Übung 1 Lösungen

Victor Minig

December 26, 2024

1.

Gegeben:

$M = 3$ verschiedene Kugeln die mit den Zahlen 1 bis 3 versehen sind. Es werden $n = 2$ Kugeln gezogen.

a)

Anzahl der *Elementareignisse* L des *Stichprobenraums* S beim Ziehen "mit Zurücklegen":

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$
$$\Longrightarrow 9 \text{ Ergebnisse}$$

und "ohne Zurücklegen":

$$\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$$
$$\Longrightarrow 6 \text{ Ergebnisse}$$

b)

Anzahl der Teilmengen des Stichprobenraums beim "Ziehen mit Zurücklegen"

$$2^9 = 512$$

2.

Gegeben:

Ein Mengenkörper $\mathcal{K}$ ist durch die Eigenschaften definiert:

1. $A \in \mathcal{K} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{K}$
2. $A \in \mathcal{K}$ und $B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$

Die Ergebnismenge $S = \{(i,j) : i,j = 1,2,\ldots,6\}$ ist der Stichprobenraum des Experiments: Zweimaliges Ausspielen eines Würfels. A_k $(k = 2,\ldots,12)$ sei das Ereignis: Die Augensume beider Ausspielungen ist kleiner oder gleich k und $B_k(k = 2,\ldots,12)$ das Ereignis: Die Augensumme beider Ausspielungen ist größer als k
Welche Teilmengen der Potenzmenge von S bilden einen Mengenkörper?

a)

$$\mathcal{K}_1 = \{\emptyset, A_2, B_2, S\}$$
$\Rightarrow$ Ist Mengenkörper, da
$$A_2 = \bar{B}_2,\ B = \bar{A}_2,\ \emptyset = \bar{S},\ S = \bar{\emptyset}$$
und
$$A_2 \cup B_2 = S,\ A_2 \cup S = S,\ B_2 \cup S = S,\ A_2 \cup \emptyset = A_2,\ B_2 \cup \emptyset = B_2,\ S \cup \emptyset = S$$

b)

$$\mathcal{K}_2 = \{A_{12}, B_{12}\}$$
$\Rightarrow$ Ist Mengenkörper, da
und
$$\bar{A}_{12} = B_{12}, \bar{B}_{12} = A_{12}$$
$$A_{12} \cup B_{12} = A_{12} = S$$

c)

$$\mathcal{K}_3 = \{A_{11}, B_{11}\}$$
$\Rightarrow$ Ist kein Mengenkörper, da zwar
$$\bar{A}_{11} = B_{11}, \bar{B}_{11} = A_{11}$$
aber
$$A_{11} \cup B_{11} = S \notin \mathcal{K}_3$$

d)

$$\mathcal{K}_4 = \{A_k, B_k : k = 2, \dots, 12\}$$
$\Rightarrow$ Ist kein Mengenkörper, da zwar
$$\bar{A}_k = B_k \in \mathcal{K}_4 \text{ und } \bar{B}_k = A_k \in \mathcal{K}_4 \qquad \forall k \in \{1, \dots, 12\}$$
aber

verschiedene Teilmengen nicht enthalten sind, wie z.B. $A_2 \cup B_{11} = \{2, 12\} \notin \mathcal{K}_4$

3.

Gegeben:

$S = \{1, 2, 3\}$ Gesucht sind sämtliche nicht leere Teilmengen der Potenzmenge von S die einen Mengenkörper bilden.

$$\{(1,2,3), \emptyset, (1), (2,3), (2), (1,3), (3), (1,2)\}$$
$$\{(1,2,3), \emptyset, (1), (2,3)\}$$
$$\{(1,2,3), \emptyset, (2), (1,3)\}$$
$$\{(1,2,3), \emptyset, (3), (1,2)\}$$
$$\{(1,2,3), \emptyset\}$$

4.

Für jede der Folgenden Kombinationen von Stichprobenraum S, Ereignisraum $\mathcal{Y}$ und Mengenfunktion ist zu überprüfen, ob die Funktion auch eine Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion ist.

Definition einer Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion P(A):

i. For $A \subset S, P(A) \geq 0$

ii. $P(S) = 1$

iii. Let I be a finite or countably infite index set of positive integers, and let $\{A_i : i \in I\}$ be a collection of disjoint events contained in S. Then, $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$

a)

Gegeben:

1. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
2. $\mathcal{Y} = \{A : A \subset S\}$
3. $P(A) = \sum_{x \in A} x/36$ für $A \in \mathcal{Y}$

