Dr. Christian Aßmann

Methodenlehre der Statistik III

Übungsblatt 3

1. *(Erwartungswert)* Die Zufallsvariable X habe die Wahrscheinlichkeitsdichte
$$f(x) = \theta(1-\theta)^{(x-1)} I_{\{1,2,\ldots\}}(x) \ .$$
Ermitteln Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$.

2. *(Momente)* Die Zufallsvariable X habe die Wahrscheinlichkeitsdichte
$$f(x) = \theta^x (1-\theta)^{(1-x)} I_{\{0,1\}}(x) \ .$$
Geben Sie die nichtzentralen Momente μ_r' und die zentralen Momente μ_2, μ_3 und μ_4 von X an.

3. *(Momente)* Die Zufallsvariable X habe die Wahrscheinlichkeitsdichte
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x) \ .$$
Zeigen Sie per Induktion, dass die nichtzentralen Momente gegeben sind durch
$$\mu_r' = \frac{r!}{\lambda^r} \ , \ r = 1, 2, \ldots \ .$$

4. *(Momente)* Die stetige Zufallsvariable X habe einen Erwartungswert μ, einen Median m und eine Varianz σ^2.
   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathrm{E}[(X-b)^2]$ für $b = \mu$ minimal wird.
   (b) Zeigen Sie, dass der Median m die Funktion $\mathrm{E}[|X-b|]$ minimiert.

5. *(Momente)* Betrachten Sie die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariable X, die symmetrisch um den Wert $x = c$ ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{E}(X) = c$ und $\mu_3 = 0$.

6. *(Momente)* Die Zufallsvariable X habe folgende Wahrscheinlichkeitsdichte (Standardnormalverteilung):
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \ , \quad -\infty < x < \infty \ ,$$
mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Zeigen Sie, dass sich die zentralen Momente wie folgt darstellen lassen:
$$(a) \quad \mu_{2k+1} = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots \qquad (b) \quad \mu_{2k} = \prod_{i=1}^{k} (2k - 2i + 1) \quad \text{für } k = 1, 2, \ldots \ .$$

7. *(Existenz von Momenten)* Die Zufallsvariable X habe folgende Wahrscheinlichkeitsdichte (Cauchy-Verteilung):

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \ , \quad -\infty < x < \infty \ .$$

Zeigen Sie, dass die Momente dieser Verteilung nicht existieren.

8. *(Momenterzeugende Funktionen, eindimensional)* Betrachtet seien folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen:

   i) $f(x) = I_{[0,1]}(x)$

   ii) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x) \ , \quad \lambda > 0$

   iii) $f(x) = xe^{-x} I_{(0,\infty)}(x)$

   iv) $f(x) = \frac{1}{8} \frac{3!}{(3-x)!x!} I_{\{0,1,2,3\}}(x)$.

   (a) Ermitteln Sie die entsprechenden momenterzeugenden Funktionen, sofern diese existieren.

   (b) Ermitteln Sie die beiden ersten nichtzentralen Momente mit Hilfe der momenterzeugenden Funktionen, sofern diese existieren.

9. *(Momenterzeugende Funktionen, mehrdimensional)* Die gemeinsame Dichtefunktion der Zufallsvariable $\underline{X} = (X_1, X_2)$ sei mit

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 2e^{-x_1-x_2} & \text{für} \quad 0 < x_1 < x_2 < \infty \ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

   (a) Ermitteln Sie die momenterzeugende Funktion.

   (b) Ermitteln Sie die beiden ersten nichtzentralen Momente mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion.

   (c) Bestimmen Sie mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion die Randdichtefunktion von X_1.

10. *(Momenterzeugende Funktionen, mehrdimensional)* Ermitteln Sie für die Zufallsvariable $\underline{X} = (X_1, X_2)$ mit der momenterzeugenden Funktion

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = e^{t_1 - 1} + e^{t_2 - 2}$$

den Korrelationskoeffizienten.

