Esame di Calcolo Numerico — 17 luglio 2023

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica
Tempo a disposizione: 2 ore. È consentito consultare appunti e testi (cartacei).

Esercizio 1 (15 punti) Vogliamo risolvere l'equazione

$$t = \phi(t), \quad \phi(t) = \frac{1}{3}(t^3 - 1) \tag{1}$$

utilizzando il metodo del punto fisso sulla funzione ϕ.

1. Dimostrare che l'equazione (1) ha una soluzione $\alpha \in (-1, 0)$.
2. Scrivere una `function [t, k] = puntofisso(t0)` che prende in ingresso il valore iniziale $t_0 \in \mathbb{R}$ ed esegue un numero variabile di iterazioni del metodo, arrestandosi quando è verificata la condizione $|t_k - t_{k-1}| \leq 10^{-10}$. La funzione restituisce il numero di iterazioni effettuate k insieme all'approssimazione della soluzione $t = t_k$ calcolata dal metodo. Riportare sul foglio il codice della funzione.
3. Eseguire la funzione con $t_0 = 0.5, t_0 = 1.5, t_0 = 2.5$, e riportare sul foglio i risultati ottenuti.
4. Determinare esplicitamente (motivando la risposta) un valore di ρ che assicuri che siano soddisfatte le ipotesi del teorema del punto fisso per dimostrare la convergenza del metodo per $t_0 \in [\alpha - \rho, \alpha + \rho]$.

Esercizio 2 (15 punti) Un modo per ottenere una variante esplicita del metodo dei trapezi è il seguente: partiamo dalla formula che definisce il metodo dei trapezi

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}))$$

e nel membro di destra rimpiazziamo $\mathbf{y}_{n+1}$ con la sua approssimazione ottenuta con il metodo di Eulero esplicito

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{h}{2}(\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n))). \tag{2}$$

Vogliamo usare questo metodo (2) per risolvere il problema ai valori iniziali[1]

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y}, \\ \mathbf{y}(0) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \end{cases} \qquad t \in [0, 1], \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

1. Scrivere una `function [T, Y] = trap_esplicito(N)` che, dato in ingresso il numero di intervalli N, risolve il problema (3) con il metodo (2), restituendo $T \in \mathbb{R}^{N+1}$, $Y \in \mathbb{R}^{2\times(N+1)}$ che contengono rispettivamente le approssimazioni t_n e $\mathbf{y}_n$ calcolate dal metodo ad ogni passo $n = 0, 1, \dots, N$. Riportare sul foglio il codice Matlab della funzione.
2. Per $N \in \{20, 40, 80\}$, riportare l'errore globale di discretizzazione $E_N = \max_{n=1,2,\dots,N} \|\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n\|_\infty$ tra la soluzione numerica calcolata e quella esatta, che è $\mathbf{y}(t) = [\cos t; \sin t]$. Cosa indicano i risultati ottenuti sull'ordine di convergenza del metodo?
3. Calcolare la funzione di stabilità del metodo (2).
4. (*) Il metodo (2) appartiene alla famiglia dei metodi di Runge–Kutta? Se sì, si scriva la sua tabella di Butcher.

---

[1] Nella versione data in aula compariva erroneamente $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. La correzione è stata comunicata a voce durante lo scritto.

Soluzioni

Esercizio 1 (15 punti)

1. Consideriamo la funzione $f(t) = t - \phi(t)$. Questa funzione è continua, in quanto è una funzione polinomale. Inoltre soddisfa $f(-1) = -1 - \frac{-2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$ e $f(0) = 0 - (-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} > 0$. Quindi per il teorema dei valori intermedi esiste $\alpha \in (-1, 0)$ tale che $f(\alpha) = 0$.

