Lösungen zum Übungsblatt 4

1.

$$f(x;M,K,n) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} \quad I_{\{0,1,2,\ldots,n\}}(x)$$
$$\text{mit} \quad \sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} = 1$$

Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} = \sum_{x=1}^{n} x \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x \frac{\frac{K}{x}\binom{K-1}{x-1}\binom{M-K}{n-x}}{\frac{M}{n}\binom{M-1}{n-1}} = n\frac{K}{M} \sum_{x=1}^{n} \frac{\binom{K-1}{x-1}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M-1}{n-1}}
\end{aligned}$$

Hinweis:

$$\frac{K}{x}\binom{K-1}{x-1} = \frac{K(K-1)!}{x[K-1-(x-1)]!(x-1)!} = \frac{K!}{(K-x)!x!} = \binom{K}{x}$$

Setze: $x-1=y \quad \Leftrightarrow \quad x=y+1$ (Substitution)

$$\mathrm{E}(X) = n\frac{K}{M} \underbrace{\sum_{y=0}^{n-1} \frac{\binom{K-1}{y}\binom{M-1-K+1}{n-1-y}}{\binom{M-1}{n-1}}}_{=1} = \frac{nK}{M}$$

weil Hypergeometrische Verteilung:
$f(y,M-1,K-1,n-1)$ [siehe oben]

<u>Varianz:</u>

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \mathrm{E}[X(X-1)] + \mathrm{E}(X) - [\mathrm{E}(X)]^2 \\
\mathrm{E}[X(X-1)] &= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} \\
& \quad (\text{für } x = 0 \text{ und } x = 1 \text{ ist der Summand} = 0) \\
&= \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} \\
&= \sum_{x=2}^{n} x(x-1) \frac{\frac{K(K-1)}{x(x-1)}\binom{K-2}{x-2}\binom{M-K}{n-x}}{\frac{M(M-1)}{n(n-1)}\binom{M-2}{n-2}} \\
&= n(n-1)\frac{K(K-1)}{M(M-1)} \underbrace{\sum_{x=2}^{n} \frac{\binom{K-2}{x-2}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M-2}{n-2}}}_{=1}
\end{aligned}
$$

Setze $x = y + 2$:

$$
\frac{\binom{K-2}{y}\binom{M-2-K+2}{n-2-y}}{\binom{M-2}{n-2}} \longrightarrow f(y; M-2, K-2, n-2)
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= n(n-1)\frac{K(K-1)}{M(M-1)} + n\frac{K}{M} - n^2\frac{K^2}{M^2} \\
&= n\frac{K}{M}\left(n - 1\frac{K-1}{M-1} + 1 - n\frac{K}{M}\right) \\
&= \frac{nK}{M}\left(\frac{(M-K)(M-n)}{M(M-1)}\right)
\end{aligned}
$$

2. Die Aufgabe wird dadurch gelöst, dass durch entsprechende Ergänzungen des Integrals wieder eine Betafunktion hergestellt wird. Zudem wird die Eigenschaft der Gammafunktion $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ ausgenutzt.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^1 x \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\mathcal{B}(\alpha+1,\beta)}{\mathcal{B}(\alpha,\beta)} \int_0^1 \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha+1,\beta)} x^{(\alpha+1)-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

Für die Varianz ergibt sich ein analoges Vorgehen, wobei zunächst $\mathrm{E}(X^2)$ berechnet wird.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2 \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\mathcal{B}(\alpha+2,\beta)}{\mathcal{B}(\alpha,\beta)} \int_0^1 \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha+2,\beta)} x^{(\alpha+2)-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\
&= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

3. Vgl. Mood, Graybill und Boes (1974), S. 122 ff.

Poissonverteilung:

$$f(x;\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} I_{\{0,1,2,\dots,\}}(x); \qquad \theta > 0$$

Parameter θ folgt einer Gammaverteilung:

$$g(\theta;r,\lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta} I_{(0,\infty)}(\theta); \qquad r,\lambda > 0$$

Gesucht ist eine Mischung aus Poissonverteilungen, wobei die Mischungsvariable $\tilde{\theta}$ einer Gammaverteilung folgt:

$$f(x;r,\lambda) = \int\limits_0^\infty f(x;\theta) g(\theta;r,\lambda)\, d\theta$$

Hinweis:

Zur Idee der Mischung stelle dir vor, dass θ diskret wäre, sodass $P(\theta = a) = p = q_1$ und $P(\theta = b) = 1 - p = q_2$.

