Übung 3 Lösungen

Victor Minig

January 18, 2025

1

Gegeben:

$$f(x) = \Theta(1-\Theta)^{(x-1)} I_{\{1,2\ldots\}}(x).$$

Gesucht:

Erwartungswert $E(X)$

Lösung:

Unsere Zufallsvariable X ist diskret, ihr Erwartungswert, falls er existiert, errechnet sich also wie folgt:

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{x \in R(X)} x f(x) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{N}} x \cdot \Theta(1-\Theta)^{(x-1)} \\
&= \Theta \sum_{x \in \mathbb{N}} x(1-\Theta)^{(x-1)} \\
&= \Theta + \Theta \sum_{x \in \{1,2\ldots\}} (x+1)(1-\Theta)^{(x)} \\
&= \Theta + 2\Theta(1-\Theta) + \Theta \sum_{x \in \{2,3\ldots\}} (x+1)(1-\Theta)^{(x)}
\end{aligned}$$

2

Gegeben:

$$f(x) = \Theta^x (1-\Theta)^{(1-x)} I_{\{0,1\}}(x).$$

Gesucht:

Die nichtzentralen Moment $\mu`_r$ sowie die zentralen Momente $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$

Lösung:

X ist diskret, die nichtzentralen Momente sind also gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\mu`_r &= \sum_{x \in R(X)} x^r f(x) \\
&= \sum_{x \in \{0,1\}} x^r \Theta^x (1-\Theta)^{(1-x)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0^r\Theta^0(1-\Theta)^{(1-0)} + 1^r\Theta^1(1-\Theta)^{(1-1)} \\
&= \Theta
\end{aligned}
$$

Die zentralen Momente von X:

$$
\begin{aligned}
\mu_1 &= \sum_{x\in R(x)} (x-\mu)^1 f(x) \\
&= \sum_{x\in\{0,1\}} (x-\Theta)\Theta^x(1-\Theta)^{(1-x)} \\
&= (1-\Theta)\Theta^x(1-\Theta)^{(1-1)} + (0-\Theta)\Theta^0(1-\Theta)^{(1-0)} \\
&= (1-\Theta)\Theta - \Theta(1-\Theta) \\
&= 0 \\
\mu_2 &= \sum_{x\in R(x)} (x-\mu)^2 f(x) \\
&= \sum_{x\in\{0,1\}} (x-\Theta)^2\Theta^x(1-\Theta)^{(1-x)} \\
&= (0-\Theta)^2\Theta^0(1-\Theta)^{(1-0)} + (1-\Theta)^2\Theta^1(1-\Theta)^{(1-1)} \\
&= \Theta^2(1-\Theta) + (1-\Theta)^2\Theta \\
&= \Theta(1-\Theta)(\Theta + (1-\Theta)) \\
&= \Theta(1-\Theta)(\Theta - \Theta + 1) \\
&= \Theta(1-\Theta) \\
\mu_3 &= \sum_{x\in R(x)} (x-\mu)^3 f(x) \\
&= \sum_{x\in\{0,1\}} (x-\Theta)^3\Theta^x(1-\Theta)^{1-x} \\
&= (0-\Theta)^3\Theta^0(1-\Theta)^{1-0} + (1-\Theta)^3\Theta^1(1-\Theta)^{1-1} \\
&= -\Theta^3(1-\Theta) + (1-\Theta)^3\Theta \\
&= \Theta(1-\Theta)(-\Theta^2 + (1-\Theta)^2) \\
&= \Theta(1-\Theta)(-\Theta^2 + 1^2 - 2\Theta + \Theta^2) \\
&= \Theta(1-\Theta)(1-2\Theta) \\
\mu_4 &= \sum_{x\in R(x)} (x-\mu)^4 f(x) \\
&= \sum_{x\in\{0,1\}} (x-\Theta)^4\Theta^x(1-\Theta)^{1-x} \\
&= (0-\Theta)^4\Theta^0(1-\Theta)^{1-0} + (1-\Theta)^4\Theta^1(1-\Theta)^{1-1} \\
&= \Theta^4(1-\Theta) + (1-\Theta)^4\Theta \\
&= \Theta(1-\Theta)(\Theta^3 + (1-\Theta)^3) \\
&= \Theta(1-\Theta)(\Theta^3 + 1^3 - 3\cdot 1^2\Theta + 3\cdot 1\Theta^2 - \Theta^3) \\
&= \Theta(1-\Theta)(1 - 3\Theta + 3\Theta^2)
\end{aligned}
$$

3

Gegeben:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$$

4

Gegeben:

Stetige Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ einem Median m und einer Varianz σ^2

a)

Zu Zeigen:

Die Funktion $E[(X-b)^2]$ wird für $b = \mu$ minimal

Lösung:

Die Aussage, dass $E[(X-b)^2]$ für $b = \mu$ minimal wird, ist gleichbedeutend mir der Aussage, dass $\frac{\delta E[(X-b)^2]}{\delta b} E[(X-b)^2] = 0$ für $b = \mu$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{db} E[(X-b)^2] &= \frac{d}{db} \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^2 f(x) dx \\
&= \frac{\delta}{db} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2xb + b^2) f(x) dx \\
&= \frac{d}{db} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) - 2xbf(x) + b^2 f(x) dx \\
&= \frac{d}{db} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - 2b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}_{=\mu} + b^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx}_{=1} \qquad \text{(Jetzt ableiten nach b)} \\
&= 0 - 2\mu + 2b \\
\Rightarrow 2\mu + 2b &\stackrel{!}{=} 0 \\
\Longrightarrow \mu &= b
\end{aligned}$$

b)

Zu Zeigen:

Die Funktion $E[|X-b|]$ wird durch den Median m minimiert

Lösung:

Die Aussage, dass $E[|X-b|]$ durch m minimiert wird, ist gleichbedeutend mit der Aussage $\frac{\delta E[|X-b|]}{\delta b} E[|X-b|] = 0$ für $b = m$

Anscheinend brauchen wir außerdem die *Leibnizregel* zur Lösung:

$$I = \int_{l(z)}^{h(z)} f(s,z) ds$$

$$\frac{\delta I}{\delta z} = \int_{l(z)}^{h(z)} \frac{\delta f}{\delta z} ds + \frac{\delta h}{\delta z} f(h(z,z)) - \frac{\delta l}{\delta z} f(l(z), z)$$

$$\frac{d}{db}E[|X-b|] = \frac{d}{db}\int_{-\infty}^{\infty}|x-b|f(x)dx$$
$$=$$

5

Gegeben:

Stetige Zufallsvariable X die *symmetrisch* um den Wert $x = c$ ist.

