Università di Pisa - Corso di Laurea in Ingegneria Chimica

Pisa, 27 giugno 2022 Parte B

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

Esercizio 1. Si cerchino, se esistono, massimo e minimo della funzione $f(x,y) = xy$ su $D = \{x^2 + 9y^2 - 2xy \leq 1\}$. [6p]

Max e Min esistono per Weierstrass

$$\nabla f = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

Sul bordo usiamo i molt. di Lagrange

$$g = x^2 + 9y^2 - 2xy - 1 \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 18y - 2x \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x - y \\ 9y - x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y = \lambda y \\ 9x - y = \lambda x \\ g = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = (1+\lambda)y \\ 9y = (1+\lambda)x \\ g = 0 \end{cases} \to 9y = (1+\lambda)^2 y$$

$$\to \boxed{\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}} \quad f(0, \pm 1) = 0$$

$$\to 1 + \lambda = \pm 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 9y^2 + 9y^2 - 6y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 3x \end{cases} \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$\Rightarrow$ qui $f > 0$

più gl max

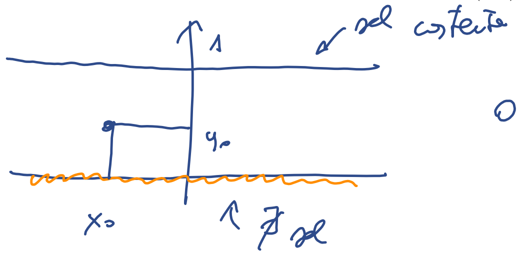
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3y \\ 9y^2 + 9y^2 + 6y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \pm \frac{1}{2\sqrt{6}} \\ x = -3y \end{cases} \qquad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, +\frac{1}{2\sqrt{6}}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$$

$\Rightarrow$ $f < 0$

min

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale $y'(x) = \frac{1-y^2(x)}{y(x)}$.

(a). Si provi (senza calcolarla esplicitamente) che una soluzione che parte con dato iniziale $y(x_0) = y_0$ con $y_0 \in (0,1)$ esiste per $x \geq x_0$. [3p]



$0 < y(x) < 1 \quad \forall x \geq x_0$, inoltre $y' > 0$

$\Rightarrow \quad y_0 < y(x) < 1 \quad \forall x \geq x_0$

Allora $\left|\frac{1-y^2}{y^2}\right| \leq C \quad \forall x \geq x_0$ e la sol esiste $\forall x \geq x_0$

(b). Si trovi la soluzione che parte con dato iniziale $y(-1) = 1/2$. [3p]

$$\int_{\frac12}^{y(x)} \frac{y}{1-y^2} = \int_{-1}^{x} dx \Rightarrow \left[-\frac12 \log|1-y^2|\right]_{\frac12}^{y(x)} = \left[x\right]_{-1}^{x}$$

N.B. $1-y^2>0$

$$\Rightarrow -\frac12 \log\left(\frac{1-y^2}{\frac34}\right) = x+1 \qquad \log\left(\frac{1-y^2}{\frac34}\right) = -2-2x$$

N.B. $y>0$

$$\frac{1-y^2}{\frac34} = e^{-2-2x} \qquad y = \sqrt{1-\frac34 e^{-2-2x}}$$

Esercizio 3. Data la superficie $\Sigma = \{z = \sqrt{2xy},\ 0 < x, y < 2\} \subset \mathbb{R}^3\}$

(a). Si parametrizzi tale superficie in modo regolare e si determini il piano tangente nel punto $(1, 1, \sqrt{2})$. [2p]

$$\phi(u,v) = \left(u, v, \sqrt{2uv}\right) \quad 0 < u, v < 2 \implies$$

$$\phi_u = \left(1, 0, \frac{v}{\sqrt{2uv}}\right) \qquad \phi_v = \left(0, 1, \frac{u}{\sqrt{2uv}}\right)$$

vettori indip. $\Rightarrow \phi$ regolare

Piano tg $\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ forma parametrica

forma cartesiana $z = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-x) + \frac{\sqrt{2}}{2}(1-y)$

(b). Si calcoli $\iint_\Sigma z\, d\sigma$. [3p]

$$|\phi_u \times \phi_v| = \sqrt{1 + \frac{u^2}{2uv} + \frac{v^2}{2uv}}$$

$$\iint_\Sigma z\, d\sigma = \int_0^2\int_0^2 \sqrt{2uv}\sqrt{\frac{1+u^2+v^2}{2uv}}\, du\, dv = \int_0^2\int_0^2 \sqrt{2uv+u^2+v^2}\, du\, dv =$$

$$= \int_0^2\int_0^2 (u+v)\, du\, dv = \int_0^2 \left(\int_0^2 (u+v)\, dv\right) du = \int_0^2 \left[uv + \frac{v^2}{2}\right]_0^2 du =$$

$$= \int_0^2 (2u+2)\, du = \left[u^2 + 2u\right]_0^2 = 8$$

Esercizio 4. Data $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$, si stimi la convergenza dell'integrale sugli insiemi $D_1 = \{1 \le y \le 2;\ 1 \le x \le +\infty\}$ e $D_2 = \{1 \le x, y \le +\infty\}$. [6p] Sia $A_k = \{1 \le y \le 2,\ 1 \le x \le k\}$

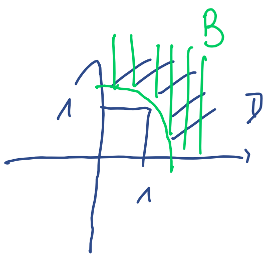
$$\iint_{A_k} f = \int_1^2 \int_1^k \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left[-(x+y)^{-1}\right]_1^k dy =$$

$$= \int_1^2 \left[-\frac{1}{k+y} + \frac{1}{1+y}\right] dy = \left[-\ln(k+y)\right]_1^2 + \left[\ln(1+y)\right]_1^2 = \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \iint_{A_k} f = \lim_{k\to\infty} \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$\Rightarrow f$ è int su D_1

Per D_2 si può usare $A_k = \{1 \le x, y \le k\}$ oppure



$$D_2 \supset B = \{x^2+y^2 \ge 4\} \Rightarrow \iint_B f \le \int_{D_2} f$$

e
$$\iint_B \frac{1}{(x+y)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^{+\infty} \frac{\rho}{(\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)^2}\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{\infty} \frac{\rho}{\rho^2(1+2\cos\theta\sin\theta)} \ge$$

$$\ge C \int_2^{\infty} \frac{1}{\rho}\,d\rho = +\infty \qquad \left(\text{perché } 1+2\cos\theta\sin\theta > \delta > 0 \text{ se } \theta \in [0, 2\pi]\right)$$

$$\Rightarrow \int_{D_2} f = +\infty$$