Lösungen zum Übungsblatt 7

Ordnungsstatistiken

Es existiert ein datenerzeugender Prozess mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$. Man betrachtet eine Stichprobe vom Umfang n. Die Zufallsvariable X wird also n-mal gezogen.

Im Geiste wird die Stichprobe der Größe nach geordnet. Welcher Verteilung folgt nun die niedrigste Realisation oder die höchste? Welchen Erwartungswert und welche Varianz haben sie? Die Antworten liefern die Verteilungen der Ordnungstatistiken:

- Verteilungsfunktion der k-ten Ordnungsstatistik

$$F_{X_{[k]}}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F(x)^j [1 - F(x)]^{n-j}$$

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der k-ten Ordnungstatistik

$$f_{X_{[k]}}(x) \;=\; \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} [1 - F(x)]^{n-k} f(x)$$

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der 1. und n-ten Ordnungstatistik

$$\begin{aligned} f_{X_{[1]}}(x) &= n f_X(x) [1 - F_X(x)]^{n-1} \\ f_{X_{[n]}}(x) &= n f_X(x) [F_X(x)]^{n-1} \end{aligned}$$

- Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zweier Ordnungsstatistiken

$$f_{X_{[k]}X_{[l]}}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(k-1)!(l-1-k)!(n-l)!} \left[F(x_k)\right]^{k-1} f(x_k) \cdot \\ \qquad \left[F(x_l) - F(x_k)\right]^{l-1-k} f(x_l) \left[1 - F(x_l)\right]^{n-l} & \text{falls } x_k < x_l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion aller Ordnungsstatistiken

$$\begin{aligned} f_{X_{[1]},X_{[2]},\ldots,X_{[n]}}(x) &= n! f(X_{[1]}) f(X_{[2]}) \ldots f(X_{[n]}) \cdot \\ & \quad I_{(-\infty,\infty)}(X_{[1]})\, I_{(X_{[1]},\infty)}(X_{[2]}) \ldots I_{(x_{[n-1]},\infty)}(X_{[n]}) \end{aligned}$$

1. (a)

$$
\begin{aligned}
f_{X_{[1]}}(x) &= 3f_X(x)[1-F_X(x)]^{3-1} \\
f_{X_{[3]}}(x) &= 3f_X(x)[F_X(x)]^{3-1}
\end{aligned}
$$

wobei:

$$
f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ x & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}
$$

einsetzen:

$$
\begin{aligned}
f_{X_{[1]}}(x) &= n \cdot 1 \cdot (1-x)^{n-1} = 3(1-x)^2 \\
f_{X_{[3]}}(x) &= 3 \cdot 1 \cdot x^2 = 3x^2
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{[1]}) &= \int_0^1 x \cdot f_{X_{[1]}}(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot 3(1-x)^2\,dx = \frac{1}{4} \\
\mathrm{E}(X_{[3]}) &= \frac{3}{4} \qquad \text{(analog)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left({X_{[1]}}^2\right) &= 3\int_0^1 x^2 \cdot (1-x)^2\,dx = \frac{1}{10} \\
\mathrm{E}\left({X_{[3]}}^2\right) &= \frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_{[1]}) &= \frac{1}{10} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{80} \\
\mathrm{Var}(X_{[3]}) &= \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad f_{X_{[1]}X_{[3]}} &= \frac{3!}{0!1!0!} F(x_{[1]})^0 f(X_{[1]}) \left[F(x_{[3]}) - F(x_{[1]})\right]^1 f(X_{[3]}) \left[1 - F(x_{[3]})\right]^0 \\
&= 6 f(x_{[1]}) \left[F(x_{[3]}) - F(x_{[1]})\right] f(x_{[3]}) \\
&= 6(x_{[3]} - x_{[1]}) \qquad \text{für } 0 \leq x_{[1]} < x_{[3]} \leq 1
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{Cov}(X_{[1]}, X_{[3]}) = \mathrm{E}(X_{[1]}X_{[3]}) - \mathrm{E}(X_{[1]})\mathrm{E}(X_{[3]})$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{[1]}X_{[3]}) &= \int_0^1 \int_{X_{[1]}}^1 x_{[1]}x_{[3]} f_{X_{[1]}X_{[3]}}(x_{[1]}, x_{[3]})\, dx_{[3]}\, dx_{[1]} \\
&= 6\int_0^1 \int_{X_{[1]}}^1 x_{[1]}x_{[3]}(x_{[3]} - x_{[1]}) dx_{[3]} dx_{[1]} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Cov}(X_{[1]}, X_{[3]}) = \frac{1}{5} - \frac{3}{16} = \frac{1}{80}$$