Zu Zeigen:

$E(X) = c$ und $\mu_3 = 0$

Lösung:

Die Symmetrie von X um $x = c$ lässt sich mathematisch ausdrücken durch $f(c+x) = f(c-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{c} xf(x)\ dx + \int_{c}^{\infty} xf(x)\ dx \qquad \text{Unabhängig von Symmetrie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Für das erste Integral: } & x = c - x_0 \Leftrightarrow dx = -dx_0 \\ \text{Für das zweite Integral: } & x = c + x_0 \Leftrightarrow dx = dx_0 \end{aligned}$$

$$\text{Durch Substitution ergibt sich: } E(X) = -\int_{\infty}^{0}(c-x_0)f(c-x_0)dx_0 + \int_{0}^{\infty}(c+x_0)f(c+x_0)dx_0$$

8

Gegeben:

i) $f(x) = I_{[0,1]}(x)$

ii) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$

iii) $f(x) = xe^{-x} I_{(0,\infty)}$

iv) $f(x) = \frac{1}{8}\frac{3!}{(3-x)!x!} I_{\{0,1,2,3\}}(x)$

a)

Gesucht:

Die jeweiligen momenterzeugenden Funktionen

Lösung:

Momenterzeugende Funktionen sind wie folgt definiert:

$$\text{Für diskrete ZVS:}\quad M_X(T) = Ee^{tX} = \sum_{x\in R(X)} e^{tx} f(x)$$

$$\text{Für stetige ZVS:}\quad M_X(T) = Ee^{tX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

zu i) Ist stetig, also

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} I_{[0,1]} dx \\
&= \int_0^1 e^{tx} dx \\
&= \left[\frac{1}{t} e^{tx}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{t} e^{t\cdot 1} - \frac{1}{t} e^{t\cdot 0} \\
&= \frac{1}{t} e^{t} - \frac{1}{t} \\
&= \frac{1}{t}(e^t - 1)
\end{aligned}$$

$$\text{L'Hopital}: \ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ sofern } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\text{Für } t = 0 \ \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \overset{L'hoptial}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{1} = 1$$

$$\Longrightarrow M_X(t) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } t = 0 \\ \frac{1}{t}(e^t - 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

zu ii) Ist ebenfalls stetig:

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x) dx \\
&= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_0^{\infty} \lambda e^{tx - \lambda x} \\
&= \lambda \left[e^{tx-\lambda x}\left(\frac{1}{t-\lambda}\right)\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{\lambda}{t-\lambda} \left[e^{tx-\lambda x}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{\lambda}{t-\lambda} \left((\lim_{x\to\infty} e^{(t-\lambda)x}) - 1 \right) \\
&= \begin{cases} \frac{\lambda}{t-\lambda}(0-1) = -\frac{\lambda}{t-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda - t} & \text{wenn } \lambda > t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

zu iii) Wieder stetig:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} x e^{-x} I_{(0,\infty)} dx$$
$$= \int_0^{\infty} \underbrace{x}_{=h(x)} \underbrace{e^{x(t-1)}}_{=g'(x)} dx$$

$\Big($Partielle Integration: $\int_a^b h(x)g'(x)dx = [h(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b h'(x)g(x)dx\Big)$

$$= \left[x\frac{e^{x(t-1)}}{t-1}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1 \cdot \frac{e^{x(t-1)}}{t-1} dx$$
$$= \left[x\frac{e^{x(t-1)}}{t-1}\right]_0^{\infty} - \left[\frac{e^{x(t-1)}}{(t-1)^2}\right]_0^{\infty}$$
$$= \left(\lim_{x\to\infty} x\frac{e^{x(t-1)}}{t-1}\right) - \left(0\frac{e^{0(t-1)}}{t-1}\right) - \left(\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x(t-1)}}{(t-1)^2}\right) + \left(\frac{e^{0(t-1)}}{(t-1)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{t-1}\left(\lim_{x\to\infty} xe^{x(t-1)}\right) - 0 - \frac{1}{(t-1)^2}\left(\lim_{x\to\infty} e^{x(t-1)}\right) + \frac{1}{(t-1)^2}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{t-1} \cdot 0 - \frac{1}{(t-1)^2} \cdot 0 + \frac{1}{(t-1)^2} = \frac{1}{(t-1)^2} & \text{wenn } t < 1 \\ 0/ \text{ nicht endlich} & \text{sonst} \end{cases}$$

zu iv) Diesmal ist die Funktion diskret:

$$M_X(t) = \sum_{x\in R(X)} e^{tx} f(x)$$
$$= \sum_{x\in\{0,1,2,3\}} e^{tx} \frac{1}{8} \frac{3!}{(3-x)!x!}$$
$$= \frac{3!}{8}\left(\frac{e^{t\cdot 0}}{(3-0)!0!} + \frac{e^{t\cdot 1}}{(3-1)!1!} + \frac{e^{t\cdot 2}}{(3-2)!2!} \frac{e^{t\cdot 3}1}{(3-3)!3!}\right)$$
$$= \frac{6}{8}\left(\frac{1}{6} + \frac{e^{t\cdot 1}}{2} + \frac{e^{t\cdot 2}}{2} + \frac{e^{t\cdot 3}}{6}\right)$$
$$= \frac{6}{8}\left(\frac{1 + 3e^t + 3e^{2t} + e^{3t}}{6}\right)$$
$$= \frac{1 + 3e^t + 3e^{2t} + e^{3t}}{8}$$

b)

Gesucht:

Die beiden ersten, nichtzentralen Moment (ermittelt mit Hilfe der MGF)

Lösung:

Gegeben eine MGF $M_X(t)$ lässt sich ein beliebiges nichtzentrales Moment μ'_r, sofern es exisiert, ermitteln durch:

$$\mu'_r = EX^r = \frac{d^r M_X(0)}{dt^r}$$

zu i)

$$\mu'_1 = \frac{d^1}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt}\frac{1}{t}(e^t - 1)\Big|_{t=0} \\
&= -t^{-2}(e^t - 1) + \frac{1}{t}e^t\Big|_{t=0} \\
&= -\frac{e^t}{t^2} + \frac{1}{t^2} + \frac{e^t}{t}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{te^t + 1 - e^t}{t^2}\Big|_{t=0} \\
&\overset{L'hopital}{=} \lim_{t\to 0}\frac{te^t + e^t - e^t}{2t} \\
&\overset{L'hopital}{=} \lim_{t\to 0}\frac{te^t + e^t}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_2' &= \frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}M_X(t))\Big|_{t=0} && \text{1. Ableitung von vorher} \\
&= \frac{d}{dt}\frac{te^t + 1 - e^t}{t^2}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(te^t + 1 - e^t)t^{-2}\Big|_{t=0} \\
&= (te^t + e^t - e^t)t^{-2} + (te^t + 1 - e^t)(-2t^{-3})\Big|_{t=0} \\
&= e^t t^{-1} - 2e^t t^{-2} - 2t^{-3} + 2e^t t^{-3}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{e^t - 2e^t t^{-1} - 2t^{-2} + 2e^t t^{-2}}{t}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{e^t t^2 - 2e^t t - 2 + 2e^t}{t^3}\Big|_{t=0} \\
&\overset{L'hopital}{=} \lim_{t\to 0}\frac{e^t t^2}{3t^2} \\
&\overset{L'hopital}{=} \lim_{t\to 0}\frac{e^t t^2 + 2te^t}{6t} \\
&\overset{L'hopital}{=} \lim_{t\to 0}\frac{e^t t^2 + 2te^t + 2te^t + 2e^t}{6} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

zu ii)