$\longrightarrow \quad f(x; p, a, b) = pf(x, a) + (1-p)f(x, b) = \sum_{i=1}^{2} q_i f_i(x, \theta)$.

In der Aufgabe hat die Mischung nicht nur zwei mögliche Ausprägungen, sondern alle zwischen 0 und ∞ (stetig) und folgt einer Gamma- statt einer Bernoulliverteilung.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x;\theta) g(\theta; r, \lambda)\, d\theta &= \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \theta^{r-1} e^{-\lambda\theta} d\theta \\
&= \frac{\lambda^r}{x!\Gamma(r)} \int\limits_0^\infty \theta^{x+r-1} e^{-\lambda\theta - \theta} d\theta
\end{aligned}$$

Beachte die Gammafunktion $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$

Substitution: $t = (\lambda+1)\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{t}{\lambda+1} \qquad d\theta = dt \frac{1}{\lambda+1}$

$$\begin{aligned}
\longrightarrow \; f(x; r, \lambda) &= \frac{\lambda^r}{x!\Gamma(r)} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^{x+r-1} t^{x+r-1} e^{-t} \frac{1}{\lambda+1} dt \\
&= \frac{\lambda^r}{x!\Gamma(r)} \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^{x+r} \underbrace{\int\limits_0^\infty t^{x+r-1} e^{-t} dt}_{=\Gamma(x+r)} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^r \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^x \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(r)x!}
\end{aligned}$$

Hinweis:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+r) &= (x+r-1)\Gamma(x+r-1)\\ &= (x+r-1)(x+r-2)\Gamma(x+r-2)\\ &\vdots\\ &= (x+r-1)\dots(x+r-x)\Gamma(x-x+r)\\ &= (x+r-1)\dots(r)\Gamma(r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^r\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^x\frac{(x+r-1)(x+r-2)\cdot\ldots\cdot(r)}{x!}\\ &= p^r(1-p)^x\binom{x+r-1}{x}; \quad \text{wobei } p=\frac{\lambda}{\lambda+1}\end{aligned}$$

negativ binomialverteilt mit p und r.

4. (a) Zu zeigen: dass die Fläche unter der Dichte einer univariaten Normalverteilung $A=\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma)dx$ den Wert 1 hat

Lösungsansatz: Jacobi-Matrix zur Transformation und Polarkoordinaten-Darstellung des Integrals

Substituiere:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma} \quad\Rightarrow\quad z'=\frac{1}{\sigma}=\frac{dz}{dx} \quad\Rightarrow\quad dz=\frac{1}{\sigma}dx \Rightarrow dx=\sigma dz$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}z^2}\cdot\sigma dz=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

Es existiert keine Stammfunktion zur Normalverteilung $\Longrightarrow$ das Quadrat betrachten! ($A^2=1\Rightarrow A=1$)

$$\begin{aligned}A^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z_1^2}dz_1\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z_2^2}dz_2\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)}dz_1\,dz_2\end{aligned}$$

Substituiere kartesische durch Polarkoordinaten: $(x_1, x_2) = (r, \varphi)$

$$\begin{aligned} x_1 &= h_1(r,\varphi) = r \cdot \cos(\varphi) \\ x_2 &= h_2(r,\varphi) = r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

(Hinweis: Bei bestimmten Integralen kann auf die Rücksubstitution verzichtet werden, wenn man die Integrationsgrenzen mitsubstituiert!)

