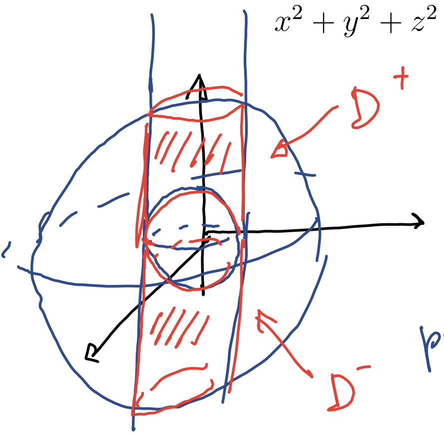
Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Pisa, 3 luglio 2023 Parte A (suff: 6/11)

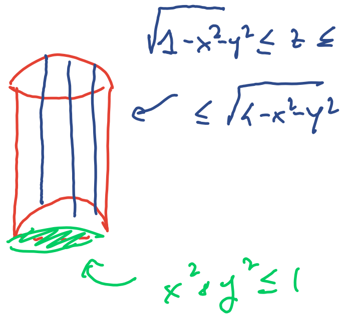
(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [5p] Calcolare il volume della regione R compresa tra le sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e il cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$.



$$Vol(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = 2 \iiint_{D^+} dx\,dy\,dz$$

possiamo integrare per fili



$$2 \iiint_{D^+} dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right) dx\,dy =$$

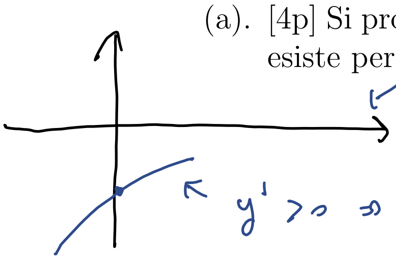
coord polari

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} \left(\sqrt{4-x^2-y^2} - \sqrt{1-x^2-y^2} \right) dx\,dy = 4\pi \int_0^1 \left(\sqrt{4-\rho^2} - \sqrt{1-\rho^2} \right) \rho\, d\rho =$$

$$= -2\pi \left[\frac{2}{3} (4-\rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} \left[4^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}} - 1 \right] = \frac{4}{3}\pi \left[7 - \sqrt{27} \right]$$

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale $y' = e^x y^2$.

(a). [4p] Si provi che una soluzione $y(x)$ che parte con dato iniziale $y(0) < 0$ esiste per tutti i tempi $x \geq 0$, e si determini $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.



$y = 0$ sol. costante

$y' > 0 \Rightarrow y(x)$ crescente quindi per $x \geq 0$ $y(0) < y(x) < 0$

$\Rightarrow |e^x y^2(x)| < e^x C < C_1$ per ogni intervallo del tipo $[0, M]$

$\Rightarrow$ $y(x)$ esiste su ogni intervallo $[0, M] \Rightarrow$ esiste su $\mathbb{R}^+$

Poiché y crescente, definita $\forall\, x > 0$ e limitata $\Rightarrow y(x)$ ha un asintoto orizzontale quindi $y'(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ $\quad y(x) \xrightarrow{x\to\infty} L \in \mathbb{R}$

Allora $\overset{\nearrow 0}{y'} = \overset{\nearrow +\infty}{e^x}\,\overset{\nearrow L}{y^2} \Rightarrow L = 0$ quindi $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

(b). [2p] Si determini la soluzione che ha dato iniziale $y(0) = -1$

Per separazione di variabili

$$\int_{-1}^{y} \frac{1}{y^2}\,dy = \int_0^x e^x\,dx \qquad -\frac{1}{y}\Big|_{-1}^{y} = e^x\Big|_0^x$$

$$-\frac{1}{y} - 1 = e^x - 1 \qquad \frac{1}{y} = -e^x \qquad y = -e^{-x}$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

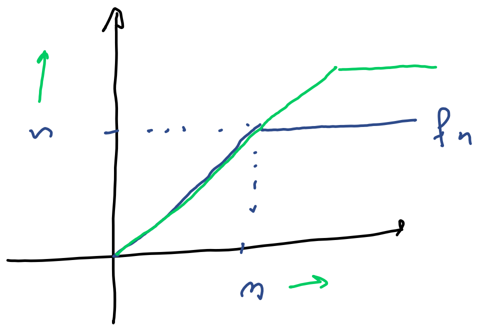
Pisa, 3 luglio 2023 Parte B

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. [6p] Si studi la convergenza della successione delle

$$f_n = \begin{cases} x & 0 \leq x < n \\ n & x \geq n \end{cases}$$

su $[0, +\infty)$



Puntualmente $f_n(x) \to x \quad \forall x$

infatti: fissato x_0 $\exists\, n_0$ t.c.

$x_0 < n \quad \forall n > n_0 \quad \Rightarrow f_n(x_0) = x_0$ per $n > n_0$

Conv unif: $\sup_{\mathbb{R}^+} |f_n(x) - x| = +\infty$ (f_n è limitata, x no)

quindi non c'è conv. su $\mathbb{R}$.