Lösung:

zu i. Da S definiert ist als eine Menge mit ausschließlich positiven Zahlen und und für jedes Event A gilt, dass $A \subset S$, folgt dass

$$P(A) = \sum_{x \in A} x/36 \geq 0 \text{ für } A \in \mathcal{Y}$$

zu ii. $P(S) = \sum_{x \in S} x/36 = \sum_1^8 x/36 = 1$

zu iii. If I is a finite or countably infite index set of positive integers and $\{A_i : i \in I\}$ is a collection of disjoint events contained in S then it holds that

$$P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{x_{A_i} \in \cup_{i \in I} A_i} x_{A_i}/36 \overset{\text{Kommutativität}}{=} \sum_{x \in A_1} x/36 + \sum_{x \in A_2} x/36 + \ldots = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

$\implies$ Dementsprechend ist P eine Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion

b)

Gegeben:

1. $S = [0, \infty)$
2. $\mathcal{Y} = \{A : A$ ist ein Telinterval von S oder eine beliebige Menge gebildet aus Vereinigungen, Schnittmengen, oder Komplementmengen dieser Teilintervalle$\}$
3. $P(A) = \int_{x \in A} e^{-x} dx$ für $A \in \mathcal{Y}$

Lösung:

zu i. Für beliebiges $A \in \mathcal{Y}$ gilt, dass es direkt ein Teilintervall von S ist, oder eine Menge, die sich aus Schnittmengen, Vereinigungen und Komplemntmengen eben dieser Teilintervalle zusammensetzt. Für jedes einzelne Teilintervall (a, b) mit $0 \leq a \leq b < \infty$ gilt:

$$P((a, b)) = \int_a^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_a^b = -e^{-b} - (-e^{-a}) = -e^{-b} + e^{-a} \geq 0$$

Da für jedes einzelne Interval a, b gilt, dass $P((a, b)) \geq 0$ gilt dies automatisch auch für alle möglichen Vereinigungen, Schnittmengen und Komplementmengen.

zu ii. $P(S) = P([0,\infty)) = \int_0^\infty e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^\infty = -e^{-\infty} - (-e^0) = 0 + 1 = 1$

zu iii. If I is a finite or countably infite index set of positive integers and $\{A_i : i \in I\}$ is a collection of disjoint events contained in S then it holds that

$$P(\cup_{i\in I} A_i) = \int_{x \cup_{i\in I} A_i} e^{-x}dx \overset{LebesgueIntegral}{=} \int_{x\in A_1} e^{-x}dx + \int_{x\in A_2} e^{-x}dx + \ldots = \sum_{i\in I}\int_{x\in A_i} e^{-x}dx = \sum_{i\in I} P(A_i)$$

$\Longrightarrow$ Dementsprechend ist P eine Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion

c)

Gegeben:

1. $S = \{x : x \text{ ist eine positive ganze Zahl}\}$
2. $\mathcal{Y} = \{A : A \subset S\}$
3. $P(A) = \sum_{x\in A} x^2/10^5$

Lösung:

zu i. Da jede Ereignis A nur aus positiven ganzen Zahlen bestehen kann, und $x^2/10^5 > 0\ \forall x \in \mathbb{N}$, gilt

$$P(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{Y}$$

zu ii. Da $10^5 \in S$, aber für $A = \{10^5\} \subset S$ gilt, dass $P(A) = (10^5)^2/10^5 = 10^5 > 1$ muss gelten

$$P(S) \neq 1$$

$\Longrightarrow$ Dementsprechend ist P keine Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion

5.

Gegeben:

$P(\cdot)$ ist eine Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion für den Ereignisraum $\mathcal{Y}$ mit $A_i \in \mathcal{Y}(i = 1, \ldots, r)$.

a)

Zu zeigen:

$P(A_1 - A_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$

Lösung:

Eine andere Schreibweise für $A_1 - A_2$ ist $A_1 \cap \bar{A}_2$. Es folgt:

$$P(A_1 - A_2) = \overbrace{P(A_1 \cap \bar{A}_2) + P(A_1 \cap A_2)}^{P(A) \quad \text{Theorem 4}} - P(A_1 \cap A_2) = P(A) - P(A_1 \cap A_2)$$

b)

Zu zeigen:

$A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(\cup_{i=1}^r A_i) = \sum_{i=1}^r P(A_i) \qquad \forall i \neq j$

Lösung:

Komische Induktionsaufgabe. Wann anders anschauen

c)

Zu zeigen:

$$P([A_1 \cup A_2] - [A_1 \cap A_2]) = P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1 \cap A_2)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
P([A_1 \cup A_2] - [A_1 \cap A_2]) &= P([A_1 \cup A_2] \cap \overline{[A_1 \cap A_2]}) && (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
&= P([A_1 \cap \overline{[A_1 \cap A_2]}] \cup [A_2 \cap \overline{[A_1 \cap A_2]}]) && A \cap \overline{A \cap B} = A \cap \overline{B} \\
&= P([A_1 \cap \overline{A}_2] \cup [A_2 \cap \overline{A}_1]) && [A_1 \cap \overline{A}_2] \cap [A_2 \cap \overline{A}_1] = \emptyset \\
&= P([A_1 \cap \overline{A}_2]) + P([A_2 \cap \overline{A}_1]) && \text{A = A + B - B} \\
&= \overbrace{P([A_1 \cap \overline{A}_2]) + P([A_1 \cap A_2])}^{P(A_1)} - P([A_1 \cap A_2]) + \overbrace{P([A_2 \cap \overline{A}_1]) + P([A_1 \cap A_2])}^{P(A_2)} - P([A_1 \cap A_2]) \\
&= P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1 \cap A_2)
\end{aligned}$$

6.

