SUCCESSIONI

Successioni Reali

Sono Funzioni: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ oppure da $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ con A infinito e $\subseteq \mathbb{N}$; in particolare $+\infty$ e' l'unico punto di accomulazione del dominio di f.

Percio' calcoleremo $\lim_{n \to +\infty} f(n)$.

! Valgono tutti i teoremi visti fino ad ora, ma cambia la terminologia

Successioni divergenti / convergenti / indeterminate

- Una successione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice divergente se: $\lim_{n \to +\infty} f(n) = \pm\infty$
- Una successione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convergente se: $\lim_{n \to +\infty} f(n) = l$ con $l \in \mathbb{R}$
- Una successione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice $\overbrace{\text{indeterminata}}^{\text{o irregolare}}$ se: $\lim_{n \to +\infty} f(n)$ non esiste

esempio:

$$\lim_{n \to +\infty} (-1)^n$$

$$\begin{array}{ccccc} f(1) & f(2) & f(3) & f(4) & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \end{array} \qquad \{f(n) \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$$

$f(n) = (-1)^n$ e' irregolare (perche' oscilla)

! Limitata $\Rightarrow$ non diverge

Lezione 29/11/22

Esempio: Convergenza

$$\lim_{n \to +\infty} f(n) = l \quad \text{con } l \in \mathbb{R}$$

Uso la definizione di limite

$\forall \, \varepsilon > 0$ con $(l-\varepsilon, l+\varepsilon) \; \exists \, M > 0$:

$\forall \, n > M$, $f(n) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \Rightarrow |f(n) - l| < \varepsilon$

Valgono tutti i teoremi visti per i limiti (permanenza del segno, unicità, composizione, sostituzioni, ...)

Osservazione: Monotonia

Sia $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $f(n) = 1 + \frac{1}{n}$ (monotona decrescente) fino a tendere a 1, ossia il suo Inf.

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1 = \text{Inf}\{f(n)\}$$

Sia ora $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$g(n) = \begin{cases} 0 & 0 \le n < 2^{100} \\ 1 + \frac{1}{n} & n \ge 2^{100} \end{cases}$$

f e g sono la stessa funzione da un certo punto in poi, ma prima la situazione è diversa.

Cambiano i primi 2^{100} numeri

In particolare, hanno lo stesso limite e si dice che:

- g è detta definitivamente monotona decrescente e:

$$\lim_{n \to +\infty} g(n) = 1 \neq \underbrace{\text{Inf}\{g(n)\}}_{\text{è zero}}$$

Quindi g non è sempre monotona decrescente, ma lo è definitivamente (ossia ha punti in cui cresce, ma da lì in poi è decrescente)

Perciò se voglio prendere l'inf come $\lim_{n \to +\infty}$, devo prendere quello definitivo.

Proposizione

Per ogni successione $f(n)$ posso definire infinite successioni con il suo stesso limite.

esempio

$$g_0(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ f(n) & n \neq 0 \end{cases}$$

$$g_1(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ f(n) & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} g_0(n) = \lim_{n \to +\infty} g_1(n)$$

! Ciò significa che se io voglio calcolare il limite per $n \to +\infty$ posso scordarmi cosa succede prima per un n° finito di valori (es: $0 \leq n \leq 7^{52}$)

esempio: Calcolo

- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a}$ con $a > 0$

$$= \lim_{n \to +\infty} (a)^{1/n} = 1 \quad \forall\, a > 0$$

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{5n^2 + 2} = \frac{2}{5}$$

Sottosuccessione

Sia $\{f(n) = a_n\} = \{a_n\}$ una successione reale e sia $\{c_n\}$ una successione da $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ monotona strettamente crescente.