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= \frac{d^1}{dt}M_X(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\frac{\lambda}{\lambda - t}\Big|_{t=0} \\
&= \lambda \cdot (-1)(\lambda - t)^{-2} \cdot (-1)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\Big|_{t=0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda} \\
\mu_2' &= \frac{d^2}{dt^2} M_X(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt} M_X(t))\Big|_{t=0} && \text{1. Ableitung von vorher} \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}\Big|_{t=0} \\
&= \lambda \cdot (-2)(\lambda - t)^{-3} \cdot (-1)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{2}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

zu iii)

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= \frac{d^1}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \frac{1}{(t-1)^2}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{-2}{(t-1)^3}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{-2}{-1} = 2\mu_2' && = fracd^2dt^2 M_X(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt} M_X(t))\Big|_{t=0} && \text{1. Ableitung von vorher} \\
&= \frac{d}{dt} \frac{-2}{(t-1)^3}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{6}{(t-1)^4}\Big|_{t=0} \\
&= 6
\end{aligned}
$$

zu iv)

$$
\begin{aligned}
\mu_1' &= \frac{d^1}{dt} M_X(t)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \frac{1 + 3e^t + 3e^{2t} + e^3 t}{8}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{3e^t + 6e^{2t} + 3e^{3t}}{8}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\
\mu_2' &= \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt} M_X(t))\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} \frac{3e^t + 6e^{2t} + 3e^{3t}}{8}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{3e^t + 12e^{2t} + 9e^{3t}}{8}\Big|_{t=0}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{24}{8} = 3$$

8

Gegeben:

Zufallsvariable $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2)$ mit Dichte

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2e^{-x_1-x_2}, & \text{für } 0 < x_1 < x_2 < \infty, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a)

Gesucht:

MGF zu $\underset{\sim}{X}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
M_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x_1+t_2x_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x_1+t_2x_2} 2e^{-x_1-x_2} I_{(0,x_2)}(x_1) I_{(0,\infty)}(x_2) \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{x_2} 2e^{t_1x_1+t_2x_2-x_1-x_2}dx_1dx_2 \\
&= 2\int_0^{\infty}\left[e^{t_1x_1+t_2x_2-x_1-x_2}\frac{1}{t_1-1}\right]_0^{x_2}dx_2 \\
&= \frac{2}{t_1-1}\int_0^{\infty} e^{t_1x_2+t_2x_2-x_2-x_2} - e^{t_10+t_2x_2-0-x_2}dx_2 \\
&= \frac{2}{t_1-1}\int_0^{\infty} e^{t_1x_2+t_2x_2-2x_2} - e^{t_2x_2-x_2}dx_2 \\
&= \frac{2}{t_1-1}\left[e^{t_1x_2+t_2x_2-2x_2}\frac{1}{t_1+t_2-2} - e^{t_2x_2-x_2}\frac{1}{t_2-1}\right]_0^{\infty} \\
&= \frac{2}{t_1-1}((\lim_{x_2\to\infty} e^{t_1x_2+t_2x_2-2x_2}\frac{1}{t_1+t_2-2} - e^{t_2x_2-x_2}\frac{1}{t_2-1}) - (\frac{1}{t_1+t_2-2} - \frac{1}{t_2-1}))
\end{aligned}$$

$(\textit{Von hier nur unter der Annahme: } t_1+t_2 > 2 \cap t_2 > 1)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{t_1-1}(0 - 0 - \frac{1}{t_1+t_2-2} + \frac{1}{t_2-1}) \\
&= \frac{2}{(t_1-1)(t_2-1)} - \frac{2}{(t_1-1)(t_1+t_2-2)} \\
&= \frac{2(t_1+t_2-2)}{(t_1-1)(t_2-1)(t_1+t_2-2)} - \frac{2(t_2-1)}{(t_1-1)(t_1+t_2-2)(t_2-1)} \\
&= \frac{2(t_1+t_2-2-t_2+1)}{(t_1-1)(t_1+t_2-2)(t_2-1)} \\
&= \frac{2(t_1-1)}{(t_1-1)(t_1+t_2-2)(t_2-1)} \\
&= \frac{2}{(t_1+t_2-2)(t_2-1)}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow M_{\underline{X}}(\underline{t}) = \begin{cases} \frac{2}{(t_1+t_2-2)(t_2-1)} & \text{wenn } t_1+t_2 > 2 \cap t_2 > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b)

Gesucht:

Die beiden ersten nichtzentralen Momente $\mu'_1,\ \mu'_2$

Lösung:

