# Übung 4 Lösungen

Victor Minig

January 28, 2025

## 1

**Gegeben:**

Die Dichte einer hypergeometrischen Verteilung:

$$f(x; M, K, n) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} I_{\{0,1,\dots,n\}}(x)$$

Mit $M \in \mathbb{N},\ K = 0, 1, \dots, M$ und $n = 1, 2, \dots, M$

**Gesucht:**

Erwartungswert $E(X)$ und Varianz $Var(X)$

**Lösung:**

Da $X$ diskret ist:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x \in R(X)} x f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} \\
&= \\
Var(X) &= (\sum_{x\in}^{R} x^2 f(x)) - E(X)^2 \\
&= (\sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}) - (\frac{nK}{M})^2 \\
&= (\sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}) - (\frac{nK}{M})^2 \\
&= (\sum_{x=1}^{n} x^2 \frac{\frac{K}{x}\binom{K-1}{x-1}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}) - (\frac{nK}{M})^2 \\
&= (K\sum_{x=1}^{n} x \frac{\binom{K-1}{x-1}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}}) - (\frac{nK}{M})^2 \\
\text{Setze } y = x - 1 \qquad &= (K\sum_{y=0}^{n-1} (y+1) \frac{\binom{K-1}{y}\binom{M-K}{n-(y+1)}}{\binom{M}{n}}) - (\frac{nK}{M})^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[K\left(\sum_{y=0}^{n-1} y\frac{\binom{K-1}{y}\binom{M-K}{n-(y+1)}}{\binom{M}{n}} + \frac{\binom{K-1}{y}\binom{M-K}{n-(y+1)}}{\binom{M}{n}}\right)\right] - \left(\frac{nK}{M}\right)^2 \\
&= \left[K\left(\sum_{y=1}^{n-1} y\frac{\frac{K-1}{y}\binom{K-2}{y-1}\binom{M-K}{n-(y+1)}}{\binom{M}{n}} + \sum_{y=0}^{n-1}\frac{\binom{K-1}{y}\binom{M-K}{n-(y+1)}}{\binom{M}{n}}\right)\right] - \left(\frac{nK}{M}\right)^2 \\
&= \left[K\left((K-1)\sum_{y=1}^{n-1}\frac{\binom{K-2}{y-1}\binom{M-K}{n-(y+1)}}{\binom{M}{n}} + \sum_{y=0}^{n-1}\frac{\binom{K-1}{y}\binom{M-K}{n-(y+1)}}{\binom{M}{n}}\right)\right] - \left(\frac{nK}{M}\right)^2 \\
\text{Setze } z = y-1 \qquad &= \left[K\left((K-1)\sum_{z=0}^{n-2}\frac{\binom{K-2}{z}\binom{M-2-K+2}{n-2-(z+2)+2}}{\frac{M}{n}\frac{M-1}{n-1}\binom{M-2}{n-2}} + \sum_{y=0}^{n-1}\frac{\binom{K-1}{y}\binom{M-1-K+1}{n-1-(y+1)+1}}{\frac{M}{n}\binom{M-1}{n-1}}\right)\right] - \left(\frac{nK}{M}\right)^2 \\
&= \left[K\left((K-1)\frac{n}{M}\frac{n-1}{M-1}\underbrace{\sum_{z=0}^{n-2}\frac{\binom{K-2}{z}\binom{(M-2)-(K-2)}{(n-2)-z}}{\binom{M-2}{n-2}}}_{=1,\text{ da } Z\sim Hypergeom(M-2,K-2,n-2)} + \frac{n}{M}\underbrace{\sum_{y=0}^{n-1}\frac{\binom{K-1}{y}\binom{(M-1)-(K-1)}{(n-1)-y+}}{\binom{M-1}{n-1}}}_{=1,\text{ da } Y\sim Hypergeom(M-1,K-1,n-1)}\right)\right] \\
&\quad - \left(\frac{nK}{M}\right)^2 \\
&= K\left((K-1)\frac{n}{M}\frac{n-1}{M-1} + \frac{n}{M}\right) - \left(\frac{nK}{M}\right)^2 \\
&= (K-1)\frac{nK}{M}\frac{n-1}{M-1} + \frac{nK}{M} - \left(\frac{nK}{M}\right)^2 \\
&= \frac{nK}{M}\left((K-1)\frac{n-1}{M-1} + 1 - \frac{nK}{M}\right) \\
&= \frac{nK}{M}\left(\frac{(K-1)(n-1)M}{M(M-1)} + \frac{M(M-1)}{M(M-1)} - \frac{nK(M-1)}{M(M-1)}\right) \\
&= \frac{nK}{M}\left(\frac{KnM - nM - KM + M + M^2 - M - nKM + nK}{M(M-1)}\right) \\
&= \frac{nK}{M}\left(\frac{M^2 - nM - KM + nk}{M(M-1)}\right) \\
&= \frac{nK}{M}\left(\frac{(M-n)(M-k)}{M(M-1)}\right)
\end{aligned}
$$

