Lösungen zum Übungsblatt 6

1.

$$\begin{aligned} M_{X_i}(t) &= \exp\{\lambda_i(e^t-1)\} \\ M_{\sum X_i}(t) &= \prod_{i=i}^{n} \exp\left\{\lambda_i(e^t-1)\right\} = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(e^t-1)\right\} \\ \uparrow &\quad X_i \sim \text{iid} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \lambda' \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \text{Poi}(\lambda')$$

aufgrund der eineindeutigen Beziehung zwischen MGF und pdf.

2.

$$Z = X_1 + X_2 \Longrightarrow Z \sim \mathcal{N}(0,2)$$

Wie ist $\frac{Z^2}{2}$ verteilt?

$$\frac{Z}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Das Quadrat einer standardnormalverteilten ZV ist $\chi^2_{(1)}$ verteilt

$$\frac{Z^2}{2} \sim \chi^2_{(1)}\ .$$

Achtung:
Es gilt $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_{(n)}$, aber $(\sum X_i)^2 \neq \sum X_i^2$!!!

3. (a) Lösung über MGF

$$\begin{aligned} M_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) &= \mathrm{E}\left(\exp\{t_1 \overbrace{(x_1+x_2)}^{y_1} + t_2 \overbrace{(x_2-x_1)}^{y_2}\}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\exp\{x_1(t_1-t_2) + x_2(t_1+t_2)\}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(e^{x_1(t_1-t_2)}\right)\mathrm{E}\left(e^{x_2(t_1+t_2)}\right) \\ &= M_{X_1}(t_1-t_2)M_{X_2}(t_1+t_2) \end{aligned}$$

Wir wissen, dass X_1 und X_2 SNV sind

$$\begin{aligned} \Longrightarrow M_{X_1}(t_1 - t_2) &= \exp\left\{\frac{(t_1 - t_2)^2}{2}\right\} \\ M_{X_2}(t_1 + t_2) &= \exp\left\{\frac{(t_1 + t_2)^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Y_1,Y_2}(t_1, t_2) &= \exp\left\{\frac{(t_1 - t_2)^2}{2}\right\} \exp\left\{\frac{(t_1 + t_2)^2}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{t_1^2 - 2t_1t_2 + t_2^2 + t_1^2 + 2t_1t_2 + t_2^2}{2}\right\} \\ &= \exp\{t_1^2 + t_2^2\} \\ &= \underbrace{\exp\left\{\frac{2t_1^2}{2}\right\}}_{Y_1 \sim \mathcal{N}(0,2)} \underbrace{\exp\left\{\frac{2t_2^2}{2}\right\}}_{Y_2 \sim \mathcal{N}(0,2)} \end{aligned}$$

$$Y_1 \perp Y_2$$

(b) Lösung über Transformationsmethode

$$f(\underline{x}) = I_{(0,1)}(x_1)\, I_{(0,1)}(x_2)$$

$$h(z, s) = f(g^{-1}(y))\, |J|$$

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ g^{-1}(y_1, y_2) &= \begin{pmatrix} \frac{y_1 - y_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1^{-1}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1^{-1}(y)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g_2^{-1}(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2^{-1}(y)}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ |\det(J)| &= \left| \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) \right| = \left|\frac{1}{2}\right| \\ h(z, s) &= \frac{1}{2}\, I_{(0,1)}\left(\frac{y_1 - y_2}{2}\right)\, I_{(0,1)}\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \end{aligned}$$

4. Mood, Graybill und Boes, S. 206 f., Beispiel 23

5. Es gelten folgende funktionalen Zusammenhänge

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 + x_2)/2 \\ (x_1 + x_2 + x_3)/3 \end{pmatrix}$$

mit den zugehörigen Umkehrfunktionen

$$g^{-1}(y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_2 - y_1 \\ 3y_3 - 2y_2 \end{pmatrix} \ .$$

Damit gilt:

$$|\det(J)| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \ .$$

Die gemeinsame Verteilung der $Y's$ ist damit gegeben durch

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) &= |\det(J)| f_{X_1,X_2,X_3}(g_1^{-1}, g_2^{-1}, g_3^{-1}) \\ &= 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[y_1^2 + (2y_2 - y_1)^2 + (3y_3 - 2y_2)^2 \right] \right\} \\ &= 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left[2y_1^2 - 4y_1 y_2 + 8y_2^2 - 12 y_2 y_3 + 9y_3^2 \right] \right\} \ . \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Randdichten erfolgt mittels Integration. Dabei wird der Integralausdruck so umgeformt, dass sich bedingte Normalverteilungen ergeben, die sich zu 1 integrieren lassen, z.B.

$$\begin{aligned} f_{Y_3}(y_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3)\, dy_1\, dy_2 \\ &= 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(6y_2^2 - 12 y_2 y_3 + 9y_3^2 \right) \right\} \\ &\quad \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(2y_1^2 - 4y_1 y_2 + 2y_2^2 \right) \right\} dy_1 \right) dy_2 \\ &= \frac{6}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(6y_2^2 - 12 y_2 y_3 + 6y_3^2 \right) \right\} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(3y_3^2 \right) \right\} dy_2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{3}{2} y_3^2 \right\} \ . \end{aligned}$$

Damit ist Y_3 normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\frac{1}{3}$.

6.

$$X \sim \text{Gam}(n, \beta) \quad \text{mit} \quad 0 < x < \infty$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{X} = g(x) \\ g^{-1}(y) &= \frac{1}{Y} = X \\ G &= \frac{\partial g^{-1}(y)}{\partial y} = -\frac{1}{Y^2} \end{aligned}$$

Transformationssatz

$$h(y) = f(g^{-1}(y))|G|$$

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{1}{\Gamma(n)\beta^n} \left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} e^{-\frac{1}{y\beta}} \left|\frac{1}{y^2}\right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)\beta^n} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} e^{-\frac{1}{y\beta}} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ pdf einer invertierten Gammaverteilung

$$\left[0 < y < \infty \quad \text{weil} \quad 0 < \frac{1}{x} < \infty\right]$$

$$h(y) = \frac{1}{\Gamma(n)\beta^n} \left(\frac{1}{y}\right)^{n+1} e^{-\frac{1}{y\beta}} I_{(0,\infty)}(y)$$