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \frac{d}{dt_1} M_X(t_1,t_2)\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \frac{d}{dt_1} \frac{2}{(t_1+t_2-2)(t_2-1)}\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \frac{2}{-(t_1+t_2-2)^2(t_2-1)} \\
&= \frac{2}{-4\cdot(-1)} \\
&= \frac{1}{2} \\
E(X_1^2) &= \frac{d^2}{d^2t_1} M_X(t_1,t_2)\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \frac{d}{dt_1} \frac{2}{-(t_1+t_2-2)^2(t_2-1)}\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \frac{d}{dt_1} 2\cdot(-(t_1+t_2-2)^{-2})(t_2-1)\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= 2(t_2-1)^{-1}2(t_1+t_2-2)^{-3}\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \frac{4}{(0-1)(0+0-2)^3} \\
&= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\
E(X_2) &= \frac{d}{dt_2} M_X(t_1,t_2)\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \frac{d}{dt_2} \frac{2}{(t_1+t_2-2)(t_2-1)}\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \frac{d}{dt_2} 2(t_1+t_2-2)^{-1}(t_2-1)^{-1}\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= 2((-1)(t_1+t_2-2)^{-2}(t_2-1)^{-1} + (-1)(t_1+t_2-2)^{-1}(t_2-1)^{-2})\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= 2(-\frac{1}{(t_1+t_2-2)^2(t_2-1)} - \frac{1}{(t_1+t_2-2)(t_2-1)^2})\big|_{t_1,t_2=0} \\
&= 2(-\frac{1}{(0+0-2)^2(0-1)} - \frac{1}{(0+0-2)(0-1)^2}) \\
&= 2(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(X_2^2) &= \frac{d^2}{d^2t_2}M_X(t_1,t_2)\big|_{t_1,t_2=0}\\
&= \frac{d}{dt_2}2(-\frac{1}{(t_1+t_2-2)^2(t_2-1)}-\frac{1}{(t_1+t_2-2)(t_2-1)^2})\big|_{t_1,t_2=0}\\
&= \frac{d}{dt_2}2((-1)(t_1+t_2-2)^{-2}(t_2-1)^{-1}+(-1)(t_1+t_2-2)^{-1}(t_2-1)^{-2})\big|_{t_1,t_2=0}\\
&= 2((-1)((-2)(t_1+t_2-2)^{-3}(t_2-1)^{-1}+(t_1+t_2-2)^{-2}(-1)(t_2-1)^{-2})\\
&\quad +(-1)((-1)(t_1+t_2-2)^{-2}(t_2-1)^{-2}+(t_1+t_2-2)^{-1}(-2)(t_2-1)^{-3}))\big|_{t_1,t_2=0}\\
&= 2(\frac{2}{(t_1+t_2-2)^3(t_2-1)}+\frac{1}{(t_1+t_2-2)^2(t_2-1)^2}+\frac{1}{(t_1+t_2-2)^2(t_2-1)^2}+\frac{2}{(t_1+t_2-2)(t_2-1)^3})\big|_{t_1,t_2=0}\\
&= 2(\frac{2}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{2})\\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

10

Gegeben:

$$M_{(X_1,X_2)}((t_1,t_2)) = e^{t_1-1}+e^{t_2-2}$$

Gesucht:

Korrelationskoeffizient zu (X_1, X_2)

Lösung:

Der Korrelationskoeffizient ist gegeben durch $\frac{\sigma_{X_1X_2}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}$, wobei $\sigma_{X_1X_2}$ die Kovarianz von X_1 und X_2 ist, und $\sigma_{X_1}, \sigma_{X_2}$ die jeweiligen Standardabweichungen. Zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten müssen wir erstmal jene berechnen.

Da die Standardabweichung die Wurzel der Varianz (also des zweiten zentralen Moments) sind, brauchen wir erstmal diese:

$$Var(X_1) = E(X_1^2) - E(X_1)^2 = \mu'_{2,X_1} - (\mu'_{1,X_1})^2$$

Zur Berechnung der Varianz von X_1 und X_2 brauchen wir also zunächst das erste und das zweite, nichtzentrale Moment:

$$
\begin{aligned}
\mu'_{1,X_1} &= \frac{d}{dt_1}e^{t_1-1}+e^{t_2-2}\bigg|_{t_1,t_2=0}\\
&= e^{t_1-1}\bigg|_{t_1,t_2=0}\\
&= \frac{1}{e}\\
\mu'_{2,X_1} &= \frac{d}{dt_1}e^{t_1-1}\bigg|_{t_1,t_2=0}\\
&= \frac{1}{e}\\
Var(X_1) &= \mu'_{2,X_1} - (\mu'_{1,X_1})^2\\
&= \frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu'_{1,X_2} &= \frac{d}{dt_2} e^{t_1-1} + e^{t_2-2} \Big|_{t_1,t_2=0} \\
&= e^{t_2-2} \Big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \frac{1}{e^2} \\
\mu'_{2,X_2} &= \frac{d}{dt_2} e^{t_2-2} \Big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \frac{1}{e^2} \\
Var(X_2) &= \mu'_{2,X_2} - (\mu'_{1,X_2})^2 \\
&= \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^4}
\end{aligned}
$$

Die Kovarianz σ_{X_1,X_2} lässt sich berechnen durch:

$$
\sigma_{X_1,X_2} = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)
$$

$$
\begin{aligned}
E(X_1X_2) &= \frac{d^2}{dt_1dt_2} e^{t_1-1} + e^{t_2-2} \Big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \frac{d}{dt_1} e^{t_2-2} \Big|_{t_1,t_2=0} \\
&= 0 \Big|_{t_1,t_2=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Für den Korrelationskoeffizienten ergbit sich:

$$
\begin{aligned}
corr(X_1, X_2) &= \frac{\sigma_{X_1X_2}}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \\
&= \frac{0 - \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^1}}{\sqrt{(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2})(\frac{1}{e^2} - \frac{1}{e^4})}} \\
&= \frac{-\frac{1}{e^3}}{\sqrt{\frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^5} - \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^6}}} \\
&= -\frac{1}{\frac{1}{e^3}\sqrt{\frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^5} - \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^6}}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^6}}\sqrt{\frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^5} - \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^6}}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{e^6}(\frac{1}{e^3} - \frac{1}{e^5} - \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^6})}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{e^{-18} - e^{-30} - e^{-24} + e^{-36}}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{e^{-18} - e^{-30} - e^{-24} + e^{-36}}}
\end{aligned}
$$

11

Gegeben:

Zufallsvariable $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ wobei $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit MGF:

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad \sigma > 0$$

Gesucht:

Die Momenterzeugenden Funktionen und Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen

a)

Gegeben:

$$Z_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Lösung:

Laut *Theorem 3.11 c* gilt:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b \quad \Rightarrow \quad M_Y(t) = e^{bt} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t)$$

In unserem Fall ist $a_i = \frac{1}{n}\ \forall i$ und $b = 0$. Es folgt:

$$\begin{aligned} M_{Z_1}(t) &= e^{0 \cdot t} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(\frac{t}{n}) \\ &= (e^{\mu \frac{t}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2 (\frac{t}{n})^2})^n \\ &= e^{n \cdot (\mu \frac{t}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2 (\frac{t}{n})^2)} \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n}} \end{aligned}$$

Unter Anbetracht der MGF ergibt sich für die Verteilung von Z_1:

$$Z_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

b)

Gegeben:

$$Z_2 = \frac{1}{9+n}(10X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i)$$

Lösung:

