cdot S \quad \Rightarrow \quad B = \Phi / S$$

sostituendo nella legge di Ampere:

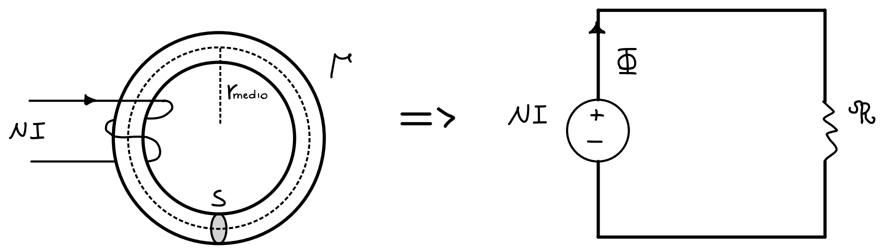
$$I = \oint_{\Gamma} \frac{\Phi}{\mu_0 \mu_r S}\, dl = \Phi \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$$

Definiamo il coefficiente moltiplicato per Φ come RILUTTANZA ($\mathcal{R}$).

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} \quad [A/Wb]}$$

da cui, considerando un sistema di solenoidi con N_i spire su un supporto costituito da m tronchi con diverso $\mathcal{R}$ si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i N_i = \sum_{i=1}^{m} \Phi_i \mathcal{R}_i$$



NI = Forza magnetomotrice [Ampere · Spire]

$$\boxed{I = \Phi \cdot \mathcal{R}}$$ LEGGE DI HOPKINSON

Nota la similitudine tra $\mathcal{R}$ e R:

$$R = \frac{l}{\sigma S} \sim \mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S}$$

$$V = RI \sim I = \Phi \cdot \mathcal{R}$$

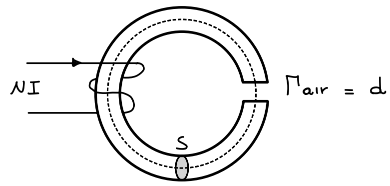
- TRONCHI ≅ Rami con resistenza pari a $\mathcal{R}$
- SOLENOIDI ≅ Generatori di tensione (NI)

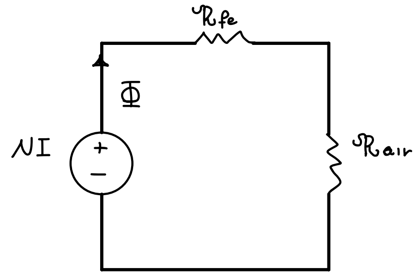
Caso di circuito con traferro

È necessario contare anche la riluttanza dell'aria

$$\mathcal{R}_{fe} = \frac{l_{fe}}{\mu_0 \mu_r S} \qquad \mathcal{R}_{air} = \frac{d}{\mu_0 S}$$

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_{fe} + \mathcal{R}_{air}} \simeq \frac{NI}{\mathcal{R}_{air}} = \frac{NIS\mu_0}{d}$$





$$\boxed{\Phi = \frac{NI \cdot S\mu_0}{d}}$$

$B = \mu_0 \frac{NI}{d}$ (N.B. analogo a quanto dimostrato prima)

Calcolo coefficienti auto e mutua induzione

Consideriamo un caso con più di un avvolgimento, in questo caso si ha che:

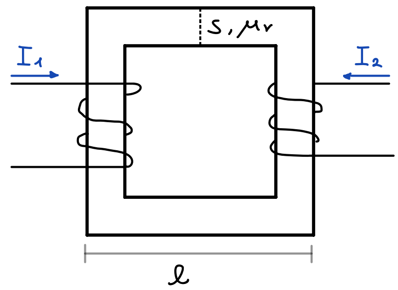
1. I versi delle correnti di prova determinano la posizione dei contrassegni nell'equivalente circuito elettrico (ossia dove sta il pallino •)
2. I versi delle correnti di prova, regola della mano destra, ne determinano la polarità

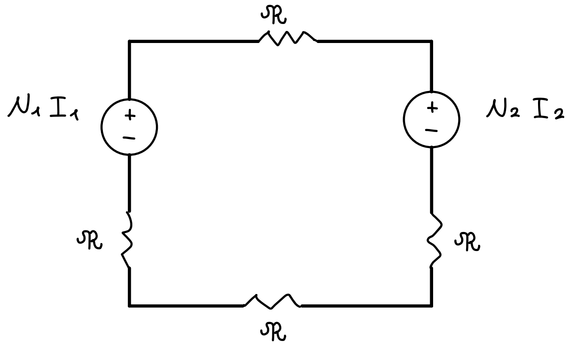
Calcoliamo L_1 e L_2 considerando gli avvolgimenti isolati.

$$L_1 = \frac{\Phi_{c1}}{I_1} = \frac{N_1 I_1}{4\mathcal{R}}$$

$$\boxed{L_1 = \frac{N_1^2}{4\mathcal{R}}}$$

! l è il lato del quadrato





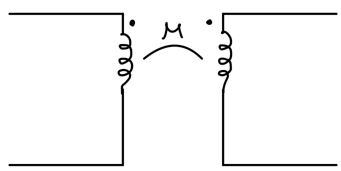
Vale lo stesso per L_2, poiché il circuito è simetrico:

$$\boxed{L_2 = \frac{N_2^2}{4\mathcal{R}}}$$

! I versi di I_1 e I_2 li scelgo io arbitrariamente

$$M_{12} = M_{21} = M = \frac{\Phi_{c2,1}}{I_1} = \frac{\Phi_{c12}}{I_2}$$

$\Phi_{c2,1}$ è il flusso concatenato a 2, prodotto da 1.



