Esame di Calcolo Numerico — 30 gennaio 2023

Corso di Laurea in Ingegneria Chimica
Tempo a disposizione: 2 ore. È consentito consultare appunti e testi (cartacei).

Esercizio 1 (15 punti) Consideriamo il metodo di Newton applicato alla funzione $f(x) = x - \sin x$.

1. Scrivere una `function [x, v, w] = newton_seno(x0, n)` che esegue n passi del metodo a partire dal valore iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$ dato, e restituisce un vettore $x = [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ contenente le iterate prodotte dal metodo, e anche due vettori $v = [v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}]$ e $w = [w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}]$ contenenti i rapporti
$$v_k = \frac{x_{k+1}}{x_k}, \quad w_k = \frac{x_{k+1}}{{x_k}^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$
Riportare sul foglio il codice Matlab della funzione.

2. Eseguendo il metodo con $n = 10$ e $x_0 = 1.5$, quali sono i valori calcolati di x_n, v_{n-1}, w_{n-1}?

3. A quale zero α della funzione $f(x)$ si ha (sperimentalmente) convergenza? Qual è (sperimentalmente) l'ordine di convergenza del metodo? Il risultato corrisponde al comportamento del metodo determinato in base ai risultati teorici visti a lezione?

4. (*) Lo zero α trovato al punto precedente è uno zero semplice? Qual è il suo ordine?

Esercizio 2 (15 punti) Data una funzione continua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, vogliamo calcolare un'approssimazione dell'integrale $I = \int_0^1 f(x)\, dx$ in questo modo: eseguiamo il cambio di variabile $x = y^2$, per cui si ha
$$I = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(y^2)\, 2y\, dy,$$
e poi approssimiamo l'integrale che compare al membro di destra con il metodo del punto medio composito applicato alla funzione $g(y) = f(y^2)2y$, suddividendo $[0, 1]$ in N intervalli uguali. Quella che otteniamo in questo modo è una nuova formula di quadratura diversa da quelle viste a lezione.

1. Scrivere una `function I = quadratura(f, N)` che, dati in input la funzione f e il numero di intervalli N, calcola l'approssimazione dell'integrale I ottenuta con questa formula di quadratura. Riportare sul foglio il codice Matlab della funzione.

2. Eseguire il metodo sulla funzione $f(x) = 2x - 2$. Qual è il valore restituito dal metodo con $N = 10$, $N = 20$, e $N = 40$?

3. Qual è il valore esatto dell'integrale I? Qual è, sperimentalmente, l'ordine di convergenza di questa formula di quadratura al crescere di N?

4. Determinare (motivando la risposta) il grado di precisione (o di esattezza) di questa formula di quadratura.

Soluzioni

Esercizio 1 (15 punti) Notare che si ha $f'(x) = 1 - \cos x$.

1. Una possibile soluzione è la seguente.

```
function [x, v, w] = newton_seno(x0, n)

f = @(x) x - sin(x);
fprime = @(x) 1 - cos(x);

x = zeros(n+1, 1);
v = zeros(n, 1);
w = zeros(n, 1);

x(1) = x0;

for k = 1:n
    x(k+1) = x(k) - fprime(x(k)) \ f(x(k));
    v(k) = x(k+1) / x(k);
    w(k) = x(k+1) / x(k)^2;
end
```

2. I risultati ottenuti sono i seguenti:

```
>> [x, v, w] = newton_seno(1.5, 10)
x =
    1.5000
    0.9592
    [...]
    0.0364
    0.0243
v =
    0.6395
    0.6561
    [...]
    0.6666
    0.6667
w =
    0.4263
    0.6840
    [...]
   12.2091
   18.3151
```

   Quindi $x_n = 0.0243, v_{n-1} = 0.6667$, $w_{n-1} = 18.3151$.

3. Si ha convergenza a $\alpha = 0$, come è possibile verificare anche eseguendo il metodo con valori di n maggiori. Poiché gli elementi di v convergono a una costante minore di 1 (e quelli di w divergono), il metodo ha ordine di convergenza 1. Questo corrisponde al comportamento del metodo di Newton nel caso di zeri di molteplicità maggiore di 1. Difatti si ha $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$.

4. Calcolando le derivate successive si ha $f''(x) = \sin x$, $f'''(x) = \cos x$, quindi $f''(\alpha) = 0$ e $f'''(\alpha) \neq 0$. Questo indica che la radice *non* è semplice, e ha molteplicità $m = 3$.

Esercizio 2 (15 punti)

1. Una possibile soluzione è la seguente.

```
function I = quadratura(f, N)
h = 1 / N;
y = 0:h:1;

g = @(y) f(y^2) * 2*y;

S = 0;
for k = 1:N
    S = S + g((y(k) + y(k+1)) / 2);
end
I = h * S;
```

2. I risultati ottenuti sono i seguenti.

```
>> I10 = quadratura(@(x) 2*x-2, 10)
I10 =
   -1.0050
>> I20 = quadratura(@(x) 2*x-2, 20)
I20 =
   -1.0012
>> I40 = quadratura(@(x) 2*x-2, 40)
I40 =
   -1.0003
```

3. Il valore esatto dell'integrale è

$$\int_0^1 (2x-2)\,dx = (x^2-2x)\Big|_0^1 = -1.$$

I risultati numerici calcolati al passo precedente indicano che gli errori si riducono di un fattore 4 ad ogni passo:

```
>> (I40 + 1) / (I20 + 1), (I20 +1) / (I10 + 1)
ans =
    0.2500
ans =
    0.2500
```

Questo indica che il metodo ha, sperimentalmente, ordine di convergenza 2.

4. La formula trovata ha grado di esattezza 0. I risultati numerici trovati mostrano che il metodo *non* restituisce il valore esatto -1 già su una funzione $f(x)$ che è polinomiale di grado 1. Possiamo invece verificare che per una funzione $f(x) = C$ costante (polinomio di grado 0) il metodo restituisce sempre il valore esatto: difatti dopo il cambio di variabile si ottiene l'integrale di un polinomio di primo grado $\int_0^1 C\,2y\,dy$, e il suo valore viene calcolato esattamente dalla formula del punto medio composita perché quest'ultima ha grado di esattezza 1.