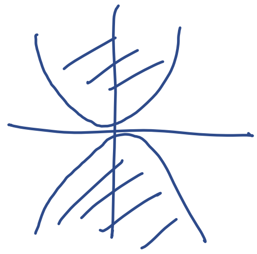
Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Pisa, 18 luglio 2022 Parte A(suff. 5/10)

________________ (Cognome) ________________ (Nome) ________________ (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si consideri il campo vettoriale $V(x,y) = \left(\frac{2x^3}{\sqrt{y^2-x^4}}, -\frac{y}{\sqrt{y^2-x^4}}\right)$, se ne determini il dominio di esistenza, e si dica se il campo è conservativo su tale dominio. [4p]

$$C.E. = \{ y^2 - x^4 > 0 \} = \{ y > x^2 \text{ o } y < -x^2 \}$$



unione di insiemi sempl connessi

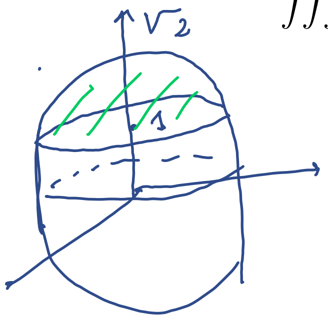
$$\partial_y V_1 = -\frac{1}{2} \frac{2x^3 \cdot 2y}{(y^2-x^4)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2x^3y}{(y^2-x^4)^{\frac{3}{2}}} \quad \Rightarrow \quad V \text{ è conservativo}$$

$$\partial_x V_2 = \frac{1}{2} \frac{y \cdot (-4x^3)}{(y^2-x^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2x^3y}{(y^2-x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Potenziale } U = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{y^2-x^4}}{2} + c_1 & y > x^2 \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{y^2-x^4}}{2} + c_2 & y < -x^2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $D = \{x^2 + y^2 + z^4 \le 4,\ z \ge 1\}$. Si calcolino

$$\iiint_D y\,dx\,dy\,dz; \qquad \iiint_D z\,dx\,dy\,dz. \text{ [6p]}$$

$D =$ 

D è simmetrico rispetto ad y

$$\Rightarrow \iiint_D y\,dx\,dy\,dz = 0$$

Per l'altro integrale procediamo per strati

$$D = \{ 1 \le z \le \sqrt{2}\ ;\ x^2+y^2 \le 4 - z^4 \}$$

$$\iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \int_1^{\sqrt{2}} z \iint_{x^2+y^2 \le 4-z^4} dx\,dy = \pi \int_1^{\sqrt{2}} z(4-z^4)\,dz = \pi \int_1^{\sqrt{2}} 4z - z^5\,dz =$$

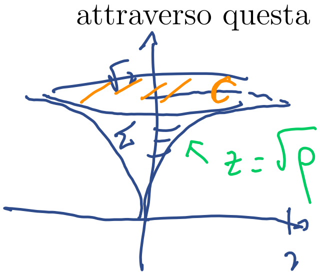
$$= \pi \left[2z^2 - \frac{z^6}{6} \right]_1^{\sqrt{2}} = \pi \left(4 - \frac{8}{6} - 2 + \frac{1}{6} \right) = \pi \left(2 - \frac{7}{6} \right) = \frac{5}{6}\pi$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Pisa, 18 luglio 2022 Parte B

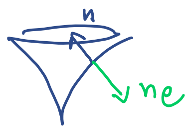
(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1. Si consideri la superficie parametrizzata da $\Phi(r,t) = (r\cos t, r\sin t, \sqrt{r})$ con $0 \le r \le 2$ e $0 \le t \le 2\pi$, orientata da un vettore normale n tale che $n \cdot k \ge 0$ (orientata verso l'alto). Si calcoli il flusso del vettore $F = (y^2, 0, z^2)$ attraverso questa superficie. [5p]



per usare il th delle divergenza devo considerare anche il cerchio C orientato con k.

Notare su Σ $\vec{n} = -\vec{n}_e$



quindi, chiamato D il solido fra. $\partial D = \Sigma \cup C$,

$$\iiint_D \mathrm{div}\, F = -\iint_\Sigma F\cdot n + \iint_C F\cdot k \; ; \quad \text{ora } F\cdot k = z^2\big|_C = 2$$

$$\Rightarrow \iint_C F\cdot k = \iint_{x^2+y^2\le 4} 2\,dxdy = 16\pi$$

$$\iiint_D \mathrm{div}\, F = \iiint_D 2z\,dx\,dy\,dz \underset{\text{strati}}{=} \int_0^{\sqrt{2}} z \iint_{x^2+y^2\le z^4} = \pi\int_0^{\sqrt{2}} z^5 = \pi\frac{z^6}{6}\Big|_0^{\sqrt{2}} = \pi\frac{8}{6} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\iint_\Sigma F\cdot n = -\iiint_D \mathrm{div}\, F + \iint_C F\cdot k = -\frac{4}{3}\pi + 16\pi = \frac{44}{3}\pi$$

Esercizio 2. Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) = e^{-nx}\log(x)$, per $n \geq 1$.

