Lösungen zum Übungsblatt 1

1. (a) Mögliche Elementarereignisse sind die Ziehungen $\{1,2\}, \{2,1\}, \{2,2\}$ usw. (Reihenfolge ist relevant).
   Anzahl der Elementarereignisse für Ziehen mit Zurücklegen (Z. m. Z.):
   $$L = M^n = 3^2 = 9$$
   Anzahl der Elementarereignisse für Ziehen ohne Zurücklegen (Z. o. Z.):
   $$L = M \cdot (M-1) \cdot (M-2) \cdot \ldots \cdot (M-n+1) = 6$$

   (b) Anzahl der Teilmengen mit k Elementen:
   $$\binom{L}{k} = \frac{L!}{(L-k)!k!}$$
   Für alle möglichen k aufsummieren:
   $$\sum_{k=0}^{L} \binom{L}{k} = \text{Anzahl der Teilmengen}$$
   Beachte Binomialtheorem:
   $$(a+b)^L = \sum_{k=0}^{L} \frac{L!}{(L-k)!k!}\Bigg|_{a=b=1} = 2^L,$$
   also hier 2^9.

2. Stichprobenraum: $S = \{(i,j) : i,j = 1,2,\ldots,6\}$
   Ereignisse:
   $A_k = \{(i,j) : i+j \leq k\};\ k = 2,\ldots,12$
   $B_k = \{(i,j) : i+j > k\};\ k = 2,\ldots,12$

   $\Rightarrow \overline{A}_k = B_k$ und $\overline{B}_k = A_k$
   Gegeben ist eine Menge von Teilmengen $\mathcal{K}_i$ der Potenzmenge von S. Bilden diese einen Mengenkörper?

(a) $\mathcal{K}_1 = \{\emptyset, A_2, B_2, S\}$

Es handelt sich um einen Mengenkörper, sofern die Menge von Teilmengen alle ihre Komplemente und Vereinigungen enthält.

Komplemente in $\mathcal{K}_1$:

$$\overline{\emptyset} = S \in \mathcal{K}_1;\ \overline{A_2} = B_2 \in \mathcal{K}_1;\ \overline{S} = \emptyset \in \mathcal{K}_1;\ \overline{B_2} = A_2 \in \mathcal{K}_1$$

Vereinigungen in $\mathcal{K}_1$:

$$\emptyset \cup A_2 = A_2 \in \mathcal{K}_1;\ \emptyset \cup B_2 = B_2 \in \mathcal{K}_1;\ \emptyset \cup S = S \in \mathcal{K}_1;$$
$$B_2 \cup A_2 = S \in \mathcal{K}_1;\ S \cup B_2 = S \in \mathcal{K}_1;\ A_2 \cup S = S \in \mathcal{K}_1;$$

Alle Komplemente und Vereinigungen sind in der Menge $\mathcal{K}_1$ enthalten. Es handelt sich also um einen Mengenkörper.

(b) $\mathcal{K}_2 = \{A_{12}, B_{12}\}$

Da A_{12} gleich dem Stichprobenraum und B_{12} eine leere Menge sind, und S zusammen mit $\emptyset$ den kleinsten möglichen Mengenkörper bilden, ist $\mathcal{K}_2$ ein solcher. ($\emptyset \cup S = S \in \mathcal{K}_2$; $\overline{\emptyset} = S \in \mathcal{K}_2$; $\overline{S} = \emptyset \in \mathcal{K}_2$)

(c) $\mathcal{K}_3 = \{A_{11}, B_{11}\}$

Kein Mengenkörper, da zum Beispiel $A_{11} \cup B_{11} = S$ nicht Teilmenge der Menge $\mathcal{K}_3$ ist.

(d) $\mathcal{K}_4 = \{A_k, B_k : k = 2, \ldots, 12\}$

Kein Mengenkörper, da zum Beispiel $A_2 \cup B_{11} = \{(1,1); (6,6)\}$ nicht Teilmenge der Menge $\mathcal{K}_4$ ist.

