EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Sono equazioni che contengono derivate

Esempio: Coronavirus $\longrightarrow$ equazione che descrive i contagi

$$\frac{dy}{dt} = \alpha \cdot y \quad \text{(equazione del 1° ordine)}$$

Come si risolvono:

1. Separo le variabili (a sinistra y e a destra t)

$$dy/y = dt \cdot \alpha$$

2. Integro entrambe le parti:

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int \alpha \, dt$$

$$\ln y = \alpha t + c$$

$$y = e^{\alpha t + c} = c_1 e^{\alpha t}$$

La soluzione e' una funzione

3. Trovo c_1, pongo $t = 0$

$$y(0) = c_1 e^1 = c_1$$

4. L'equazione differenziale $y' = \alpha y$ ha soluzione:

$$y = c_1 e^{\alpha t}$$

Il sistema (Problema di Cauchy):

$$\begin{cases} y' = \alpha y \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{ha soluzione} \longrightarrow \quad y = y_0 e^{\alpha t}$$

Al cambiare di α il grafico cambia drasticamente

Modello 2

Supponiamo che α (contagiosita') diminuisca con il tempo:
$\alpha = \alpha_0 - \alpha_1 y(t)$ (α_1 sono i guariti)

$y = y(t)$ numero di infetti

In analogia con il modello 1:

$$y(t+\delta t) = y(t) + \alpha \cdot \delta t \cdot y(t)$$

$$y(t+\delta t) = y(t) + \overbrace{(\alpha_0 - \alpha_1 y)}^{\alpha_0 - \alpha_1} \cdot \delta t \cdot y(t)$$

$$\frac{y(t+\delta t)}{\delta t} = (\alpha_0 - \alpha_1 y(t))\, y(t)$$

Faccio il lim per $\delta t \longrightarrow 0$:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha_0 y(t) - \alpha_1 y^2(t)$$

per comodita' poniamo $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}$

$$\frac{dy}{dt} = \alpha_0 y (1 - \beta_1 y)$$

Separo le variabili:

$$\frac{dy}{y(1-\beta_1 y)} = \alpha_0 dt$$

Integro:

$$\int \frac{1}{y(1-\beta_1 y)} dt = \alpha_0 t + c$$

Cerco A, B costanti: $\frac{A}{y} + \frac{B}{1-\beta_1 y} = \frac{1}{y(1-\beta_1 y)}$

calcoli ...

$A = 1$

$B = \beta_1$

$$\int \frac{1}{y}\, dy + \int \frac{\beta_1}{1-\beta_1 y}\, dy = \alpha_0 t + c$$

$$\ln y + \ln(1-\beta_1 y) = \alpha_0 t + c$$

$$\ln\left(\frac{y}{1-\beta_1 y}\right) = \alpha_0 t + c$$

$$\frac{y}{1-\beta_1 y} = c_1 e^{\alpha_0 t} \qquad 1-\beta_1 y \neq 0$$

$$y = c_1 e^{\alpha_0 t}(1-\beta_1 y)$$

$$y + c_1 e^{\alpha_0 t} \beta_1 y = c_1 e^{\alpha_0 t}$$

$$y = \frac{c_1 e^{\alpha_0 t}}{1 + c_1 \beta_1 e^{\alpha_0 t}} \qquad \text{(soluzione)}$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:

$$y^{(m)} + a_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

la nostra incognita e' $y = y(t)$ e $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$,
se $f(x)$ (e' una funzione data) e' zero l' equazione e' omogenea:

$$y^{(m)} + \text{---} + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Proposizione

Un' equaz. differenziale a coeff. costanti omogenea e' lineare se il polinomio:

$$F(y) = y^{(m)} + \dots \pm a_1 y' + a_0 y$$

rispetta la combinazione lineare:

$$\begin{cases} F(y+z) = F(y) + F(z) \\ F(\lambda y) = \lambda F(y) \end{cases}$$

Teorema (soluzioni di un eq. lineare)