$\Downarrow$

$\lim_{n \to +\infty} c_n = +\infty$ (ossia non è convergente)

Allora $b_n = a_{c_n}$ è una sottosuccessione di $\{a_n\}$

esempi: (servono per succ. irregolari)

$c_n = 2n$ (successione dei n° pari)

$c_n = 2n + 1$ (... dispari)

▽ In generale e' possibile scrivere sempre una sottosucc del tipo:

$$\boxed{C_n = \alpha n + \beta} \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{N} \ \text{e} \ 0 \leq \beta < \alpha$$

esempio:

$a_n = (-1)^n$ prendo la s.succ. $a_{2n} = (-1)^{2n}$ e' costantemente $= 1$, mentre se prendo $a_{2n+1} = -1$, quindi ho trovato 2 sottosuccessioni distinte che vanno a 1 e -1;
Questo ci dice chiaramente che a_n e' irregolare.

▽ In un certo senso le s.succ. sostituiscono il limite dx e quello sx

Teorema sulle sottosuccessioni (Criterio di irregolarita')

Una successione a_n ha limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
$\iff$ ogni sua s.successione ha limite ℓ.

▽ Se trovo 2 s.successioni con limite diverso allora la successione e' irregolare

Dimostrazione

($\Leftarrow$) Definisco $C_n = n$ (mon. crescente), $b_n = a_{c_n} = a_n$, ossia ogni successione e' sottosuccessione di se stessa; quindi se tutte le sottosuccessioni di a_n, hanno $\lim = \ell$ allora anche a_n ha $\lim = \ell$.

($\Rightarrow$) Una sottosuccessione e' composizione della funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $f(n) = a_n$ e $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ con $g(n) = a_n$.
$(f \circ g): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$(f \circ g)(n) = a_{c_n} = b_n$, per il teorema della composizione perciò:

$$\lim_{n \to +\infty} a_{c_n} = \lim_{n \to +\infty} (f \circ g)(n) = \lim_{n \to +\infty} f(c_n) = \ell$$

Teorema (Analogo a Bolzano - Weistrass)

Ogni successione limitata (non divergente) ammette almeno una sottosuccessione convergente

Dimostrazione:

Prendiamo $Im\, f(n) = \{a_n\}$, e' un insieme "infinito e limitato" => ha un pto di accumulazione. Costruisco sottosuccessione che tende al punto di acc.

CRITERI DI CONVERGENZA

① Criterio di Cauchy

Successione di Cauchy: Successione $\{a_n\}$ si dice di Cauchy $\iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; M > 0 : \forall\, n, m > M,\ |a_n - a_m| < \varepsilon$

ossia $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n - a_{n+1}| = 0$ (ossia i suoi valori sono molto vicini tra loro, "definitivamente")

Teorema:

Una successione e' convergente $\iff$ e' di Cauchy

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Suppongo $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\; M > 0 :$
$\forall\, n > M$
$|a_n - l| < \varepsilon$

$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m|$
$\leq |a_n + l| + |l - a_m| < \varepsilon \Rightarrow \{a_n\}$ e' di Cauchy

($\Leftarrow$) Supponiamo a_n successione di C. e sia $\varepsilon_1 = 1$, allora $\exists\; M_1 : \forall\, n > M_1,\ |a_n - a_{M_1}| < \varepsilon_1$

$\Rightarrow a_n < 1 + a_{M_1} \Rightarrow a_n > a_{M_1} - 1$

$\Rightarrow$ e' definitivamente limitata $\Rightarrow$ e' limitata

Per Teorema (analogo B.W.) $\exists$ s.suc. a_{c_n} convergente

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a_{c_n} = l \in \mathbb{R}$

Ma io so che se converge l, ossia se $l \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n$ e' convergente.

$|a_n - l| = |a_n - a_{c_n} + a_{c_n} - l| \leq \underbrace{|a_n - a_{c_n}|}_{\text{Piccolo perché } a_n \text{ è di Cauchy}} + \underbrace{|a_{c_n} - l|}_{\text{Piccolo perché } a_{c_n} \to l}$

Quindi se entrambi tendono a zero.

