Università di Pisa - CdL Ingegneria Ed-Architettura, Pisa - 26/6/2019

(Cognome) (Nome) (Matricola)

Per passare è necessario realizzare almeno 8 punti sui 15 disponibili nei primi 2 esercizi e almeno 18 in totale

Esercizio 1. Sia $f(x, y) = 3x - 12y - 3x^4 - 6y^2$

(a). [4p]Si trovino e si classifichino i punti critici

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3 - 12x^3 \\ -12 - 12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{1}{4} \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ y = -1 \end{cases}$$

$$H_f = \begin{pmatrix} -36x^2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad H_f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, -1\right) = \begin{pmatrix} -\frac{36}{\sqrt[3]{16}} & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

ha gli autovalori negativi $\Rightarrow$ massimo

(b). [3p]Si scriva lo sviluppo di Taylor di f al secondo ordine nel punto $(1, 2)$

$$\nabla f(1,2) = \begin{pmatrix} -9 \\ -36 \end{pmatrix} \qquad H_f(1,2) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad f(1,2) = -48$$

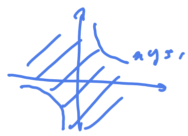
$$f(x,y) = f(1,2) + \nabla f(1,2) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}^T H_f(1,2) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + o\left((x-1)^2 + (y-2)^2\right) =$$

$$= -48 - 9(x-1) - 36(y-2) - 36(x-1)^2 - 12(y-2)^2 + o\left((x-1)^2 + (y-2)^2\right)$$

Esercizio 2. Sia $F(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{1-xy}}, \frac{x}{\sqrt{1-xy}}\right)$

(a). [2p]Si determini e si disegni il campo di esistenza di F

$C.E. : \{1 - xy > 0\}$



(b). [2p]Si dica se F è conservativo

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-xy}} + \frac{1}{2}\frac{xy}{(1-xy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2-xy}{2(1-xy)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow \text{rot } F = 0$$

C.E. è semplicemente connesso $\Rightarrow$ F è conservativo

$$\left[\, U = -2\sqrt{1-xy}\,\right]$$

(c). [4p]Si calcoli il lavoro di F lungo la curva $\gamma(t) = (0,t)$ $t \in (-1,1)$

$\gamma(-1) = (0,-1) \qquad \gamma(1) = (0,1)$

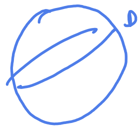
$$\int_\gamma F \cdot ds = U(\gamma(1)) - U(\gamma(-1)) = -2+2 = 0$$

In alternativa $\quad \dot\gamma = (0,1)$

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_{-1}^{1} t \cdot 0 + 0 \cdot 1 \, dt = 0$$

Esercizio 3. [8p]Si trovino, se esistono, il massimo e minimo di $f(x, y, z) = x$ su $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x + 2z = 0\}$. $= D$

Max e min esistono per Weierstrass



Uso i molt di Lagrange

$\nabla f = (1, 0, 0)$ $\quad g_1 = x^2+y^2+z^2-9 \quad \nabla g_1 = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$g_2 = x + 2z \quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 1 = \lambda x + \mu \\ 0 = \lambda y \\ 0 = \lambda z + 2\mu \\ x + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \\ \underline{2\mu = 0} \end{cases} \text{ IMPOSSIBILE}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \mu = 1 - \lambda x \\ 0 = \lambda z + 2 - 2\lambda x \\ x^2 + z^2 = 9 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{y = 0} \\ x = -2z \\ 4z^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

$z = \pm \frac{3}{\sqrt{5}} \quad x = \mp \frac{6}{\sqrt{5}} \quad y = 0$ ho 2 pti critici

$\left(\frac{6}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{3}{\sqrt{5}} \right)$ pto di max

$\left(-\frac{6}{\sqrt{5}}, 0, \frac{3}{\sqrt{5}} \right)$ pto di min

Esercizio 4. (a). [5p]Si risolva, per $\lambda \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - y(x) = e^{(1+\lambda^2)x}; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

eq. omogenea $y' = y$ sol $y_o = Ae^x$

Se $\lambda \neq 0$ $e^{(1+\lambda^2)x}$ non è in risonanza

Sol particolare $y_p = a\, e^{(1+\lambda^2)x}$

$y_p' - y_p = [a(1+\lambda^2) - a]\, e^{(1+\lambda^2)x} = a\lambda^2 e^{(1+\lambda^2)x} \Rightarrow a = \frac{1}{\lambda}$

Sol generale $y = Ae^x + \frac{1}{\lambda^2} e^{(1+\lambda^2)x}$ con le cond. iniziali

$y = -\frac{1}{\lambda^2} e^x + \frac{1}{\lambda^2} e^{(1+\lambda^2)x}$

Se $\lambda = 0$ risonanza Sol particolare $y_p = axe^x$

$y_p' - y_p = ae^x + axe^x - axe^x = ae^x$ $a = 1$

Sol gen. $y = Ae^x + xe^x$ con le cond. iniziali

$y = xe^x$

(b). [3p]Si calcoli, al variare di λ, $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Se $\lambda = 0$ $y = xe^x \longrightarrow +\infty$ quando $x \to \infty$

Se $\lambda \neq 0$ $1+\lambda^2 > 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{\lambda^2} e^x + \frac{1}{\lambda^2} e^{(1+\lambda^2)x} \longrightarrow +\infty$

termine dominante