$\Longrightarrow$ positive Korrelation: je größer Min desto größer Max

(c) <u>Median</u> in diesem Fall gleich $X_{[2]}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(M) &= \mathrm{E}(X_{[2]}) = \int_0^1 x f_{X_{[2]}}(x)\, dx \\
\text{hier} \quad f_{X_{[2]}}(x) &= \frac{3!}{1!1!} 1 \cdot x(1-x) = 6x(1-x) \\
\int_0^1 x6(x - x^2)dx &= 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Erwartungswert einer gleichverteilten ZV (0,1) ist $\frac{1}{2}$
$\longrightarrow$ $\mathrm{E}(M)$ ist erwartungstreu !

<u>Midrange:</u>

$$\mathrm{E}(MR) = \mathrm{E}\left(\frac{X_{[1]} + X_{[3]}}{2}\right) = \frac{\mathrm{E}(X_{[1]}) + \mathrm{E}(X_{[3]})}{2} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow$ $\mathrm{E}(MR)$ ist ebenfalls erwartungstreu !

Frage nach der Präzision der Schätzer $\longrightarrow$ Varianz

$$\begin{aligned}
\text{Var}(M) &= \text{Var}(X_{[2]}) = 6\int_0^1 (x^3 - x^4)dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20} \\
\text{Var}(MR) &= \text{Var}\left(\frac{X_{[1]} + X_{[3]}}{2}\right) = \text{Var}\left(\frac{1}{2}\left(X_{[1]} + X_{[3]}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\text{Var}(X_{[1]}) + \text{Var}(X_{[3]}) + 2 \cdot \text{Cov}(X_{[1]}X_{[3]})\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{80} + \frac{3}{80} + 2 \cdot \frac{1}{80}\right) = \frac{1}{40}
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ MR ist präzisere Schätzung!

Intuition: MR nutzt mehr Informationen als M $\longrightarrow$ (2 statt 1 Beobachtung)

2. (a) Schritt 1: Beobachtungen nach Größe sortieren
Schritt 2: Zuordnung der kumulierten relativen Häufigkeiten

Hinweis: $\tilde{F}_n(x) = \frac{1}{20}\cdot$ (Anzahl der $X_{[i]}$, die kleiner als x sind)

$\tilde{F}_n(x)$	
0	$(-\infty; 21{,}59)$
$\frac{1}{20}$	$[21{,}59; 22{,}24)$
$\frac{2}{20}$	$[22{,}24; \ldots)$
$\vdots$	$\vdots$
1	$[27{,}82; \infty)$

(b) Gesucht: $P(X > 26) = 1 - P(X \leq 26)$

$\longrightarrow$ Hier *nicht*-parametrisches Verfahren per empirischer Verteilungsfunktion.

(Wäre Verteilung bekannt, dann deren Parameter aus den Daten schätzen und für Wahrscheinlichkeitsaussagen nutzen.)

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad 0{,}8 = \tilde{F}_n(25{,}82) \leq \tilde{F}_n(26) \leq \tilde{F}_n(26{,}10) = 0{,}85 \\
&\Longrightarrow \quad 1 - 0{,}85 < 1 - \tilde{F}_n(26) < 1 - 0{,}8 \\
&\Longrightarrow \quad 0{,}15 < P(X > 26) < 0{,}2
\end{aligned}$$

(c) Gesucht: $P(24 < X < 26) = P(X < 26) - P(X < 24)$

$$\Longrightarrow \quad 0{,}8 < P(X < 26) < 0{,}85$$

$$\Longrightarrow \quad 0{,}45 = \tilde{F}_n(23{,}98) \leq \tilde{F}_n(24) \leq \tilde{F}_n(24{,}57) = 0{,}5$$
$$\Longrightarrow \quad 0{,}45 < P(X < 24) < 0{,}5$$

$$\Longrightarrow \quad 0{,}8 - 0{,}5 < P(24 < X < 26) < 0{,}85 - 0{,}45$$
$$\Longrightarrow \quad 0{,}3 < P(24 < X < 26) < 0{,}4$$