# 2

**Gegeben:**

Dichte einer Betaverteilung:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}I_{(0,1)}(x), \qquad \alpha,\beta > 0$$

Wobei B die Betafunktion ist:

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \qquad \Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^t\ dt \qquad \text{(Gammafunktion)}$$

**Gesucht:**

Erwartungswert $E(X)$ und Varianz $Var(X)$

**Lösung:**

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;\alpha,\beta)dx \\
&= \int_0^1 x \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha+1,\beta)} x^{(\alpha+1)-1}(1-x)^{\beta-1}dx \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} B(\alpha+1,\beta) \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{B(\alpha+1,\beta)} x^{(\alpha+1)-1}(1-x)^{\beta-1}dx}_{=1 \text{ für } X\sim Beta(\alpha+1,\beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\
Var(X) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x;\alpha,\beta)dx\right) - E(X)^2 \\
&= \left(\int_0^1 x^2 \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx\right) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}dx\right) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{B(\alpha,\beta)} B(\alpha+2,\beta) \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{B(\alpha+2,\beta)} x^{(\alpha+2)-1}(1-x)^{\beta-1}dx}_{=1 \text{ für } X\sim Beta(\alpha+2,\beta)}\right) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+2+\beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha^2+\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+\beta)-\alpha(\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\right) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\alpha+\beta-\alpha^2-\alpha\beta-\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}\right) \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}
\end{aligned}
$$

## 3

**Gegeben:**

Die Dichte einer Poissonverteilung:

$$f(x;\Theta) = \frac{e^{-\Theta}\Theta^x}{x!} I\{0,1,...\}(x), \qquad \Theta > 0$$

Wobei $\Theta$ einer Gammaverteilung mit der Dichte:

$$g(\Theta;r,\lambda) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \Theta^{r-1} e^{-\lambda\Theta} I_{0,\infty}(\Theta), \qquad r,\lambda > 0$$

folgt.

**Zu Zeigen:**

Die Mischung von Poissonverteilungen

$$\int_0^\infty f(x;\Theta) \cdot g(\Theta;r,\lambda) d\Theta$$

folgt einer negativ Binomialverteilung mit den Parametern $r$ und $p = \frac{\lambda}{\lambda+1}$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x;\Theta) \cdot g(\Theta;r,\lambda) d\Theta &= \int_0^\infty \frac{e^{-\Theta}\Theta^x}{x!} I_{\{0,1,...\}}(x) \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \Theta^{r-1} e^{-\lambda\Theta} d\Theta \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)x!} I_{\{0,1,...\}}(x) \int_0^\infty e^{-\Theta}\Theta^x \Theta^{r-1} e^{-\lambda\Theta} d\Theta \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)x!} I_{\{0,1,...\}}(x) \int_0^\infty \Theta^{(x+r)-1} e^{-(1+\lambda)\Theta} d\Theta \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)x!} I_{\{0,1,...\}}(x) \int_0^\infty \frac{\Gamma(r+x)}{(\lambda+1)^{r+x}} \frac{(\lambda+1)^{r+x}}{\Gamma(r+x)} \Theta^{(x+r)-1} e^{-(1+\lambda)\Theta} d\Theta \\
&= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)x!} I_{\{0,1,...\}}(x) \frac{\Gamma(r+x)}{(\lambda+1)^{r+x}} \underbrace{\int_0^\infty \underbrace{\frac{(\lambda+1)^{r+x}}{\Gamma(r+x)} \Theta^{(x+r)-1} e^{-(1+\lambda)\Theta}}_{\Theta\sim\Gamma(r+x,\lambda+1)} d\Theta}_{=1} \\
&= \frac{\lambda^r \Gamma(r+x)}{\Gamma(r)x!(\lambda+1)^{r+x}} I_{\{0,1,...\}}(x) \\
&= \frac{\lambda^r \Gamma(r+x)}{\Gamma(r)x!(\lambda+1)^r(\lambda+1)^x} I_{\{0,1,...\}}(x) \\
&= \frac{\Gamma(r+x)}{\Gamma(r)x!(\lambda+1)^x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^r I_{\{0,1,...\}}(x) \\
&= \frac{\Gamma(r+x)}{\Gamma(r)x!(\lambda+1)^x} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^r I_{\{0,1,...\}}(x)
\end{aligned}$$

