OSCILLAZIONI

Oscillatore armonico

Compie un moto armonico semplice descritto dall'equazione

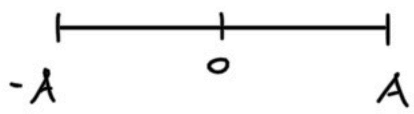
$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)}$$

A = Ampiezza

ωt = pulsazione

φ = fase

Essendo il sin limitato tra 1 e -1, cio' implica che $x(t)$ sara' sempre compreso tra:



Per cui il moto e' limitato, ma non solo, e' un moto periodico:

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ periodo

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ frequenza

! T e f non dipendono dalla ampiezza

Velocita' e accelerazione

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

ma $a(t) = -\omega^2 x(t)$

! $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ hanno stesso periodo e stessa forma ma traslate nel tempo (deriva dalle funzioni matematiche)

Osservazione

$$\frac{d^2 x(t)}{d^2 t} = -\omega^2 x(t)$$

$$\boxed{\frac{d^2 x(t)}{d^2 t} + \omega^2 x(t) = 0}$$

Equazione del moto armonico:

Fornisce la condizione necessaria e sufficiente per avere un moto armonico

Caso in cui ω e' noto:

Ricavare A, φ note le condizioni a $t=0$

$$\begin{cases} x(0) = A\sin\varphi \\ v(0) = A\omega\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad A\cos\varphi = \frac{v_0}{\omega}$$

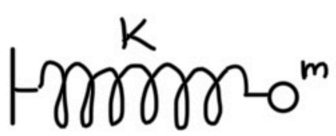
$$x(0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2\sin^2\varphi + A^2\cos^2\varphi$$

$$x(0)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$x_0 = A\sin\varphi \Rightarrow \varphi = \arcsin(x_0/A) = \arcsin\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}\right)$$

Sistema massa - molla



$$F = -Kx$$

$$m \underbrace{\frac{d^2x}{d^2t}}_{a} = -Kx \longrightarrow \underbrace{\frac{d^2x}{d^2t} + \frac{Kx}{m} = 0}_{\text{Condizione di moto armonico}} \qquad \omega = \sqrt{K/m}$$

$\dfrac{d^2x}{d^2t} + \dfrac{Kx}{m} = 0$ equazione differenziale del 2° ordine, lineare a coefficienti costanti, omogenea (a destra c'e' zero)

Si ottiene che se trovo che $x(t)$ e' soluzione, anche $\alpha x(t)$ e' soluzione; ma se $x(t)$, $y(t)$ sono soluzioni, anche $z(t) = x(t) + y(t)$ e' soluzione.

Inoltre se abbiamo 2 soluzioni indipendenti, tutte le altre soluzioni sono combinazione lineare di esse.

$$x(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) = B\cos(\omega t + \psi) \quad \text{con } \psi \neq \varphi$$

Sviluppando i calcoli otteniamo:

$a = A\cos\varphi$, $b = A\sin\varphi$

$a = -B\sin\psi$, $b = B\cos\psi$

Energia dell' oscillatore armonico

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \qquad e \quad K = m\omega^2$$
$$V(t) = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

- $E_K = \frac{1}{2} m^2 A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$ con $E_{K\,max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega =$

$$E_{K\,max} = \frac{1}{2} K A^2$$

- $U = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$

$$U_{max} = \frac{1}{2} K A^2$$

$\therefore$ $K_{max} = U_{max}$

$$E_{mec} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} \overbrace{K}^{m\omega^2} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

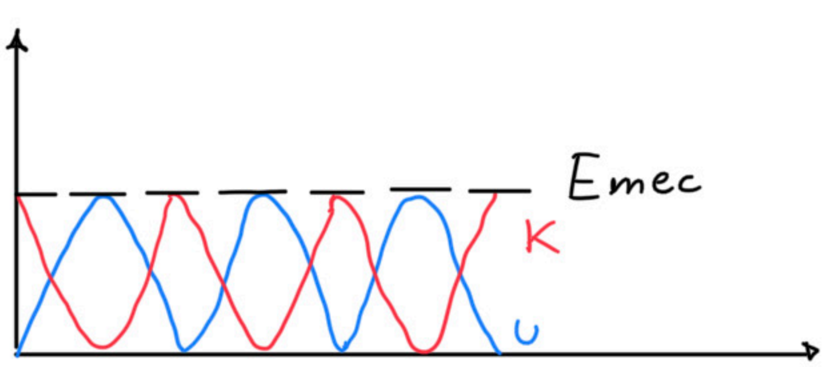
$$E_{mec} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 (\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \left(\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)\right)$$

$$\boxed{E_{mec} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} K A^2}$$

$\therefore$ $\frac{1}{2} K A^2 = E_{mec} = K_{max} = U_{max}$

Quindi essendo la forza elastica conservativa, vediamo la conservazione e si osserva che quando K e' max, U e' nullo e la loro somma e' sempre $\frac{1}{2} K A^2$.