3. Potenzmenge mit $2^3 = 8$ Teilmengen ist Mengenkörper

$$\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, S\}$$

Mengenkörper mit zwei Elementen:

$$\{\phi, S\}$$

Mengenkörper mit vier Elementen:

$$\{\phi, \{1\}, \{2,3\}, S\}$$
$$\{\phi, \{2\}, \{1,3\}, S\}$$
$$\{\phi, \{3\}, \{1,2\}, S\}$$

Neben diesen 4 Mengenkörpern und der Potenzmenge gibt es keinen abgeschlossenen Mengenkörper

4. Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion:

    i. Nicht-Negativität, $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Upsilon$
    ii. Normiertheit, $P(S) = 1$
    iii. Additivität, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

    (a) i. $\surd$, da P als Summe nicht-negativer Zahlen definiert
        ii. $\surd$, $P(S) = \sum_{x \in S} \frac{x}{36} = \sum_{x=1}^{8} \frac{x}{36} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \ldots + \frac{8}{36} = 1$
        iii. $\surd$, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{x \in (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)} \frac{x}{36} = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{x \in A_i} \frac{x}{36}\right] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

        $\longrightarrow$ Mengenfunktion ist Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion

    (b) i. $\surd$, da $e^{-x} \geq 0$
        ii. $\surd$, $\int_{x \in S} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^{\infty} = 1$
        iii. $\surd$, $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \int_{x \in (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)} e^{-x} dx = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{x \in A_i} e^{-x} dx\right] = \int_{a_1}^{b_1} e^{-x} dx + \int_{a_2}^{b_2} e^{-x} dx + \ldots + \int_{a_n}^{b_n} e^{-x} dx = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

        $\longrightarrow$ Mengenfunktion ist Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion

    (c) i. $\surd$, da $x^2 \geq 0$
        ii. $P(S) = \sum_{x \in S} \frac{x^2}{10^5} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^2}{10^5} \overset{!}{=} 1$
        Nein, da z.B. für $x = \sqrt{10^5 + 1} \rightarrow \frac{(\sqrt{10^5+1})^2}{10^5} = \frac{10^5+1}{10^5} > 1$

        $\longrightarrow$ Mengenfunktion ist <u>keine</u> Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion

5. (a) $A_1 - A_2 = A_1 \cap \bar{A}_2$

    Es gilt:

    $(A_1 \cap \bar{A}_2)\,\&\,(A_1 \cap A_2)$: disjunkt mit $(A_1 \cap \bar{A}_2) \cup (A_1 \cap A_2)$:

$$\Rightarrow \qquad P(A_1) = P\Big([A_1 \cap \bar{A}_2] \cup [A_1 \cap A_2]\Big)$$

$$P(A_1) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(A_1 \cap A_2) \quad \text{(da disjunkt)}$$

$$\Rightarrow \qquad P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1 - A_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$$

(b) Über vollständige Induktion:

· Induktionsanfang:

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \text{ (disjunkt) } \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

· Induktionsschritt : $r - 1 \longrightarrow r$

Wir setzen Folgendes als bewiesen voraus: (Induktionsvoraussetzung)

$$A_i \cap A_j = \emptyset; \quad i, j = 1, \ldots, r-1;\ i \neq j \ \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{r-1} P(A_i)$$

Es ist zu zeigen:

$$A_i \cap A_j = \emptyset; \quad i, j = 1, \ldots, r;\ i \neq j \ \Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) = \sum_{i=1}^{r} P(A_i)$$

Dies folgt aus:

$$\begin{aligned}
\left[\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i\right] \cap A_r &= \bigcup_{i=1}^{r-1} [A_i \cap A_r] = \emptyset \\
P\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) &= P\left(\left[\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i\right] \cup A_r\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{r-1} A_i\right) + P(A_r)
\end{aligned}$$

mit Induktionsvoraussetzung:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{r} A_i\right) = \sum_{i=1}^{r-1} P(A_i) + P(A_r) \qquad \text{q.e.d.}$$

(c) Es gilt:

$$\cdot \quad [A_1 \cap \bar{A}_2] \cap [\bar{A}_1 \cap A_2] = \emptyset$$
$$\cdot \quad [A_1 \cap \bar{A}_2] \cup [\bar{A}_1 \cap A_2] = [A_1 \cup A_2] - [A_1 \cap A_2]$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow P\Big([A_1 \cup A_2] - [A_1 \cap A_2]\Big) &= P\Big([A_1 \cap \bar{A}_2] \cup [\bar{A}_1 \cap A_2]\Big) \\
&= P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 \cap A_2) \\
&= P(A_1 - A_2) + P(A_2 - A_1) \\
\text{(wg. 5a)} &= P(A_1) - P(A_1 \cap A_2) \\
&\quad + P(A_2) - P(A_2 \cap A_1)
\end{aligned}$$

6. (a) Theorem (1.1)

$$
\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(\bar{A}) \\
P(B) &= 1 - P(\bar{B})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow P(A) \leq P(B) &\Rightarrow 1 - P(\bar{A}) \leq 1 - P(\bar{B}) \\
& \quad\; P(\bar{A}) \geq P(\bar{B})
\end{aligned}
$$

