Università di Pisa - CdL Ingegneria Ed-Architettura, Pisa - ??/01/2020

______________________ (Cognome) ______________________ (Nome) ____________ (Matricola)

Per passare è necessario realizzare almeno 8 punti sui 16 disponibili nei primi 2 esercizi e almeno 18 in totale

Esercizio 1. Si consideri la funzione $g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2-2xy+x}{x^2+(y-1)^2} & (x,y)\neq(0,1) \\ 0 & (x,y)=(0,1) \end{cases}$

(a). [2p] Si dimostri che la funzione g è continua in $(0,1)$

$g = \frac{x(y^2-2y+1)}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$ in coord polari $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta+1$

$\lim_{(x,y)\to(0,1)} g(x,y) \rightsquigarrow \lim_{\rho\to0} \frac{\rho\cos\theta\,\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta} = \lim_{\rho\to0}\rho\cos\theta\sin^2\theta = 0 = g(0,1)$

$\Rightarrow g$ è continua in $(0,1)$

(b). [2p] Si calcolino le derivate parziali in $(0,1)$.

$g_x(0,1) = \lim_{h\to0}\frac{g(h,1)-g(0,1)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{0}{h} = 0$

analogamente $g_y(0,1) = 0$

(c). [4p] Si dica se la funzione è differenziabile in $(0,1)$.

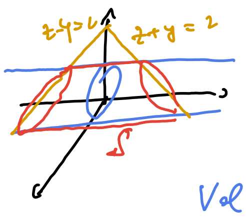
Se $\exists$, il diff. è zero $\Rightarrow$

$\lim_{h,k\to(0,0)} \frac{g(h,1+k) - \overset{0}{g(0,1)} - \overset{0}{g_x(0,1)}h - \overset{0}{g_y(0,1)}k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\rightsquigarrow$ coord polari

$\lim_{\rho\to0}\frac{\cancel{\rho^3}\cos\theta\sin^2\theta}{\cancel{\rho^3}} \Rightarrow \nexists$ limite

$\Rightarrow g$ non è diff.

Esercizio 2. Sia $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+z^2 \le 1\ ,\ z+y \le 2\ ,\ z-y \le 2\}$.



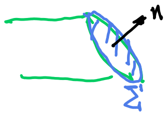
(a). [4p]Si calcoli il flusso del campo $F(x,y,z) = (0,z,z)$ uscente dal solido S

$\operatorname{div} F = 1 \Rightarrow \iint_{\partial S} F \cdot n_e = \iiint_S 1\, dx\, dy\, dz = \mathrm{Vol}(S)$

Per trovarlo è volume integriamo per fili

$$\mathrm{Vol}(S) = \iint_{x^2+z^2\le 1} \left[\int_{z-2}^{z+2} 1\, dy \right] dx\, dz = \iint_{x^2+z^2 \le 1} 4\, dx dz = 4\pi$$

(b). [4p] Si calcoli il flusso di F uscente dalla faccia $\Sigma = \{x^2+z^2 \le 1\ ,\ z+y = 2\}$



parametrizziamo Σ $\quad r(u,v) = \begin{pmatrix} x = u \\ z = v \\ y = 2 - v \end{pmatrix} \qquad u^2+v^2 \le 1$

$r_u = (1,0,0) \qquad r_v = (0,-1,1)$

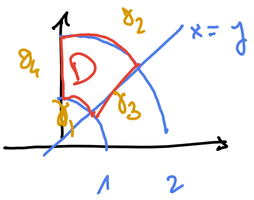
$$r_v \times r_u = \begin{vmatrix} i & 0 & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

diretto come la normale uscente

$$\iint_\Sigma F \cdot n\, d\sigma = \iint_{u^2+v^2 \le 1} (0, v, v) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} du dv = \iint_{u^2+v^2 \le 1} 2v\, du dv = 0 \quad \text{per simmetria}$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ definita sul dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \le x^2+y^2 \le 4, 0 \le x \le y\}$

(a). [8p]Si determinino (giustificandone l'esistenza) gli eventuali punti di massimo e di minimo di f sul dominio



D è compatto, f è continua su $D \Rightarrow \exists$ max e min

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^3}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0 \Rightarrow x=0 \text{ , } y=0$$

se $x=0$ la 1ª eq diventa $\frac{1}{y^2}=0 \Rightarrow$ no sol.

se $y=0$ $\quad \frac{1}{x^2} - \frac{2x^3}{x^4} = 0 \quad \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = 0 \quad x = \frac{1}{2} \quad (\frac{1}{2}, 0) \notin D$

$\rightarrow$ non ci sono punti critici interni $\Rightarrow$ Max e min $\in \partial D$

Su γ_4 $\quad f|_{\gamma_4} \equiv 0$ minimo ($f \ge 0$ su D)

Su γ_3 $\quad f|_{\gamma_3} = \frac{x}{2x^2} = \frac{1}{2x}$ decrescente in x

Su γ_1 $\quad f|_{\gamma_1} = \frac{x}{1}$ crescente in x

Su γ_2 $\quad f|_{\gamma_2} = \frac{x}{4}$ crescente in x

non ci sono pti critici

Pti angolosi $\quad A=(0,1) \quad C=(0,2)$

$B = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad D = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$f(A) = f(C) = 0$ minimi

$f(B) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ max

$f(D) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Esercizio 4. Si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale

$$F(x,y) = (2xy + ye^{\alpha xy}, xe^{\alpha xy} + \alpha x^2)$$

(a). [4p] Si dica se esiste un α per cui il campo è conservativo sul suo dominio.

$\partial_y F_1 = 2x + \alpha xy\, e^{\alpha xy} + e^{\alpha xy}$ $\quad\quad$ $\partial_y F_1 = \partial_x F_2$

$\partial_x F_2 = \alpha xy\, e^{\alpha xy} + e^{\alpha xy} + 2\alpha x$ $\quad\quad$ $\Leftrightarrow \alpha = 1$

Per $\alpha = 1$ $\quad \operatorname{rot} F = 0$ $\quad$ e il dominio è $\mathbb{R}^2$ che è sempl. connesso

$\Rightarrow$ F è conservativo $\Leftrightarrow \alpha = 1$

Il potenziale per $\alpha = 1$ è $U = x^2 y + e^{xy}$

(b). [4p] Data la curva $\gamma = (t,t)$, $t \in [-\pi, \pi]$, si calcoli il lavoro di F lungo γ nel caso $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$.

Per $\alpha = 1$ $\quad \int_\gamma F = U(\gamma(\pi)) - U(\gamma(-\pi)) = \pi^3 + e^{\pi^2} + \pi^3 - e^{\pi^2} = 2\pi^3$

Per $\alpha = 0$ il campo non è conservativo e $F = (2xy + y, x)$

$$\int_\gamma F\, ds = \int_{-\pi}^{\pi} F(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) = \int_{-\pi}^{\pi} 2t^2 + t + t\, dt = \left[\frac{2t^3}{3} + t^2\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{4\pi^3}{3}$$