Calcolo infinitesimale e differenziale

Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi.

1 Limiti e continuità

Si ricorda che per una funzione di più variabili, la definizione di continuità in un punto $p_0 \in \mathbb{R}^n$ è:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.c. } |f(p) - f(p_0)| < \varepsilon \text{ se } |p - p_0| < \delta;$$

analogamente si dice che $\lim_{p \to p_0} f(p) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \text{ t.c. } |f(p) - L| < \varepsilon \text{ se } |p - p_0| < \delta, \ p \neq p_0.$$

In due o più variabili non è immediato definire i "limiti all'infinito". Un modo è il seguente: si dice che $\lim_{x^2+y^2 \to \infty} f(x,y) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0 \text{ t.c. } |f(x,y) - L| < \varepsilon \text{ se } |x^2 + y^2| > M.$$

Esercizio 1. Studiare il campo di esistenza e segno delle seguenti funzioni.

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \qquad f(x,y) = \tfrac{1}{x^2-y+1} \qquad f(x,y) = \log \tfrac{\sin x}{y}$$

$$f(x,y) = \sqrt{xy - 1} \cdot \log(5 - 2x) \qquad f(x,y) = \tfrac{(\sin x)^y}{\log(x+y)} \qquad f(x,y,z) = \tfrac{\sqrt{1-z^2}}{x^2+y^2}$$

Esercizio 2. Dire se le seguenti funzioni sono prolungabili con continuità in zero.

$$f(x,y) = \tfrac{x^3}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \tfrac{x^4+y^3}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \tfrac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}-1+x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \ (*)$$

Esercizio 3. Discutere la continuità delle seguenti funzioni .

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} x^2 y & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(y-1)}{x^2+(y-1)^2} & (x,y) \neq (0,1) \\ 1 & (x,y) = (0,1) \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 4. Calcolare il limite per $(x,y) \to (0,0)$ e per $x^2 + y^2 \to \infty$ delle seguenti funzioni.

$$f(x,y) = \tfrac{y-x^2+y^4+x^6}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \tfrac{y+x+x^2+y^3}{x+y}$$

$$f(x,y) = \tfrac{x\sin(y)+y\cos(x)}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \tfrac{x+y+x^5}{x^3+y^2}$$

Esercizio 5. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{\sin(x-y)}{x^2-y^2}\ [\tfrac{1}{2}] \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ [\nexists] \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x-y)}{x^2-y^2}\ [\nexists]$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x+y-x^2+y^2)}{x+y} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x-y+1}{x+y-1} \qquad \lim_{x^2+y^2\to\infty} e^{3x+y-x^2-2y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^2+y^2}{xy^3}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{\sin^2(x)} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \log\left|\log\frac{xy}{x^2+y^2}\right|$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{y} \qquad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x-y+z^2-2z}{x+y+z}$$

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \frac{x^2+y^2}{xy} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} x^2-y^2 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{|x|+|y|} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+x^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

2 Derivate e differenziali

Una funzione di due variabili $f(x,y)$ ammette derivate parziali nel punto $p = (x_0, y_0)$ se esistono finiti i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) &:= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}; \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) &:= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}. \end{aligned}$$

Dato $v = (v_1, v_2)$ con $|v| = 1$ si definisce la derivata direzionale (di direzione v) nel punto $p = (x_0, y_0)$ come

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) := \lim_{h\to 0} \frac{f(p+hv)-f(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+hv_1,y_0+hv_2)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

I concetti di derivata parziale e derivata direzionale per funzioni di N variabili sono ovvie generalizzazioni delle due precedenti.

Il concetto più importante del calcolo per le funzioni di più variabili è quello di *differenziale*. Una funzione $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ si dice differenziabile in $p \in \mathbb{R}^N$ se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $v \in \mathbb{R}^N$ valga

$$\lim_{|v|\to 0} \frac{f(p+v)-f(p)-L(v)}{|v|} = 0.$$

ovvero, chiamato $v = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k)-f(x,y)-L\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

In tal caso si dice che L è il differenziale di f in p e si indica $L = d_p f$

Esercizio 6. Mostrare che se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile in p allora, dato $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ con $|v| = 1$ allora f ammette derivata direzionale in p e vale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = d_p f(v) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p)v_2 \ (*)$$

Esercizio 7. Calcolare le derivate parziali prime ed il differenziale delle seguenti funzioni.

$$f(x,y) = (x+y)e^x y \qquad f(x,y,z) = \frac{ye^z}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f(x,y,z) = \log(xyz)^2$$

Esercizio 8. Mostrare che la funzione $f(x,y) = \sqrt{|x|}$ è continua in R^2 ma non è sempre parzialmente derivabile.