Equivalente elettrico

$$\boxed{M = \frac{N_1 N_2}{4\mathcal{R}}}$$

Il segno di M si trova guardando se i flussi hanno versi concordi (+) o discordi (−) delle correnti prodotte.

Coefficiente di accoppiamento

È un coefficiente che indica la "bontà" dell'accoppiamento e va da 0 a 1, per il massimo si ha che tutte le linee di campo di un avvolgimento si concatenano all'altro

$$\boxed{K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}}$$

! K non ha segno quindi M va con il valore assoluto

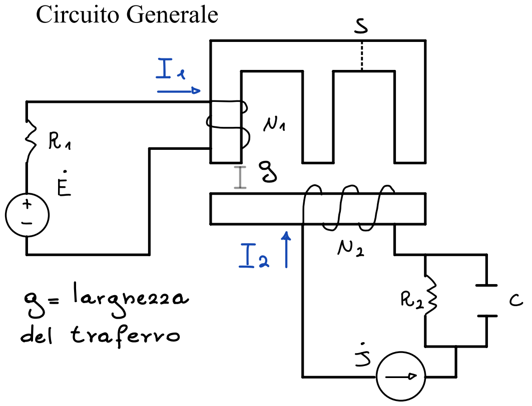
Esercizio:

Consideriamo il circuito in figura di cui sono noti i seguenti valori:

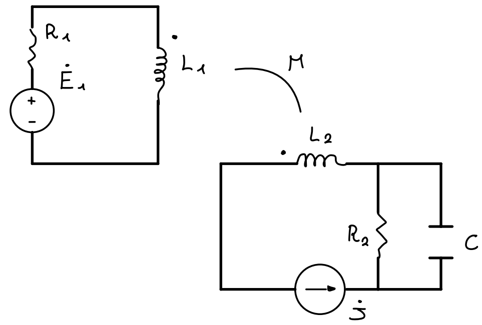
$\dot{E}_1 = 30\,V$	$X_C = 5\,\Omega$	$S = 50\,cm^2$	$g = 2\,mm$
$\bar{J} = -j2\,A$	$N_1 = 120$	$N_2 = 50$	$\mu_r \sim +\infty$
$R_1 = 6\,\Omega$	$R_2 = 2\,\Omega$	$f = 50\,Hz$	

Trovare la potenza attiva e reattiva erogata da $\dot{E}_1$.

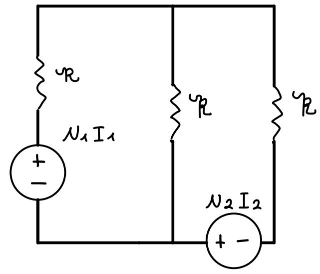
Circuito Generale



Circuito Elettrico



Circuito Magnetico

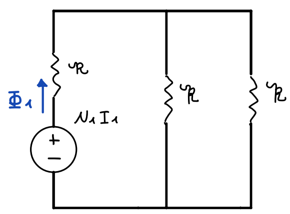


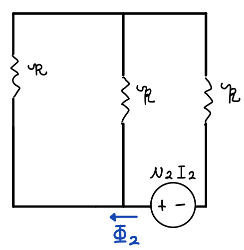
L'indicazione $\mu_r \sim +\infty$ ci dice di trascurare l'induttanza del ferro:

1. Scelgo il verso delle correnti di prova arbitrariamente, quindi completo il circuito con i simboli

2. Considero i circuiti con L_1 e L_2 isolati e li calcolo L_1, L_2 e M:

$$L_1 = \frac{\Phi_{c1}}{I_1} = \frac{N_1 I_1}{\frac{3}{2}\mathcal{R}} = 30{,}2 \text{ mH}$$





$$L_2 = \frac{\Phi_{c2}}{I_2} = 5{,}2 \text{ mH}$$

$$M = \frac{\Phi_{c1,2}}{I_2} = \frac{\Phi_1}{3\mathcal{R}} = \frac{N_1 N_2}{3\mathcal{R}} = 6{,}3 \text{ mH}$$

Il segno di M e' (+) perche' i versi di $\Phi_{1,2} = \Phi_{2,1}$

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} < 1$$

3. Trovo P, Q erogati dal generatore:

$$\dot{E}_1 = \dot{I}_1 (R + j\omega L) - jM\omega \dot{J}$$

$$\dot{I}_1 = (1{,}62 - j\,2.56) \text{ A}$$

$$\bar{S}_g = \dot{E}_1 \dot{I}_1^* = (48{,}62 + j\,66{,}73) \text{ VA}$$