Hier kann man wieder das oben stehende Theorem anwenden, wobei diesmal $a_1 = \frac{10}{9+n},\ a_i = \frac{1}{9+n} \forall\ i > 1$ und wieder $b = 0$

$$M_{Z_2}(t) = e^{0 \cdot t} \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t)$$

$$= M_{X_i}(\frac{10}{9+n}t) \cdot \prod_{i=2}^{n} M_{X_i}(\frac{1}{9+n}t)$$

$$= e^{\mu(\frac{10}{9+n}t)+\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{10}{9+n}t)^2} \cdot \prod_{i=2}^{n} e^{\mu(\frac{1}{9+n}t)+\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{1}{9+n}t)^2}$$

$$= e^{\mu(\frac{10}{9+n}t)+\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{10}{9+n}t)^2} \cdot e^{(n-1)(\mu(\frac{1}{9+n}t)+\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{1}{9+n}t))^2}$$

$$= e^{\mu(\frac{10}{9+n}t)+\frac{100t^2}{2(9+n)^2}\sigma^2} \cdot e^{\mu(\frac{n-1}{9+n}t)+\frac{t^2(n-1)}{2(9+n)^2}\sigma^2}$$

$$= e^{\mu(\frac{10}{9+n}t)+\frac{100t^2}{2(9+n)^2}\sigma^2+\mu(\frac{n-1}{9+n}t)+\frac{t^2(n-1)}{2(9+n)^2}\sigma^2}$$

$$= e^{\frac{\mu t}{9+n}(10+(n-1))+\frac{t^2\sigma^2}{2(9+n)^2}(100+(n-1))}$$

$$= e^{\frac{\mu t}{9+n}(9+n)+\frac{t^2\sigma^2}{2(9+n)^2}(99+n)}$$

$$= e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2(99+n)}{(9+n)^2}}$$

Dementsprechend ergibt sich für die Verteilung von Z_2:

$$Z_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{(99+n)}{(9+n)^2})\sigma^2$$

c)

Gegeben:

$$\underline{Y_1} = \underline{X}$$

Lösung:

Zum einen lässt sich die MGF von $\underline{Y}_1$ berechnen durch:

$$\begin{aligned}
M_{\underline{Y}_1}(\underline{t}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x_1+\ldots+t_nx_n} f(x_1,\ldots,x_n)\ dx_1 \ldots dx_n && \text{Wegen Unabhängigkeit} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x_1} \cdot \ldots \cdot e^{t_nx_n} f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n) dx_1 \ldots dx_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_1x_1} f(x_1) dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{t_nx_n} f(x_n) dx_n \\
&= e^{\mu t_1+\frac{1}{2}\sigma^2t_1^2} \ldots e^{\mu t_n+\frac{1}{2}\sigma^2t_n^2} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{n} \mu t_i+\frac{1}{2}\sigma^2t_i^2}
\end{aligned}$$

Alternativ, da wir wissen, dass es sich um eine multivariate Normalverteilung handelt:

$$M_{\underline{Y_1}}(\underline{t}) = e^{a't} + \frac{1}{2}t'Bt, \text{ wobei } t = (t_1,\ldots,t_n)',\ a = (\mu,\ldots,\mu)_{nx1} \text{ und } B = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \ldots \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}_{nxn}$$

und die Dichte:

$$f(\underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{y}-a)'B^{-1}(\underline{y}-a)} \sim \mathcal{N}(a, B)$$

d)

Gegeben:

$$\underline{Y_2} = (10X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Lösung:

Da wir wissen, dass $X_1 \dots X_n$ unabhängig sind und unter Anwendung des in a genannten Theorems:

$$\begin{aligned}
M_{\underline{Y_2}}(\underline{t}) &= \underbrace{M_{X_1}(10t_1)}\cdot\underbrace{M_{X_2}(t_2)\cdot\ldots+M_{X_n}(t_n)} \\
&= e^{\mu 10 t_1 + \frac{1}{2}\sigma^2(10t_1)^2} \cdot e^{\sum_{i=2}^{n}\mu t_i + \frac{1}{2}(t_i)^2\sigma^2} \\
&= e^{\mu(10t_1 + \sum_{i=2}^{n} t_i) + \frac{\sigma^2}{2}(100t_1^2 + \sum_{i=2}^{n} t_i^2)}
\end{aligned}$$

12

Gegeben:

Zufallsvariable $\underline{X} = (X_1, X_2)$ hat MGF:

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = e^{\sum_{i=1}^{2}\mu_i t_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_{ij}t_i t_j}$$

a)

Gesucht:

Gemeinsame momenterzeugende und Dichtefunktion von $aX_1 + bX_2$ und $cX_1 + dX_2$, wobei $a,\ b,\ c$ und d Konstanten sind mit $ad - bc \neq 0$

Lösung:

Wir wollen zunächst die ersten beiden zentralen Momente zu X_1 und X_2 finden:

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \frac{d}{dt_1} M_{\underline{X}}(\underline{t})\Big|_{t_1,t_2=0} \\
&= e^{\sum_{i=1}^{2}\mu_i t_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_{ij}t_i t_j}(\mu_1 + \frac{1}{2}(\sigma_{1,1}t_1 + \sigma_{1,2}t_2 + \sigma_{2,1}t_2))\Big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \mu_1 \\
E(X_1^2) &= \frac{d}{dt} e^{\sum_{i=1}^{2}\mu_i t_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_{ij}t_i t_j}(\mu_1 + \frac{1}{2}(\sigma_{1,1}t_1 + \sigma_{1,2}t_2 + \sigma_{2,1}t_2))\Big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \mu_1 M_{\underline{X}}(\underline{t})(\mu_1 + \frac{1}{2}(\sigma_{1,1}t_1 + \sigma_{1,2}t_2 + \sigma_{2,1}t_2)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(M_{\underline{X}}(\underline{t})\sigma_{1,1} + M_{\underline{X}}(\underline{t})(\mu_1 + \frac{1}{2}(\sigma_{1,1}t_1 + \sigma_{1,2}t_2 + \sigma_{2,1}t_2)(\sigma_{1,1}t_1 + \sigma_{1,2}t_2 + \sigma_{2,1}t_2)))\Big|_{t_1,t_2=0} \\
&= \mu_1^2 + \frac{1}{2}\sigma_{1,1}
\end{aligned}$$

13

Gegeben:

Folge $\{X_i\}_{i=1,2,...}$von (poissonverteilten) Zufallsvariablen mit MGF

$$M_{X_i}(t) = e^{i(e^t-1)} \text{ und } E(X_i) = Var(X_i) = i$$

Gesucht:

Grenzverteilung für $i \to \infty$ der standartisierten ZV

$$Y_i = \frac{X_i - i}{\sqrt{i}}$$

Lösung:

Wir suchen zunächst die zu Y_i gehörende MGF:

$$\begin{aligned}
M_{Y_i}(t) &= E(e^{ty_i}) \\
&= E(e^{t\cdot\frac{x_i - i}{\sqrt{i}}}) \\
&= E(e^{t\cdot(\frac{x_i}{\sqrt{i}} - \frac{i}{\sqrt{i}})}) \\
&= E(e^{t\cdot(\frac{x_i}{\sqrt{i}} - \sqrt{i})}) \\
&= E(e^{\frac{tx_i}{\sqrt{i}} - t\sqrt{i}}) \\
&= E(e^{\frac{tx_i}{\sqrt{i}}} \cdot e^{-t\sqrt{i}}) \\
&= M_{X_i}(\frac{t}{\sqrt{i}}) \cdot e^{-t\sqrt{i}} \\
&= e^{i(e^{\frac{t}{\sqrt{i}}}-1)} \cdot e^{-t\sqrt{i}} \\
&= e^{i(e^{\frac{t}{\sqrt{i}}}-1)-t\sqrt{i}} && \text{Taylorreihenentwicklung von } e^{\frac{t}{\sqrt{i}}} \\
&= e^{i(e^0 + e^0\frac{t}{\sqrt{i}} + \frac{e^0}{2!}(\frac{t}{\sqrt{i}})^2 + \frac{e^0}{3!}(\frac{t}{\sqrt{i}})^3 + ... - 1) - t\sqrt{i}} \\
&= e^{i(1 + \frac{t}{\sqrt{i}} + \frac{t^2}{2!i} + \frac{t^3}{3!i^{\frac{3}{2}}} ... - 1) - t\sqrt{i}} \\
&= e^{\frac{it}{\sqrt{i}} + \frac{t^2 i}{2i} + \frac{t^3 i}{3!i^{\frac{3}{2}}} + ... - t\sqrt{i}} \\
&= e^{t\sqrt{i} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!i^{\frac{1}{2}}} + ... - t\sqrt{i}} \\
\underset{i\to\infty}{lim} &= e^{\frac{t^2}{2} + 0 + 0 ...} \\
&= e^{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

Unter anbetracht der MGF ergibt sich für die Grenzverteilung für $i \to \infty$:

$$\underset{i\to\infty}{lim} Y_i \sim N(0,1)$$

14

Gegeben:

$$f(x_1, x_2) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & x_2 = 1 & x_2 = 2 & x_2 = 5 \\ \hline x_1 = 2 & 0.1 & 0.1 & 0 \\ \hline x_1 = 4 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \\ \hline x_1 = 8 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ \hline \end{array}$$

b)

Gesucht:

Kovarianzmatrix zu $\underline{X} = (X_1, X_2)$

Lösung:

Die Matrix beinhaltet auf der Hauptgeraden die Varianzen zu X_1 und X_2 und auf den anderen Feldern die Kovarianz.

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \sum_{x_2 \in R(X_1)} x_1 f_1(x_1) \\
&= \sum_{x_1 \in \{2,4,8\}} x_1 f_1(x_1) \\
&= 2 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.5 + 8 \cdot 0.3 \\
&= 4.8 \\
E(X_2) &= \sum_{x_2 \in R(X_2)} x_2 f_2(x_2) \\
&= \sum_{x_2 \in \{1,2,5\}} x_2 f_2(x_2) \\
&= 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.5 + 5 \cdot 0.3 \\
&= 2.7 \\
Var(X_1) &= \sum_{x_1 \in \{2,4,8\}} (x_1 - 4.8)^2 f_1(x_1) \\
&= (-2.8)^2 \cdot 0.2 + 0.8^2 \cdot 0.5 + 3.2^2 \cdot 0.3 \\
&= 4.96 \\
Var(X_2) &= \sum_{x_2 \in \{1,2,5\}} (x_2 - 2.9)^2 f_2(x_2) \\
&= (-1.7)^2 \cdot 0.2 + (-0.7)^2 \cdot 0.5 + 2.3^2 \cdot 0.3 \\
&= 2.41 \\
Cov(X_1, X_2) &= E(X_1 X_2) - E(X)E(Y) \\
&= (\sum_{x_1 \in R(X_1)} \sum_{x_2 \in R(X_2)} x_1 x_2 f(x_1, x_2)) - (4.8 \cdot 2.7) \\
&= 2 \cdot 1 \cdot 0.1 + 2 \cdot 2 \cdot 0.1 + 2 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 0.1 + 4 \cdot 2 \cdot 0.3 + 4 \cdot 5 \cdot 0.1 + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 8 \cdot 2 \cdot 0.1 + 8 \cdot 5 \cdot 0.2 - 12.96 \\
&= 2.04
\end{aligned}$$

Die Kovarianzmatrix zu $\underline{X}$ ist also

$$\begin{pmatrix} 4.96 & 2.04 \\ 2.04 & 2.7 \end{pmatrix}$$

c)

Gesucht:

Pdf zu $E(X_1|X_2), E(X_2|X_1)$ sowie $Var(X_1|X_2)$ und $E(X_1) = E[E(X_1|X_2)]$ sowie $Var(X_1) = Var[E(X_1|X_2)] + E[Var(X_1|X_2)]$

Lösung:

Zunächst die PDF zu $E(X_1|X_2), E(X_2|X_1), Var(X_1|X_2)$.

$$E(X_1|X_2) = \begin{cases} 2 \cdot 0.5 + 4 \cdot 0.5 = 3 & \text{wenn } x_2 = 1 \\ 2 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.6 + 8 \cdot 0.2 = 4.4 & \text{wenn } x_2 = 2 \\ 4 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{3} & \text{wenn } x_2 = 5 \end{cases}$$

$$E(X_2|X_1) = \begin{cases} 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.5 = 1.5 & \text{wenn } x_1 = 2 \\ 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.6 + 5 \cdot 0.2 = 2.4 & \text{wenn } x_1 = 4 \\ 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{2}{3} = 4 & \text{wenn } x_1 = 8 \end{cases}$$

$$Var(X_1|X_2) = \begin{cases} (2-3)^2 \cdot 0.5 + (4-3)^2 \cdot 0.5 = 1 & \text{wenn } x_2 = 1 \\ (2-4.4)^2 \cdot 0.2 + (4-4.4)^2 \cdot 0.6 + (8-4.4)^2 \cdot 0.2 = 3.84 & \text{wenn } x_2 = 2 \\ (4-\frac{20}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} + (8-\frac{20}{3})^2 \cdot \frac{2}{3} \approx 3.6 & \text{wenn } x_2 = 5 \end{cases}$$

$$f(E(X_1|X_2)) = \begin{cases} 0.2 & \text{wenn } E(X_1|X_2) = 3 \\ 0.5 & \text{wenn } E(X_1|X_2) = 4.4 \\ 0.3 & \text{wenn } E(X_1|X_2) = \frac{20}{3} \end{cases}$$

$$f(E(X_2|X_1)) = \begin{cases} 0.2 & \text{wenn } E(X_2|X_1) = 1.5 \\ 0.5 & \text{wenn } E(X_2|X_1) = 2.4 \\ 0.3 & \text{wenn } E(X_2|X_1) = 4 \end{cases}$$

$$f(Var(X_1|X_2)) = \begin{cases} 0.2 & \text{wenn } Var(X_1|X_2) = 1 \\ 0.5 & \text{wenn } Var(X_1|X_2) = 3.84 \\ 0.3 & \text{wenn } Var(X_1|X_2) \approx 3.6 \end{cases}$$

