Esame di Calcolo Numerico — 5 giugno 2023

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica
Tempo a disposizione: 2 ore. È consentito consultare appunti e testi (cartacei).

Esercizio 1 (15 punti) Vogliamo risolvere il sistema $F(\mathbf{x}) = 0$, con

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 3 \\ x_1 + x_2^2 - 2 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

usando il metodo di Newton multivariato applicato alla funzione F.

1. Calcolare lo Jacobiano $J_F(\mathbf{x})$, e verificare che
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2x_2 - 1/2 \end{bmatrix} \tag{2}$$
è una sua fattorizzazione LU per ogni $\mathbf{x}$, controllando che soddisfa tutte le proprietà richieste dalle matrici di questa fattorizzazione.

2. Scrivere una `function xk = multin(x0, k)` che esegue k passi del metodo di Newton multivariato per il problema (1), partendo dal punto $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^2$ dato come input e restituendo $\mathbf{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^2$. Nella funzione, utilizzare la fattorizzazione LU (2) in modo da risolvere due sistemi triangolari anziché un sistema lineare con la matrice $J_F(\mathbf{x})$. Utilizzare l'operatore backslash \ per risolvere questi due sistemi. Riportare sul foglio il codice della funzione.

3. Riportare i risultati ottenuti eseguendo la funzione con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e i quattro valori $k = 3, 4, 5, 6$. Qual è, sperimentalmente, il punto a cui convergono? Qual è, sempre sperimentalmente, la velocità di convergenza? Come è possibile misurarla?

4. (*) Consideriamo la matrice $J_F(\mathbf{x})$ per un vettore $\mathbf{x}$ con $x_2 \in [1, 2]$. Il teorema di Gershgorin ci permette di trovare un valore minimo e massimo possibile per i suoi autovalori (che sono reali); quali sono questi valori?

Esercizio 2 (15 punti) Sia data una funzione continua $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Osserviamo che il valore dell'integrale $I = \int_0^1 g(t)\, dt$ si può calcolare anche risolvendo il problema ai valori iniziali

$$y'(t) = g(t), \quad t \in [0, 1], \quad y(0) = 0, \tag{3}$$

in cui il termine a destra dell'uguale dipende solo da t e non da y; difatti integrando da entrambi i lati otteniamo $y(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau$, e quindi $y(1) = I$. Vogliamo approssimare la soluzione di questa equazione differenziale utilizzando il metodo di Runge-Kutta con tableau di Butcher

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}. \end{array}$$

1. Scrivere la formula che permette di calcolare l'approssimazione y_{n+1} a partire da y_n con questo metodo, per un'equazione differenziale della forma (3).

2. Scrivere una `function I = integrale_rk(g, N)` che, dati in input la funzione g (come *function handle*) e il numero di intervalli N, risolve il problema (3) con questo metodo di Runge-Kutta e restituisce il valore della soluzione calcolata y nel punto 1, che dovrebbe essere un'approssimazione di I. Riportare sul foglio il codice Matlab della funzione.

3. Eseguire la funzione con $g(t) = t^3$, per i tre casi $N = 10$, $N = 20$, $N = 40$. Quali sono i risultati ottenuti? Qual è il valore esatto dell'integrale $\int_0^1 t^3\, dt$?

4. Il metodo che abbiamo usato qui per calcolare I coincide con uno dei metodi di integrazione studiati durante il corso? Se sì, quale?

Soluzioni

Esercizio 1 (15 punti)

1. Calcolando tutte le derivate parziali si ha

$$J_F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2x_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

   Possiamo verificare che:

   - La prima matrice L della fattorizzazione è triangolare inferiore con 1 sulla diagonale;
   - La seconda matrice U è triangolare superiore;
   - Il prodotto LU è uguale a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2x_2 - 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 \cdot 2 & 1/2 + 2x_2 - 1/2 \end{bmatrix} = J_F(\mathbf{x}).$$

2. Una soluzione possibile è la seguente.

```
function x = multin(x0, k)
x = x0;
F = @(x) [2*x(1) + x(2) - 3; x(1) + x(2)^2 - 2];
L = [1 0; 1/2 1];
U = [2 1; 0 2*x(2)-1/2]; % da aggiornare dopo ogni passo
for it = 1:k
    x = x - U \ (L \ F(x));
    U(2,2) = 2*x(2) - 1/2;
end
```

   Attenzione: scrivendo `(L*U) \ F(x)` non si risolvono due sistemi triangolari come richiesto: prima viene eseguito il prodotto `L*U`, e poi viene risolto un solo sistema lineare con la matrice non triangolare $A = LU$.

