Übung 4 Lösungen

Victor Minig

January 31, 2025

1

Gegeben:

Eine Folge von Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2n}, \\ -4n^2x + 4n & \text{für } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

mit $x \in \mathbb{R}$ **Frage:**

Konvergiert die Folge punktweise gegen $f(x) = 0$?

Lösung:

2

Gegeben:

Y_n folgt für $n \in \mathbb{N}$ einer Normalverteilung mit $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2+\sqrt{n}}{n+1})$

Zu Zeigen:

Y_n konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen μ

Lösung:

Die Aussage bedeutet mathematisch:

$$\lim_{n\to\infty} P(|y_n - \mu| < \epsilon) = 1 \quad \forall\ \epsilon > 0$$

Für den Beweis brauchen wir die Chebychev Ungleichung:

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2} \qquad \sigma = Var(X),\ \mu = E(X)$$

In unserem Fall:

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sigma^2+\sqrt{n}}{n+1}}{\epsilon^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2 + \sqrt{n}}{(n+1)\epsilon^2} && \text{L'Hopital} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^{-\frac{1}{2}}}{\epsilon^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) \leq 0 \implies \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) = 0
$$

Damit ist gezeigt, dass Y_n gegen μ konvergiert.

3

Gegeben:

Eine Folge von ZVs mit Dichten:

$$
f_n(x) = \begin{cases} \frac{2n}{-1} & \text{für } x = 1, \\ \frac{1}{3} & \text{für } x = 1 + \frac{1}{n+1}, \\ \frac{1}{3n} & \text{für } x = 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Zu Zeigen:

$$
X_n \xrightarrow{P} 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_n - 1| < \epsilon) = 1 \quad \forall\, \epsilon > 0
$$

Lösung:

Diesmal nutzen die Markov Ungleichung:

$$
P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a} \quad \forall a > 0
$$

Wir setzten für Y $X_n - 1$ ein

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 1| \geq \epsilon) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{E(|X_n - 1|)}{\epsilon} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{x \in R(x)} (|X_n - 1|) f(x)}{\epsilon} \quad \text{Ab hier fällt Betrag weg weil eh positiv (oder Null)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(1-1)}^{=0} \frac{2n}{-1} + \overbrace{(1 + \frac{1}{n+1} - 1)}^{=0 \text{ (für } n\to\infty)} \frac{1}{3} + (2-1) \overbrace{\frac{1}{3n}}^{=0 \text{ (für } n\to\infty)}}{\epsilon} \\
&= \frac{0}{\epsilon} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} P(|X_n - 1| \geq \epsilon) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|X_n - 1| < \epsilon) = 1
$$

4

Gegeben:

X_n mit Verteilungsfunktion:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -n, \\ \frac{1}{2} & \text{für } -n \leq x < n, \\ 1 & \text{für} x \geq n. \end{cases}$$

Frage:

Konvergiert die Folge gegen eine Zufallsvariable X?

Lösung:

Da $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ immer $\frac{1}{2}$ ist (denn für $n \to \infty$ gilt immer $-n \leq x < n$) konvergiert die Folge nicht in Verteilung gegen eine Zufallsvariable (die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable müsste irgendwann 1 werden)

5

Gegeben:

$\{X_n\}$ eine Folge mit $E(X_n) = \mu_n$. Außerdem:

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)$$

a)

Zu Zeigen:

Unter der Annahme, dass X_n bernoulliverteilt ist mit Parameter p_n soll gezeigt werden:

$$Y_n \xrightarrow{p} 0$$

Lösung:

Wir brauchen hier Tschebychev, da Y größer und kleiner 0 sein kann. Dafür berechnen wir zunächst $E(Y_n)$

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)) \\
&= \frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i - \sum_{i=1}^{n}\mu_i) \\
&= \frac{1}{n}(E(\sum_{i=1}^{n}X_i) - E(\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i)) \\
&= \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}E(X_i) - \sum_{i=1}^{n}\mu_i) \\
&= \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}\mu_i - \sum_{i=1}^{n}\mu_i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nun zum Beweis durch die Tschebychev Ungleichung

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - 0| \geq \epsilon) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{Var(Y_n)}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{E((Y_n - \overbrace{E(Y_n)}^{=0})^2)}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{E(Y_n^2)}{\epsilon} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{E((\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i))^2)}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 E((\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i))^2)}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 E((\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i))(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)))}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 E((\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i))((\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \mu_i))}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 E(\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{i=1}^n \mu_i - 2(\sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{i=1}^n X_i))}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 (E(\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i) + E(\sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{i=1}^n \mu_i) - 2E(\sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{i=1}^n X_i))}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 (\sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{i=1}^n \mu_i + E(\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n X_i) - 2E(\sum_{i=1}^n \mu_i \sum_{i=1}^n X_i))}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j + E(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X_i X_j) - 2E(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i X_i))}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i X_j) - 2(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i E(X_j)))}{\epsilon^2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{Wegen Unabhängigkeit} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(X_i)E(X_j) - 2(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j))}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j - 2(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i \mu_j))}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}^2 (0)}{\epsilon} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

6

Gegeben:

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $\{S, Y, P\}$ und A ein Ereignis in S. N_A drückt aus wie häufig A bei n unabhängigen Wiederholungen eintritt.

