Università di Pisa - CdL Ingegneria Ed-Architettura, Pisa - ??/01/2020

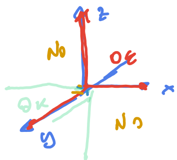
______________________ (Cognome) ______________________ (Nome) __________ (Matricola)

Per passare è necessario realizzare almeno 8 punti sui 16 disponibili nei primi 2 esercizi e almeno 18 in totale

Esercizio 1. Si consideri il campo $F = (y/x, \ln(xz), y/z)$

(a). [1p] Si determini il campo di esistenza di F

$x \neq 0 \quad z \neq 0 \quad xz > 0$



(b). [2p] Si calcoli rot$F$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{y}{x} & \ln(xz) & \frac{y}{z} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \\ 0 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c). [4p] Si calcoli il lavoro del campo lungo la curva $\gamma(t) = (t^2, t, t)$ da $\gamma(1)$ a $\gamma(2)$.

$\dot\gamma = (2t, 1, 1)$

$$\int_\gamma F\,ds = \int_1^2 \frac{t}{t^2}\cdot 2t + \ln(t^3) + 1\,dt = \int_1^2 3 + \ln(t^3) = 3 + \int_1^2 \ln(t^3)$$

$$= 3 + 3\int_1^2 \ln t = 3 + 3\left[t\ln t\right]_1^2 - 3\int_1^2 dt = 6\ln 2$$

Altrimenti F è conservativo di potenziale $U = y\ln(xz)$

e $\int_\gamma F\cdot ds = U(\gamma(2)) - U(\gamma(1)) = U(4,2,2) - U(1,1,1) = 2\ln(8) - 1\ln(1)$
$= 2\ln(2^3) = 6\ln 2$

Esercizio 2. Sia $f = x^3y^3 + y^2x^6$ definita su $\mathbb{R}^2$.

(a). [2p]Si scriva lo sviluppo di Taylor di f nell'origine al sesto ordine

x^3y^3 è di grado 6, y^2x^6 è di grado 8, quindi al 6° ordine

$$f(x,y) = x^3y^3 + o\left((x^2+y^2)^3\right)$$

(b). [2p]Si dica se nel punto (1,1) la funzione è concava o convessa

$$\nabla f = (3x^2y^3 + 6x^5y^2,\ 3x^3y^2 + 2x^6y)$$

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 36 & 21 \\ 21 & 8 \end{pmatrix}$$

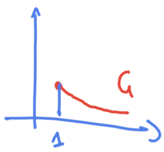
$$H_f = \begin{pmatrix} 6xy^3 + 30x^4y^2 & 9x^2y^2 + 12x^5y \\ 9x^2y^2 + 12x^5y & 6x^3y + 2x^6 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(1,1) = 288 - 441 < 0$$

f non è né concava né convessa

(c). [5p]Si trovino, se esistono, il massimo e minimo di f sull'insieme $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1,\ x \geq 1\}$.

G non è compatto, non si può usare Weierstrass



$f|_G = x^3 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + x^6\left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^4 + 1$ crescente in x

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} 1 + x^4 = +\infty \Rightarrow \sup_G f = +\infty$, $\nexists \max_G f$

$\min_G f = f(1,1) = 2$

Esercizio 3. Si consideri, al variare di $\alpha \geq 1/2$, l'equazione differenziale

$$y'' - y' = e^{\alpha x}$$

(a). [6p] Si scriva la soluzione generale al variare del parametro

Eq omogenea $\lambda^2 - \lambda = 0$ $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 0$ $y_0 = A + Be^x$ sol. omogenea

per $\alpha \neq 1$ non c'è risonanza : sol particolare del tipo $y_p = a e^{\alpha x}$

$y_p'' - y_p' = e^{\alpha x} \Rightarrow$ $a\alpha^2 e^{\alpha x} - a\alpha e^{\alpha x} = e^{\alpha x}$

$a\alpha^2 - a\alpha = 1$ $a = \frac{1}{\alpha^2 \alpha}$

Sol generale $y = A + Be^x + \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} e^{\alpha x}$

per $\alpha = 1$ risonante : sol particolare del tipo $y_p = a x e^x$

$y_p'' - y_p' = e^x \Rightarrow (2a + ax - a - ax) e^x = a e^x \to a = 1$

Sol generale $y = A + Be^x + xe^x$

(b). [3p] Fissato $\alpha = 3$, si determinino dei dati iniziali per cui l'equazione è limitata su tutto $\mathbb{R}$.

Per $\alpha = 3$ la sol generale è $y = A + Be^x + \frac{1}{6}e^x$.

Perché y sia limitata $A \in \mathbb{R}$ $B = -\frac{1}{6}$

Ora $y(0) = A + B + \frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ perché y sia limitata

$y'(0) = B + \frac{1}{6}$ basta $y'(0) = 0$

Esercizio 4. Si consideri la superficie $\Sigma = (r\cos t, r\sin t, 2/r), r \in [1,2], t \in [0, 2\pi)$

(a). [3p] Si verifichi se Σ è regolare

$\Sigma_r = \left(\cos t, \sin t, -\frac{2}{r^2}\right)$

$\Sigma_t = \left(-r\sin t, r\cos t, 0\right)$

$\Sigma_r \times \Sigma_t = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos t & \sin t & -\frac{2}{r^2} \\ -r\sin t & r\cos t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{r}\cos t \\ \frac{2}{r}\sin t \\ r \end{pmatrix}$

$|\Sigma_r \times \Sigma_t| = \sqrt{\frac{4}{r^2} + r^2} > 0 \Rightarrow \Sigma$ è regolare

(b). [4p] Si consideri n il versore normale alla superficie tale che $n \cdot k$ sia positivo (ovvero si orienti Σ verso l'alto) e si calcoli il flusso del vettore $F = (x, y, z)$ attraverso Σ così orientata.

$\Sigma_r \times \Sigma_t$ è rivolto verso l'alto. Il flusso è

$$\int_1^2 \int_0^{2\pi} F \cdot (\Sigma_r \times \Sigma_t)\, dt\, dr = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r\cos t \cdot \frac{2}{r}\cos t + r\sin t \cdot \frac{2}{r}\sin t + \frac{2}{r} \cdot r \; dt\, dr =$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t + 2\sin^2 t + 2 \; dt\, dr = \int_1^2 \int_0^{2\pi} 4\, dt\, dr = 8\pi$$