Università di Pisa - CdL Ingegneria Ed-Architettura, Pisa - ??/01/2020

(Cognome) (Nome) (Matricola)

Per passare è necessario realizzare almeno 8 punti sui 16 disponibili nei primi 2 esercizi e almeno 18 in totale

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^6+y^6}{6} - xy$

(a). [2p] Si trovino i punti critici di f

$$\nabla f = \begin{pmatrix} x^5 - y \\ y^5 - x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y = x^5 \\ y^5 = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^5 \\ x^{25} - x = 0 \end{cases}$$

$(x,y) = (0,0)$

$(x,y) = (1,1)$

$(x,y) = (-1,-1)$

(b). [2p] Si classifichino i punti critici trovati

$$H_f = \begin{pmatrix} 5x^4 & -1 \\ -1 & 5y^4 \end{pmatrix} \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(0,0) < 0$ selle

$$H_f(+1,+1) = H_f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det = 24 > 0$

$f_L = 10 > 0$

$(1,1)$
$(-1,-1)$ minimi

(c). [3p] Si calcoli $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)$

In coord polar

$$\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = \lim_{\rho\to+\infty} \frac{\rho^6\cos^6\theta + \rho^6\sin^6\theta}{6} - \rho^2\cos\theta\sin\theta =$$

$$= \lim_{\rho\to\infty} \rho^6 \Big(\underbrace{\frac{\cos^6\theta + \sin^6\theta}{6}}_{>0} - \frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho^4} \Big) = +\infty$$

(d). [3p] Si calcolino estremo inferiore e superiore di f su $\mathbb{R}^2$

$\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$, $\nexists \max_{\mathbb{R}^2} f$

e, per una variante di Weierstrass $\exists \min_{\mathbb{R}^2} f$ (ed è un pto critico)

$\Rightarrow$ lo abbiamo trovato al primo punto

$$\min_{\mathbb{R}^2} f = f(1,1) = \frac{2}{6} - 1 = -\frac{2}{3}$$

Esercizio 2. [6p] Si consideri la superficie $\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0\}$, orientata verso l'alto, ed il campo $F = (y, \underset{-x}{\cancel{x}}, 2z)$. Si calcoli il flusso di F attraverso Γ

parametrizzazione come grafico $r(u,v) = \left(u, v, \sqrt{9-u^2-v^2}\right)$, $u^2+v^2 \leq 9$

$$r_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\right) \qquad r_v = \left(0, 1, \frac{-v}{\sqrt{9-u^2-v^2}}\right)$$

$$r_u \times r_v = \left(\frac{u}{\sqrt{9-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{9-u^2-v^2}}, 1\right)$$ diretta verso l'alto

Flusso: $$\int_\Gamma F \cdot n \, d\sigma = \iint_{u^2+v^2\leq 9} F \cdot r_u \times r_v \, du\,dv = \iint_{u^2+v^2\leq 9} \frac{uv}{\sqrt{9-u^2-v^2}} - \frac{uv}{\sqrt{9-u^2-v^2}} + 2\sqrt{9-u^2-v^2}\, du\,dv$$

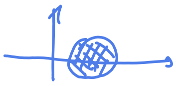
$$= 2\iint_{u^2+v^2\leq 9} \sqrt{9-u^2-v^2} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho\sqrt{9-\rho^2}\, d\rho\, d\theta = 4\pi\int_0^3 \rho\sqrt{9-\rho^2}\, d\rho$$

$$= 4\pi\left[-\frac{1}{3}\left(9-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\underset{3}{\cancel{\sqrt{9}}}\right)^3 = 4 \cdot 3^2\pi = 36\pi$$

Esercizio 3. Si consideri il campo $F = \left(\dfrac{3x-3}{((x-1)^2+y^2-1)^{\frac{3}{2}}}, \dfrac{3y}{((x-1)^2+y^2-1)^{\frac{3}{2}}} \right)$

(a). [2p] Si determini il dominio di F in $\mathbb{R}^2$

$(x-1)^2+y^2-1 \geq 0$ $\quad$ $(x-1)^2+y^2 \geq 1$ $\Rightarrow$ esterno di un cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1



(b). [2p] Si dica se il campo è irrotazionale

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{3}{2}\,\frac{(3x-3)\cdot(2y)}{((x-1)^2+y^2-1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \Rightarrow \operatorname{rot} F = 0$$

(c). [4p] Si dica se il campo è conservativo

Il campo ammette un potenziale $U = \dfrac{-3}{((x-1)^2+y^2-1)^{\frac{1}{2}}}$ $\Rightarrow$ è conservativo

Altrimenti si prende come curva test $\gamma = \begin{pmatrix} 2\cos t + 1 \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ $t \in [0, 2\pi]$

e si calcola $\displaystyle\oint_\gamma F = \int_0^{2\pi} -\frac{12\cos t \sin t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t - 1} + \frac{12\cos t \sin t}{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 1}\, dt = \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0$

$\Rightarrow$ F è conservativo

Esercizio 4. Sia data l'equazione differenziale $y' = y \log y$.

(a). [5p]Si determini una soluzione generale del problema di Cauchy con $y(0) = a > 0$.

Per separazione di variabili $\quad \displaystyle\int \frac{dy}{y \log y} = \int 1 \, dx + c$

$$\log \log y = x + c$$

$$\log y = e^{x+c} = C_1 e^x \qquad y = e^{C_1 e^x} = (e^{C_1})^{e^x}$$

$$y(0) = (e^{C_1})^1 = e^{C_1} \Rightarrow e^{C_1} = a$$

Soluzione : $\quad y = a^{e^x}$

(b). [3p]Si calcoli $y''(0)$

$$y'' = (y')' = y' \log y + \frac{y}{y} \cdot y' = y' (\log y + 1) =$$

$$= y \log y \, (\log y + 1)$$

$$y''(0) = y(0) \log y(0) \, (\log(y(0)) + 1) =$$

$$= a \log a \, (\log(a) + 1)$$