$|a_n - a_{c_n}| + |a_{c_n} - l| < \varepsilon$ (def)

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l$

② Criterio della radice n-esima (Successioni "definitivamente" a termini positivi)

Sia a_n una successione: $a_n \geq 0$ (definitivamente), suppongo che $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R}$ con $0 \leq l < 1$ allora:

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ (Ci dice che il limite esiste ed e' infinitesimo)

Dimostrazione

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M_\varepsilon : \forall n > M_\varepsilon$

$|\sqrt[n]{a_n} - l| < \varepsilon$, in particolare $0 \leq \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon$,

$\exists \varepsilon : l + \varepsilon < 1$, fissato ε, la disuguaglianza

$0 \leq \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon \Rightarrow 0 \leq a_n \leq \underbrace{(l+\varepsilon)^n}_{0}$

$\Rightarrow$ (Th. confronto) $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Corollario:

Stessa situazione e $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1 \Rightarrow \overbrace{\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty}^{\text{Ossia e' di ordine infinito}}$

Esempi: $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

- $a_n = n \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ (diverge)
- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = e^{\sqrt[n]{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(n)} = e^{\frac{\ln(n)}{n}}$ ma sappiamo che $n > \ln(n)$ per gerarchie di infiniti:

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \Rightarrow e^1 = 1$

quindi $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt[\cancel{n}]{(1 + 1/n)^{\cancel{n}}} = 1$ converge

- $a_n = 2n + (-1)^n$ è irregolare, ma:

prendo $a_{2n} \longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_{2n} = 3$

Irregolare

prendo $a_{2n+1} \longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_{2n+1} = 1$

③ Criterio del rapporto (per successioni def. positive)

Sia $\{a_n\}$ successione con $a_n > 0$ definitivamente; se:

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}$ con $0 \leq l \leq 1$

Allora $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$; se invece $l > 1$, $\lim_{n \to +\infty} = +\infty$

Dimostrazione

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M_\varepsilon : \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} - l \right| < \varepsilon \ \ \forall n > M_\varepsilon$,

prendo $\varepsilon : l + \varepsilon > 1$

$\Rightarrow \frac{a_{n-1}}{a_n} < l + \varepsilon < 1$

Moltiplico per a_n

$a_{n-1} < (l + \varepsilon) a_n < a_n \Rightarrow$ Successione strett. decrescente

quindi so già che converge

Se itero $\forall \ a_{n+1}, \dots, a_{M_{\varepsilon + (\dots)}}$, tutto $\to 0$

esempi:

- $\lim_{n \to +\infty} n^b / a^n = 0$ con $b \in \mathbb{R}$ e $a > 1$

Criterio radice nesima

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^b / a^n} = \lim_{n \to +\infty} n^{b/n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$, ma

$a < 1$ quindi il limite è 0 e la successione converge

- $\lim_{n \to +\infty} n^b / n!$

Criterio del rapporto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^b}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^b} = \frac{(n+1)^b}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n^b} = \frac{(n+1)^{b-1}}{n^b}$$

$$= 0 \longrightarrow \lim_{n \to +\infty} n^b / n! = 0$$

- $\frac{n!}{a^{2n^2}}$

$$\frac{(n+1)\cancel{!}}{a^{\cancel{2n}+2}} \cdot \frac{a^{\cancel{2n}}}{\cancel{n!}} \longrightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{a^2} = +\infty$$

quindi ~~f~~a $+\infty$ e la successione diverge

- $\frac{n!}{n^n}$

$$\frac{(n+1)\cancel{!}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}}$$

$$(n+1)^{\cancel{1}-n-\cancel{1}} \cdot n^n = \left(\frac{n}{(n+1)}\right)^n$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1$$

Teorema (Stolz - Cesaro)

Siano a_n, b_n due successioni con b_n monotona e divergente ($\lim = \pm\infty$) allora se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ell \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ allora $\lim_{n \to +\infty} a_n / b_n = \ell$

Esempio:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} i^K\right) \cdot \frac{1}{n^{K+1}} \quad \text{con} \quad K \in \mathbb{N} - \{0\}$$

