Probeklaur

Victor Minig

January 20, 2025

A)

Gegeben:

$$f(x,y) = ke^{-x-2y} I_{(0,\infty)(x) I_{0,\infty}}(y)$$

a1

Gesucht:

Der Wert für k wo $f(x,y)$ tatsächlich eine PDF ist.

Lösung:

Wir suchen also k, sodass $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} ke^{-x-2y}dxdy \\
&= k\int_0^{\infty} \left[-e^{-x-2y}\right]_0^{\infty} dy \\
&= k\int_0^{\infty} \left[0-(-e^{-2y})\right] dy \\
&= k\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^{\infty} \\
&= k\left[0-(-\frac{1}{2}e^{0})\right] \\
&= k\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k\frac{1}{2} &\overset{!}{=} 1 \\
\Rightarrow k &= 2
\end{aligned}$$

a2

Gesucht:

Die gemeinsame Ferteilungsfunktion $F(X,Y)$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
F(X,Y) = \int_0^{b_y}\int_0^{b_x} f(x,y)dxdy &= \int_0^{b_y}\int_0^{b_x} 2e^{-x-2y}dxdy \\
&= \int_0^{b_y} \left[-e^{-x-2y}\right]_0^{b_x} dy \\
&= \int_0^{b_y} \left[-e^{-x-2y}\right]_0^{b_x} dy \\
&= \int_0^{b_y} -e^{-b_x-2y} + e^{-2y}dy \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{-b_x-2y} - \frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^{b_y} \\
&= \frac{1}{2}e^{-b_x-2b_y} - \frac{1}{2}e^{2b_y} - \frac{1}{2}e^{-bx} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(e^{-b_x-2b_y} - e^{-2by} - e^{b_x} + 1)
\end{aligned}
$$

c)

Gesucht:

Marginalen Dichten von X und Y

Lösung:

$$
\begin{aligned}
f_y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-x-2y}dx \\
&= \left[-2e^{-x-2y}\right]_0^{\infty} dx \\
&= 0 - (-2e^{-2y})I_{0,\infty} \\
&= 2e^{-2y}I_{0,\infty} \\
f_x(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \\
&= e^{-x}I_{0\infty}(x)
\end{aligned}
$$

d

Gesucht:
$E(XY)$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= 2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xye^{-x-2y}dxdy \\
&= 2\int_0^{\infty} [-xe^{-x-2y}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x-2y}dxdy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^\infty [0+0] - \left[e^{-x-2y}\right]_0^\infty dy \\
&= 2\int_0^\infty - \left[0 - e^{-0-2y}\right] dy \\
&= 2\left[-\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^\infty \\
&= 2(0 + \frac{1}{2}e^{2\cdot 0}) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

e)

Gesucht:

Die bedingte Dichte $f(x|y)$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
f(x|y) &= \frac{f(x,y)}{f_y(y)} \\
&= \frac{2e^{-x-2y}}{2e^{-2y}} \\
&= \frac{e^{-x}e^{-2y}}{e^{-2y}} \\
&= e^{-x}
\end{aligned}
$$

f)

Gesucht:

Die Wahrscheinlichkeit für $P(x < \frac{1}{2}y, 0 < y < 2)$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
P(x < \frac{1}{2}y, 0 < y < 2) &= \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}y} f(x,y)dxdy \\
&= \int_0^2 \left[-2e^{-x-2y}\right]_0^{\frac{1}{2}y} dy \\
&= \int_0^2 \left[-2e^{-\frac{1}{2}y-2y} + 2e^{-2y}\right] dy \\
&= \left[e^{-\frac{1}{2}y-2y} - e^{-2y}\right]_0^2 \\
&= e^{-1-4} - e^{-4} - 1 + 1 \\
&= e^{-5} - e^{-4}
\end{aligned}
$$

g)

Frage:

Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Lösung:

Ja, da $f(x|y) = f_x(x)$

2

Gegeben:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I[a,b](x) \qquad \text{mit } \{(a,b) : -\infty < a < b < \infty\}.$$

a)

Zu Zeigen:

Die nichtzentralen Momente sind gegeben durch:

$$\mu'_r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)}(r+1) \qquad r = 1, 2 \ldots$$

Lösung:

Induktionsanfang:

$$\begin{aligned}
\text{Für } r = 1 \qquad \mu'_r &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\
&= \int_a^b \frac{x}{a-b} dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2(a-b)} \right]_a^b \\
&= \frac{b^2}{2(a-b)} - \frac{a^2}{2(a-b)} \\
&= \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)}
\end{aligned}$$

Intduktionsvoraussetzung:

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} \qquad \text{für ein } r \in \mathbb{N}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\mu'_{r+1} &= \int_a^b x^{r+1} f(x) dx \\
&= \left[\frac{x^{(r+1)+1}}{(r+1)+1(b-a)} \right]_a^b \\
&= \frac{b^{(r+1)+1}}{((r+1)+1)(b-a)} - \frac{a^{(r+1)+1}}{(r+1)+1(b-a)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{b^{(r+1)+1} - a^{(r+1)+1}}{((r+1)+1)(b-a)}$$

$\Longrightarrow$ Es gilt also für alle $\forall n \in \mathbb{N}$

b)

Frage:

Ist die gegebene Dichte ein Mitglied der Eponentialfamilie? **Lösung:**

Nein, da kein Θ existiert, sodass:

$$f(x;\Theta) = \frac{1}{\Theta} e^{-\frac{x}{\Theta}} I_{(0,\infty)} = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

3

Gegeben:

X eine bivariat Normalverteilte ZV $\mathcal{N}(\mu, \mathbf{\Sigma})$ mit

$$\mu = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Gesucht:

Regressionsfunktion von X_1 auf X_2 und $E(X_1|x_2 = 1)$

Lösung:

Die Regressionsfunktion lässt sich in unserem Fall darstellen durch $E(X_1|X_2)$

$$\begin{aligned} E(X_1|X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{f(\mathbf{x})}{f_{x_2}(x_2)} dx_1 \\ &= \end{aligned}$$