Dr. Christian Aßmann

Methodenlehre der Statistik III

Übungsblatt 2

1. *(pdf, univariat)* Ein Würfel ist so manipuliert, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl i, $(i = 1, \ldots, 6)$ proportional zu i ist. Bezeichne X die Augenzahl beim Ausspielen des Würfels. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X an.

2. *(pdf und cdf, univariat)* Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal Kopf erscheint, höchstens jedoch dreimal. Die Zufallsvariable X gebe an, wie oft die Münze geworfen wird. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und die Verteilungsfunktion von X an.

3. *(pdf, univariat)* Die Zufallsvariable X habe folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{2}(2 - x)I_{(0,2)}(x).$$

   Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

   (a) $P(x < 1{,}2)$

   (b) $P(x > 1{,}6)$

   (c) $P(1{,}2 < x < 1{,}6)$.

4. *(pdf, univariat)* Prüfen Sie, ob die beiden folgenden Funktionen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen sein können:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \frac{1}{x} I_{\{2,3,\ldots\}}(x)\,, \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{1}{2^x} I_{\{2,3,\ldots\}}(x)\ .$$

5. *(pdf und cdf, univariat)* Ermitteln Sie zu den unten angegebenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen die entsprechenden Verteilungsfunktionen und skizzieren Sie jeweils beide Funktionen.

   (a) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < 1, \\ 2 - x & \text{für} \quad 1 \le x < 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (b) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{4}(3 - x) & \text{für} \quad 1 \le x < 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < 1, \\ (x-1) & \text{für} \quad 1 \le x < 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x < 1, \\ (x-5) & \text{für} \quad 5 \le x < 6, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

6. *(pdf und cdf, univariat)* Ermitteln Sie zu den angegebenen Verteilungsfunktionen die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen.

   (a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0, \\ x^2 & \text{für} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

   (b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 2, \\ (x-2)^3 & \text{für} \quad 2 \le x \le 3, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

   (c) $F(x) = [1 - \exp\{-\lambda(x-c)\}] I_{[c,\infty)}(x) \ , \quad \lambda > 0.$

7. *(pdf und cdf, univariat)* Gegeben sei die Zufallsvariable X mit folgender Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f(x) = \alpha(1-\beta)^{x-1} I_{\{1,2,3,\dots\}}(x), \quad \text{mit} \beta \in (0,1).$$

   (a) Für welche Werte des Parameters α ist $f(x)$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion?

   (b) Gehen Sie davon aus, dass $P(x = 1) = 0{,}05$. Wie lautet dann die genaue funktionale Form der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion? Wie groß ist dann $P(x = 10)$?

   (c) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion von X und geben Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $x \le 10$ an.

8. *(gemeinsame pdf und cdf, multivariat)* Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen (X_1, X_2) sei

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4} I_{[0,4]}(x_1) I_{[0,1]}(x_2) \ .$$

   (a) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion von (X_1, X_2) und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(2 \le x_1 \le 3; 0{,}5 \le x_2 \le 1)$.

   (b) Ermitteln Sie die marginalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$ sowie die bedingten Dichtefunktionen $f(x_1|x_2)$ und $f(x_2|x_1)$.

9. *(gemeinsame cdf, multivariat)* Skizzieren Sie die Funktion

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x_1 + x_2 < 0 \\ 1 & \text{für} \quad x_1 + x_2 \ge 0 \end{cases}$$

   und zeigen Sie, dass sie keine gemeinsame Verteilungsfunktion sein kann.

10. *(gemeinsame pdf, multivariat)* Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen (X_1, X_2) sei

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(4x_1x_2 + 1)I_{[0,1]}(x_1)I_{[0,1]}(x_2) \ .$$

   (a) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion von (X_1, X_2).

   (b) Ermitteln Sie die marginalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$ und prüfen Sie ob X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind.

   (c) Bestimmen Sie die bedingte Dichtefunktion $f(x_1|x_2)$ sowie die bedingte Verteilungsfunktion $F(x_1|x_2)$.

11. *(gemeinsame pdf, multivariat)* Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen (X_1, X_2) sei

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}I_{[0,4]}(x_1)I_{[0,\frac{1}{4}x_1]}(x_2) \ .$$

   (a) Ermitteln Sie die Verteilungsfunktion von (X_1, X_2) und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(2 \leq x_1 \leq 3; \frac{1}{2} \leq x_2 \leq \frac{3}{2})$.

   (b) Ermitteln Sie die marginalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_1(x_1)$ und $f_2(x_2)$ sowie die bedingten Dichtefunktionen $f(x_1|x_2 = \frac{1}{4})$ und $f(x_2|x_1 = 1)$.

12. *(gemeinsame pdf, multivariat)* Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen (X_1, X_2, X_3) sei

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{16}(x_1x_2^2e^{-x_3})I_{[0,2]}(x_1)I_{[0,2]}(x_2)I_{[0,\infty)}(x_3) \ .$$

   (a) Bestimmen Sie die marginalen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für X_1, X_2, X_3.

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(x_1 \geq 1)$?

   (c) Sind die drei Zufallsvariablen stochastisch unabhängig?

   (d) Ermitteln Sie die marginalen Verteilungsfunktionen von X_2 und X_3.

   (e) Ermitteln Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion von X_1, X_2 und X_3, und geben Sie die Wahrscheinlichkeit für $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq 1$, $x_3 \leq 10$ an.

   (f) Wie lautet die bedingte Dichtefunktion von x_1 gegeben $x_2 = 1$ und $x_3 = 0$?

13. *(gemeinsame pdf, multivariat)* Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen (X, Y) sei

$$f(x, y) = k \cdot (x^2 + y^2)I_{[0,1]}(x)I_{[0,1]}(y)$$

   (a) Berechnen Sie k.

   (b) Berechnen Sie die marginalen Verteilungen $f(x)$ und $f(y)$.

   (c) Berechnen Sie $P(3x > y)$.