Esercizio 9. Studiare continuità, derivabilità parziale e direzionale e differenziabilità nel punto $(0,0)$ delle seguenti funzioni.

$$f(x,y) = \left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right)^2 \qquad f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \ (*) \qquad f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = x\log(y^2+1) \qquad f(x,y) = |x+y|^2 \qquad f(x,y) = |x+1|^y \ (*)$$

Esercizio 10. Dire se le seguenti funzioni sono differenziabili in (0,0) e, quando possibile, calcolarne il differenziale.

$$f(x,y) = \sqrt{xy} \qquad f(x,y) = \sqrt{|x\sin(y)|} \qquad f(x,y) = y^2\sin(\tfrac{x}{y})$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4} \qquad f(x,y) = \frac{x^3+y^2-\sin(y)}{x^2+y^6+5}$$

Esercizio 11. Dire se le seguenti funzioni possono essere prolungate nel punto (0,0) in modo da risultare differenziabili. E continue?

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f(x,y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Esercizio 12. Data $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ trovare, se esiste, il piano tangente in $A = (1,2,\sqrt{5})$ e $B = (0,0,0)$.

Esercizio 13. Calcolare, se esistono, le derivate direzionali di $f(x,y) = |x|$ nel punto $(0,0)$ secondo le direzioni

$$u = (1,0) \qquad v = (-1,0) \qquad w = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}).$$

Esercizio 14. Calcolare, se esistono, le derivate direzionali di

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{y} & y \neq 0; \\ 0 & y = 0; \end{cases}$$

in $(1,2)$ secondo la direzione del vettore $v = (3/5, 4/5)$. Mostrare inoltre che f ha tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ pur non essendo ivi continua.

Esercizio 15. Calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni.

$$f(x,y) = y^3 - x^2(\sin(x) - \cos(y)) \qquad f(x,y) = \frac{e^x}{x^2+y^2+2}$$

$$f(x,y,z) = \log(x^4+1) - zy^2 \qquad f(x,y) = x^2 e^{y\sin(x)}$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \tan(x^2) \qquad f(x,y) = e^{y-x^2}$$

$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \frac{x^3+xy^3-y^5}{x^4+x^2y^2+y^4+4}$$

Esercizio 16. Calcolare lo sviluppo di Taylor in $(0,0)$ delle seguenti funzioni, arrestandosi al secondo ordine.

$$f(x,y) = \sin(x) + \cos(y^2) \qquad f(x,y) = x^3 + x^2y^2 - y$$

$$f(x,y) = y\log(x^2+1) \qquad f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (*)$$

Esercizio 17. Verificare se per le seguenti funzioni vale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan\frac{x}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \quad (*) \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y+xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f(x,y) = e^{(x^2+y^2)2y}$$

Studio di massimo e minimo di funzione

Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi.

Esercizio 1. Sia $f(x,y)$ continua su $\mathbb{R}^2$. Cosa si può dire sull'esistenza di massimi e minimi di f se:

1. $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = \infty$;
2. $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = 0$ e $f(x,y) > 0$;
3. $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = 0$ e $f(x,y)$ assume valori sia positivi che negativi.

Esercizio 2. Studiare massimi e minimi delle seguenti funzioni

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1} \qquad f(x,y) = y - x^2 \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$$

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \quad f(x,y) = \sin x \sin 2y \quad f(x,y) = (x^2+y^2)(1 - \log(x^2+y^2))$$

Esercizio 3. Studiare la convessità in $P = (0,1)$ delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = x^3 + x^2y + y^2 + 1 \qquad f(x,y) = \sin(x) + \cos(\pi y)$$

$$f(x,y) = x^4 + y^2 - 2y + 3 \qquad f(x,y) = e^y$$

Esercizio 4. Studiare la funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ e trovare i massimi e minimi sul quadrato di equazione $0 \le x, y \le 2$. Quanto valgono l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f su $\mathbb{R}^2$?