Sui compatti: Scelto M $\sup_{[0,M]} |f_n(x) - x| = 0$ per n grande

$\Rightarrow$ la conv. unif su ogni compatto $[0,M] \subset \mathbb{R}^+$

Esercizio 2. Si consideri $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{(x^2+y^2)^\alpha}$, per $\alpha > 0$.

(a). [3p] Si dica per quali α

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} f dxdy < +\infty.$$

Vicino a $(0,0)$ $\sin(x,y) \sim xy$. Per vedere la convergenze basta vedere se converge $\frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ su $\left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$. In coord polari

$$\iint_{\substack{x^2+y^2\leq 1 \\ x,y\geq 0}} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy = \int \left[\int_0^1 \frac{\rho^3}{\rho^{2\alpha}} d\rho \right] \cos\theta \sin\theta \, d\theta < +\infty \iff 3-2\alpha > -1$$

$$\alpha < 2$$

(b). [3p] Si dica per quali α

$$\iint_{x^2+y^2>1} f dxdy < +\infty.$$

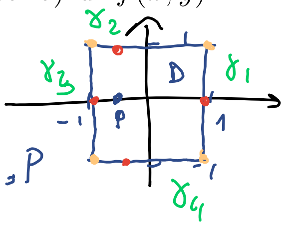
$\sin(xy) \leq C$ quindi

$$\left| \iint_{x^2+y^2\geq 1} f \right| \leq C \int_{x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy \leq 2\pi C \int_1^\infty \frac{\rho}{\rho^{2\alpha}} d\rho < +\infty \iff$$

$$2-2\alpha < 0$$

$$\alpha > 1$$

Esercizio 3. [5p] Si cerchino massimo e minimo (se esistono) di $f(x, y) = x + 2y^2 + x^2$ su $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x, y \leq 1\}$



Max e Min esistono per Weierstrass

Pti critici liberi $\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 1 + 2x = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (-\frac{1}{2}, 0) = P$

Su γ_1 $\quad f|_{\gamma_1} = f(1,y) = 3 + 2y^2$ ha un pto critico in $(1,0)$

Analogamente su $f|_{\gamma_3} = f(-1,y) = 2y^2$ pto critico in $(-1,0)$

Su γ_2 $\quad f|_{\gamma_2} = f(x,1) = x^2 + x + 2 \quad (f|_{\gamma_2})' = 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$

pto critico su γ_2 $\quad (-\frac{1}{2}, 1)$

Analogamente $\quad (-\frac{1}{2}, -1)$ pto critico per $f|_{\gamma_4}$

Pti angolari $\quad (1,1) \ (1,-1) \ (-1,1) \ (-1,-1)$

MASSIMI

$f(1,1) = f(1,-1) = 4 \qquad f(-1,1) = f(1,-1) = 2$

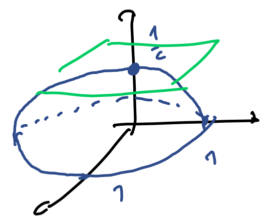
$f(-\frac{1}{2}, -1) = f(-\frac{1}{2}, 1) = -\frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ $\leftarrow$ MINIMO

Esercizio 4. Si consideri $B = \{4z^2 + x^2 + y^2 = 1\ ;\ z \geq 0\}$.

(a). [3p] Si parametrizzi B e si calcoli il piano tangente a B in $(0, 0, 1/2)$.

Si può parametrizzare in coord sferiche (modificate) o come grafico, o in coord cilindriche



Es in coord cilindriche

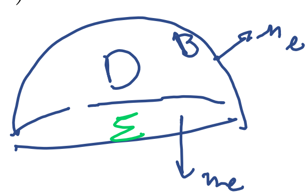
$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \rho \sin\theta & 0 \leq \rho \leq 1 \\ z = \frac{1}{4}\sqrt{1-\rho^2} \end{cases}$$

In $z = \frac{1}{2}$ il piano tg è orizzontale. $\boxed{z = \frac{1}{2}}$

[NB coord. sferiche o cilindriche non sono regolari in $(0,0,\frac{1}{2})$]

(b). [3p] Si calcoli il flusso di $G = (x, y, z)$ attraverso B orientata con la normale n tale che $n \cdot k \geq 0$ (ovvero n diretta verso l'alto)

Per il th della divergenza



$$\iint_B G \cdot n_e \, d\sigma + \iint_\Sigma G \cdot n_e \, d\sigma = \iiint_D \operatorname{div} G \, dx\,dy\,dz$$

dove $D = \{x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1\ ,\ z \geq 0\}$ $\qquad \Sigma = \{x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ z = 0\}$

Su Σ $\quad G = (x, y, 0) \quad n_e = (0, 0, -1) \quad \Rightarrow \quad G \cdot n_e \equiv 0$.

$$\Rightarrow \iint_B G \cdot n \, d\sigma = \iiint_D 3 \, dx\,dy\,dz = 3 \iiint_D dx\,dy\,dz = 3 \operatorname{vol}(D) = \frac{4}{3}\frac{3\pi}{2} = 2\pi$$

(vol ellissoide $= \frac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$ con a, b, c semiassi)