Und jetzt noch $E(X_1) = E[E(X_1|X_2)]$ sowie $Var(X_1) = Var[E(X_1|X_2)] + E[Var(X_1|X_2)]$:

$$\begin{aligned} E(X_1) &= 4.8 && \text{Aus b)} \\ E(E(X_1|X_2)) &= 3 \cdot 0.2 + 4.4 \cdot 0.5 + \frac{20}{3} \cdot 0.3 \\ &= 4.8 \\ Var(X_1) &= 4.96 && \text{Aus b)} \\ Var(E(X_1|X_2)) &= (3-4.8)^2 \cdot 0.2 + (4.4-4.8)^2 \cdot 0.5 + (\frac{20}{3} - 4.8)^2 \cdot 0.3 \\ &\approx 1.77333 \\ E(Var(X_1|X_2)) &= 1 \cdot 0.2 + 3.84 \cdot 0.5 + 3.6 \cdot 0.3 \\ &= 3.2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(E(X_1|X_2)) + E(Var(X_1|X_2)) &= 1.77333 + 3.2 \\
&\approx 3.9733 \qquad \text{Könnte also in Anbetracht der Rundungen hinkomen}
\end{aligned}
$$

15

Gegeben:

ZV $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ mit PDF:

$$
f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{36}{(1+x_1+x_2)^5(1+x_3)^4} & \text{für } x_1, x_2, x_3 > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

a)

Frage:

Sind die Elemente in $\underline{X}$ unabhängig?

Lösung:

Zunächst brauchen wir die marginalen Dichten $f_1(x_1), f_2(x_2), f_3(x_3)$:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1) &= \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{\infty}^{\infty} f(\underline{x})\ dx_2 dx_3 \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{36}{(1+x_1+x_2)^5(1+x_3)^4}\ dx_2 dx_3 \\
&= \int_0^{\infty} \frac{36}{(1+x_3)^4} \int_0^{\infty} (1+x_1+x_2)^{-5}\ dx_2 dx_3 \\
&= \int_0^{\infty} \frac{36}{(1+x_3)^4} \left[-\frac{1}{4}(1+x_1+x_2)^{-4} \right]_0^{\infty}\ dx_3 \\
&= \int_0^{\infty} \frac{36}{(1+x_3)^4} (0 + \frac{1}{4(1+x_1)^4}) dx_3 \\
&= \frac{36}{4(1+x_1)^4} \int_0^{\infty} (1+x_3)^{-4} dx_3 \\
&= \frac{36}{4(1+x_1)^4} \left[-\frac{1}{3}(1+x_3)^{-3} \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{36}{12(1+x_1)^4} \\
&= \frac{3}{(1+x_1)^4} \\
f_2(x_2) &= \int_{-\infty}^{-\infty} \int_{\infty}^{\infty} f(\underline{x})\ dx_1 dx_3 \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{36}{(1+x_1+x_2)^5(1+x_3)^4}\ dx_1 dx_3 \\
&= \int_0^{\infty} \frac{36}{(1+x_3)^4} \int_0^{\infty} (1+x_1+x_2)^{-5}\ dx_1 dx_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{36}{(1+x_3)^4}\left[-\frac{1}{4}(1+x_1+x_2)^{-4}\right]_0^\infty \ dx_3 \\
&= \int_0^\infty \frac{36}{(1+x_3)^4}(0+\frac{1}{4(1+x_2)^4})dx_3 \\
&= \frac{36}{4(1+x_2)^4}\int_0^\infty (1+x_3)^{-4}dx_3 \\
&= \frac{36}{4(1+x_2)^4}\left[-\frac{1}{3}(1+x_3)^{-3}\right]_0^\infty \\
&= \frac{36}{12(1+x_2)^4} \\
&= \frac{3}{(1+x_2)^4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_3(x_3) &= \int_{-\infty}^{-\infty}\int_{\infty}^{\infty} f(\underline{x}) \ dx_1 dx_3 \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{36}{(1+x_1+x_2)^5(1+x_3)^4} \ dx_1 dx_2 \\
&= \frac{36}{4(1+x_3)^4}\int_0^\infty \frac{1}{(1+x_2)^4}dx_2 \\
&= \frac{36}{4(1+x_3)^4}\left[-\frac{1}{3}(1+x_2)^{-3}\right]_0^\infty \\
&= \frac{36}{4(1+x_3)^4}(0+\frac{1}{3}) \\
&= \frac{36}{12(1+x_3)^4} \\
&= \frac{3}{(1+x_3)^4}
\end{aligned}
$$

Nun gilt es zu prüfen, ob $f(\underline{x}) = f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\cdot f_3(x_3)$

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)\cdot f_3(x_3) &= \frac{3}{(1+x_1)^4}\cdot\frac{3}{(1+x_1)^4}\cdot\frac{3}{(1+x_3)^4} \\
&= \frac{27}{(1+x_1)^4\cdot(1+x_2)^4\cdot(1+x_3)^4} \\
&\neq f(\underline{x})
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Es liegt also keine gemeinsame Unabhängigkeit vor

b)

Gesucht:

Die Kovarianzmatrix Σ zu $\underline{X}$

Lösung:

In der nxn Kovarianzmatrix befinden sich auf der Hauptdiagonalen die Varianzen zu X_1, X_2, X_3 und auf den restlichen Plätzen die Kovarianzen.

Zur Berechnung der Varianzen brauchen wir immer zunächst die jeweiligen Erwartungen:

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1)dx_1$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \frac{3x_1}{(1+x_1)^4} dx_1 \\
&= \int_0^\infty \underbrace{3x_1}_{h(x_1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+x_1)^4}}_{g'(x_1)} dx_1 \\
&= \left[3x_1 \frac{-1}{3(1+x_1)^3}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{3}{3(1+x_1)^3} dx_1 \\
&= \left[\underbrace{\left(\lim_{x_1\to\infty} 3x_1 \frac{-1}{3(1+x_1)^3}\right)}_{=0 \text{ (L'Hopital)}} - 3\cdot 0 \frac{-1}{3(1+0)^3}\right] + \left[-\frac{1}{2(1+x_1)^2}\right]_0^\infty \\
&= \left[\underbrace{\left(\lim_{x_1\to\infty} -\frac{1}{2(1+x_1)^2}\right)}_{=0} - \frac{-1}{2(1+0)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X_1) &= \int_{-\infty}^\infty (x_1 - E(X_1))^2 f_1(x_1) dx_1 \\
&= \int_0^\infty (x_1 - \frac{1}{2})^2 \frac{3}{(1+x_1)^4} dx_1 \\
&= \int_0^\infty \underbrace{(x_1^2 + \frac{1}{4} - x_1)}_{h(x_1)} \underbrace{\frac{3}{(1+x_1)^4}}_{g'(x_1)} dx_1 \\
&= \left[(x_1^2 + \frac{1}{4} - x_1)\frac{-1}{(1+x_1)^3}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{(2x_1 - 1)}_{h(x_1)} \underbrace{\frac{-1}{(1+x_1)^3}}_{g'(x_1)} dx_1 \\
&= \left[0 + \frac{1}{4}\right] - \left(\left[(2x_1 - 1)\frac{1}{2(1+x_1)^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2\frac{1}{2(1+x_1)^2} dx_1\right) \\
&= \frac{1}{4} - \left[0 - \frac{2\cdot 0 - 1}{2(1+0)^2}\right] + \left[-\frac{1}{(1+x_y)}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \left[0 - (-\frac{1}{(1+0)})\right] \\
&= -\frac{1}{4} + 1 \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Da $f_1(x_1) = f_2(x_2) = f_3(x_3)$ gilt $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{1}{2}$ sowie $Var(X_1) = Var(X_2) = Var(X_3) = \frac{3}{4}$

