

**Aufgabe A (25 Punkte)**

Seien  $X_1$  und  $X_2$  zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit

$$f(x_i) = e^{-x_i} I_{(0,\infty)}(x_i), \quad i = 1, 2.$$

- a1) (3 Punkte) Geben Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f(x_1, x_2)$  an.
- a2) (6 Punkte) Geben Sie die entsprechende gemeinsame Verteilungsfunktion  $F(x_1, x_2)$  an.
- a3) (5 Punkte) Bestimmen Sie den Erwartungswert  $E[X_1 X_2]$ .
- a4) (5 Punkte) Berechnen Sie  $P(x_1 < \frac{1}{2}x_2, 0 < x_2 < 2)$ .
- a5) (6 Punkte) Geben Sie jeweils die Verteilungen von  $S = X_1 + X_2$  und  $D = X_1 - X_2$  an.

**Aufgabe B (15 Punkte)**

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit zugehöriger Verteilungsfunktion

$$F(x) = \exp \{ -\exp(-x) \} I_{(-\infty, \infty)}(x).$$

- b1) (7 Punkte) Ist die gegebene Dichte ein Mitglied der Exponentialfamilie? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.
- b2) (8 Punkte) Es liege nun eine Zufallsstichprobe der Größe  $n = 5$  aus obiger Normalverteilung vor. Bestimmen Sie die Dichtefunktion der  $n$ -ten Ordnungsstatistik.



### Aufgabe C (8 Punkte)

Es sei  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$  eine Zufallsvariable, die einer bivariaten Normalverteilung  $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  mit

$$\mu = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

folgt.

- c1) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Regressionsfunktion von  $X_1$  auf  $X_2$ , und berechnen Sie  $E(X_1 \mid x_2 = 0)$ .
- c2) (1 Punkt) Wie groß ist die bedingte Varianz von  $X_1$  gegeben  $x_2 = 1$ ?
- c3) (3 Punkte) Geben Sie die momenterzeugende Funktion  $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$  an.

### Aufgabe D (12 Punkte)

Es sei  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$  eine Folge von *iid*-verteilten Zufallsvariablen aus einer Gleichverteilung auf dem Intervall  $(0, 1)$  mit

$$f(u) = I_{(0,1)}(u).$$

Ferner sei  $Z_n$  das arithmetische Mittel dieser Zufallsvariablen, d.h.

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i.$$

- d1) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für  $Z_n$  Konvergenz im quadratischen Mittel gilt und geben Sie den Wahrscheinlichkeitsgrenzwert an.
- d2) (4 Punkte) Ermitteln Sie die asymptotische Verteilung von  $Z_n$ .
- d3) (4 Punkte) Wie lautet die asymptotische Verteilung von  $Y_n = -\ln(Z_n)$ ?