   Attenzione: visto che l'elemento U_{22} dipende dal vettore x, il valore di quell'elemento va aggiornato dopo ogni iterazione del metodo. Se il valore non viene aggiornato, non stiamo usando lo Jacobiano esatto della funzione $J_F(\mathbf{x}_k)$ in ogni punto ma una matrice fissata $J_F(\mathbf{x}_0)$ e quindi otteniamo un metodo delle corde, non un metodo di Newton.

3. I valori restituiti sono i seguenti. Si può vedere che il metodo converge alla soluzione $\mathbf{x}_* = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, quindi per stimare la velocità di convergenza calcoliamo $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|$.

```
>> x = multin([2;3], 3), norm(x-[1;1])
x =
    0.9914
    1.0172
ans =
    0.0193
>> x = multin([2;3], 4), norm(x-[1;1])
x =
    0.9999
    1.0002
ans =
    2.1677e-04
>> x = multin([2;3], 5), norm(x-[1;1])
x =
    1.0000
```

```
    1.0000
ans =
    2.8011e-08
>> x = multin([2;3], 6), norm(x-[1;1])
x =
    1.0000
    1.0000
ans =
    2.4825e-16
```

I valori di $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|$ decrescono con la velocità tipica della convergenza quadratica; l'errore è circa elevato al quadrato ogni volta e gli esponenti raddoppiano.

4. I cerchi di Gershgorin sono $K_1 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-2| \leq 1\}$ e $K_2 = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - 2x_2| \leq 1\}$. Inoltre, visto che la matrice è simmetrica, sappiamo che i suoi autovalori sono reali. Abbiamo $K_1 \cap \mathbb{R} = [1,3]$ e $K_2 \cap \mathbb{R} = [2x_2 - 1, 2x_2 + 1] \subseteq [1,5]$ (difatti si ha $2x_2 - 1 \geq 2 \cdot 1 - 1 = 1$ e $2x_2 + 1 \leq 2 \cdot 2 + 1 = 5$). Quindi concludiamo che gli autovalori di $J_F(\mathbf{x})$ devono essere compresi tra 1 e 5.

Esercizio 2 (15 punti)

1. Si ha

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) = g(t_n), \\ k_2 &= f(t_n + h, y_n) = g(t_n + h) = g(t_n + 1), \\ y_{n+1} &= y_n + h(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2) = y_n + \frac{h}{2}(k+1+k_2) = y_n + \frac{h}{2}(g(t_n) + g(t_{n+1})). \end{aligned}$$

   Quindi abbiamo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(g(t_n) + g(t_{n+1})), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5}$$

2. Una possibile soluzione è la seguente.

```
function I = integrale_rk(g, N)
t = zeros(1, N+1);
Y = zeros(1, N+1);
h = 1 / N;

% t(1) = 0; % non necessari
% Y(1) = 0;

for n = 1:N
    t(n+1) = t(n) + h;
    k1 = g(t(n));
    k2 = g(t(n+1));
    Y(n+1) = Y(n) + h * 1/2 * (k1 + k2);
end
I = Y(end);
```

3. Si ottiene

```
>> I = integrale_rk(@(t) t^3, 10)
I =
    0.2525
>> I = integrale_rk(@(t) t^3, 20)
I =
    0.2506
>> I = integrale_rk(@(t) t^3, 40)
```

```
I =
     0.2502
```

Il valore esatto dell'integrale è

$$\int_0^1 t^3 \, dt = \frac{1}{4} t^4 |_0^1 = \frac{1}{4}.$$

4. Osserviamo che la ricorrenza (5), partendo da $y_0 = 0$, calcola il valore della somma

$$y_N = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h}{2} \Big(g(t_n) + g(t_{n+1}) \Big) = h \sum_{n=0}^{N-1} \Big(\frac{1}{2} g(t_n) + \frac{1}{2} g(t_{n+1}) \Big).$$

   Possiamo notare che questa è esattamente la stessa formula del metodo dei trapezi composito con N intervalli. Quindi il metodo che abbiamo usato coincide il metodo dei trapezi composito, e calcola la stessa approssimazione dell'integrale per ogni funzione g.