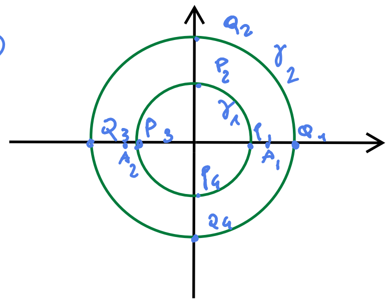
(Cognome) (Nome) (Matricola)

Per passare è necessario realizzare almeno 8 punti sui 17 disponibili nei primi 2 esercizi e almeno 18 in totale

Esercizio 1. [8p]Sia $f(x,y) = x^2 - y^2 + \frac{2}{x^2+y^2}$. Si trovino, se esistono, il massimo e il minimo di f su $D = \left\{\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$

Max e min esistono per Weierstrass

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - \frac{4x}{(x^2+y^2)^2} \\ -2y - \frac{4y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = 0 \iff y=0 \to \begin{cases} 2x - \frac{4x}{x^4} = 0 \\ y=0 \end{cases} \to \begin{cases} (0,0) \notin D \\ A_1 = (\sqrt[4]{2}, 0) \\ A_2 = (-\sqrt[4]{2}, 0) \end{cases}$$



Studio sul bordo ∂D:

$\gamma_1 = \left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right)$ e $f|_{\gamma_1} = \frac{1}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{4}\sin^2\theta + 8 = \frac{1}{4}\cos(2\theta) + 8$

$\frac{d}{d\theta} f|_{\gamma_1} = -\frac{1}{2}\sin(2\theta) = 0$ per $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

$\Rightarrow$ ho $P_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ $P_2 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ $P_3 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ $P_4 = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

Su $\gamma_2 = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$ $f|_{\gamma_2} = 4\cos(2\theta) + \frac{1}{2}$ ho allo stesso modo

$Q_1 = (2,0)$ $Q_2 = (0,2)$ $Q_3 = (-2,0)$ $Q_4 = (0,-2)$

$f(Q_1) = f(Q_3) = 4 + \frac{1}{2}$ $f(Q_2) = f(Q_4) = -4 + \frac{1}{2}$ ← MINIMO

$f(P_1) = f(P_3) = \frac{1}{4} + 8$ $f(P_2) = f(P_4) = -\frac{1}{4} + 8$

↑
MASSIMO

$f(A_1) = f(A_2) = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \sim 3$

Esercizio 2. Si consideri la superficie $\Sigma = \left\{ z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1 \le z \le 2 \right\}$

(a). [2p]Si trovi una parametrizzazione regolare per Σ

$$r(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ \frac{1}{\rho} \end{pmatrix} \quad \text{per } 0 \le \theta < 2\pi, \quad \frac{1}{2} \le \rho \le 1$$

$$r_\rho = \left(\cos\theta,\ \sin\theta,\ -\frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$r_\theta = \left(\rho\sin\theta,\ \rho\cos\theta,\ 0\right) \Rightarrow r(\rho,\theta) \text{ è regolare}$$

$$r_\rho \times r_\theta = \left(\frac{\cos\theta}{\rho},\ \frac{\sin\theta}{\rho},\ \rho\right) \ne 0$$

(b). [4p]Si calcoli $\displaystyle\iint_\Sigma (x^2+y^2)^2 d\sigma$

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)^2 d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \rho^4 \,|r_\rho \times r_\theta| = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{2}}^{1} \rho^3\sqrt{1+\rho^4}\,d\rho\,d\theta = 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} \rho^3\sqrt{1+\rho^4}\,d\rho$$

$$= 2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{d}{d\rho}\left[\frac{1+\rho^4}{6}\right]^{\frac{3}{2}} d\rho = \frac{\pi}{3}\left|(1+\rho^4)^{\frac{3}{2}}\right|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\pi}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - \left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\left[\text{Nb} \quad |r_\rho \times r_\theta| = \sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\rho^2} = \frac{1}{\rho}\sqrt{1+\rho^4}\right]$$

(c). [3p]Si calcoli il volume di $D = \left\{ z \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1 \le z \le 2 \right\}$

per strati

$$\iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = \int_1^2 \int_{\sqrt{x^2+y^2} \le \frac{1}{z}} 1\,dx\,dy\,dz = \pi\int_1^2 \frac{1}{z^2}\,dz =$$

$$= \pi\left[-z^{-1}\right]_1^2 = \pi\left[-\frac{1}{2}+1\right] = \frac{\pi}{2}$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f(x,y) = \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha}$ con $\alpha > 0$.

(a). [3p]Si dica se la funzione si possa prolungare con continuità nell'origine per $\alpha = 1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \rightsquigarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{1-\cos(\rho^2)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \underbrace{\frac{1-\cos(\rho^2)}{\rho^4}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\rho^2}_{\to 0} = 0$$

quindi si può prolungare nell'origine con continuità ponendola uguale a zero

(b). [5p]Si calcoli $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ al variare del parametro α

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \rightsquigarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{1-\cos(\rho^2)}{\rho^{2\alpha}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1-\cos(\rho^2)}{\rho^4} \cdot \rho^{4-2\alpha}$$

se $4-2\alpha > 0$ ovvero $\alpha < 2$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f = 0$

se $4-2\alpha = 0$ ovvero $\alpha = 2$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f = \frac{1}{2}$

se $4-2\alpha < 0$ ovvero $\alpha > 2$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f = +\infty$

Esercizio 4. (a). [4p]Si risolva, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy $\begin{cases} y'(x) = \frac{e^{-y(x)}}{x}; \\ y(1) = a. \end{cases}$

sep. di variabili

$y' e^y = \frac{1}{x}$ $\qquad \int_a^y e^y \, dy = \int_1^x \frac{1}{\wedge}$

$e^y - e^a = \log|x|$ $\qquad e^y - e^e = \log(x)$ infatti $x > 0$ perché $x \neq 0$ e si parte per $x = 1$

$e^y = e^e + \log x$ $\qquad y = \log\left(e^a + \log(x)\right)$

(b). [4p]Si determini a in maniera che la soluzione trovata verifichi $y''(1) = -2$.

$$y'' = -\frac{y' e^{-y}}{x} - \frac{e^{-y}}{x^2}$$

$$y''(1) = -\underbrace{y'(1)\, e^{-y(1)}}_{1} - \frac{e^{-y(1)}}{1} = e^{-y(1)}\left(-y'(1) - 1\right) =$$

$$= e^{-y(1)}\left(-\frac{e^{-y(1)}}{1} - 1\right) = e^{-a}\left(-e^{-a} - 1\right) =$$

$$= -e^{-2a} - e^{-a} = -2 \text{ se } \boxed{a = 0}$$