3. (a) Gesucht: $P(X_{[8]} \leq 0{,}05) = F_{X_{[8]}}(0{,}05)$

$$F_{X_{[k]}}(x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} F_X(x)^j \, [1 - F_X(x)]^{n-j}$$

$\longrightarrow$ k-te Ordnungsstatistik; hier $k = n$
$\longrightarrow$ laut Problemstellung interessiert nur der höchste Wert des Samples; also die äußerste Ordnungsstatistik

$$F_{X_{[8]}}(x) = \frac{8!}{(8-8)!8!} \, [F_X(x)]^8$$

Es gilt:

$$\text{pdf} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 10 & \text{für } 0 < x < 0{,}1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 10x & \text{für } \ 0 < x < 0{,}1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow F_{X_{[8]}}(0{,}05) = (10 \cdot 0{,}05)^8 = (0{,}5)^8$$

(b) Gesucht: $P(X_{[1]} > 0{,}025 \ \& \ X_{[8]} < 0{,}075)$

$$P(0{,}025 < X_1 < 0{,}075; 0{,}025 < X_2 < 0{,}075; \ldots; 0{,}025 < X_8 < 0{,}075)$$

$$\longrightarrow \text{ da } x_i \amalg x_j \qquad P(\ldots) = \prod_{i=1}^{8} P(0{,}025 < X_i < 0{,}075)$$
$$= \prod_{i=1}^{8} [F_X(0{,}075) - F_X(0{,}025)] = (0{,}5)^8$$

4. Bei einer Gleichverteilung auf dem Intervall $(\mu - \sqrt{3}\sigma, \mu + \sqrt{3}\sigma)$ gilt mit

$$a = \mu - \sqrt{3}\sigma \quad ; \quad b = \mu + \sqrt{3}\sigma$$
$$\mathrm{E}(X) = \frac{b+a}{2} = \mu \quad ; \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\left(2\sqrt{3}\sigma\right)^2}{12} = \sigma^2$$

(a)/(b) Zunächst wird für Teilaufgabe (a) gezeigt, wie der Erwartungswert und die Varianz der Spannweite (range) durch Integration hergeleitet werden können. Eine analoge Vorgehensweise ist auch für den midrange möglich. Es soll aber alternativ die Lösung durch eine geeignete bivariate Transformation hergeleitet werden.

(a) Lösung durch Integrationsverfahren; einfache oder zweifache partielle Integration

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{[1]}) &= \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma} x f_{X_{[1]}}(x)\,dx \\
&= \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma} x \frac{n}{2\sqrt{3}\sigma}\left(1 - \frac{x-(\mu-\sqrt{3}\sigma)}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^{n-1} dx \\
&= \mu - \frac{n-1}{n+1}\sqrt{3}\sigma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{[1]}^2) &= \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma} x^2 f_{X_{[1]}}(x)\,dx \\
&= \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma} x^2 \frac{n}{2\sqrt{3}\sigma}\left(1 - \frac{x-(\mu-\sqrt{3}\sigma)}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^{n-1} dx \\
&= (\mu-\sqrt{3}\sigma)^2 - \frac{12n}{(n+1)(n+2)}\sigma^2 + \frac{4}{n+1}\sqrt{3}\sigma\mu
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Var}(X_{[1]}) = \mathrm{E}(X_{[1]}^2) - \left[\mathrm{E}(X_{[1]})\right]^2 = 3\sigma^2 \frac{4n}{(n+1)^2(n+2)}$$

Analoges Vorgehen für $X_{[n]}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{[n]}) &= \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma} x f_{X_{[n]}}(x)\,dx \\
&= \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma} x \frac{n}{2\sqrt{3}\sigma}\left(\frac{x-(\mu-\sqrt{3}\sigma)}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^{n-1} dx \\
&= \mu + \frac{n-1}{n+1}\sqrt{3}\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{[n]}^2) &= \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma} x^2 f_{X_{[1]}}(x)\,dx \\
&= \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma} x^2 \frac{n}{2\sqrt{3}\sigma}\left(\frac{x-(\mu-\sqrt{3}\sigma)}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^{n-1} dx \\
&= (\mu+\sqrt{3}\sigma)^2 - \frac{12n}{(n+1)(n+2)}\sigma^2 - \frac{4}{n+1}\sqrt{3}\sigma\mu
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Var}(X_{[n]}) = \mathrm{E}(X_{[n]}^2) - \left[\mathrm{E}(X_{[n]})\right]^2 = 3\sigma^2\frac{4n}{(n+1)^2(n+2)}
$$