11. *(Eigenschaften momenterzeugender Funktionen)* Betrachtet sei die Zufallsvariable $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, wobei die einzelnen Elemente jeweils unabhängige ($\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-normalverteilte) Zufallsvariablen mit folgender momenterzeugenden Funktion:

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\} \ , \quad \sigma > 0$$

sind. Geben Sie die momenterzeugenden Funktionen und Verteilungen der folgenden Zufallsvariablen an:

a) $Z_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

b) $Z_2 = \frac{1}{9+n}(10X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i)$

c) $\underline{Y}_1 = \underline{X}$

d) $\underline{Y}_2 = (10X_1, X_2, \ldots, X_n)$

12. *(Momenterzeugende Funktionen, mehrdimensional)* Die (bivariat normalverteilte) Zufallsvariable $\underline{X} = (X_1, X_2)$ hat folgende momenterzeugende Funktion:

$$M_{\underline{X}}(\underline{t}) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{2}\mu_i t_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sigma_{ij}t_i t_j\right\} .$$

(a) Ermitteln Sie die gemeinsame momenterzeugende Funktion und die gemeinsame Dichtefunktion von $aX_1 + bX_2$ und $cX_1 + dX_2$, wobei a, b, c und d Konstanten sind mit $ad - bc \neq 0$.

(b) Ermitteln Sie die momenterzeugende Funktion und die Dichtefunktion von $aX_1 + bX_2$, wobei a und b Konstanten sind.

13. *(Eigenschaften momenterzeugender Funktionen)* Betrachtet sei die Folge $\{X_i\}_{i=1,2,\ldots}$ von (Poisson-verteilten) Zufallsvariablen mit der momenterzeugenden Funktion

$$M_{X_i}(t) = \exp\{i(e^t - 1)\}$$

und $\mathrm{E}(X_i) = \mathrm{var}(X_i) = i$. Geben Sie die Grenzverteilung für $i \to \infty$ der standardisierten Zufallsvariable

$$Y_i = \frac{X_i - i}{\sqrt{i}}$$

an.

14. *(Gemeinsame Momente)* Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariable $\underline{X} = (X_1, X_2)$ sei durch folgende Wahrscheinlichkeitstabelle gegeben:

	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 5$
$x_1 = 2$	0,1	0,1	0
$x_1 = 4$	0,1	0,3	0,1
$x_1 = 8$	0	0,1	0,2

(a) Diskutieren Sie die Existenz der Momente von $\underline{X}$.

(b) Ermitteln Sie die Kovarianzmatrix von $\underline{X}$.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen von $\mathrm{E}(X_1|X_2)$, $\mathrm{E}(X_2|X_1)$ sowie $\mathrm{var}(X_1|X_2)$, und ermitteln Sie $\mathrm{E}(X_1) = \mathrm{E}[\mathrm{E}(X_1|X_2)]$ sowie $\mathrm{var}(X_1) = \mathrm{var}[\mathrm{E}(X_1|X_2)] + \mathrm{E}[\mathrm{var}(X_1|X_2)]$.

(d) Bestimmen Sie die Regressionsgerade einer Regression von X_1 auf X_2.

15. *(Gemeinsame Momente)* Die Zufallsvariable $\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ besitze die folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{36}{(1+x_1+x_2)^5(1+x_3)^4} & \text{für} \quad x_1, x_2, x_3 > 0 \ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   (a) Prüfen Sie, ob die Elemente in $\underline{X}$ stochastisch unabhängig sind.
   (b) Ermitteln Sie die Kovarianzmatrix von $\underline{X}$.
   (c) Bestimmen Sie $\mathrm{E}(X_1X_3)$, $\mathrm{E}(X_1|X_3)$ sowie $\mathrm{var}(X_1|X_3)$.
   (d) Bestimmen Sie die beiden Regressionsgeraden für X_1 und X_3.

16. *(Momente)* Sei X eine Zufallsvariable, die nicht negative Werte annehmen kann und die Verteilungsfunktion $F(x)$ besitzt. Zeigen Sie:

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx \ .$$

Veranschaulichen Sie das Integral grafisch und verwenden Sie die Substitutionsregel der Integralrechnung.

17. *(Momente)* Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen X und Y ist definiert als

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y))] \ .$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$$

gilt.