Lösungen zum Übungsblatt 5

1. Zu zeigen: dass die Folge $f_n(x)$ punktweise gegen die Funktion $f(x) = 0$ konvergiert

   Herangehen: für (jeden) gegebenen Punkt $n \to \infty$ streben lassen

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} 0 \leq x < \frac{1}{2n} = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} = 0 \\ \Longrightarrow \quad &\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{für } x = 0 \ , \\ 0 & \text{sonst} \ , \end{cases} \end{aligned}$$

   mit $x = 0 \Rightarrow 4n^2 \cdot 0 = 0$, so dass $f(x) = 0$

   Die Folge konvergiert punktweise gegen null, da der Bereich, in dem die Folge positive Werte annimmt, gegen null strebt, und andererseits die Folge an der Stelle null immer den Wert null annimmt.

2. Zu zeigen: dass die Folge $\{Y_n\}$ in Wahrscheinlichkeit gegen μ konvergiert ($Y_n \xrightarrow{p} \mu$)

   Herangehen: Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen eine(n) Zufallsvariable (Wert) ξ liegt vor, genau dann wenn

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - \xi| < \epsilon) = 1 \qquad \text{für } \forall\, \epsilon > 0 \ .$$

   Gemäß Chebychev gilt hier:

$$\begin{aligned} &P(|Y_n - \mathrm{E}(Y_n)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{var}(Y_n)}{\epsilon^2} \\ \Leftrightarrow \quad &P(|Y_n - \mu| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\frac{\sigma^2 + \sqrt{n}}{n+1}}{\epsilon^2} \\ \Rightarrow \quad &\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \mu| < \epsilon) \geq \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{\frac{\sigma^2 + \sqrt{n}}{n+1}}{\epsilon^2} = 1 - 0 = 1 \ . \end{aligned}$$

   Damit gilt $Y_n \xrightarrow{p} \mu$ bzw. $\operatorname{plim} Y_n = Y$.

3. Zu zeigen: $X_n \xrightarrow{p} 1$

   Hier sind zwei Bewegungen zu beachten wenn $n \to \infty$: einerseits konvergiert der Träger zu den Punkten $\{1, 2\}$, zum anderen strebt $P(x = 2)$ gegen null.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{2n-1}{3n} & \text{für } x = 1\ , \\ 0 & \text{sonst}\ , \end{cases}$$

   da $x = 1 + \frac{1}{n+1}$ punktweise gegen 1 konvergiert ($x = 1 + 0 = 1$) und $\frac{1}{3n}$ gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$.

   Schließlich ist die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse im Punkt 1 zu finden.

   Damit ist $X_n \xrightarrow{d} 1$ und da $1 = c$ eine Konstante ist, folgt hieraus $X_n \xrightarrow{p} 1$ bzw. plim $X_n = 1$ (Theorem 5.6).

4. Zu zeigen: $X_n \xrightarrow{d} X$

   Zwar konvergiert die Folge der Verteilungsfunktionen $F_n(x)$ gegen die (stabile) Funktion $F(x) = \frac{1}{2} I_{(-\infty,\infty)}(x)$, aber diese Funktion besitzt nicht die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion (z.B. $\lim_{x\to\infty} F = 1$), so dass <u>keine</u> Konvergenz in Verteilung vorliegt!

5. (a) Zu zeigen: $Y_n \xrightarrow{p} 0$ für $X_n \sim \text{Ber}(p_n)$

   Die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gegen null kann über Chebychev gezeigt werden:

$$P(|Y_n - 0| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

   mit

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \text{var}(Y_n) = \text{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[X_i - \mu_i]\right) = \frac{1}{n^2}\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &\underset{\text{wg. unabh.}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\text{var}\,(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Downarrow\\
\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - 0| < \epsilon) &\geq \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)}{\epsilon^2}\right)\\
&\geq 1 - \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)}{\epsilon^2}\\
&\geq 1 - \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{1}{4}}{\epsilon^2}\\
&\geq 1 - \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n}}{\epsilon^2} = 1
\end{aligned}
$$

Somit gilt $Y_n \xrightarrow{p} 0$ bzw. $\operatorname{plim} Y_n = 0$.

Zudem ist der „Anforderungskatalog" des schwachen Gesetzes der großen Zahlen gemäß der Theoreme FS Seite 6, Necessary and Sufficient Conditions for WLLN + WLLN NON-IID case erfüllt, so dass auch die dort genannten Bedingungen herangezogen werden könnten.

