Dr. Christian Aßmann

Methodenlehre der Statistik III

Übungsblatt 7

1. Es sei $\{X_i, i : 1 \to 3\}$ eine Zufallsstichprobe aus einer Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$.

   (a) Geben Sie die Dichtefunktion der Randverteilung für die Positionsstichprobenfunktionen $X_{[1]}$ und $X_{[3]}$ an.

   (b) Geben Sie die Erwartungswerte und Varianzen für $X_{[1]}$ und $X_{[3]}$ sowie deren Kovarianz an.

   (c) Man betrachte die Stichprobenfunktionen

   $$\begin{aligned} M &= X_{[2]} \qquad \text{(Median)} \\ MR &= (X_{[1]} + X_{[3]})/2 \qquad \text{(Midrange)} \end{aligned}$$

   und zeige, dass sowohl M als auch MR erwartungstreue Schätzfunktionen für $\mathrm{E}(X_i)$ sind, d.h. $\mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(X_i)$ und $\mathrm{E}(MR) = \mathrm{E}(X_i)$. Welche der beiden Schätzfunktionen führt zur 'genaueren' Schätzung?

2. Betrachtet wird eine Zufallsstichprobe über den Benzinverbrauch, gemessen in Kilometer pro Liter, von 20 Lastkraftwagen mit dem folgenden Resultat:

   [25,52; 24,90; 22,24; 22,36; 26,62; 23,46; 25,46; 24,98; 25,82; 26,10; 21,59; 22,89; 27,82; 22,40; 23,98; 27,77; 23,29; 24,57; 23,97; 24,70] .

   (a) Geben Sie die empirische Verteilungsfunktion an und stellen Sie diese grafisch dar.

   (b) Wie groß ist die geschätzte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Benzinverbrauch höher als 26 km/l ist?

   (c) Wie groß ist die geschätzte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Benzinverbrauch zwischen 24 und 26 km/l liegt?

3. Der Anteil der Belegschaft eines Chemiekonzerns, der krankheitsbedingt mindestens einen Tag pro Woche fehlt, sei durch eine auf dem Intervall $\left(0, \frac{1}{10}\right)$ gleichverteilte Zufallsvariable X darstellbar. Betrachten Sie eine Zufallsstichprobe von 8 Wochen $\{X_i, i : 1 \to 8\}$.

   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht mehr als 5 Prozent der Belegschaft krankheitsbedingt fehlen (d.h. dass der größte Belegschaftsanteil, der krankheitsbedingt fehlt, kleiner als 5 Prozent ist)?

   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 8 Stichprobenvariablen zwischen 0,025 und 0,075 liegen?

4. Es sei $\{X_i, i : 1 \to n\}$ eine Zufallsstichprobe aus einer Gleichverteilung auf dem Intervall $(\mu - \sqrt{3}\sigma, \mu + \sqrt{3}\sigma)$ mit den entsprechenden Ordnungsstatistiken $X_{[1]} \leq X_{[2]} \leq \ldots \leq X_{[n]}$.

   (a) Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X_{[n]} - X_{[1]}$.

   (b) Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Varianz von $(X_{[1]} + X_{[n]})/2$.

   (c) Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X_{[k+1]}$, falls $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

   (d) Vergleichen Sie die Varianzen von $(\sum_{i=1}^{n} X_i)/n$, $X_{[k+1]}$ und $(X_{[1]} + X_{[n]})/2$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

5. Es sei $\{X_i, i : 1 \to n\}$ eine Zufallsstichprobe aus einer Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$ mit den entsprechenden Ordnungsstatistiken $X_{[1]} \leq X_{[2]} \leq \ldots \leq X_{[n]}$.

   (a) Geben Sie die gemeinsame Dichte der Ordnungsstatistiken $X_{[1]}, \ldots, X_{[n]}$ an.

   (b) Zeigen Sie, dass die k-te Ordnungsstatistik einer Beta-Verteilung mit den Parametern k und $n + 1 - k$ folgt.

   (c) Geben Sie die Dichte des Stichprobenmaximums an.

6. Die drei WG-Bewohner gehen am Freitag vor dem WG-Wochenende in die Mensa. Der WG-Wochenendausflug findet nur statt, wenn alle drei mitmachen. Die Temperaturen der Speisen in der Mensa sind gleichverteilt auf dem Intervall von 40 bis 90 Grad Celsius. Der Genuss einer Speise von unter 50 Grad Celsius führt mit Sicherheit zu einer plötzlichen Magendarmerkrankung, die eine Teilnahme am WG-Wochenendausflug unmöglich macht.

   (a) Welche Temperatur wird für die kälteste der drei Mahlzeiten erwartet?

   (b) Welche Temperatur wird für die mittlere der drei Mahlzeiten erwartet? (Rechnung nicht erforderlich, der erklärende Satz reicht)

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt der WG-Wochenendausflug aus?