Nun zur Berechnung der Kovarianzen.

$$
\begin{aligned}
\sigma_{X_1X_2} &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) \\
E(X_1X_2) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 x_2 f(\underline{x})\ dx_3 dx_2 dx_1 \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x_1 x_2 \frac{36}{(1+x_1+x_2)^5 (1+x_3)^4}\ dx_3 dx_2 dx_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{36x_1x_2}{(1+x_1+x_2)^5} \int_0^\infty \frac{1}{(1+x_3)^4}\ dx_3dx_2dx_1 \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{36x_1x_2}{(1+x_1+x_2)^5} \left[\frac{-1}{3(1+x_3)^4}\right]_0^\infty\ dx_2dx_1 \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{36x_1x_2}{(1+x_1+x_2)^5} \left[0+\frac{1}{3}\right]\ dx_2dx_1 \\
&= \int_0^\infty 12x_1 \int_0^\infty \frac{\overbrace{x_2}^{h(x_2)}}{\underbrace{(1+x_1+x_2)^5}_{g'(x_2)}}\ dx_2dx_1 \\
&= \int_0^\infty 12x_1 \left(\left[\frac{-x_2}{4(1+x_1+x_2)^4}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-1}{4(1+x_1+x_2)^4}\ dx_2\right)\ dx_1 \\
&= \int_0^\infty 12x_1 \left([0-0] - \left[\frac{1}{12(1+x_1+x_2)^3}\right]_0^\infty\right) dx_1 \\
&= \int_0^\infty 12x_1 \cdot \left(-\left[0-\frac{1}{12(1+x_1+0)^3}\right]\right)\ dx_1 \\
&= \int_0^\infty \frac{12\overbrace{x_1}^{h(x)}}{12\underbrace{(1+x_1)^3}_{g'(x)}}\ dx_1 \\
&= \left[-\frac{x_1}{2(1+x_1)^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{2(1+x_1)^2}\ dx_1 \\
&= [0-0] - \left[\frac{1}{2(1+x_1)}\right]_0^\infty \\
&= -\left[0-\frac{1}{2(1+0)}\right] \\
&= \frac{1}{2} \\
\sigma_{1,2} &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4} \\
E(X_1X_3) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x_1x_3 f(\underline{x})\ dx_2dx_1dx_3 \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty x_1x_3 \frac{36}{(1+x_1+x_2)^5(1+x_3)^4}\ dx_2dx_1dx_3 \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{9x_1x_3}{(x_1+1)^4(x_3+1)^4}\ dx_1dx_3 \\
&= 9\int_0^\infty \frac{x_3}{(1+x_3)^4}dx_3 \int_0^\infty \frac{x_1}{(1+x_1)^4}dx_1 \\
&= 9\left(\left[\frac{x_3}{3(1+x_3)^3}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-1}{3(1+x_3)^3}dx_3\right)\left(\left[\frac{x_1}{3(1+x_1)^3}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-1}{3(1+x_1)^3}dx_1\right) \\
&= 9\left(0-\left[\frac{1}{6(1+x_3)^2}\right]_0^\infty\right)\left(0-\left[\frac{1}{6(1+x_1)^2}\right]_0^\infty\right) \qquad = 9\left(-\left[0-\frac{1}{6}\right]\right)\left(-\left[0-\right.\right. \\
&= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{1,3} &= E(X_1, X_3) - E(X_1)E(X_2) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Es gilt $Cov(X_1 X_3) = Cov(X_2 X_3) = 0$, da die Dichtefunktion *symmetrisch* in x_1 und x_2 ist.

Das ergibt für die Kovarianzmatrix:

$$
\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}
$$

c)

Gesucht:

$E(X_1 X_3)$, $E(X_1|X_3)$ und $Var(X_1|X_3)$

Lösung:

$E(X_1 X_3)$ haben wir schon in $b)$ berechnet

Da X_1 und X_3 unabhängig sind, wie sich dadurch zeigt, dass $\sigma_{1,2} = 0$, gilt $E(X_1|X_3) = E(X_1)$ und $Var(X_1|X_3) = Var(X_1)$.

d)

Gesucht:

Die Regressionsgeraden für X_1 und X_3

Lösung:

Die Regressionsgerade für X_1 ist gegeben durch $E(X_1|X_2, X_3)$:

$$
\begin{aligned}
E(X_1|X_2, X_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{f(\underline{x})}{f_2(x_2) f_3(x_3)} dx_1 \\
&= \int_0^{\infty} x_1 \frac{\frac{36}{(1+x_1+x_2)^5 (1+x_3)^4}}{\frac{3}{(1+x_2)^4} \frac{3}{(1+x_3)^4}} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{x_1 36 (1+x_2)^4 (1+x_3)^4}{9(1+x_1+x_2)^5 (1+x_3)^4} dx_1 \\
&= 4(1+x_2)^4 \int_0^{\infty} \frac{x_1}{(1+x_1+x_2)^5} dx_1 \\
&= 4(1+x_2)^4 \left(\left[x_1 \frac{-1}{4(1+x_1+x_2)^4} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{-1}{4(1+x_1+x_2)^4} dx_1 \right) \\
&= 4(1+x_2)^4 \left(\left[0 + \frac{1}{4(1+x_2)^4} \right] - \left[\frac{1}{12(1+x_1+x_2)^3} \right]_0^{\infty} \right) \\
&= 4(1+x_2)^4 \left(\frac{1}{4(x_2)^4} + \frac{1}{12(1+x_2)^3} \right) \\
&= \frac{4(1+x_2)^4}{4(1+x_2)^4} + \frac{4(1+x_2)^4}{12(1+x_2)^3}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_2$$