(b) Wenn $A \subset B$, dann $x \in A$ auch $x \in B$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad x \notin B \text{ auch } x \notin A \\
&\Rightarrow \quad x \in \bar{B} \text{ auch } x \in \bar{A} \\
&\Rightarrow \quad \bar{B} \subset \bar{A}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
[A \cap B] \subset C &\Rightarrow \quad \bar{C} \subset [\overline{A \cap B}] \\
\text{wg. Theorem (1.3)} &\Rightarrow \quad P(\bar{C}) \leq P(\overline{A \cap B}) \\
\text{wg. DeMorgans Gesetz} &\Rightarrow \quad P(\bar{C}) \leq P(\bar{A} \cup \bar{B}) \\
\text{wg. Booles Korollar} &\Rightarrow \quad P(\bar{C}) \leq P(\bar{A}) + P(\bar{B})
\end{aligned}
$$

7. (a)

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &\geq P(A) = \frac{3}{4} \\
P(A \cup B) &\geq P(B) = \frac{3}{8} \\
&\Rightarrow P(A \cup B) \geq \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &\leq P(A) \\
P(A \cap B) &\leq P(B) \\
&\Rightarrow P(A \cap B) \leq \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\& \quad P(A \cap B) &\geq 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) \qquad \text{Theorem (1.7)} \\
&\geq 1 - \frac{2}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

8.
   - Kugeln in einer Urne: 1 bis M
   - Experiment: n mal Z. m. Z.
   - $S =$ Menge aller n-Tupel $(Z_1, \ldots, Z_n)$, aus den Zahlen $1, \ldots, M$.

$$\Longrightarrow N(S) = M^n$$

   Ergebnis:

   - $A =$ mind. 1 Kugel mehrfach.
   - $\bar{A} =$ alle n Kugeln unterschiedlich
   - $\bar{A}$: besteht aus allen n-Tupeln ohne Wiederholung, die aus den Zahlen $1 - M$ konstruierbar sind.

   Für $n = 2$:

   zu jeder Zahl $Z_1 = 1, \ldots, M$ gibt es $M - 1$ Paare mit $Z_2 = 1, \ldots, M$

$$\Longrightarrow \text{Summe aller Paare } (Z_1, Z_2) \text{ ist } (M)(M-1) \text{ mit } Z_1 \neq Z_2.$$

   Für n allgemein:

   $(M)(M-1) \cdot \ldots \cdot M - (n-1)$

   $N(\bar{A}) = M(M-1) \cdot \ldots \cdot (M-n+1)$ [Anzahl der Elemente in $\bar{A}$]

   Es gilt:

   S mit $N(S) = M^n$ gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen (Z. m. Z.!) gilt für $\bar{A} \subset S$ gemäß Theorem (1.9)

$$P(\bar{A}) = \frac{N(\bar{A})}{N(S)} = \frac{M(M-1) \cdot \ldots \cdot (M-n+1)}{M^n}$$

   & wg. Theorem (1.1)

$$P(A) = 1 - \frac{N(\bar{A})}{N(S)} = 1 - \frac{M(M-1) \cdot \ldots \cdot (M-n+1)}{M^n}$$

9. Lösungsansatz über bedingte Wahrscheinlichkeit. Definiere das Ereignis B als erste Karte ein Ass (4 Asse in 52 Karten) mit Wkt. $P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Definiere das Ereignis A als zweite Karte ein Ass, mit der auf B bedingten Wkt. $P(A|B) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Karten ein Ass sind ergibt sich dann wie folgt:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$$

10. - 5 Urnen: U_i mit $i = 1, \ldots, n = 5$
    - Urne U_i enthält i schwarze und $10 - i$ rote Kugeln (insgesamt 10 Kugeln)
    - Experiment:
      - 1. Stufe: zufällige Auswahl einer Urne U_i
      - 2. Stufe: zufälliges Ziehen einer Kugel
    - $S :=$ Anzahl der schwarzen Kugeln

    (a)

    $$P(U_i) = \frac{1}{5}, \qquad P(S|U_i) = \frac{i}{10}$$
    $$P(S \cap U_i) = P(S|U_i) \cdot P(U_i) = \frac{i}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{i}{50}$$
    $$P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(S \cap U_i) = \sum_{i=1}^{n} P(S|U_i) \cdot P(U_i) = \frac{1}{50} + \ldots + \frac{5}{50} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

    Die Wkt. eine schwarze Kugel zu ziehen beträgt 30%.