# 4

## a)

**Gegeben:**

Die Dichte der Normalverteilung ist:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

**Zu Zeigen:**

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma)dx = 1$$

**Lösung:**

Wir zeigen, dass $A^2 = 1$:

$$A^2 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} dx$$

## d)

**Zu Zeigen:**

Die momenterzeugende Funktion einer standardnormalverteilten ZV ist

$$M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1} e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x-0}{1}\right)^2} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{tx-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx \\
&= e^{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

# 5

**Gegeben:**

Bivariate Normalverteilung mit:

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

## a)

**Gesucht:**

Regressionsfunktion von $X_1$ auf $X_2$ sowie $E(X_1|x_2 = 9)$ **Lösung:**

Gesucht ist also zunächst:

$$
\begin{aligned}
E(X_1|X_2) &= \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) \\
&= 5 + (-1)\frac{1}{3}(x_2 - 8) \\
&= 5 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{8}{3} \\
&= \frac{23}{3} - \frac{1}{3}x_2 \\
E(X_1|x_2 = 9) &= \frac{23}{3} - \frac{1}{3}9 \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}
$$

## b)

**Gesucht:**

Bedingte Varianz von $X_1$ gegeben $x_2 = 9$

**Lösung:**

$$
\begin{aligned}
Var(X_1|x_2 = 9) &= \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \\
&= 2 - (-1)\frac{1}{3}(-1) \\
&= \frac{5}{3}
\end{aligned}
$$

## c)

**Gesucht:**

Die Wahrscheinlichkeit $P(x_1 > 5)$ und die bedingte Warscheinlichkeit $P(x_1 > 5|x_2 = 9)$

**Lösung:**

Da $E(X_1) = 5$ ist und aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung um den Ewartungswert gilt $P(x_1 > 5) = \frac{1}{2}$

Wie in $a$ und $b$ gezeigt ist $X_1|x_2 = 9$ verteilt mit $\mathcal{N}(\frac{14}{3}, \frac{5}{3})$.

Wir $Z$-standartisieren zunächst (es gilt also $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$):

$$
P(x_1 > 5|x_2 = 9) = P(Z > \frac{5 - \mu_{1|2}}{\sigma_{1|2}}) = P(Z > \frac{5 - \frac{14}{3}}{\frac{5}{3}}) = P(Z > 0.2)
$$

## 6

Es folgen einige PDFs und es gilt zu überprüfen, ob es sich um Mitglieder der Exponentialfamilie handelt

Eine PDF $f(x;\Theta)$ gilt als Mitglied der Exponentialfamilie wenn:

$$f(x;\Theta) = \begin{cases} e^{\sum_{i=1}^{k} c_i(\Theta) g_i(x) + d(\Theta) + z(x)} & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Wobei $x = (x_1, \ldots, x_n)', \Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_k)'; c_i(\Theta),\ i = 1, \ldots, k$ und $d(\Theta)$ sind reelwertige Funktionen von $\Theta$ die uanbhängig von $x$ sind und $g_i(x), i = 1, \ldots, k$ und $z(x)$ sind reelwertige Funktionen die nicht abhängig von $\Theta$ sind. $A \in R^n$ ist eine Menge von $n$ Tupeln im $n$-dimensionalen reelen Raum deren Definition unabhäging von $\Theta$ ist

### a)

**Gegeben:**

Bernoulliverteilung

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x) \qquad p \in [0,1]$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
f(x;p) &= p^x(1-p)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x) && a = e^{\ln(a)} \\
&= e^{\ln(p^x(1-p)^{1-x} I_{\{0,1\}}(x))} && \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) \\
&= e^{\ln(p^x) + \ln((1-p)^{1-x}) + \ln(I_{\{0,1\}}(x))} && \ln(a^b) = b \cdot \ln(a) \\
&= e^{x\ln(p) + (1-x)\ln(1-p) + \ln(I_{\{0,1\}}(x))} \\
&= e^{x\ln(p) + \ln(1-p) + x\ln((1-p)^{-1}) + \ln(I_{\{0,1\}}(x))} \\
&= e^{x(\ln(p) + ln(\frac{1}{1-p})) + \ln(1-p) + \ln(I_{\{0,1\}}(x))} && \ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b) \\
&= e^{x\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \ln(1-p) + \ln(I_{\{0,1\}}(x))}
\end{aligned}$$

