Aufgabe A (18 Punkte, 18 Points)

Betrachten Sie die zweidimensionale Zufallsvariable $\tilde{X} = (X_1, X_2)$ mit der gemeinsamen Dichtefunktion

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x_1) I_{(-\infty,\infty)}(x_2).$$

a1) *(6 Punkte)* Welcher Verteilung folgen X_1 und X_2 jeweils? Prüfen Sie zudem, ob X_1 und X_2 stochastisch unabhängig sind.

a2) *(6 Punkte)* Wie lautet die Verteilung von $\omega X_1 + (1-\omega)X_2$ mit $\omega \in (0,1)$? Geben Sie $\Pr(\omega X_1 + (1-\omega)X_2 < 1)$ mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, d.h. $\Phi(\cdot)$, an.

a3) *(6 Punkte)* Geben Sie die Dichtefunktion des Verhältnisses $\frac{X_1}{X_2}$ an und beschreiben Sie die Schritte für die Herleitung der Dichtefunktion (keine Berechnungen erforderlich).

Consider the two-dimensional random variable $\tilde{X} = (X_1, X_2)$ with the joint density function

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right\} I_{(-\infty,\infty)}(x_1) I_{(-\infty,\infty)}(x_2).$$

a1) (6 Points) *Which distribution do X_1 and X_2 follow each? Are X_1 and X_2 stochastically independent?*

a2) (6 Points) *What is the distribution of $\omega X_1 + (1-\omega)X_2$ with $\omega \in (0,1)$? Provide $Pr(\omega X_1 + (1-\omega)X_2 < 1)$ using the standard normal cumulative distribution function, i.e. $\Phi(\cdot)$.*

a3) (6 Points) *Provide the density function of the ratio $\frac{X_1}{X_2}$ and describe the steps for deriving this density (no calculations required).*

Aufgabe B (12 Punkte, 12 Points)

Es sei $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen aus einer Exponentialverteilung mit

$$f(u;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}u\right\}\mathcal{I}_{(0,\infty)}(u).$$

Ferner sei Z_n das arithmetische Mittel dieser Zufallsvariablen, d.h.

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i.$$

b1) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass für Z_n Konvergenz im quadratischen Mittel gilt. Geben Sie den Grenzwert an.

b2) *(4 Punkte)* Ermitteln Sie die asymptotische Verteilung von Z_n.

b3) *(4 Punkte)* Ermitteln Sie die asymptotische Verteilung von $Y_n = \frac{1}{Z_n}$.

Let $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ be a sequence of independent random variables from a exponential distribution with

$$f(u;\lambda) = \frac{1}{\lambda}\exp\left\{-\frac{1}{\lambda}u\right\}\mathcal{I}_{(0,\infty)}(u).$$

Further, let Z_n denote the arithmetic mean of the random variables, i.e.

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i\,.$$

b1) (4 Points) *Show that Z_n converges in mean square and provide the limiting value.*

b2) (4 Points) *Derive the asymptotic distribution of Z_n.*

b3) (4 Points) *Provide the asymptotic distribution of $Y_n = \frac{1}{Z_n}$.*

Aufgabe C (18 Punkte, 18 Points)

Sei X_1, X_2, X_3 eine unabhängig und identisch verteilte Zufallsstichprobe mit

$$f(x) = x^{-2} I_{(1,\infty)}(x).$$

c1) *(6 Punkte)* Geben Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$ an.

c2) *(6 Punkte)* Sei $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}$. Bestimmen Sie die Dichtefunktion von Y.

c3) *(6 Punkte)* Überprüfen Sie, ob $E[X_1]$ und $E[Y]$ jeweils existieren und geben Sie gegebenenfalls die jeweiligen Erwartungswerte an.

Let X_1, X_2, X_3 denote an independent and identically distributed random sample with

$$f(x) = x^{-2} I_{(1,\infty)}(x).$$

c1) (6 Punkte) *Give the distribution function $F(x)$.*

c2) (6 Punkte) *Set $Y = \min\{X_1, X_2, X_3\}$. Derive the density function of Y.*

c3) (6 Punkte) *Check, whether $E[X_1]$ or $E[Y]$ exist and if so, provide the corresponding expectations.*

Aufgabe D (12 Punkte)

Stellen Sie die verschiedenen Möglichkeiten der statistischen Modellbildung mittels Dichtefunktionen (Kapitel 2) und statistischer Momente (Kapitel 3) überblicksartig dar. Gehen Sie dabei auch auf die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Ansätzen ein.

Provide a short overview of the different possibilities of statistical modeling via statistical densities (chapter 2) and statistical moments (chapter 3). Also discuss the relationships between the different approaches.