Esercizio 5. Studiare la funzione $f(x,y) = y^4 - x^2(y^2+1)$ e trovare massimi e minimi di f sul cerchio di raggio unitario.

Esercizio 6. Studiare le seguenti funzioni e trovarne i punti critici, estremo inferiore e superiore.

$$f(x,y) = \frac{x-y}{1+(x-y)^2} \qquad f(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = x^4 + y^4 \qquad f(x,y) = (x+3y)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f(x,y) = (y - x^2 + 1)^2 y^3 \qquad f(x,y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x+y)^2$$

$$f(x,y) = -xye^{-x^2+y} \qquad f(x,y) = (x+y)\log(x+y)$$

$$f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2) \qquad f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$f(x,y) = \frac{\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} \qquad f(x,y) = (2x-y)[3 - (2x-y)^2] \ (*)$$

Esercizio 7. Si dimostri che il campo di esistenza di $f(x,y) = \sqrt{x^2+xy+y^2}$ è tutto $\mathbb{R}^2$. Si trovino poi il massimo ed il minimo di f sul cerchio di raggio 1. La funzione ha derivate parziali nell'origine? È differenziabile in $(0,0)$?

Esercizio 8. Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y)$ nel dominio A nei casi seguenti

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 \qquad A = \left\{x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy \qquad A = \left\{(x,y) \in R^2 : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1\right\}$$

$$f(x,y) = \frac{x+y^2}{x^2+y^2+1} \qquad A = \{x + y = 3\}$$

$$f(x,y) = |x|^{1/4} + |y|^{1/4} \qquad A = \left\{x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

Esercizio 9. Determinare i punti critici delle seguenti funzioni. Cosa succede quando l'Hessiano si annulla?

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \qquad f(x,y) = x^2 - y^4 \qquad f(x,y) = |x + y|$$

Esercizio 10. Studiare le seguenti funzioni (dove definite)

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f(x,y) = \sqrt{x+y}e^{-(x^2+y^2)} \qquad f(x,y) = xy\log(xy)$$

$$f(x,y) = |x + y| \qquad f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \qquad f(x,y) = \frac{\sin(x)}{y}$$

Esercizio 11. Date le seguenti funzioni

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^5 - x^4y}}{\sqrt{x-y}} \qquad f(x,y) = \sin(x - y) \qquad f(x,y) = \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}$$

- se ne determini il campo di esistenza D
- si studino i massimi e minimi di f sull'insieme $A = D \cap \left\{x^2 + y^2 \le 1\right\}$

Esercizio 12. Si determini il valore massimo ed il valore minimo di f su D.

$$f(x,y) = y\sqrt{1+x} \qquad D = \{1 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 3\}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin y^2}{y} & y \ne 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \qquad D = \left\{0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le \sqrt{\pi}\right\}\ (*)$$

$$f(x,y) = \sin x \cos y \qquad D = \{0 \le x, y \le \pi\}$$

$$f(x,y) = x^2y + y^3 \qquad D = \{0 \le x \le 2,\ -2 \le y \le -1\}$$

Esercizio 13. Si determinino i punti di massimo e di minimo di f su D

$$f(x,y) = x + y^2 \qquad D = \left\{1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$$

$$f(x,y) = x^2(x^2 + y^2)^2 \qquad D = \left\{1 \le x^2 + y^2 \le 2\right\}$$

$$f(x,y) = 2xy \qquad D = \left\{x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge x,\ x \le 0\right\}$$

$$f(x,y) = xy^3 \qquad D = \{1 \le xy \le 2,\ x \le y \le 2x\}\ (*)$$

$$f(x,y,z) = 1 \qquad D = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$$

Curve e funzioni

Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi.