⚠ Avevamo visto per induzione che $\left(\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\right)$

Quindi per $K = 1$ $\left(\sum_{i=1}^{n} i^1\right) \cdot \frac{1}{n^{K+1}} = \frac{n(n+1)}{2n^2} =$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Pongo $a_n = \sum_{i=1}^{n} i^K$ e $b_n = n^{K+1}$ (monotona crescente e divergente)

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} =$$

$$a_{n+1} - a_n = a_1 = \sum_{i=1}^{n+1} i^K - \sum_{i=1}^{n} i^K = (n+1)^K$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^K}{(n+1)^{K+1} - n^{K+1}} = \frac{1}{K+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n / b_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} i^K \cdot \frac{1}{n^{K+1}} = \frac{1}{K+1}$$

⚠ Non vale l'inverso del Teorema ($\not\Leftarrow$)

Applicazioni del Teorema

(A) Se $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} - a_n = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

allora $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{n} = \ell$; in seguito distinguere:

- $\ell \neq 0$ a_n non e' di Cauchy $\Rightarrow$ non converge
- $\ell > 0$ Dire che $\lim_{n \to +\infty} a_{n+1} - a_n = \ell$, vuol dire che

$|a_{n+1} - a_n| > l - \varepsilon$ per n abbastanza grande $\exists\, \varepsilon$: $l - \varepsilon > 0$; per n abbastanza grande $a_{n+1} > a_n + l - \varepsilon$, quindi $a_{n+2} > a_{n+1} + l - \varepsilon > a_n + 2(l - \varepsilon)$

$\vdots$

$$a_{n+m} > a_{n+m-1} + l - \varepsilon > \ldots > \underbrace{a_n + m(l - \varepsilon)}$$

Tende a $+\infty$ se $m \to +\infty$

- $l < 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

(B) Sia a_n tale che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Allora $\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i\right) \frac{1}{n} = l$

! Ciò vuol dire che nella somma, da un certo punto in poi la media sarà l.

Esempio:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n!)}{n} \qquad a_n = \ln(n) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$$

Faccio la media Aritmetica

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_n\right) \frac{1}{n} = \frac{\ln(n) + \ldots + \ln(1)}{n}, \text{ ma siccome}$$

$$\ln(n) + \ldots + \ln(1) = \ln(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1) = \frac{\ln(n!)}{n}$$

e con il teorema su media aritmetica $\frac{\ln(n!)}{n}$ tende $+\infty$

quindi $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n!)}{n} = +\infty$

Osservazione 1.

$$\frac{\ln(n!)}{n} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\frac{\ln(n)+\dots+\ln(1)}{n} = \frac{\ln(n)}{n} + \dots + \frac{\ln(1)}{n}$$

ognuno tende a zero, quindi abbiamo una F.I. $0 \cdot +\infty$

Ⓒ Media geometrica

Sia $a_n : a_n > 0 \ \forall n$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$.

Allora $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} a_i} = \ell$

Ⓓ Legame tra rapporto e radice n-esima

Sia $a_n : a_n > 0$ (definitivamente) se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ allora $\lim \sqrt[n]{a_n} = \ell$

Esercizio: $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n}$

Ⓓ $a_n = n$ e $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, ma se il limite del rapporto fa 1 allora anche $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Esercizio: $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!}$ $\quad a_n = n!$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \overbrace{\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n!}}^{1} + \overbrace{\lim_{n \to +\infty} (n+1)}^{0} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Esercizio: $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \to +\infty} (n!)^{1/n^2}$

$$a_n = \sqrt[n]{n!} \longrightarrow \frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{\overset{\nearrow 1}{\sqrt[n+1]{(n+1)}} \cdot \sqrt[n+1]{n!}}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$= \frac{\sqrt[n+1]{n!}}{\sqrt[n]{n!}} = (n!)^{\frac{1}{n^2+1}} \Rightarrow \text{tende a } 1$$