Esercizio (Mass dampers): Riducono l' oscillazione nei grattacieli tramite enormi masse che oscillano.
Possono essere rappresentati come sistemi massa - molla. Dati:
Massa m, frequenza f e ampiezza x_0

$$E = \frac{1}{2} m v(x)^2 + \frac{1}{2} K x^2$$

① Massimo di oscillazione ($x = x_0$, $v = 0$)

$$E = \frac{1}{2} K x_0^2$$

② Massa passa per lo zero ($x = 0$, $v = v_1$)

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2$$

Prendiamo $m = 2{,}72 \cdot 10^3\ Kg$, $f = 10\ Hz$, $x_0 = 0{,}2\ m$
con $K = m\omega^2 = 2{,}72 \cdot 10^3 \cdot 4\pi^2 \cdot 10^2 = 10^7\ N \cdot m^{-1}$

$x = x_0$

$$E = \frac{1}{2} K x_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{.}2^2 \cdot 10^7 = 2 \cdot 10^5\ J$$

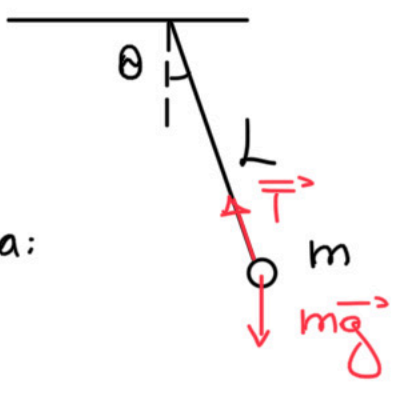
$x = 0$

$v_1 = ?$

$$2 \cdot 10^5 = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^5}{m}} = 12\ m/s$$

Pendolo Semplice

Se sposto dalla posizione di equilibrio, subisce un effetto elastico che tende a riportarlo nella posizione di equilibrio. Scomponendo la forza peso si ha:



mg (radiale) $= mg\cos\theta$
mg (tangenziale) $= mg\sin\theta$
Cerco il momento:

$$\tau = -mg\sin\theta L = I\alpha$$

Approssimiamo i piccoli angoli: $\sin\theta \sim \theta$

$$\tau = -mLg\sin\theta \sim -mgL\theta \longrightarrow I\alpha = -mgL\theta$$

con $I = mL^2$ e

$$\alpha = -\frac{mgL\theta}{I} = \frac{d^2\theta}{d^2t}$$

▽ $\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$

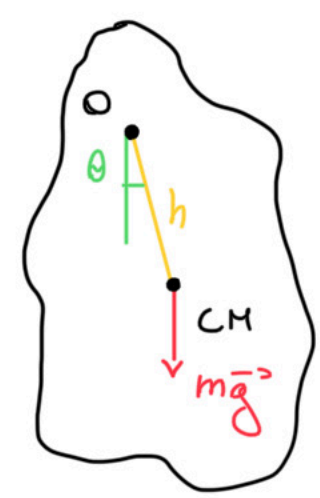
$$\overbrace{\frac{mgL}{I}}^{\omega^2}\cdot\theta + \frac{d^2\theta}{d^2t} = 0$$ (condizione dell'oscillatore armonico)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} = \sqrt{\frac{\cancel{m}g\cancel{L}}{\cancel{m}L^{\cancel{2}}}} = \sqrt{g/L}$$

▽ Il pendolo e' un oscillatore armonico, ma <u>solo per piccole ampiezze di oscillazione</u>

Pendolo Fisico

Corpo rigido che puo' oscillare sotto l'azione del proprio peso, in un piano verticale attorno ad un asse non passante per il centro di massa



h = Distanza del C.M. dal punto di sospensione

o = punto in cui passa l'asse di sospensione z

Posizione di equilibrio

La forza peso tende a riportare il pendolo nella posizione di equilibrio.

Ho bisogno del momento d'Inerzia $\longrightarrow$ Hoygens – Steiner

$$I_z = I_c + mh^2$$

con I_c rispetto all'asse passante nel centro di massa

$$I_z\cdot\alpha = -mg\sin\theta\cdot h$$

▽ Approssimiamo $\sin\theta \sim \theta$ (piccoli angoli)

$$I_z\cdot\alpha \simeq -mg\theta\cdot h$$

$$I_z\cdot\frac{d^2\theta}{d^2t} \simeq -mg\theta\cdot h$$

$$\frac{d^2\theta}{d^2t} + \frac{mgh\,\theta}{I_z} = 0 \quad \text{(equazione moto armonico)}$$

con $\underbrace{\Omega}_{\omega} = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$

$$\frac{d^2\theta}{d^2t} + \Omega^2\theta = 0$$

$$\theta = \theta_0 \sin(\Omega t + \varphi) \quad \text{con} \quad \Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}} \quad \text{e} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

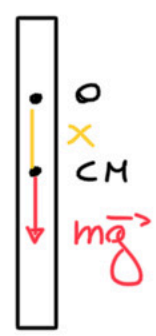
Esercizio: Pendolo fisico: asta di lunghezza L e massa m che può ruotare attorno ad un asse per un estremo.

Calcolare il periodo di oscillazione:

$$I_z = \frac{mL^2}{3} \quad \text{con } h = L/2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = \sqrt{\frac{2\cancel{m}L^{\cancel{2}}}{3\cancel{m}g\cancel{L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Caso 2: Il punto di sospensione si trova a distanza x dal centro di massa



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} \quad \text{con } h = x$$

$$\text{e} \quad I_z = \frac{mL^2}{12} + mx^2$$

$$T' = 2\pi = \sqrt{\frac{I_z'}{mgx}}$$