Esercizio 1. Verificare che il gradiente, quando non è nullo, è ortogonale alle linee di livello delle seguenti funzioni

$$f(x,y) = y - x \qquad f(x,y) = y^2 - x^2$$
$$f(x,y) = e^x \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esercizio 2. Si studi l'andamento delle curve di livello delle seguenti funzioni. Si usi il risultato per studiarne il segno.

$$f(x,y) = x + 3y \qquad f(x,y) = \sin(x+y) + \sin(x-y) \qquad f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad f(x,y) = x^2 + y^2 - (x+y) \qquad f(x,y) = \frac{x^2-4y^2-1}{x^2+y^2-4}$$

Esercizio 3. Data la funzione differenziabile $F(x,y)$, definita su tutto il piano, e data una curva derivabile $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a valori nel piano, si calcoli $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}F(x(t), y(t))$. Si provi poi che

$$\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = F'(\gamma(t))[\gamma'(t)] = \langle \nabla F, \gamma'(t) \rangle.$$

Si usi il risultato per dimostrare che le curve di livello di F sono perpendicolari al suo gradiente ($**$)

Esercizio 4. Date

$$f(x,y) = e^x + e^y \qquad g(x,y) = x^2 + xy \qquad h(x,y) = \sin(x-y)$$

se ne calcolino le derivate rispetto alle seguenti curve

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad \beta(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ t^3 \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Si provi che per le seguenti funzioni le curve di livello sono perpendicolari al gradiente (usare una parametrizzazione della curve di livello e derivare la funzione lungo tale curva)

$$f(x,y) = \log(|x| + |y|) \qquad f(x,y) = xy^2 \qquad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Esercizio 6. Trovare il vettore tangente ed il vettore normale alle seguenti curve piane

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ e^t \cos t \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 3t^3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. Trovare la lunghezza delle seguenti curve definite per $0 \leq t \leq \pi$.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \qquad \gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Se cambiamo parametrizzazione la lunghezza cambia? Perché?

Esercizio 8. Trovare (usando il metodo dei *moltiplicatori di Lagrange*) i massimi e i minimi della funzione $f(x,y)$ con il vincolo $g(x,y)=0$ nei casi seguenti

$$f(x,y) = xy \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$$

$$f(x,y) = xy \qquad g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1$$

$$f(x,y) = (x-y)^2 \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$f(x,y) = x - y \qquad g(x,y) = \arctan(x^2 + y^2 - 2) - 2 + x - y$$

Esercizio 9. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f(x,y) = x^2 y$ al variare del punto (x,y) sulla curva $x^2 + y^2 = 1$.

Esercizio 10. Trovare, dove possibile, il vettore normale e il vettore tangente alle seguenti curve definite implicitamente

$$\begin{array}{ccc} x^2 + 3y^2 = 4 & x^2 - y^2 = 2 & x^3 + 2xy - 1 = 0 \\ x^3 + y^3 - 3xy & y \sin x = 0 & 2x^2 + y^2 - e^x = 0 \end{array}$$

Integrali multipli

Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi.

Esercizio 1. Date le seguenti funzioni

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^5 - x^4 y}}{\sqrt{x-y}} \qquad f(x,y) = \sin(x-y) \qquad f(x,y) = \frac{x^4+y^3}{x^2+y^2}$$

si calcoli

$$\int_A f(x,y)dxdy$$

Esercizio 2. Si calcoli l'integrale delle seguenti funzioni sui domini indicati a fianco

$$f(x,y) = y\sqrt{1+x} \qquad D = \{1 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 3\}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin y^2}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases} \qquad D = \left\{0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le \sqrt{\pi}\right\}\ (*)$$

$$f(x,y) = \sin x \cos y \qquad D = \{0 \le x, y \le \pi\}$$

$$f(x,y) = x^2 y + y^3 \qquad D = \{0 \le x \le 2,\ -2 \le y \le -1\}$$

Esercizio 3. Si calcoli l'integrale delle seguenti funzioni sui domini indicati a fianco.

$$f(x,y) = x + y^2 \qquad D = \left\{1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}$$

$$f(x,y) = x^2(x^2+y^2)^2 \qquad D = \left\{1 \le x^2 + y^2 \le 2\right\}$$

$$f(x,y) = 2xy \qquad D = \left\{x^2 + y^2 \le 9,\ y \ge x,\ x \le 0\right\}$$

$$f(x,y) = xy^3 \qquad D = \{1 \le xy \le 2,\ x \le y \le 2x\}\ (*)$$

$$f(x,y,z) = 1 \qquad D = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \le 1\right\}$$

Esercizio 4. Calcolare $\displaystyle\int_D \frac{y}{2+x}$, dove D è la porzione di piano limitata dalla parabola $y = 1 - x^2$ e dall'asse delle x.