2. Una soluzione possibile è la seguente.

```
function [t, k] = puntofisso(t0)

k = 0;
err = inf;
t = t0;
while err >= 1e-10
    k = k + 1;
    t_old = t;
    t = (t^3-1) / 3;
    err = abs(t - t_old);
end
```

3. Si ha

```
>> [t,  k] = puntofisso(0.5)
t =
    -0.3473
k =
    12
>> [t,  k] = puntofisso(1.5)
t =
    -0.3473
k =
    13
>> [t,  k] = puntofisso(2.5)
t =
    Inf
k =
         8
```

4. Per poter applicare il teorema del punto fisso, dobbiamo trovare un intervallo I tale che $|\phi'(t)| < 1$ per ogni $t \in I$. Poiché $\phi'(t) = t^2$, l'insieme dei punti tali che $|\phi'(t)| < 1$ è $(-1, 1)$; quindi dobbiamo trovare ρ tale che $-1 < \alpha - \rho < \alpha + \rho < 1$. Poiché sappiamo dai risultati numerici che $\alpha \approx -0.3473$, possiamo prendere per esempio $\rho = 0.5$; in questo modo $-1 < \alpha - \rho \approx -0.8473$ e $\alpha + \rho \approx 0.1527 < 1$ sono verificati.

   Anche senza basarsi sui risultati numerici ottenuti al punto precedente, possiamo dimostrare che $-0.5 < \alpha < 0$ notando che $f(-0.5) = -1/8 < 0$; e da questa disuguaglianza possiamo dedurre che $-1 < \alpha - 0.5 < \alpha + 0.5 < 1$. Questo dimostra che $\rho = 0.5$ è una possibile risposta alla domanda.

   In generale, qualunque scelta di $\rho < \alpha + 1 \approx 0.6527$ soddisfa le condizioni richieste ed è una risposta valida alla domanda (accompagnata da opportune motivazioni).

Esercizio 2 (15 punti)

1. Una soluzione possibile è la seguente.

```
function [T, Y] = trap_esplicito(N)

A = [0 -1; 1 0];
f = @(t, y) A*y;

h = 1 / N;
T = 0:h:1;

Y = zeros(2, N+1);
Y(:,1) = [1;0];

for n = 1:N
    f1 = f(T(n), Y(:,n));
    f2 = f(T(n+1), Y(:,n)+h*f1);
    Y(:,n+1) = Y(:,n) + h/2*(f1 + f2);
end
```

2. Utilizzando la funzione scritta al punto precedente otteniamo

```
>> [T, Y] = trap_esplicito(20);
>> E20 = max(max(abs(Y - [cos(T); sin(T)])))
E20 =
    3.4196e-04
>> [T, Y] = trap_esplicito(40);
>> E40 = max(max(abs(Y - [cos(T); sin(T)])))
E40 =
    8.6585e-05
>> [T, Y] = trap_esplicito(80);
>> E80 = max(max(abs(Y - [cos(T); sin(T)])))
E80 =
    2.1781e-05
>> E40/E80, E20/E40
ans =
    3.9753
ans =
    3.9494
```

   L'errore si riduce di circa un fattore 4 quando il numero di passi raddoppia, il che indica un ordine di convergenza 2.

3. Applicando il metodo al problema test $y' = \lambda y$, otteniamo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(\lambda y_n + \lambda\left(y_n + h\lambda y_n\right)\right) = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2\right) y_n.$$

   Sostituendo $q = h\lambda$ nell'espressione tra parentesi otteniamo la funzione di stabilità $R(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2$.

4. (*) Possiamo riscrivere il metodo nella forma tipica dei metodi di Runge–Kutta se chiamiamo $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ i due risultati della valutazione della funzione $\mathbf{f}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n),\\
\mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{k}_1),\\
\mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + h\left(\frac{1}{2}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right).
\end{aligned}$$

   In questa forma si può vedere che la tabella di Butcher è

$$\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}.$$

Nota Il metodo (2) è noto come *metodo di Heun* o *metodo dei trapezi esplicito*.