Damit ergibt sich für die Spannweite (range) $X_{[n]} - X_{[1]}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{[n]} - X_{[1]}) &= 2\frac{n-1}{n+1}\sqrt{3}\sigma \\
\mathrm{Var}(X_{[n]} - X_{[1]}) &= \mathrm{Var}(X_{[1]}) + \mathrm{Var}(X_{[n]}) - 2\cdot\mathrm{Cov}(X_{[1]}, X_{[n]})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_{[1]}, X_{[n]}) &= \mathrm{E}(X_{[1]}X_{[n]}) - \mathrm{E}(X_{[1]})\cdot\mathrm{E}(X_{[n]}) \\
\mathrm{E}(X_{[1]}X_{[n]}) &= \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma}\int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{x_n} x_1 x_n \cdot \frac{n!}{(n-2)!}\cdot[F(x_n)-F(x_1)]^{n-2} \\
&\quad \cdot f(x_1)f(x_n)\,dx_1\,dx_n \\
&= \int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{\mu+\sqrt{3}\sigma}\int_{\mu-\sqrt{3}\sigma}^{x_n} x_1 x_n \cdot \frac{n!}{(n-2)!}\cdot\left(\frac{x_n-x_1}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^{n-2} \\
&\quad \cdot\frac{1}{12\sigma^2}\,dx_1\,dx_n \\
&= \mu^2 - 3\sigma^2 + \frac{12\sigma^2}{n+2}
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$\mathrm{Cov}(X_{[1]}, X_{[n]}) \;=\; 12\sigma^2 \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} \;,$$

womit folgt

$$\mathrm{Var}(X_{[n]} - X_{[1]}) \;=\; 12\sigma^2 \frac{2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)} \;.$$

(b) Lösung durch bivariate Transformation:

Die gemeinsame Verteilung der 1-ten und n-ten Ordnungsstatistik ist gegeben durch

$$f_{X_{[1]},X_{[n]}}(x_1, x_n) = n(n-1)\left[F_X(x_{[n]}) - F_X(x_{[1]})\right]^{n-2} f_X(x_{[1]}) f_X(x_{[n]}) \;.$$

Durchführen der folgenden Transformation :

$$\begin{aligned} R &= X_{[n]} - X_{[1]}, \\ T &= \frac{1}{2}(X_{[1]} + X_{[n]}) \;. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} X_{[1]} &= T - \frac{R}{2} \\ X_{[n]} &= T + \frac{R}{2} \end{aligned}$$

und somit ist

$$J = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_{[1]}}{\partial r} & \frac{\partial x_{[1]}}{\partial t} \\ \frac{\partial x_{[n]}}{\partial r} & \frac{\partial x_{[n]}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -1 \;.$$

Somit folgt die gemeinsame Verteilung von range und sample midrange als

$$f_{R,T}(r,t) = n(n-1)\left[F\left(t + \frac{r}{2}\right) - F\left(t - \frac{r}{2}\right)\right]^{n-2} f\left(t - \frac{r}{2}\right) f\left(t + \frac{r}{2}\right) \;.$$

Durch Integration ergeben sich die beiden Randdichten

$$
\begin{aligned}
f_R(r) &= \frac{n(n-1)}{(2\sqrt{3}\sigma)^n} r^{n-2}(2\sqrt{3}-r) I_{(0,2\sqrt{3}\sigma)}(r) \\
f_T(t) &= \frac{n}{2\sqrt{3}\sigma}\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{3}\sigma}+1\right)^{n-1} I_{(-1,0)}\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{3}\sigma}\right) \\
&\quad + \frac{n}{2\sqrt{3}\sigma}\left(1-\frac{t-\mu}{\sqrt{3}\sigma}\right)^{n-1} I_{(0,1)}\left(\frac{t-\mu}{\sqrt{3}\sigma}\right)
\end{aligned}
$$