(b) Zu zeigen: $Y_n \xrightarrow{p} 0$ für eine beliebige Verteilung von X_n und eine Konstante $c \in (0, \infty)$, so dass gilt $\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq c \cdot n \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$

Analog zu (a), nur dass lediglich eine obere Schranke für die Varianz bekannt ist, die aber ebenfalls gegen null strebt für $n \to \infty$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - 0| < \epsilon) &\overset{?}{=} 1, \text{ wobei } \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq c \cdot n\\
&\Downarrow\\
P(|Y_n - 0| < \epsilon) &\geq 1 - \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \operatorname{var}(Y_n) = \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \operatorname{var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n [X_i - \mu_i]\right)\\
&= \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)
\end{aligned}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
P(|Y_n - 0| < \epsilon) \geq 1 - \frac{\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{n^2 \cdot \epsilon^2}
$$

$$\text{wobei} \qquad \operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \leq c \cdot n$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{n^2 \cdot \epsilon^2} \leq \frac{c \cdot n}{n^2 \cdot \epsilon^2} \Leftrightarrow 1 - \frac{\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{n^2 \cdot \epsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n \cdot \epsilon^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} P(|Y_n - 0| < \epsilon) &\geq 1 - \frac{\operatorname{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{n^2 \cdot \epsilon^2} \geq 1 - \frac{c}{n \cdot \epsilon^2} \\ \lim_{n \to \infty} P(|Y_n - 0| < \epsilon) &\geq 1 - \frac{c}{n \cdot \epsilon^2} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

Somit gilt $Y_n \xrightarrow{p} 0$.

6. Das Zufallsexperiment wird n-mal wiederholt (identisch + unabhängig). Das Ergebnis eines jeden Durchgangs soll durch die Variablen $Z_1, \ldots, Z_n$ abgebildet werden. Dann kann man definieren

$$X_i = I_A(Z_i),$$

d.h. die Variable X_i nimmt den Wert 1 an, wenn beim i-ten Durchgang des Zufallsexperiments das Ereignis A eintritt. Dies geschieht mit der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, also $P(A)$. Da das Zufallsexperiment identisch und unabhängig wiederholt wird, sind die X_i's also

$$X_i \overset{iid}{\sim} \operatorname{Ber}(P(A)).$$

Die X_i's erfüllen damit den Anforderungskatalog des WLLN nach Khinchin (*iid* Fall). Damit gilt

$$\overline{X}_n \xrightarrow{p} P(A),$$

d.h. das arithmetische Mittel der X_i's konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen seinen Erwartungswert. Dabei stellt das arithmetische Mittel der X_i's aber die relative Häufigkeit des Ereignisses A, $\frac{N_A}{n}$ dar. Somit gilt

$$\frac{N_A}{n} \xrightarrow{p} P(A).$$

7. Hier extrem ausführlich!

   Das schwache Gesetz der großen Zahlen beinhaltet die Aussage, dass der Mittelwert einer Stichprobe vom Umfang n gegen den Erwartungswert der betrachteten Zufallsvariable geht, wenn $n \to \infty$ geht.

   $$\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu \qquad \text{(Konvergenz in Wahrscheinlichkeit)}$$

   Entsprechend dem Satz von Chebychev

   $$P(|X-\mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \Longleftrightarrow \quad P(|X-\mu| > \epsilon) \leq \frac{\text{var}(X)}{\epsilon^2}\ ,$$

   gilt es zu zeigen, dass die Varianz von $\frac{\sum X_i}{n}$ gegen null geht!

   $$\text{var}\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{var}\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum \text{var}(X_i) + 2\sum_i \sum_j \sigma_{ij}\right)\ ,$$

   wobei: $j > i$

Exkurs: Varianz-Kovarianz-Matrix

$$\text{var}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \vdots \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \text{für } \mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Offensichtlich ist $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{31} = \sigma_{13}$, usw., d.h. alle Elemente oberhalb der Diagonalen haben eine Entsprechung unterhalb der Diagonalen!