$\implies$ Ist in Exponentialfamilie mit:

$$c_i(\Theta) = \ln(\frac{\Theta}{1-\Theta}) \quad g_i(x) = x \quad d(\Theta) = \ln(1-\Theta) \quad z(x) = \ln(I_{\{0,1\}}(x))$$

### b)

**Gegeben:**

Gammaverteilung

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha) x^{\alpha-1}} e^{-x/\beta} I_{(0,\infty)}(x), \qquad \alpha, \beta > 0$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
f(x;\alpha,\beta) &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} I_{(0,\infty)}(x) \\
&= e^{\ln(\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1})} e^{-x/\beta} e^{ln(I_{(0,\infty)}(x))} \\
&= e^{\ln(\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}) - x/\beta + ln(I_{(0,\infty)}(x))} \\
&= e^{\ln(\beta^{-\alpha}) + \ln(\Gamma(\alpha)^{-1}) + \ln(x^{\alpha-1}) - \frac{x}{\beta} + ln(I_{(0,\infty)}(x))}
\end{aligned}$$

$$= e^{-\alpha\ln(\beta)-\ln(\Gamma(\alpha))+(\alpha-1)\ln(x)-\frac{x}{\beta}+ln(I_{(0,\infty)}(x))}$$
$$= e^{(\alpha-1)\ln(x)-\frac{x}{\beta}-\ln(\Gamma(\alpha))-\alpha\ln(\beta)+ln(I_{(0,\infty)}(x))}$$

$\Longrightarrow$ Ist in Exponentialfamilie mit:

$$c_1(\Theta) = \Theta_1 - 1 \quad g_1(x) = \ln(x) \quad c_2(\Theta) = -\frac{1}{\Theta} \quad g_2(x) = x$$
$$d(\Theta) = -\ln(\Gamma(\Theta_1)) - \Theta_1\ln(\Theta_2) \quad z(x) = \ln(I_{(0,\infty)}(x))$$

## c)

**Gegeben:**

Paretoverteilung

$$f(x,\beta) = \beta x^{-(\beta+1)} I_{(1,\infty)}(x), \qquad \beta > 0$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} f(x,\beta) &= \beta x^{-(\beta+1)} I_{(1,\infty)}(x) \\ &= e^{\ln(\beta x^{-(\beta+1)})I_{(1,\infty)}(x)} \\ &= e^{\ln(\beta)+\ln(x^{-(\beta+1)})+\ln(I_{(1,\infty)}(x))} \\ &= e^{(\beta+1)\ln(\frac{1}{x})+\ln(\beta)+\ln(I_{(1,\infty)}(x))} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Ist in Exponentialfamilie mit:

$$c_1(\Theta) = \Theta + 1 \quad g_1(x) = \ln(\frac{1}{x}) \quad d(\Theta) = \ln(\Theta) \quad z(x) = \ln(I_{(1,\infty)}(x))$$

## d

**Gegeben:**

Lognormalverteilung

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)} I_{(0,\infty)}(x), \qquad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} f(x;\mu,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)} I_{(0,\infty)}(x) \\ &= e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x})} e^{-[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)} e^{\ln(I_{(0,\infty)}(x))} \\ &= e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x})-[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)+\ln(I_{(0,\infty)}(x))} \\ &= e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x})-[\ln(x)^2+\mu^2-2\ln(x)\mu]/(2\sigma^2)+\ln(I_{(0,\infty)}(x))} \\ &= e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma})+\ln(\frac{1}{x})-\frac{\ln(x)^2}{2\sigma^2}-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}+\frac{\ln(x)\mu}{\sigma^2}+\ln(I_{(0,\infty)}(x))} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Ist in Exponentialfamilie mit:

$$c_1(\Theta) = \frac{-1}{2\Theta_2^2} \quad g_1(x) = \ln(x)^2 \quad c_2 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2^2} \quad g_2 = \ln(x)$$
$$d(\Theta) = \ln(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Theta_2}) - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \quad z(x) = \ln(x) + \ln(I_{(0,\infty)}(x))$$