Durch Integration können nun auch die Momente der beiden Variablen betimmt werden. Hier midrange:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(T) &= \mu \\
\mathrm{Var}(T) &= \frac{6\sigma^2}{(n+2)(n+1)}
\end{aligned}
$$

(c) Die Dichte der $k+1$-ten Ordnungsstatistik, wenn $n = 2k+1$ (Median) ist

$$
\begin{aligned}
f_{X_{[k+1]}}(x_{k+1}) &= \frac{(2k+1)!}{k!k!}(2\sqrt{3}\sigma)^{-2k+1}\left(\frac{x_{k+1}-(\mu-\sqrt{3}\sigma)}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^k \\
&\quad \left(1-\frac{x_{k+1}-(\mu-\sqrt{3}\sigma)}{2\sqrt{3}\sigma}\right)^k
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich durch Integration

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_{[k+1]}) &= \mu \\
\mathrm{Var}(X_{[k+1]}) &= \sigma^2\frac{3}{2(k+1)} = \frac{3}{n}\sigma^2
\end{aligned}
$$

(d) Es ergibt sich folgende Reihenfolge ($n > 2$):

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{6\sigma^2}{(n+2)(n+1)} & \leq & \frac{\sigma^2}{n} & \leq & \frac{3\sigma^2}{n} \\
\mathrm{Var(midrange)} & \leq & \mathrm{Var(mean)} & \leq & \mathrm{Var(median)}
\end{array}
$$

Der midrange weist die kleinste Varianz auf und strebt damit am schnellsten für $n \longrightarrow \infty$ gegen 0.

5. (a)

$$\begin{aligned} f_{X_{[1]},\ldots,X_{[n]}}(x_{[1]},\ldots,x_{[n]}) &= n! \prod_{i=1}^{n} f_X(x_{[i]}) \\ \text{Also} \longrightarrow &= n!\, I_{(0,1)}(x_{[1]})\, I_{(x_{[1]},1)}(x_{[2]}) \,\ldots\, I_{(x_{[n-1]},1)}(x_{[n]}) \\ &= n! \qquad \text{für } 0 < x_{[1]} < \ldots < x_{[n]} \leq 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f_{X_{[k]}}(x) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \left[F_X(x_{[k]})\right]^{k-1} \left[1 - F_X(x_{[k]})\right]^{n-k} f_X(x_{[k]}) \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x_{[k]}^{k-1} \left[1 - x_{[k]}\right]^{n-k} I_{(0,1)}(x_{[k]}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hinweis:} \quad (z-1)! &= \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \\ \text{bzw. } z! &= \Gamma(z+1) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \qquad f_{X_{[k]}}(x) = \underbrace{\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)}}_{\frac{1}{B(k,n-k+1)}} {x_{[k]}}^{k-1} (1 - x_{[k]})^{(n+1-k)-1} I_{(0,1)}(x_{[k]})$$

$$\longrightarrow \qquad X_{[k]} \sim \text{Beta}(k, n+1-k)$$

(c)

$$f_{X_{[n]}} = n \cdot f_X(X_{[n]}) F_X(X_{[n]})^{n-1} = n \cdot {X_{[n]}}^{n-1} I_{(0,1)}(X_{[n]})$$

6. (a) Sei $Y \sim \text{Beta}(1,3)$ dann ist $\text{E}(Y) = 0{,}25$. Entsprechend $\text{E}(X_{[1]}) = 52{,}5$.

   (b) Der Erwartungswert des Medians ist bei symmetrischen Verteilungen gleich dem Erwartungswert der Verteilung: $\text{E}(X_{[2]}) = 65$.

   (c) $P(\text{Ausfall}) = P(X_{[1]} < 50) = F_{X_{[1]}}(50) = F_{Y_{[1]}}(0{,}2) =$

$$\int_0^{0,2} 3 \cdot (1 - y_{[1]})^{3-1}\, dy = 0{,}488$$

   Alternative ohne Ordnungsstatistiken: Wahrscheinlichkeit, dass einer nicht krank wird, ist $1 - F_{X_{[1]}}(50) = 0{,}8$. Wahrscheinlichkeit, dass alle drei nicht krank werden, ist $0{,}8^3 = 0{,}512$. Kein Ausflug ist das Komplement mit Wahrscheinlichkeit $1 - 0{,}512 = 0{,}488$.