    (b)

    $$P(U_5|S) = \frac{P(U_5 \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S|U_5) \cdot P(U_5)}{P(S)} = \frac{\frac{5}{10} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{15}{50}} = \frac{\frac{5}{50}}{\frac{15}{50}} = \frac{1}{3}$$

    Die Wkt., dass die schwarze Kugel aus Urne 5 ist, beträgt 33%.

11. $S = \{A_1, \ldots, A_n\}$

    (a) Für $n = 2$ gilt: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$
    lt. Theorem (1.5)

    Für $n = 3$ soll gelten:

    $$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

    Idee: auf Paare zurückführen und dann Theorem (1.5) erneut anwenden!

$\tilde{A} := P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ und ersetze

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow P(\tilde{A} \cup A_3) &= P(\tilde{A}) + P(A_3) \\
&\quad -P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\
&\quad +P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow P(\tilde{A} \cup A_3) &= P(\tilde{A}) + P(A_3) - P(\tilde{A} \cap A_3) \\
\text{mit } P(\tilde{A} \cap A_3) &= P([A_1 \cup A_2] \cap A_3)
\end{aligned}
$$

rück:

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P([A_1 \cup A_2] \cap A_3) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\
&\quad -P(A_1 \cap A_2) - P([A_1 \cap A_3] \cup [A_2 \cap A_3]) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\
&\quad -P(A_1 \cap A_2) - [P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) \\
&\quad -P([A_1 \cap A_3] \cap [A_2 \cap A_3]) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\
&\quad -P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\
&\quad +P(A_1 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

q.e.d.

(b) Beweis über vollständige Induktion:

Für n soll gelten:

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) \\
&\quad -P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \ldots - P(A_{n-1} \cap A_n) \\
&\quad +P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots \\
&\quad -P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \ldots \\
&\quad + \ldots \\
&\quad +(-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)
\end{aligned}
$$

(Siebformel von Poincaré und Sylvester)

· <u>Induktionsanfang:</u> Beweis der Aussage für $n_0 = 2 \longrightarrow \mathcal{A}(n_0)$

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ lt. Theorem (1.5)

· <u>Induktionsvoraussetzung:</u> für $n-1$ als bewiesen vorausgesetzt

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n-1}^{n-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) \\
&+ \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n-1}^{n-1} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) \\
&+ \ldots \\
&+ (-1)^{(n-1)+1} \cdot P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)
\end{aligned}$$

· <u>Induktionsbehauptung:</u> Vererbung von $n-1$ auf n

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n}^{n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) \\
&+ \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n}^{n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) \\
&+ \ldots \\
&+ (-1)^{n+1} \cdot P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)
\end{aligned}$$

· <u>Induktionsschritt:</u> $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n-1 : \mathcal{A}(n-1) \Rightarrow \mathcal{A}(n)$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\left[\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right] \cup A_n\right)$$

Aus Induktionsanfang folgt:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) + P(A_n) - P\left(\left[\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right] \cap A_n\right) \\
&= P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) + P(A_n) - P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} [A_k \cap A_n]\right)
\end{aligned}$$

Mit Anwendung der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}[A_k \cap A_n]\right) &= \sum_{k=1}^{n-1} P\left(A_k \cap A_n\right) \\
&\quad - \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n-1}^{n-1} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_n\right) \\
&\quad + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n-1}^{n-1} P\left(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3} \cap A_n\right) \\
&\quad - (-1)^{(n-1)+1} \cdot P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k \cap A_n\right)
\end{aligned}$$

Nutze Abkürzung für die Summation über alle r-elementigen Teilmengen $\{k_1, \ldots, k_r\}$ von $\{1, \ldots, n-1\}$:

$$S_r := \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) &= \sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{r-1} \cdot S_r \qquad \text{(Verallgemeinerung)} \\
\Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) &= \sum_{r=1}^{n-1}(-1)^{r-1} \cdot S_r + P(A_n) + \sum_{m=1}^{n-1}(-1)^{m} \cdot S_m
\end{aligned}$$

mit $S_m := \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_m \leq n-1} P\left(\bigcap_{m=1}^{n} A_n\right)$. (In S_r werden die Teilmengen ohne A_n berücksichtigt, in S_m die mit A_n.)

Umordnen und Zusammenfassen:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \underbrace{S_1 + P(A_n)}_{\text{Summand für } r=1} + \sum_{r=2}^{n-1}(-1)^{r-1} \cdot (S_r + S_{r-1}) + (-1)^{n-1} \cdot S_{n-1}$$

Mit $S_r + S_{r-1} = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_r \leq n} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ für $(2 \leq r \leq n)$.

q.e.d.