Esercizio 5. Calcolare $\displaystyle\int_D xye^y$, dove D è l'insieme delimitato dalla parabola $y = x^2$ e dalle rette $y = 0$ e $x = 1$.

Esercizio 6. Calcolare l'integrale delle seguenti funzioni sui domini indicati a fianco

$$f(x,y) = x\cos(1-y) \qquad D = \left\{0 \le x \le 1,\ x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2\right\}$$

$$f(x,y) = y - x^2 \qquad D = \left\{-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 - \sqrt{1-x^2}\right\}$$

Campi di Vettori

Risolvete i seguenti esercizi. Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi.

Esercizio 1. Dire per quali funzioni $g(x,y)$ di classe C^1 il campo di vettori

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} \ ; \ g(x,y) \right)$$

è irrotazionale su $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(0,0)\}$. Dire poi per quali di queste $g(x,y)$ il campo è conservativo e calcolarne un potenziale. $(*)$

Esercizio 2. Dire per quali funzioni $a(y), b(x) \in C^1(\mathbb{R})$ il campo

$$F(x,y) = (xa(y) \ ; \ yb(x))$$

risulta conservativo.

Esercizio 3. Stabilire se il campo di vettori

$$F(x,y) = \left(\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \ ; \ -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

è irrotazionale, se è conservativo e in tal caso calcolarne un potenziale.

Esercizio 4. Calcolare il lavoro del campo

$$F(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} \ ; \ \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$$

lungo la curva $y = \cos x$ sull'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ orientata in senso antiorario.

Esercizio 5. Dato il campo

$$F(x,y) = \left(\frac{-2y}{4x^2+4y^2-4x+1} \ ; \ \frac{2x-1}{4x^2+4y^2-4x+1} \right)$$

calcolare al variare di $r \neq 1/2$ la circuitazione $\oint_\gamma F \cdot ds$ dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio r, percorsa in senso antiorario.

Esercizio 6. Dimostrare che il campo

$$F(x,y) = \left(-\frac{x}{y-x^2} \ ; \ \frac{1}{2(y-x^2)} \right)$$

è conservativo sul dominio $\left\{(x,y) \in \mathbb{R} : y > x^2\right\}$ e calcolarne un potenziale. Calcolare poi $\displaystyle\int_\gamma F \cdot ds$ dove

$$\gamma = \begin{pmatrix} t \\ 3+\sin t \end{pmatrix} \text{ con } t \in [0, \pi/2].$$

Esercizio 7. Determinare le funzioni $a(x) \in C^1(\mathbb{R})$ tali che il campo di vettori

$$F(x,y) = (ya(x)\ ;\ a(x))$$

risulti conservativo su $\mathbb{R}^2$, e trovarne il potenziale.

Esercizio 8. Si consideri il campo $F(x,y,z) = \big(3x^2y + yz\ ;\ x(x^2+z)\ ;\ xy\big)$.

1. Verificare se è irrotazionale, conservativo, ed in tal caso calcolarne un potenziale.
2. Si calcoli $\int_\gamma F \cdot ds$ dove

   $$\gamma(t) = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 2t\mathbf{k} \quad t \in (0,1)$$

   orientata nel senso delle t crescenti.
3. Si calcoli la lunghezza di γ

Esercizio 9. Si consideri il seguente campo di forze in $\mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{xz}{x^2-1} \\ \frac{1}{2}\sin(y) \\ \frac{1}{2}\log(x^2-1) \end{pmatrix}.$$

1. Si determini se tale campo è conservativo.
2. Si determinino le componenti connesse del suo dominio di definizione.
3. Si calcolino tutte le sue primitive (se esistono)
4. Si calcoli

   $$\int_\Gamma F \cdot T ds$$

   dove $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ 0 \leq z \leq 1; x = 2 + y^2 + z^2; y = z\}$ e T è il vettore unitario tangente a Γ nella direzione delle x crescenti.$(*)$

Equazioni differenziali

Risolvete i seguenti esercizi. Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi.

Esercizio 1. Si consideri l'equazione differenziale $y' = (y+5)x$.