Anpassung der Integrationsgrenzen:

x_1 sowie $x_2 \in (-\infty, \infty)$
r (Radius) $\in [0, \infty)$ und φ (Winkel) $\in [0, 2\pi)$

Umrechnung von Flächenelementen in Polarkoordinaten:

$$dA = dx_1\, dx_2 = |\det(J)|\, dr\, d\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$A^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(cos^2(\varphi)\cdot r^2 + sin^2(\varphi)\cdot r^2)} \cdot |\det(J)|\, dr\, d\varphi$$

$|\det(J)|$ Betrag der Determinante der Jakobi-Matrix:

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ |\det(J)| &= r \cdot \cos^2(\varphi) + r \cdot \sin^2(\varphi) = r \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2(cos^2(\varphi)+sin^2(\varphi))} \cdot r\, dr\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 1 \\ \text{da } A^2 &= 1 \text{ ist auch } A = 1 \text{ (q.e.d.)} \end{aligned}$$

(b) Zu zeigen: dass sich für $n = 2$ die Dichte einer multivariaten Normalverteilung wie folgt darstellen lässt

$$f(x; \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

(wobei $\mathrm{E}(X_1) = \mu_1$, $\mathrm{E}(X_2) = \mu_2$, $\mathrm{var}(X_1) = \sigma_1$, $\mathrm{var}(X_2) = \sigma_2$ und ρ der Korrelationskoeffizient von X_1 und X_2 ist)

Lösungsansatz: Dichtefunktion in Matrixschreibweise aufstellen und ausmultiplizieren

$$
\begin{aligned}
f(x;\mu,\Sigma) &= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)/2} \\
\rho &= \frac{\mathrm{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathrm{var}(X_1)}\sqrt{\mathrm{var}(X_2)}} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \Rightarrow \sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2 \\
\det(\Sigma)^{\frac{1}{2}} &= |\Sigma|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} = \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2} \\
&= \sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{-1} &= \frac{1}{\det(\Sigma)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_1^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

<u>Zur Erläuterung:</u>

$$
\begin{aligned}
\text{sei } Q &= -(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)/2 \\
&= -\frac{1}{2}(x_1-\mu_1 \quad x_2-\mu_2) \cdot \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \left[(x_1-\mu_1 \quad x_2-\mu_2) \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix} \right] \\
&= -\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)} \Big[\big((x_1-\mu_1)\sigma_2^2 - (x_2-\mu_2)\sigma_{21} \quad -(x_1-\mu_1)\sigma_{12} \\
&\quad +(x_2-\mu_2)\sigma_1^2 \big) \begin{pmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{pmatrix} \Big] \\
&= -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)\rho}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & f(x;\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho) \\
= \quad & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}
\end{aligned}
$$

(c) Vorgehen: Durchführen von Transformationen, verwenden des Ergebnisses unter 4. (a)

Substitution:
$$\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}=z_1,\ \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}=z_2,$$
$$dx_1dx_2=|\det(J)|dz_1dz_2, \text{ mit } |\det(J)|=\sigma_1\sigma_2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi\cancel{\sigma_1\sigma_2}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[z_1^2-2\rho z_1z_2+z_2^2\right]\right\}\cancel{\sigma_1\sigma_2}dz_1dz_2$$

Quadratische Ergänzung:
$$z_1^2-2z_1\rho z_2\underbrace{+(\rho z_2)^2-(\rho z_2)^2}_{=\ 0}+z_2^2=(z_1-\rho z_2)^2+z_2^2(1-\rho^2)$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(z_1-\rho z_2)^2}{2(1-\rho^2)}-\frac{z_2^2\cancel{(1-\rho^2)}}{2\cancel{(1-\rho^2)}}\right\}dz_1dz_2$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(z_1-\rho z_2)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dz_1\right]\cdot\exp\left\{-\frac{z_2^2}{2}\right\}dz_2$$

Substitution: $\quad z_1-\rho z_2=u, \qquad dz_1=du$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}\right\}du\right]}_{=\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\quad ①}\cdot\exp\left\{-\frac{z_2^2}{2}\right\}dz_2$$

① Integral über den Kern einer $\mathcal{N}(0,(1-\rho^2))$ entspricht dem Kehrwert der normierenden Konstante.

$$=\frac{\sqrt{2\pi\cancel{(1-\rho^2)}}}{2\pi\sqrt{\cancel{1-\rho^2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\exp\left\{-\frac{z_2^2}{2}\right\}}_{\text{Kern einer } \mathcal{N}(0,1)}dz_2$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=1$$