Sia $F(y) = y^{(m)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$ allora l' insieme delle soluzioni e' uno spazio vettoriale di $\dim = m$

∇ Ad esempio le soluzioni dell' equazione omogenea:

$\{$ Soluzioni di $F(y) = 0 \}$ e' ssp di $\dim = m$

Metodo per risolvere eq. differenziali:

$$F(y) = y^{(m)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$$

Associo il polinomio caratteristico: (sostituisco il ∂ della derivata con potenza)

$$\lambda^m + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

esempio:

$$y' - y = 0 \longrightarrow \lambda - 1 = 0 \quad (\lambda = 1)$$

Le radici corrispondono alle soluzioni, per cui

$$(e^x)' = (e^x)$$

esempio:

$$y' - 5y = 0$$

$$\lambda - 5 = 0 \longrightarrow \lambda = 5 \text{ con molt} = 1$$

$y' = 5y$ la soluzione e' $y = e^{5x}$

∇ n e' radice del pol. caratteristico $\Rightarrow$ e^{nx} e' soluzione

Proposizione:

Equazione differenziale $\longrightarrow$ Equazione polinomiale

$$y' - 5y = 0 \qquad\qquad \lambda - 5 = 0$$

$$\left(\frac{d}{dx} - 5\,Id\right)(y) = 0$$

Base di soluzioni

$$y = c_1 e^{5x}$$

Se ho un'equazione di 2° grado:

$$y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \longrightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 3) = 0$$

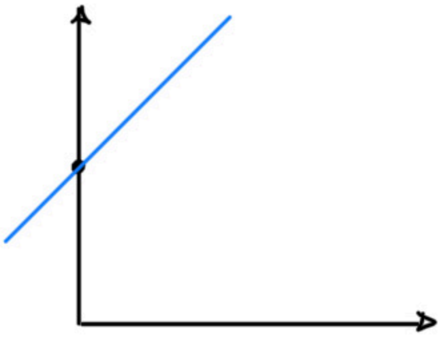
per cui lo spazio delle soluzioni ha dim = 2
ed e' generato da:

$$c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x} \quad (\text{BASE Sol}(y'' - 2y' + 5 = 0))$$

Equazioni del 1° ordine

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 5 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$



$$y = 5x + 2$$

Teorema di Cauchy

Sia $f(x,y)$ funzione derivabile e consideriamo:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Allora $\exists$ una soluzione locale, inoltre:

1. Se $f(x,y)$ e' derivabile in x_0 la soluzione e' unica
2. Se f e' lpsicciana allora $\exists$ soluzione globale

! Controesempio dell' unicita'

$$\begin{cases} y' = 3y^{3/2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$ ammette 2 soluzioni $y = 0$ e $y = x^3$

! Il teorema non e' costruttivo

Equazioni a variabili separabili

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$$

Se $h(x) \neq 0$

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

$$H(y) = G(x)$$

$$\boxed{y = H^{-1}(G(x))}$$

SOLUZIONE

Teorema (Equazioni a coeff. costanti non omogenee)

Data un'equazione d. a coeff costanti non omogenea

$$y^{(m)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

se $\bar{y}$ e' una soluzione particolare dell' equazione, allora tutte le soluzioni sono della forma:

$$y = \bar{y} + \underbrace{\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m}_{\text{SOLUZIONE EQ. OMOGENEA}}$$

▽ E' ANALOGO A ROUCHE' CAPELLI IN ALGEBRA

Esempi:

①

$$\begin{cases} y' - 5y = 0 \\ y(0) = 25 \end{cases}$$

$\lambda - 5 = 0 \longrightarrow c_1 \cdot e^{5x}$ (soluzione generale)

$25 = c_1 e^0$

$c_1 = 25$

Soluzione del problema di Cauchy:

$y = 25 e^{5x}$

② $$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$\lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda = \pm 1$

Soluzione ha base: (e^x, e^{-x}), quindi:

$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ $\qquad y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

$2c_1 = 3 \longrightarrow c_1 = 3/2 \,,\; c_2 = \frac{1}{2}$

Soluzione Cauchy:

$$y = \frac{3}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$$

Come trovare le soluzioni particolari?