1. Dire per quali dati iniziale vale il teorema di esistenza ed unicità e dire se le soluzioni sono definite globalmente.
2. Trovare l'integrale generale delle soluzioni.
3. Trovare le zone di crescita e decrescita delle soluzioni.

Esercizio 2. Sia data l'equazione differenziale $y' = y \log y$.

1. Si dica per quali valori iniziale $y(0) = y_0$ vale il teorema di Cauchy.
2. Si determini un integrale generale.
3. Si dica per quali valori iniziale la soluzione è crescente o decrescente.
4. Si trovi la soluzione esplicita dell'equazione differenziale con dato iniziale $y(0) = 2$.
5. Si determini l'intervallo massimale della soluzione trovata nel punto precedente.

Esercizio 3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x-y); \\ y(0) = a. \end{cases}$$

1. Dire se esiste una soluzione locale per ogni $a \in \mathbb{R}$, e, se possibile, determinarla.
2. Dire se la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e limitata.
3. Dire se esiste
$$\lim_{x \to +\infty} y(x).$$

[Sugg. Si consideri $z = x - y$]

Esercizio 4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{|x^2+y^2-1|}}; \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

1. Dire per quali (x_0, y_0) il problema è localmente risolubile.
2. Sia $x_0 = 0, y_0 = 0$. Si provi che la soluzione è crescente e dispari.
3. Sia $x_0 = 1, y_0 = -1$, si provi che la soluzione è crescente e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. $(*)$

Esercizio 5. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = |y - x|; \\ y(0) = a. \end{cases}$$

1. Discutere, al variare del parametro reale a l'esistenza e l'unicità delle soluzioni.$(*)$
2. Determinare esplicitamente la soluzione del problema per $a = 2$.
3. Detta $\bar{y}$ la soluzione del punto due, calcolare $\bar{y}''(0)$ e $\bar{y}'''(0)$.

Esercizio 6. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1-y}{x^2+y^2}; \\ \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Dimostrare che esiste un'unica soluzione $y(x)$ definita in un intorno del dato iniziale.
2. Dimostrare che tale soluzione è monotona crescente.
3. Provare che $y(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^+$.
4. Provare che $y(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}^-$. $(*)$

Esercizio 7. Indicata con y_a la soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \cdot (a + \frac{x}{a}); \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

dove $a > 0$, determinare il valore di a per cui $y_a(1)$ risulti minimo.

Esercizio 8. Si studi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \min\{x, y\}; \\ y(0) = a, \end{cases}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$. $(**)$

Forme differenziali

Risolvete i seguenti esercizi. Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi.

Esercizio 1. Dire per quali funzioni $g(x,y)$ di classe C^1 la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}dx + g(x,y)dy$$

risulta chiusa su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dire poi per quali di queste $g(x,y)$ la forma risulta esatta e calcolarne la primitiva. $(*)$

Esercizio 2. Dire per quali funzioni $a(y), b(x) \in C^1(\mathbb{R})$la forma

$$\omega(x,y) = xa(y)dx + yb(x)dy$$

risulta esatta.

Esercizio 3. Stabilire se la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\ dx - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\ dy$$

è chiusa, se è esatta e in tal caso calcolarne una primitiva.

Esercizio 4. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2},$$

dove γ è il grafico della funzione $y = \cos x$ sull'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio 5. Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{-2y}{4x^2+4y^2-4x+1}\ dx + \frac{2x-1}{4x^2+4y^2-4x+1}\ dy,$$

calcolare al variare di $r \neq 1/2$ l'integrale $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio r, percorsa in senso antiorario.

Esercizio 6. Dimostrare che la forma differenziale

$$\omega(x,y) = -\frac{x}{y-x^2}\ dx + \frac{1}{2(y-x^2)}\ dy$$

risulta esatta sul dominio $\left\{(x,y) \in \mathbb{R} : y > x^2\right\}$ e calcolarne una primitiva. Calcolare poi $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove

$$\gamma = \begin{pmatrix} t \\ 3+\sin t \end{pmatrix} \text{ con } t \in [0, \pi/2].$$

Esercizio 7. Determinare le funzioni $a(x) \in C^1(\mathbb{R})$ tali che la forma

$$\omega(x,y) = ya(x)dx + a(x)dy$$

risulti esatta, e trovarne il potenziale.