(a). Si studi la convergenza puntuale della successione su $(0, +\infty)$. [2p]

fissato $\bar{x}$ $\quad f_n(\bar{x}) \to 0 \quad$ per $n \to \infty$

$\Rightarrow f_n \to 0$ puntualmente su $(0, +\infty)$

(b). Si studi la convergenza uniforme della successione su $[4, +\infty)$ (sugg: si riesce a dire se f_n è monotona sull'intervallo, almeno per n grande?). [4p]

$$f_n' = -n e^{-nx} \log x + \frac{e^{-nx}}{x} = e^{-nx}\left[-n \log x + \frac{1}{x}\right]$$

Ora $\log x > 1$ perché $x > 4$; $\frac{1}{x} < 1$

$\Rightarrow$ per n grande $\quad -n \log x + \frac{1}{x} < 0$ su $[4, +\infty)$

$\Rightarrow f$ è decrescente $\Rightarrow \sup\limits_{(4, +\infty)} |f_n(x)| = f_n(4) \to 0$ per $n \to \infty$ per conv. puntuale

$\Rightarrow f_n \to 0$ unif. su $[4, +\infty)$

Esercizio 3. Si studino estremi inferiore e superiore e, se esistono, massimo e minimo, di $f(x,y) = x^2+y^2-\frac{1}{9}xy$ su $\mathbb{R}^2$ e sull'insieme $D = \{xy \le 1\} \subset \mathbb{R}^2$. [6p]

Su $\mathbb{R}^2$ abbiamo $\lim_{x^2+y^2\to+\infty} x^2+y^2-\frac{1}{9}xy = \lim_{\rho\to\infty} \rho^2 - \frac{1}{9}\cos\theta\sin\theta\,\rho^2 = +\infty$

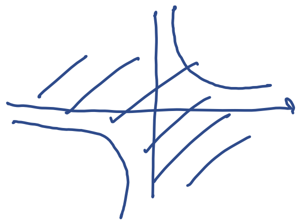
perché $1-\frac{1}{9}\cos\theta\sin\theta > \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty \Rightarrow \nexists$ max ma $\exists$ min (variante di W.)

$$Df = \begin{pmatrix} 2x-\frac{1}{9}y \\ 2y-\frac{1}{9}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{1}{9}y \\ 2y = \frac{1}{9}x \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{18}x \\ 2x = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{18}x \Rightarrow 2x = \frac{1}{162}x \end{cases}$$

$$\Rightarrow Df = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow f(0,0) = 0 \text{ è il } \min_{\mathbb{R}^2} f$$

Su D



Abbiamo $\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = +\infty \Rightarrow \sup_D f = +\infty$

inoltre $(0,0)\in D \Rightarrow \inf_D f = \min_{\mathbb{R}^2} f = 0$

Esercizio 4. Si consideri l'equazione differenziale $y' = \frac{1+y^2}{y}$ con dato iniziale $y(-1) = 1$.

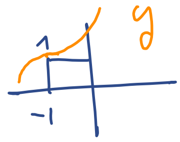
(a). Si dica dove la soluzione è crescente, e dove è concava. [3p]

$y(-1) > 0 \Rightarrow y > 0 \quad \forall x$ perché in $y=0$ l'eq. perde significato

$\Rightarrow y' > 0 \quad \forall x$ (fino a che la sol. esiste) $\Rightarrow y$ è crescente

$$y'' = \frac{2y^2y' - (1+y^2)y'}{y^2} = \underbrace{\frac{y'}{y}}_{>0}(y^2-1) \quad \begin{array}{l} > 0 \text{ per } y > 1 \\ < 0 \text{ per } y < 1 \end{array}$$

poiché y è crescente, e $y(-1) = 1$ $\quad y'' > 0$ per $x > -1$, $\quad y'' < 0$ per $x < -1$



(b). Si determini esplicitamente la soluzione. [3p]

$$\int_1^y \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int_{-1}^x dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+y^2)\Big|_1^y = x\Big|_{-1}^x$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y^2}{2}\right) = x+1 \qquad \ln\left(\frac{1+y^2}{2}\right) = 2(x+1) \qquad \frac{1+y^2}{2} = e^{2(x+1)}$$

$$y^2 = 2e^{2(x+1)} - 1$$

$y = \sqrt{2e^{2(x+1)} - 1}$ definita per $2e^{2(x+1)} > 1$

ovvero per $x > \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1$