Dr. Christian Aßmann

Methodenlehre der Statistik III

Übungsblatt 4

1. *(Momente der Hypergeometrischen Verteilung)* Die Dichte einer hypergeometrischen Verteilung hat die Form

$$f(x;M,K,n)=\frac{\begin{pmatrix}K\\x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}M-K\\n-x\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}M\\n\end{pmatrix}}I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)\;,$$

mit $M\in\mathbb{N}$, $K=0,1,\ldots,M$ und $n=1,2,\ldots,M$. Ermitteln Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{var}(X)$.

2. *(Momente der Betaverteilung)* Die Dichte einer Betaverteilung hat die Form

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}I_{(0,1)}(x)\;,\qquad \alpha,\beta>0\;.$$

Hierbei ist $B(\cdot,\cdot)$ die sogenannte Betafunktion mit

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\;,\qquad \Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt\quad\text{(Gammafunktion)}\;.$$

Ermitteln Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$ und die Varianz $\mathrm{var}(X)$.

3. *(Mischung von Verteilungen)* Betrachten Sie die Dichte einer Poissonverteilung

$$f(x;\theta)=\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)\;,\qquad \theta>0\;,$$

und nehmen Sie an, dass θ einer Gammaverteilung mit der Dichte

$$g\left(\theta;r,\lambda\right)=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\theta^{r-1}e^{-\lambda\theta}I_{(0,\infty)}(\theta)\;,\qquad r,\lambda>0$$

folgt. Zeigen Sie, dass die sogenannte Mischung (*mixture of distributions* bzw. *contagious distributions*) von Poissonverteilungen, d.h.

$$\int_0^\infty f(x;\theta)\cdot g(\theta;r,\lambda)d\theta$$

eine negative Binomialverteilung mit den Parametern r und $p=\frac{\lambda}{\lambda+1}$ ist.

4. *(Univariate und multivariate Normalverteilungen)*

(a) Die Dichte einer univariaten Normalverteilung hat die Form

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} .$$

Zeigen Sie, dass die Fläche unter der Dichte $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma)dx$ den Wert 1 hat. (Hinweis: Nutzen Sie dabei aus, dass $A^2 = 1 \Rightarrow A = 1$)

(b) Die allgemeine Form der Dichte einer multivariaten Normalverteilung für die n-dimensional Zufallsvariable $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ ist

$$f(x;\mu,\Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)/2} ,$$

wobei $\mathrm{E}(\mathbf{X}) = \mu$ und $\mathrm{var}(\mathbf{X}) = \Sigma$. Zeigen Sie, dass sich für $n = 2$ diese Dichte wie folgt darstellen lässt

$$f(x;\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)}{\sigma_1}\frac{(x_2-\mu_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]} ,$$

wobei ρ der Korrelationskoeffizient von X_1 und X_2 ist.

(c) Betrachten Sie die Dichte der bivariaten Normalverteilung aus Aufgabenteil 4. (b). Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho)dx_2dx_1 = 1 .$$

(d) Zeigen Sie, dass die Momenterzeugende Funktion einer Standardnormalverteilung die Form

$$M(t) = \exp\left\{\frac{t^2}{2}\right\}$$

hat.

(e) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, die einer Normalverteilung mit $\mu = 1$ und $\sigma = 2$ folgen. Finden Sie die Momenterzeugenden Funktionen für:

i. X_1

ii. $S_2 = X_1 + X_2$

iii. $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

iv. $A_n = S_n/n$

(f) Zeigen Sie, dass die Momenterzeugende Funktion einer bivariaten Normalverteilung die Form

$$M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = \exp\left\{t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{1}{2}\left(t_1^2\sigma_1^2 + 2\rho t_1t_2\sigma_1\sigma_2 + t_2^2\sigma_2^2\right)\right\}$$

hat. Verwenden Sie die Momenterzeugende Funktion, um $\mathrm{E}(X_1)$, $\mathrm{E}(X_2)$, $\mathrm{var}(X_1)$, $\mathrm{var}(X_2)$ und $\mathrm{cov}(X_1, X_2)$ zu bestimmen.

5. *(Bedingte Verteilung aus einer multivariaten Normalverteilung)* Es sei $\mathbf{X}$ eine Zufallsvariable, die einer bivariaten Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit

$$\mu = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

folgt.

(a) Geben Sie die Regressionsfunktion von X_1 auf X_2 an, und bestimmen Sie $\mathrm{E}(X_1|x_2 = 9)$.

(b) Wie groß ist die bedingte Varianz von X_1 gegeben $x_2 = 9$?

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für $x_1 > 5$ und die bedingte Wahrscheinlichkeit für $x_1 > 5$ gegeben $x_2 = 9$.

6. *(Exponentialfamilie)* Betrachten Sie die im folgenden aufgelisteten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen und prüfen Sie jeweils, ob sie Mitglied der Exponentialfamilie sind.

(a) (Bernoulliverteilung)

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x) \;, \qquad p \in [0,1]$$

(b) (Gammaverteilung)

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} I_{(0,\infty)}(x) \;, \qquad \alpha, \beta > 0$$

(c) (Paretoverteilung)

$$f(x;\beta) = \beta x^{-(\beta+1)} I_{(1,\infty)}(x) \;, \qquad \beta > 0$$

(d) (Lognormalverteilung)

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)} I_{(0,\infty)}(x) \;, \qquad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \;.$$