Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Pisa, 12 giugno 2023 Parte A (suff: 6/11)

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. Data $\sum \frac{1}{(x+3n)(x+3n+4n^2)}$ per $x \in \mathbb{R}$.

(a). [2p] Studiarne la convergenza puntuale.

$\forall x_0 \quad \sum \frac{1}{(x+3n)(x+3n+4n^2)} \sim \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$ (definitivamente)

$\Rightarrow$ conv puntuale su $\mathbb{R}$

(se si vuole essere più rigorosi, la serie non è definita per $x=-3n$, $x=-3n+4n^2$ $\forall n$, ma definitivamente non è un problema)

(b). [4p] Studiarne la convergenza totale su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{R}^+$.

Chiamiamo $f_n = \frac{1}{(x+3n)(x+3n+4n^2)}$. Per $x \to -3n$ e $x \to -3n-4n^2$

$|f_n| \to +\infty$

$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} |f_n| = +\infty$ e non ci può essere conv totale su $\mathbb{R}$.

Su $[0,+\infty)$ abbiamo $f_n > 0$, inoltre $f_n' = -\frac{1}{(\quad)^2}(2x+6n+4n^2) < 0$

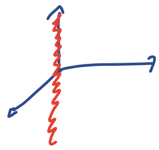
quindi $\sum \sup_{x \geq 0} |f_n| = \sum f_n(0) < +\infty$ perché in 0

c'è conv. puntuale

Esercizio 2. Si consideri il campo $F(x,y,z) = \left(\frac{2xz}{x^2+y^2}, \frac{2yz}{x^2+y^2}, \frac{2z}{x^2+y^2}\right)$

(a). [3p] Si dica qual è il dominio di F, si dica se F è conservativo sul suo dominio e si calcoli la sua circuitazione sulla curva $\alpha = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Dominio : $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ (x,y) \neq (0,0)\}$



$\frac{\partial F_3}{\partial x} = -\frac{4xz}{(x^2+y^2)^2} \neq \frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \Rightarrow \text{rot } F \neq 0$ $\quad F$ non conservativo

$\int_\alpha F \cdot ds = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0$ $\quad$ (su α $z=0 \Rightarrow F|_\alpha \equiv 0$)

(b). [2p] Si calcoli il lavoro di F lungo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$\int_\gamma F \cdot ds = \int_0^{2\pi} 2t \cos t (-\sin t) + 2t \sin t (\cos t) + 2t \cdot 1 \, dt =$

$= \int_0^{2\pi} 2t \, dt = \left[t^2\right]_0^{2\pi} = 4\pi^2$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

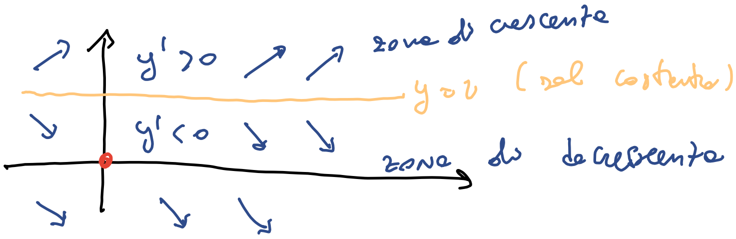
Pisa, 12 giugno 2023 Parte B

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

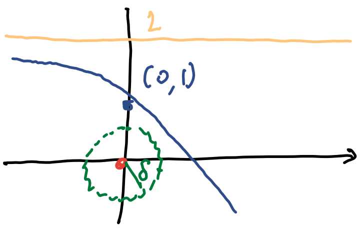
Esercizio 1. Data l'equazione differenziale $y' = \frac{y-2}{x^2+y^2}$.

(a). [1p] Si dica per quali dati iniziali il problema di cauchy ammette un'unica soluzione locale e si studino le zone di crescenza e decrescenza delle soluzioni.

L'unico dato iniziale per cui il th. di Cauchy non si applica è $(x_0, y_0) = (0,0)$. Per tutti gli altri dati esiste ! sol locale.



(b). [4p] Si studino le proprietà locali e l'intervallo massimale della soluzione che all'istante $x = 0$ vale 1.



Per quanto detto prima $y(x)$ è decrescente e $y(x) < 2$ $\forall x$.