Esercizio 8. Sia definita la forma $\omega = (3x^2y + yz)\,dx + x(x^2 + z)\,dy + xy\,dz$.

1. Verificare se è chiusa, esatta, ed in caso affermativo calcolarne una primitiva
2. Si calcoli $\int_{\Gamma^+} \omega$ ove Γ^+ è il supporto della curva

$$\gamma(t) = \frac{1}{3}t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 2t\mathbf{k} \quad t \in (0,1)$$

   orientata nel senso delle t crescenti.

3. Si calcoli la lunghezza di Γ

Esercizio 9. Si consideri la forma

$$\omega(x,y,z) = \frac{xz}{x^2-1}dx + \frac{1}{2}\sin(y)dy + \frac{1}{2}\log(x^2-1)dz.$$

1. Si determini se tale forma è chiusa ed esatta.
2. Si determinino le componenti connesse del suo dominio di definizione.
3. Si calcolino tutte le sue primitive (se esistono)
4. Si calcoli

$$\int_\gamma \omega$$

   dove $\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le z \le 1; x = 2 + y^2 + z^2; y = z\}$ parametrizzata nella direzione delle x crescenti.$(*)$

Successioni e Serie

Risolvete i seguenti esercizi. Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi.

Esercizio 1. Studiare la convergenza delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-nx}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} e^n e^{n|x|}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin y;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+x^{2n}); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{nx}}{n^n}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x^2-1)^n.$$

Esercizio 2. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^x}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(x+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{x}{n}},$$

sulla semiretta $\{x > 0\}$.

Esercizio 3. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze. Studiare la convergenza puntuale sul bordo del disco di convergenza, e la convergenza totale e uniforme.

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n-1}\,(2x+1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x-3)^n$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sin(n)x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\,x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}\,2x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x}{n^2}\,x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}\,x^{2n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}(3x)^n$$

Esercizio 4. Sia $f(x) = e^{-y}\log y$. Studiare, sulla semiretta $\{x > 0\}$, la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) := f(nx).$$

Esercizio 5. Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}\ .$$

1. Si studi la convergenza puntuale.
2. Si dimostri che la serie converge uniformemente sugli intervalli limitati.
3. Detta $S(x)$ la somma della serie, si calcoli $\lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x}$.

Esercizio 6. Studiare la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x\right)^n.$$

Esercizio 7. Studiare, sulla semiretta $\{x \geq 0\}$, la convergenza della successione di funzioni

$$f_n(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Teorema del Dini

Risolvete i seguenti esercizi. Gli esercizi indicati con l'asterisco (*) sono più impegnativi.

Esercizio 1. In quali punti del piano si può applicare il teorema del Dini ai seguenti luoghi di zeri?

$$x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0 \qquad x + 2y + x \sin y = 0 \qquad x^4 + y^4 - 5x^2y^2 = 0$$

Esercizio 2. Si dica per quali α si può applicare il teorema del Dini ai seguenti insieme. Si studi il comportamento degli insiemi nei casi in cui il teorema del Dini non si possa applicare.

$$x^2 - y^2 + \alpha = 0 \qquad y^2 - x^2 + \log(x + y) = \alpha \qquad y - x + \alpha(x^4 + y^4) = 0$$

Esercizio 3. Dire se i seguenti insiemi

$$\{x^2 + 2\cos \pi x + \log(y + 1) = \log(3)\} \qquad \{4x^2y - 2y = 4\} \qquad \{3^{xy} = 9\}$$

possono essere rappresentati in un intorno del punto $A = (1, 2)$ come $y = f(x)$. Calcolare $f'(1)$ e la retta tangente alla curva nel punto A.

Esercizio 4. Dire se i seguenti insiemi

$$\{2^y + x^2y - 8 = 0\} \qquad \left\{\tfrac{x}{y} - \tfrac{y}{x} + \tfrac{5}{6} = 0\right\} \qquad \{x^2 + y^4 = 2\}$$

possono essere rappresentati in un intorno del punto $A = (2, 3)$ come $x = g(y)$. Calcolare $g'(3)$ e la retta tangente alla curva nel punto A.