Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Pisa, xx settembre 2022 Parte A (suff. 6/11)

(Cognome)	(Nome)	(Numero di matricola)

Esercizio 1. Si calcoli il volume dell'ellissoide che ha due semiassi pari ad a ed il terzo uguale a b. Si determini il volume massimo tra quelli per cui $a + b = 12$. [6p]

Ellissoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$

sfrutt

$$\text{Vol} = \iiint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1} 1\,dx\,dy\,dz = \int_{-b}^{b}\left[\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}} 1\,dx\,dy\right]dz = \int_{-b}^{b}\left[\iint_{x^2+y^2\le a^2-\frac{z^2a^2}{c^2}} 1\,dx\,dy\right]dz$$

$$= a^2\pi\int_{-b}^{b} 1-\frac{z^2}{c^2}\,dz = a^2\pi\left[z-\frac{z^3}{3c^2}\right]_{-b}^{b} = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

$x^2+y^2\le a^2-\frac{z^2a^2}{c^2}$

Devo massimizzare $f = \frac{4}{3}\pi a^2 b$ su $a+b=12$.

Il max esiste perché f è continua, positiva e $f=0$ se $a=0$ o $b=0$

Molt. Lagrange $\to$ $\begin{cases} 2ab = \lambda \\ a^2 = \lambda \\ a+b=12 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2ab = a^2 \\ a+b=12 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 2b = a \\ 3b = 12 \end{cases}$

Vol max: $a = 8$, $b = 4$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $-xye^{-x^2+y}$.

(a). Si trovino i suoi punti critici, si classifichino e si determini il suo sviluppo di Taylor al primo ordine nel punto $(1, -2)$. [3p]

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x^2y - y \\ -x - xy \end{pmatrix} e^{-x^2+y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (2x^2-1)y = 0 \\ (1+y)x = 0 \end{cases} \to (0,0),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 6xy - 4x^3y & 2x^2 + 2x^2y - y - 1 \\ 2x^2 + 2x^2y - y - 1 & -2x - y \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to \text{sella} \qquad H_f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right) = \begin{pmatrix} -2\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Max}$$

$$H_f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 2\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Min}$$

$$\text{Taylor: } f(1+h, -2+k) = 2e^{-3} - 2h + 1k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

(b). Si determinino estremo superiore e inferiore di f su $\mathbb{R}^2$. [2p]

$$f(1,y) = -y e^{-1+y} \xrightarrow{y \to +\infty} -\infty \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty$$

$$f(-1,y) = y e^{-1+y} \xrightarrow{y \to +\infty} +\infty \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$$

Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Pisa, xx settembre 2022 Parte B

______________________ (Cognome) ______________________ (Nome) ______________________ (Numero di matricola)

Esercizio 1. (a). Si dica se l'insieme $A = \{(y-1)(y-x^2) = 0\}$ rappresenta una curva regolare, e si dica cosa succede nei punti dove non si applica il teorema del Dini. [4p]

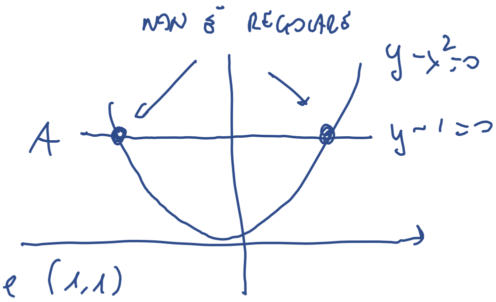
$g(x,y) = y^2 - yx^2 - y + x^2$

$\nabla g = \begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ 2y - x^2 + 1 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \notin A$

$y = 1,\ x^2 = 1 \to (\pm 1, -1) \in A$

A è sicuramente regolare $\forall (x,y) \neq (\pm 1, -1)$

Per $(x,y) = (1,-1)$ e $(x,y) = (-1,-1)$ disegniamo A



in effetti A non è regolare in $(-1,-1)$ e $(1,1)$

(b). Si calcoli il vettore tangente ad A nel punto $(2, 4)$. [2p]

