Dr. Christian Aßmann

Methodenlehre der Statistik III

Übungsblatt 5

1. *(Konvergenz von Funktionenfolgen)* Betrachten Sie die Folge von Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2n} \ , \\ -4n^2 x + 4n & \text{für } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \ , \\ 0 & \text{sonst} \ , \end{cases}$$

mit $x \in \mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob diese Folge punktweise gegen die Funktion $f(x) = 0$ konvergiert.

2. *(Konvergenz in Wahrscheinlichkeit)* Gehen Sie davon aus, dass die Zufallsvariablen Y_n für $n \in \mathbb{N}$ einer $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2+\sqrt{n}}{n+1}\right)$-Verteilung folgen. Zeigen Sie, dass die Folge $\{Y_n\}$ in Wahrscheinlichkeit gegen μ konvergiert.

3. *(Konvergenz in Wahrscheinlichkeit)* Die Folge von Zufallsvariablen $\{X_n\}$ besitze folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2n-1}{3n} & \text{für } x = 1 \ , \\ \frac{1}{3} & \text{für } x = 1 + \frac{1}{n+1} \ , \\ \frac{1}{3n} & \text{für } x = 2 \ , \\ 0 & \text{sonst} \ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Folge $\{X_n\}$ in Wahrscheinlichkeit gegen 1 konvergiert.

4. *(Konvergenz in Verteilung)* Die Zufallsvariablen X_n besitzen folgende Verteilungsfunktionen:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -n \ , \\ \frac{1}{2} & \text{für } -n \leq x < n \ , \\ 1 & \text{für } x \geq n \ . \end{cases}$$

Prüfen Sie, ob die Folge $\{X_n\}$ in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X konvergiert.

5. *(WLLN)* Sei $\{X_n\}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}(X_n) = \mu_n$. Ferner sei

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \ .$$

   (a) Gehen Sie davon aus, dass X_n eine bernoulliverteilte Zufallsvariable mit Parameter p_n ist, und zeigen Sie, dass die Beziehung $Y_n \xrightarrow{p} 0$ gilt.

(b) Gehen Sie nun davon aus, dass X_n beliebig verteilt ist, und dass eine Konstante $c \in (0, \infty)$ existiert derart, dass

$$\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq c \cdot n \ , \quad \forall i \in \mathbb{N} \ .$$

Überprüfen Sie, ob auch hier die Beziehung $Y_n \xrightarrow{p} 0$ gilt.

6. *(WLLN)* Sei $\{S, \Upsilon, P\}$ der Wahrscheinlichkeitsraum eines Zufallsexperiments und A ein beliebiges Ereignis in S. Ferner bezeichne N_A die Häufigkeit, mit der das Ereignis A bei n unbhängigen Wiederholungen des Experiments eintritt.

   Zeigen Sie, dass die relative Häufigkeit $\frac{N_A}{n}$ in Wahrscheinlichkeit gegen die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ konvergiert.

7. *(WLLN)* Gegeben sei eine Folge von Zufallsvariablen $\{X_n\}$ mit

$$X_i \sim \mathcal{N}\left(1, 1 + \frac{1}{i}\right) \quad \text{und} \quad \sigma_{ij} = \rho^{|j-i|} \ , \quad \rho \in (0,1) \ , \quad i \neq j \ .$$

   Zeigen Sie, dass $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{p} 1$.

8. *(ZGWS)* Ein idealer Würfel wird n mal geworfen. Die Zufallsvariable X_i gebe die Augenzahl des i-ten Wurfs an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei 200 Würfen eine mittlere Augenzahl von höchstens 3,6 ergibt.

9. *(ZGWS)* Begründen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes (Lindberg-Levy) die Möglichkeit, eine Binomialverteilung durch eine entsprechende Normalverteilung zu approximieren. Was versteht man in diesem Zusammenhang unter der Stetigkeitskorrektur?

10. *(Konvergenz in Verteilung, im quadratischen Mittel und in Wahrscheinlichkeit)* Es liegen stochastisch unabhängige Realisationen der Zufallsvariable X_i aus einer Exponentialverteilung mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} I_{(0,\infty)}(x)$$

   vor. Diese sollen verwendet werden, um mit $\bar{X}_n^2 = (\sum_{i=1}^{n} X_i/n)^2$ einen Schätzwert für θ^2 zu bestimmen.

   (a) Ist $\mathrm{E}(\bar{X}_n^2) = \theta^2$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\bar{X}_n^2) = \theta^2$ erfüllt?

   (b) Gilt $\operatorname{plim}(\bar{X}_n^2) = \theta^2$?

   (c) Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung von $\bar{X}_n^2$.

11. *(Konvergenz in Verteilung, im quadratischen Mittel und in Wahrscheinlichkeit)* Betrachten Sie die folgende Zufallsvariable

$$Y_i = \beta \cdot x_i + V_i \ .$$

   Dabei ist

$|x_i| \in [a,b],\ \forall i$ eine feste deterministische Größe,

β ein unbekannter Koeffizient,

$V_i \sim iid$ mit $\mathrm{E}(V_i) = 0,\ \mathrm{E}(V_i^2) = \sigma^2$ und $P(|V_i| \leq m) = 1,\ \forall i$.

(a, b, m und σ sind endliche positive Konstanten.)

Die folgenden beiden Funktionen

$$\mathbf{b} = (X'X)^{-1}X'\mathbf{Y} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{b}_r = (X'X + k)^{-1}X'\mathbf{Y} \ ,$$

mit $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$, $X = (x_1, \ldots, x_n)'$ und $k > 0$ können verwendet werden, um Schätzwerte für β zu berechnen.

(a) Ermitteln Sie Erwartungswert und Varianz der beiden Schätzfunktionen.

(b) Überprüfen Sie, ob $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\mathbf{b}) = \beta$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(\mathbf{b}_r) = \beta$.

(c) Überprüfen Sie, ob die beiden Schätzfunktionen im quadratischen Mittel gegen β konvergieren.

(d) Überprüfen Sie, ob die beiden Schätzfunktionen in Wahrscheinlichkeit gegen β konvergieren.

(e) Bestimmen Sie die asymptotische Verteilung der beiden Schätzfunktionen.