Zu Zeigen:

Die relative Häufigkeit $\frac{N_A}{n}$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen $P(A)$, also:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{N_A}{n} - P(A)| \geq \epsilon) = 0 \quad \forall\, \epsilon > 0$$

Lösung:

Da es sich eine einfache relative Häufigkeit handelt, können wir schließen, dass $N_A \sim \text{Bin}(n, P(A))$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(|\frac{N_A}{n} - P(A)| \geq \epsilon) &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{Var(\frac{N_A}{n} - P(A))}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{Var(\frac{N_A}{n})}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} Var(N_A)}{\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{nP(A)(1-P(A))}{n^2\epsilon^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{P(A)(1-P(A))}{n\epsilon^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad P(|\frac{N_A}{n} - P(A)| \geq \epsilon) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N_A}{n} \xrightarrow{p} P(A)$$

7

Gegeben:

Eine Folge von ZVs $\{X_n\}$:

$$X_i \sim \mathcal{N}(1, 1 + \frac{1}{i}) \quad \text{und} \quad \sigma_{ij} = \rho^{|j-i|}, \quad \rho \in (0,1), \quad i \neq j$$

Zu Zeigen:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{p} 1.$$

Lösung:

Da die ZVs nicht unabhängig sind, folgt der Beweis durch:

$$E\left[\frac{(\overline{X}_n - \overline{\mu}_n)^2}{1 + (\overline{X}_n - \overline{\mu}_n)^2}\right] \longrightarrow 0.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} E\left[\frac{(\overline{X}_n - \overline{\mu}_n)^2}{1 + (\overline{X}_n - \overline{\mu}_n)^2}\right] &= \lim_{n\longrightarrow\infty} E\left[\frac{\overline{X}_n^2 + \overline{\mu}_n^2 - 2\overline{X}_n\overline{\mu}}{1 + (\overline{X}_n^2 + \overline{\mu}_n^2 - 2\overline{X}_n\overline{\mu})}\right] \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} E\left[\frac{(\frac{1}{n}\sum_1^n X_n)^2 + (\frac{1}{n}\sum_1^n \mu_n)^2 - 2((\frac{1}{n}\sum_1^n X_n)(\frac{1}{n}\sum_1^n \mu_n))}{1 + (\frac{1}{n}\sum_1^n X_n)^2 + (\frac{1}{n}\sum_1^n \mu_n)^2 - 2((\frac{1}{n}\sum_1^n X_n)(\frac{1}{n}\sum_1^n \mu_n))}\right] \\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty} E\left[\frac{(\frac{1}{n}\sum_1^n X_n)^2 + 1 - 2(\frac{1}{n}\sum_1^n X_n)}{1 + (\frac{1}{n}\sum_1^n X_n)^2 + 1 - 2(\frac{1}{n}\sum_1^n X_n)}\right]
\end{aligned}$$

8

Gegeben:

Ein idealer Würfel wird n mal geworfen. Die Zufallsvariable X_i gebe die Augenzahl des i-ten Wurfs an.

Gesucht:

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei 200 Würfen eine mittlere Augenzahl von höchstens 3.6 ergibt
Lösung:

Wir suchen also die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{X} \leq 3.6)$

Es gilt, dass $X_i \sim \text{Uniform}(6)\ \forall i$ und damit ist $E(X_i) = \mu_i = \frac{6+1}{2} = 3.5$ und $Var(X_i) = \sigma^2 = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12}\ \forall i$

Da die X_is i.i.d. verteilt sind, gilt laut dem zentralen Grenzwertsatz:

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Und daraus folgt

$$\overline{X}_n \overset{ass.}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = \mathcal{N}\left(3.5, \frac{35}{200 \cdot 12}\right)$$

Wir wollen wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei 200 Würfen ein Durchschnitt von maximal 3.6 entsteht. Dafür soll Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sein. Wir suchen:

$$\begin{aligned}
P(\overline{X}_2 00 \leq 3.6) &= \Phi(\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma_{\overline{X_n}_n}}) \\
&= \Phi(\frac{3.6 - 3.5}{\sqrt{\sigma^2_{\overline{X}_n}}}) \\
&= \Phi(\frac{0.1}{0.1208}) \\
&\approx \Phi(0.8278) \\
&\approx 0.7967
\end{aligned}$$

Das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Durchschnitt bei 200 Würfen unter 3.6 bleibt, bei ca. 80% liegt