12. Der Stichprobenraum S enthält 36 Elementarereignisse, die alle gleichwahrscheinlich sind (fairer Würfel). Die Ereignisse lauten wie folgt:

    $A = \{(i,j) : 1 \leq i \leq 2; j : 1, \ldots, 6\}$
    $B = \{(i,j) : 5 \leq j \leq 6; i : 1, \ldots, 6\}$

    Gesucht ist die Wkt. $P(A \cup B)$!

    $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
    wobei $A \cap B = \{(1,5); (1,6); (2,5); (2,6)\}$

    $P(A \cup B) = \frac{12}{36} + \frac{12}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{9}$

13. Lösung im Lehrbuch "An introduction to probability and statistics" von Vijay K. Rohatgi und A. K. MD. Ehsanes Saleh (2001, S. 14-16).

14. N_i: Ereignis „bei Patient i tritt Nebenwirkung auf"

    H_i: Ereignis „Heilung von Patient i"

    $P(N_i) = \frac{1}{3}$; $P(H_i|\bar{N}_i) = \frac{3}{4}$; $P(H_i|N_i) = 0$; Anzahl der Patienten I=3. Behandlung und Krankheitsverlauf der Patienten sind jeweils unabhängig voneinander.

    (a) Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ($B_1, B_2, \ldots, B_n$ sind eine Partition von S):

        $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k) \cdot P(B_k)$

        N_i und $\bar{N}_i$ bilden eine Partition.

        $P(H_i) = P(H_i|N_i) \cdot P(N_i) + P(H_i|\bar{N}_i) \cdot P(\bar{N}_i) = 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

        i. Wahrscheinlichkeit, dass alle drei genesen:

           $P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

        ii.

$$\begin{aligned} P(\text{mind. ein Patient geheilt}) &= 1 - P(\text{kein Patient geheilt}) \\ &= 1 - P(\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

(b) i. B_I: mindestens ein Patient erleidet keine Nebenwirkungen (I: Anzahl der Patienten in der Stichprobe). $P(B_I) \geq 0{,}95$

$P(B_I) = 1 - P(\bar{B}_I)$

$= 1 - P(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_I) = 1 - \prod_{i=1}^{I} P(N_i) = 1 - (\frac{1}{3})^I$

$\Rightarrow 1 - (\frac{1}{3})^I \geq 0,95 \Rightarrow (\frac{1}{3})^I \leq 0{,}05$

$\Rightarrow I \cdot \ln(\frac{1}{3}) \leq \ln(0{,}05)$

$I \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(\frac{1}{3})} = 2{,}7268$

Mindestens drei Patienten sind zu behandeln, damit mit mind. 95 % Wkt. keine Nebenwirkungen bei mind. einem auftreten.

ii. H_I: mindestens ein Patient wird geheilt.$P(H_I) \geq 0{,}95$

$P(H_I) = 1 - (\frac{1}{2})^I$

$\Rightarrow I \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(\frac{1}{2})} = 4{,}3219$

Mindestens fünf Patienten sind zu behandeln, damit mit mind. 95 % Wkt. mind. einer geheilt wird.

15. Bei stochastischer Unabhängigkeit gilt:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Die Ereignisse A_1, A_2 und A_3 sind paarweise stochastisch unabhängig:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(E_1) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(E_1) = \frac{1}{4} = P(A_1) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(E_1) = \frac{1}{4} = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Betrachtet man sie jedoch alle zusammen, zeigt sich, dass sie nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(E_1) = \frac{1}{4} \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{8}$$

16. (a) $P\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i\right) = \prod_{i=1}^{10} P(A_i) = (0,1)^{10}$

(b) $P\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i\right) = P(\emptyset) = 0$

(c)

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot \ldots$$
$$\cdot P(A_{10}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_9)$$
$$= \; = 0{,}1 \cdot (0{,}2)^9$$

Zur Erläuterung des Ergebnisses:
Es gilt die Gleichung $P(A_3 \cap B) = P(A_3|B) \cdot P(B)$. Setzt man $B = A_1 \cap A_2$ ist offensichtlich, dass $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_1 \cap A_2)$ gilt. Durch Umformen erhält man $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)$. Da laut Aufgabe $P(A_1) = 0{,}1$ und zum Beispiel $P(A_5|A_4 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_1) = 0{,}2$ ergibt sich $P\left(\bigcap_{i=1}^{10} A_i\right) = 0,1 \cdot (0{,}2)^9$.