Inoltre, per la scelta del dato iniziale $\exists\, \delta > 0$ t.c. $x^2 + y^2(x) > \delta$.

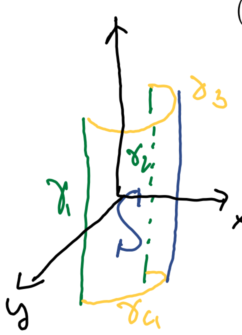
Allora si applica il th. di esistenza globale, perché

$$\left| \frac{y-2}{x^2+y^2} \right| < \frac{|y|}{\delta} + \frac{2}{\delta}$$ sulle soluzioni.

Si noti che $y(x)$ ha un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$ ma non si riesce a dire se il suo asintoto sia $y = 2$

Esercizio 2. Si consideri il semi cilindro dato da $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4;\ x \geq 0;\ -3 \leq z \leq 3\}$.

(a). [5p] Si determinino, se esistono, il valore massimo e il valore minimo di $f(x, y, z) = x + z^2$. Max e Min esistono per Weierstrass



Punti critici interni con Lagrange

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda x \\ 0 = \lambda y \\ 2z = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$\to y = 0 \quad x = 2$

$\to \lambda = 0$ IMP.

Pto critico interno $(2, 0, 0)$

Su γ_1 : $x = 0$, $y = \pm 2$ $\quad f|_{\gamma_1} = z^2$ ha min per $z = 0 \Rightarrow (0, 2, 0)$

Idem su γ_2 $\quad$ pto critico $(0, -2, 0)$

Su γ_3 $\quad f|_{\gamma_3} = x + 9 \Rightarrow$ Max in $(2, 0, 3)$

Idem su γ_4 $\quad f|_{\gamma_4} = x + 9$ Max in $(2, 0, -3)$

Pti singolari $\quad (0, 2, 3) \quad (0, -2, 3) \quad (0, 2, -3) \quad (0, -2, -3)$

Per confronto $\quad \max_S f = f(2, 0, 3) = f(2, 0, -3) = 11$

$\min_S f \ 2= f(0, 2, 0) = f(0, -2, 0) = 0$

(b). [4p] Si orienti S con il vettore n che ha la componente x positiva, e si calcoli il flusso attraverso S del campo $F = (y, x, z^2)$.

Parametrizzazione per S $\quad \phi = (2\cos t, 2\sin t, h) \quad t \in [0, 2\pi] \quad h \in [-3, 3]$

$\phi_t = (-2\sin t, 2\cos t, 0) \qquad \phi_h = (0, 0, 1)$

$$n = \frac{\phi_t \times \phi_h}{|\phi_t \times \phi_h|} = \frac{(2\cos t, 2\sin t, 0)}{2} = (\cos t, \sin t, 0) \quad \left(\text{ha la componente } x > 0\right)$$

$$\iint_S F \cdot n \, d\sigma = \int_{-3}^{3} \int_0^{2\pi} (2\cos t, 2\sin t, h^2) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \, dt \, dh = 4 \int_{-3}^{3} \int_0^{2\pi} dt \, dh =$$

$$= 4 \cdot 6 \cdot 2\pi = 48\pi .$$

(c). [2p] Si scriva l'equazione del piano tangente ad S nel punto $(\sqrt{3}, 1, 1)$.

Il punto $(\sqrt{3}, 1, 1)$ si ottiene per $t = \frac{\pi}{6}$, $h = 1$

Il piano tg. è

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \, \phi_t\left(\frac{\pi}{6}, 1\right) + \mu \, \phi_h\left(\frac{\pi}{6}, 1\right) \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

[In forma cartesiana è $y + \sqrt{3}x = 4$]

Esercizio 3. [2p] Si calcoli il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{|x|+|y|}.$$

In coord polari $\to$ $$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho\,(|\sin\theta|+|\cos\theta|)} = 0$$

perché $|\sin\theta|+|\cos\theta|$ è discosto da zero $\forall\theta$.

Esercizio 4. [3p] Si determinino estremo inferiore e superiore di $f(x,y)=\frac{y}{|x|}$ su $-1<y<1$.

Abbiamo che $\lim_{x\to 0} f(x,\frac{1}{2}) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} f(x,-\frac{1}{2}) = -\infty$

Quindi $\sup_{-1<y<1} f = +\infty$ e $\inf_{-1<y<1} f = -\infty$