(d)

$$\begin{aligned}M_X(t)=\mathrm{E}(e^{tx})\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{tx-\frac{x^2}{2}\right\}dx\\&=e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(x-t)^2\right\}dx\\&=e^{\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

(e) i. $M_X(t) = \exp\{t + 2t^2\}$
ii. $M_{S_2}(t) = \exp\{2t + 4t^2\}$
iii. $M_{S_n}(t) = \exp\{nt + 2nt^2\}$
iv. $M_{A_n}(t) = \exp\{t + \frac{2t^2}{n}\}$

(f)

$$
\begin{aligned}
M_{X_1,X_2}(\underline{t}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x_1+t_2x_2} f(\cdot) dx_1\, dx_2 \\
\text{setze } \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} &= u; \quad \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} = \upsilon \\
M_{u\upsilon}(\underline{t}) &= e^{t_1\mu_1+t_2\mu_2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1\sigma_1 u + t_2\sigma_2\upsilon} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{u^2-2\rho\upsilon u+\upsilon^2\}} du\, d\upsilon \\
&= e^{t_1\mu_1+t_2\mu_2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{Q} du\, d\upsilon \\
Q &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{u^2 - 2\rho u\upsilon + \upsilon^2 - 2(1-\rho^2)t_1\sigma_1 u \\
&\quad -2(1-\rho^2)t_2\sigma_2\upsilon\} \\
&= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{\left[u-\rho\upsilon-(1-\rho^2)t_1\sigma_1\right]^2 + (1-\rho^2)\upsilon^2 \\
&\quad -2(1-\rho^2)t_1\sigma_1\rho\upsilon - (1-\rho^2)^2 t_1^2\sigma_1^2 - 2(1-\rho^2)t_2\sigma_2\upsilon\}
\end{aligned}
$$

<u>Zur Erläuterung:</u>

$$
\begin{aligned}
& u^2 - 2\rho u\upsilon - 2(1-\rho^2)t_1\sigma_1 u = (u-\rho\upsilon)^2 - \rho^2\upsilon^2 - 2(1-\rho^2)t_1\sigma_1 u \\
= \;& (u-\rho\upsilon)^2 - \rho^2\upsilon^2 - 2(1-\rho^2)t_1\sigma_1 u \underbrace{(+2(1-\rho^2)t_1\sigma_1\rho\upsilon - 2(1-\rho^2)t_1\sigma_1\rho\upsilon)}_{\text{erweitert}} \\
= \;& (u-\rho\upsilon)^2 - \rho^2\upsilon^2 - 2(1-\rho^2)t_1\sigma_1(u-\rho\upsilon) - 2(1-\rho^2)t_1\sigma_1\rho\upsilon \\
& \cdot \underbrace{[+(1-\rho^2)^2 t_1^2\sigma_1^2 - (1-\rho^2)^2 t_1^2\sigma_1^2]}_{\text{erweitert}} \\
= \;& [u-\rho\upsilon-(1-\rho^2)t_1\sigma_1]^2 - \rho^2\upsilon^2 - 2(1-\rho^2)t_1\sigma_1\rho\upsilon - (1-\rho^2)^2 t_1^2\sigma_1^2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big\{[u-\rho\upsilon-(1-\rho^2)t_1\sigma_1]^2 \\
&\quad +(1-\rho^2)(\upsilon^2-2t_1\sigma_1\rho\upsilon-2t_2\sigma_2\upsilon-(1-\rho^2)t_1^2\sigma_1^2)\Big\} \\
&= -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big\{[u-\rho\upsilon-(1-\rho^2)t_1\sigma_1]^2 \\
&\quad +(1-\rho^2)(\upsilon-t_1\sigma_1\rho-t_2\sigma_2)^2 \\
&\quad -(1-\rho^2)\Big[(t_1\sigma_1\rho+t_2\sigma_2)^2+t_1^2\sigma_1^2(1-\rho^2)\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