$\nabla g(2,4) = (-12, 3) = 3(-4, 1)$ vettore normale ad A

$\Rightarrow (1, 4)$ vettore tg ad A in $(2,4)$

NB si poteva dire anche che vicino a $(2,4)$ A è $y = x^2$

e poi trovare la tg alla parabola

Esercizio 2. Si consideri $y' = \frac{xy}{4-x^2}$

(a). Per quali dati iniziali si può applicare il teorema di esistenza e unicità locale delle soluzioni? [1p]

per $x \neq 2, -2$

(b). Si studi l'intervallo massimale della soluzione che parte con dato iniziale $y(3) = 1$ senza risolverla esplicitamente. [3p]

$$\left|\frac{xy}{4-x^2}\right| = \left|\frac{x}{4-x^2}\right| |y| \leq C|y| \quad \text{se} \quad x > 2$$

$\Rightarrow$ l'intervallo massimale è $2 < x < +\infty$

(c). Si determini esplicitamente la soluzione del punto precedente. [2p]

$$\int_1^y \frac{1}{y} = \int_3^x \frac{x}{4-x^2} \qquad \Big[\log|y|\Big]_1^y = \left[-\frac{1}{2}\log|4-x^2|\right]_3^x$$

$$\Rightarrow \Big[\log y\Big]_1^y = \left[-\frac{1}{2}\log(x^2-4)\right]_3^x$$

perché $y > 0$ ($y = 0$ è sol costante) e $x^2 - 4 > 0$ (siamo su $x > 2$)

$$\log y = -\frac{1}{2}\log\frac{x^2-4}{5} \qquad y = \sqrt{\frac{5}{x^2-4}}$$

Esercizio 3. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$.

(a). Si studi la convergenza della serie. [4p]

per $x=0$ la serie converge a zero

Altrimenti $\sum \frac{x}{(1+x)^n} = x \sum \frac{1}{(1+x)^n}$ serie geometrica.

converge $\Leftrightarrow$ $\left| \frac{1}{(1+x)} \right| < 1$ ovvero se $x > 0$ o $x < -2$

$\Rightarrow$ ho convergenza puntuale su $x \geq 0$ e $x < -2$

Si può anche considerare $\sum \frac{1}{(1+x)^n} = \sum y^n$ con $y = \frac{1}{1+x}$

e dai risultati sulle serie di potenze avere la

conv. totale su $x \geq \delta$ e $x \leq -2-\delta$

(b). Si determini, se possibile, la somma della serie. [2p]

Sapendo che $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} - 1 = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow x \sum \frac{1}{(1+x)^n} = \begin{cases} 1 & \text{per } x>0 \text{ e } x<-2 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ \text{non converge} & \text{per } -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

<u>NB</u> questo prova che non c'è convergenza unif su $[0,+\infty)$

Esercizio 4. Si dica se $\frac{xyz}{1+x^4+y^4+z^2}$ è integrabile su $\{x^2+y^2+z^2 \geq 4,\ y \geq 0\}$. [4p]

In coord sferiche $\quad xyz \sim \rho^3$

$$1+x^4+y^4+z^2 \rightsquigarrow 1+\rho^2+\rho^4 \sim \rho^4$$

Allora

$$\iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \geq 4 \\ y \geq 0}} \frac{xyz}{1+x^4+y^4+z^2} \gtrsim C \int_2^\infty \frac{\rho^3}{\rho^2} \cdot \overbrace{\rho^2}^{\text{Jacobian}} d\rho = C \int_2^\infty \rho \, d\rho = +\infty$$

$$\Rightarrow \frac{xyz}{1+x^4+y^4+z^2} \ \underline{\text{non}} \text{ è integrabile su } \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \geq 4 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$