Bilde die Varianz von $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$! (Vergleiche Formelsammlung S. 13, Moments of Linear Combinations, Theorem 2)

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{var}\left(X_i\right) + 2\sum_j \sum_i \sigma_{ij}\ , \text{ wobei: } j > i$$

Die Multiplikation mit 2 ist wegen der Entsprechung der Elemente oberhalb und unterhalb der Diagonalen gegeben. Somit brauchen nur die Elemente oberhalb der Diagonalen addiert werden!

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots \\ & \ddots & \sigma_{23} & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \sum_j \sum_i \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^{n} \sigma_{ij}$$

Die Summe der Kovarianzen oberhalb der Diagonalen ist eine Doppelsumme, in der alle Elemente addiert werden für die $j > i$ ist (in der Matrix A sind die j für die Elemente oberhalb der Diagonalen stets gößer als die i). Diese Doppelsumme kann man als $\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^{n} \sigma_{ij}$ auffassen.

Beachtet man $\sum_{j>i}^{n} \sigma_{ij}$ und hält i fest, zum Beispiel $i = 1$, dann ergibt sich $\sum_{j>i}^{n} \sigma_{1j} = \sum_{j=2}^{n} \sigma_{1j}$.

Variiert man i und summiert darüber, ergibt sich eine Summe von Summen

$$^{*}\sum_{j=2}^{n} \sigma_{1j} + \sum_{j=3}^{n} \sigma_{2j} +^{**} \sum_{j=4}^{n} \sigma_{3j} + \ldots + \sum_{j=n}^{n} \sigma_{(n-1)j}$$

*Summe der ersten Zeile von Matrix A jenseits der Diagonalen

**Summe der dritten Zeile von Matrix A jenseits der Diagonalen

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} & \dots^{*} \\ & \sigma_2^2 & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} & \vdots \\ & & \sigma_3^2 & \sigma_{34} & \sigma_{35} & \vdots^{**} \\ & & & \ddots & \dots & \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{var}\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\operatorname{var}\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{i}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n} \rho^{|j-i|}\right]$$

Abschätzung der Varianz für $n \to \infty$. (Exakte Berechnung zu aufwendig!)

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j>1}^{n} \rho^{|j-1|} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho}{1-\rho}$$

<u>Erläuterung:</u> Angenommen $i = 1$ (größtmöglicher Fall)

$$\sum_{j>i}^{n} \rho^{|j-i|} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n-1} \rho^{k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{1}\right) = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{i}\right) \leq 2n$$

$$\operatorname{var}\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) \quad \leq \quad \frac{1}{n^2}\left(2n + 2(n-1)\frac{\rho}{1-\rho}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \quad \frac{1}{n^2}\left(2n + 2(n-1)\frac{\rho}{1-\rho}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \quad \operatorname{var}\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = 0$$

Somit ist $\displaystyle \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum X_i}{n} - 1\right| < \epsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \left(2n + 2(n-1)\frac{\rho}{1-\rho}\right)$

$$\geq \quad 1 - \frac{0}{\epsilon^2} = 1 \ ,$$

und $\frac{\sum X_i}{n} \overset{p}{\longrightarrow} 1$.

8. <u>ZGWS</u> (Lindberg-Levy)

$$Y_n \quad = \quad \frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma_X/\sqrt{n}} \overset{d}{\longrightarrow} Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\text{sofern } \bar{X}_n \quad = \quad \frac{\sum X_i}{n} \ , \ \mathrm{E}(X_i) = \mu \ , \ \operatorname{var}(X_i) = \sigma_X^2$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{X}_n \overset{\text{asy.}}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Zusammenhang Konvergenz in Verteilung und asymptotische Verteilung:

Es existiere eine Folge von Zufallsvariablen $X_n \xrightarrow{d} X$.

Z_n sei eine Funktion von X_n und den Parametern θ_n ($Z_n = g(X_n, \theta_n)$).
Dann ist Z_n asymptotisch so verteilt wie θ_n ($Z = g(X, \theta_n)$). Z ist eine Funktion von X und θ_n (Zufallsvariablen).

$$Z_n \overset{\text{asy.}}{\sim} g(X, \theta_n).$$

Beispiel:

X_n konvergiert in Verteilung gegen $X \sim \mathcal{N}(0,1)$
$Z_n = X_n^2$
Wir wissen, dass $X^2 \sim \chi^2_{(1)}$ verteilt ist!

$$Z_n \overset{\text{asy.}}{\sim} \chi^2_{(1)}$$

Zur Aufgabenstellung:

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu = 3{,}5; \ \mathrm{var}(X_i) = \sigma^2 = \frac{35}{12} \quad \text{[einfacher, fairer Würfel]}$$

ZGWS

$$\frac{(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1); \quad \bar{X}_n \overset{\text{asy.}}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{X}_n \overset{\text{asy.}}{\sim} \mathcal{N}\left(3{,}5, \frac{\frac{35}{12}}{200}\right)$$

$$P(\bar{X} \leq 3{,}6) = \Phi\left(\frac{3{,}6 - 3{,}5}{\sqrt{\frac{1}{200}\frac{35}{12}}}\right) = \Phi\left(\frac{0.1}{\sqrt{\frac{1}{200}\frac{35}{12}}}\right) \approx \Phi(0{,}8281) \approx 0{,}7967$$

9. Siehe Mittelhammer S. 264 – Approximating Binomial Probabilities via the Normal Distribution (Example 5.39)

   $\{X_n\}$ sei eine Folge *iid* bernoulliverteilter ZV mit $X_i \sim \text{Ber}(p)$.

   Gemäß ZGWS nach Lindberg-Levy ist

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{n}\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} Y \sim \mathcal{N}(0,1) \ ,$$

   da $\text{E}(X_i) = p$ und $\text{var}(X_i) = p(1-p)$ für eine bernoulliverteilte ZV.

   (exakt) Die Summe bernoulliverteilter ZV ist binomialverteilt

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n,p)$$

$$\text{mit E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = np \text{ und var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = np(1-p) \ .$$

   (asymptotisch) Die Summe bernoulliverteilter ZV ist approximierbar gemäß ZGWS nach Lindberg-Levy

$$\sum_{i=1}^n X_i \overset{asy.}{\sim} \mathcal{N}\left(np, np(1-p)\right) \ .$$

   (Prüfung der Approximationsvoraussetzungen nicht vergessen!)

   Die Approximation einer diskreten Verteilung durch eine stetige führt bei kleinen n zu ungenauen Ergebnissen. Durch eine sog. Stetigkeitskorrektur der Größe $\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$ kann die Anpassung jedoch verbessert werden.

10. (a)

$$\begin{aligned}
\text{E}(\bar{X}_n^2) &= \text{E}\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right]^2\right) = \text{E}\left(\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]^2\right) \\
&= \text{E}\left(\frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_i\sum_j X_iX_j\right]\right) \\
&= \text{E}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n X_i^2\right) + \text{E}\left(\frac{2}{n^2}\sum_i\sum_j X_iX_j\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^n \text{E}(X_i^2) + 2\sum_i\sum_j \text{E}(X_i)\text{E}(X_j)\right)
\end{aligned}$$

Da $\text{var}(X_i) = \text{E}(X_i^2) - [\text{E}(X_i)]^2 \Longrightarrow \text{E}(X_i^2) = \text{var}(X_i) + [\text{E}(X_i)]^2 = \theta^2 + \theta^2 = 2\theta^2$:

$$\begin{aligned}
\text{E}(\bar{X}_n^2) &= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} 2\theta^2 + 2\sum_i \sum_j \theta \cdot \theta\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\left(n2\theta^2 + n(n-1)\theta^2\right) = \theta^2\left(\frac{1}{n}+1\right) \neq \theta^2 \\
\lim_{n\to\infty} \text{E}(\bar{X}_n^2) &= \lim_{n\to\infty} \theta^2\left(\frac{1}{n}+1\right) = \theta^2
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\text{plim}(\bar{X}_n^2) &= \text{plim}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right] = \left[\text{plim}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]^2 \\
&= \left[\text{plim}\left(\bar{X}_n\right)\right]^2 = \theta^2
\end{aligned}$$

(c) ZGWS nach Lindberg-Levy:
(Siehe Formelsammlung S. 25, Theorem 5.16)
Definition in Aufgabe 8 ist der univariate Fall und nach Lindberg-Levy äquivalent zu

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1) \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$$

Im multivariaten Fall lautet der ZGWS (Lindberg-Levy) wie folgt

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}\right) \ ,$$

wobei $\mathbf{X}_i$ ein Vektor und $\boldsymbol{\Sigma}$ die Varianz-Kovarianz-Matrix von $\mathbf{X}_i$ ist. (Siehe Formelsammlung S. 26, Theorem 5.23)