Metodo delle funzioni simili

Sia $y^{(k)} + \dots + a_0 y = f(x)$

se $f(x)$ e' del tipo:

e^{Ax}, $\cos(\beta x)$, $\sin(\beta x)$, polinomio, polinomio $\cdot\, e^{Ax}$, ...

cerchiama $\overline{y}$ dello stesso tipo

esempio:

$$y'' + 3y' + 2y = x^2 + 1$$

$f(x) = x^2 + 1$, cerco un polinomio di grado 2

$$\overline{y} = ax^2 + bx + c$$

$$\overline{y}' = 2ax + b$$

$$\overline{y}'' = 2a$$

sostituisco i valori dentro l'equazione

$$2a + 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1$$

sfrutto l'uguaglianza di polinomi:

$$2ax^2 + 2bx + 2c + 6ax + 3b + 2a = x^2 + 1$$

$$2ax^2 + x(2b + 6a) + 2a + 3b + 2c = x^2 + 1$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b + 6a = 0 \\ 2a + 3b + 2c = 1 \end{cases}$$

Risolvo il sistema:

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -3/2 \quad c = 9/4$$

soluzione particolare:

$$\overline{y} = \frac{1}{2}x^2 - 3/2\, b + 9/4$$

Trovo l'eq. omogenea:

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = -1, -2$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2^{-2x}$$

Soluzione generale:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9/4 + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

esempio:

$$y^{(3)} - y^{(1)} = \cos x$$
$$y^{(3)} - y^{(1)} = 0$$
$$\lambda^3 - 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm 1, 0$$
$$y = \bar{y} + c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

Soluzione particolare, in caso di sin e cos:

$$\bar{y} = a\cos(x) + b\sin(x)$$

$$\bar{y}' = -a\sin(x) + b\cos(x)$$

$$\bar{y}'' = -a\cos(x) - b\cos(x)$$

$$\bar{y}''' = a\sin x - b\cos(x)$$

$$a\sin x - b\cos x + a\sin x - b\cos x = \cos x$$

$$2a\sin x - 2b\cos x = \cos x$$

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ -2b = 1 \end{cases}$$

$a = 0 \quad b = -\frac{1}{2}$

Soluzione totale:

$$y = -\frac{1}{2}\cos x + c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$$

3

$$y^{(3)} - y^{(1)} = (3-x)e^{2x}$$

$\lambda^3 - \lambda = 0 \qquad$ rad: $0, 1, -1$

$$y = \bar{y} + c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$$

Cerco soluzione del tipo $(ax+b)e^{2x}$

$$y' = ae^{2x} + 2(ax+b)e^{2x} = e^{2x}(2ax + a + 2b)$$

$$y'' = 2ae^{2x} + 2ae^{2x} + 4(ax+b)e^{2x}$$

$$y''' = 4ae^{2x} + 4ae^{2x} + 8(ax+b)e^{2x} + 4ae^{2x}$$
$$= e^{2x}(8ax + 12a + 8b)$$

$$e^{2x}(8ax + 12a + 8b - (2ax + a + 2b)) = (3-x)e^{x}$$

$$e^{2x}(6ax + 11a + 6b) = (3-x)e^{x}$$

$$\begin{cases} 6a = -1 \\ 11a + 6b = 3 \end{cases}$$

$a = -\frac{1}{6} \quad b = \frac{29}{36}$

$$y = \left(-\frac{1}{6}x + \frac{29}{36}\right)e^{2x} + C_1 + C_2 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

Se le radici hanno molteplicità 2 allora la funzione associata si moltiplica per x, esempio:

$\lambda = (\lambda + 1)^2 = i, -i$ molt $= 2$

$x \cos x + x \sin x$