<u>Zur Erläuterung:</u>

$$\begin{aligned}
\upsilon^2-2t_1\sigma_1\rho\upsilon-2t_2\sigma_2\upsilon &= \upsilon^2-2(t_1\sigma_1\rho+t_2\sigma_2)\upsilon \\
&\quad +(t_1\sigma_1\rho+t_2\sigma_2)^2-(t_1\sigma_1\rho+t_2\sigma_2)^2
\end{aligned}$$

setze: $\quad w=\frac{u-\rho\upsilon-(1-\rho^2)t_1\sigma_1}{\sqrt{1-\rho^2}};\ z=(\upsilon-t_1\sigma_1\rho-t_2\sigma_2)$

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{1}{2}w^2-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}\left\{t_1^2\sigma_1^2+t_2^2\sigma_2^2+2\rho t_1t_2\sigma_1\sigma_2\right\} \\
M(\underline{t}) &= e^{t_1\mu_1+t_2\mu_2+\frac{1}{2}\{t_1^2\sigma_1^2+t_2^2\sigma_2^2+2\rho t_1t_2\sigma_1\sigma_2\}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\left(\frac{w^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right)}dw\,dz}_{=1 \text{ siehe Aufgabe 4.(a)}}
\end{aligned}$$

5. Die Regressionsfunktion ist der unbestimmte Erwartungswert $\mathrm{E}(X_1|X_2)$. Dieser kann aus dem Theorem der bedingten Verteilung aus der Formelsammlung bestimmt werden. Es ergibt sich

$$X_1|X_2\sim\mathcal{N}(\mu_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2),\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}).$$

   (a) $\mathrm{E}(X_1|X_2)=\frac{23}{3}-\frac{1}{3}x_2$ und $\mathrm{E}(X_1|x_2=9)=\frac{14}{3}$.

   (b) $\mathrm{var}(X_1|X_2)=\frac{5}{3}$. Beachte, dass die Varianz unabhängig von der Bedingung ist!

   (c) $P(x_1>5)=0.5$ und $P(x_1>5|x_2=9)=1-\Phi(0.258)\approx 0.4$

6. Eine Dichtefunktion gehört zur Exponentialfamilie, wenn die Grenzen der Indikatorfunktion nicht von dem Parameter θ der Dichtefunktion abhängen und die Dichtefunktion wie folgt geschrieben werden kann:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \exp\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} c_i(\theta)g_i(x) + d(\theta) + z(x)\right\} & \text{für } x \in A,\ A \perp \theta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a)

$$\begin{aligned} f(x;p) &= \exp\left\{\ln\left(p^x(1-p)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{x \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \ln(1-p) + \ln(I_{\{0,1\}}(x))\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(\theta) &= \ln p - \ln(1-p) & g_1(x) &= x \\ d(\theta) &= \ln(1-p) & z(x) &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x;\alpha,\beta) &= \exp\left\{\ln\left(\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} I_{(0,\infty)}(x)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\ln x^{\alpha-1} + \left(-\frac{1}{\beta}\right) x + \ln\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} + 0\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(\theta) &= \alpha - 1 & c_2(\theta) &= -\frac{1}{\beta} \\ g_1(x) &= \ln x & g_2(x) &= x \\ d(\theta) &= \ln\tfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} & z(x) &= 0 \end{aligned}$$

(c)

$$f(x;\beta) = \exp\left\{\ln\left(\beta x^{-(\beta+1)} I_{(1,\infty)}(x)\right)\right\}$$

$$\begin{aligned} c_1(\theta) &= -(\beta+1) & g_1(x) &= \ln x \\ d(\theta) &= \ln\beta & z(x) &= 0 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f(x;\mu,\sigma) &= \exp\left\{\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} - \ln x - \frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2} + 0\right\} \\ &= \exp\left\{\underbrace{-\ln\sqrt{2\pi}\sigma - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}}_{d(\theta)} - \underbrace{\ln x}_{z(x)} - \underbrace{\ln x^2}_{g_1(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sigma^2}}_{c_1(\theta)} + \underbrace{\ln(x)\cdot\frac{\mu}{\sigma^2}}_{g_2(x)\cdot c_2(\theta)}\right\} \end{aligned}$$