Bezogen auf die Aufgabe heißt dies (univariat)

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta^2) \ .$$

Asymptotische Verteilung im univariaten Fall (Vgl. Formelsammlung S. 27 bzw. Theorem 5.25)

$$\sqrt{n}\,(g(\mathbf{X}_n) - g(\boldsymbol{\mu})) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \mathbf{G\Sigma G}')$$

$$\text{und} \;\; g(\mathbf{X}_n) \overset{asy.}{\sim} \mathcal{N}\left(g(\boldsymbol{\mu}), \frac{1}{n}\mathbf{G\Sigma G}'\right) .$$

$\mathbf{G} = \left(\frac{\partial g(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g(\boldsymbol{\mu})}{\partial x_k}\right)'$ Ableitung von g nach x, evaluiert an der Stelle $x = \mu$! (Gradientenvektor $g(\mathbf{x})$)
und $\mathbf{G\Sigma G}' = G^2\sigma^2$

Bezogen auf die Aufgabe:

$$g(\bar{X}_n) = \bar{X}_n^2; \qquad \frac{\partial g(\bar{X}_n)}{\partial \bar{X}_n} = 2\bar{X}_n \overset{\bar{X}_n=\mu}{\longrightarrow} G = 2\theta$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - \theta^2) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, (2\theta)^2\theta^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{X}_n^2 \overset{asy.}{\sim} \mathcal{N}\left(\theta^2, \frac{1}{n}4\theta^4\right)$$

11.

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i(x_i\beta + V_i)}{\sum x_i^2} = \beta + \frac{\sum x_i V_i}{\sum x_i^2} \\ b_r &= \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2 + k} = \frac{\beta \sum x_i^2}{\sum x_i^2 + k} + \frac{\sum x_i V_i}{\sum x_i^2} \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(b) &= \beta + \frac{\sum x_i \mathrm{E}(V_i)(=0)}{\sum x_i^2} = \beta \quad \text{erwartungstreu} \\ \mathrm{E}(b_r) &= \beta\frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2 + k} \qquad \text{verzerrt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(b) &= \mathrm{E}\left[(b-\beta)^2\right] = \mathrm{E}\frac{(\sum x_i V_i)^2}{(\sum x_i^2)^2} = \frac{\mathrm{E}(V_i)^2 \sum x_i^2}{(\sum x_i^2)^2} = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{(\sum x_i^2)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \\ \mathrm{var}(b_r) &= \mathrm{E}\left[(b_r - \mathrm{E}(b_r))^2\right] = \mathrm{E}\frac{(\sum x_i V_i)^2}{(\sum x_i^2 + k)^2} = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{(\sum x_i^2 + k)^2} \end{aligned}$$

(b) $\mathrm{E}(b) = \beta \; \forall \, n$ somit auch für $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(b) = \beta$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(b_r) = \lim_{n\to\infty} \beta \left[\frac{1}{1 + \frac{k}{\sum x_i^2}} \right] = \beta \, ,$$

$$\text{weil} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{k}{\sum x_i^2} = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \infty$$

$\Longrightarrow$ b_r asy. erwartungstreu

(c) Konvergenz im quadratischen Mittel der Folge $\{Y_n\}$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[(Y_n - Y)^2 \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left([b-\beta]^2 \right) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(b^2 - 2b\beta + \beta^2 \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(b^2) - 2b\beta + \beta^2 (+\mathrm{E}(b)^2 - \mathrm{E}(b)^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(b) + [\mathrm{E}(b) - \beta]^2 = 0 \\
\text{weil} \qquad & \lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} = 0 \\
\text{und} \qquad & \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(b) = \beta
\end{aligned}$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(b_r) = \beta; \; \lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(b_r) = 0; \; \left(\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{(\sum x_i^2 + k)^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right)}$$

$$\begin{aligned} b &\xrightarrow{m} \beta \\ b_r &\xrightarrow{m} \beta \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} b \xrightarrow{m} \beta \quad &\Longrightarrow \quad b \xrightarrow{p} \beta \\ b_r \xrightarrow{m} \beta \quad &\Longrightarrow \quad b_r \xrightarrow{p} \beta \end{aligned}$$

(e) Vgl. Mittelhammer Example 5.47, S. 275 f (Asymptotic Distribution of Products and Ratios).