Gegeben:

A, B, C sind Elemente des Ereignisraums $\mathcal{Y}$ und $P(\cdot)$ eine entsprechende Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion.

a)

Zu zeigen:

$$P(A) \leq P(B) \Rightarrow P(\overline{B}) \leq P(\overline{A})$$

Lösung:

Da für jedes Element $A \in \mathcal{Y}$ gilt, dass $A \cup \overline{A} = S$, und da desweiteren gilt, dass $A \cap \overline{A} = \emptyset$, folgt, dass $P(S) = 1 = P(A) + P(\overline{A})$ und damit $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&P(A) \leq P(B) \\
\Rightarrow\ &1 - P(\overline{A}) \leq 1 - P(\overline{B}) && -1 \\
\Rightarrow\ &-P(\overline{A}) \leq -P(\overline{B}) && \cdot(-1); \text{ Dreht das Ungleichunssymbol um} \\
\Rightarrow\ &P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})
\end{aligned}$$

a)

Zu zeigen:

$$A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$$

Lösung:

Da $A \subset B$ und $A \cup \overline{A} = \mathcal{Y}$ gilt, dass $\mathcal{Y} - B = \overline{B}$

7.

Gegeben:
$P(A) = 3/4$ und $P(B) = 3/8$

a)

Zu zeigen:

$P(A \cup B) \geq 3/4$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A \cup (\overline{A} \cap B)) && \text{Mengen haben keine Schnittmenge} \\
&= bP(A) + P(\overline{A} \cap B) \\
&= 3/4 + P(\overline{A} \cap B) && \overline{A} \cap B \subset S \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) \geq 0 \\
&\geq 3/4
\end{aligned}
$$

b)

Zu zeigen:

$1/8 \leq P(A \cap B) \leq 3/8$

Lösung:

Da $P(S) = 1$ und $P(A) + P(B) = 3/4 + 3/8 = 9/8 > 1$ muss $P(A \cap B) \geq 9/8 - 1 = 1/8$ sein

Außerdem, da $P(B) \geq P(A \cap B)$ sein muss (da $A \cap B \subset ((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)) = B$), gilt $P(A \cap B) \leq 3/8$

8

Gegeben:

Urne mit M Kugeln, n Ziehungen mit Zurücklegen.

Gesucht:

$P(A)$ wobei A: Mindestens eine Kugel wird mehr als einmal gezogen.

Lösung:

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$ wobei $\overline{A}$: alle Kugeln sind unterschiedlich. Bei M Kugeln

9

Gesucht:

$P(A)$ wobei A: 2 Asse us einem Kartenspeil mit 52 Karten ziehen (ohne Zurücklegen) **Lösung:**

Die Wahrscheinlichkeit ein Ass aus einem Kartenspiel mit 52 Karten zu ziehen beträgt 4/52 und die Wahrscheinlichkeit aus dem daraus resultierenden, nur noch 51 Karten umfassenden Kartendeck ein Ass zu ziehen beträgt 3/51. Insofern gilt:

$$P(A) = 4/52 \cdot 3/51 = 12/2652 = 3/663$$

10

Gegeben:

5 Urnen, nummeriert von 1 bis 5. Jede Urne enthält 10 Kugeln. Die Urne i $(i = 1, ..., 5)$ enthält i schwarze 10 - i rote Kugeln. Das Zufallsexperiment ist, das zuerst zufällig eine Urne ausgewählt wird und dann eine Kugel

0.1 a)

Gesucht:

$P(S)$ wobei S: Eine schwarze Kugel wird gezogen:

Lösung:

Jede Urne U_i hat eine Chance von $P(U_i) = 1/5$ genommen zu werden. Wenn S das Ereignis ist ist eine schwarze Kugel zu ziehen lässt es sich berechnen durch

$$\begin{aligned} P(S) &= \sum_{i=1}^{5} P(S \cap U_i) \\ &= \sum_{i=1}^{5} P(U_i) \cdot P(S|U_i) \\ &= \sum_{i=1}^{5} 1/5 \cdot i/10 \\ &= 1/5 \cdot \sum_{i=1}^{5} i/10 \\ &= 1/5 \cdot 15/10 \\ &= 3/10 \end{aligned}$$

b)

Gesucht:

Unter der Gegebenheit, dass eine schwarze Kugel gezogen wurde, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das jene aus Urne 5 stammt.

Lösung:

Gesucht ist also $P(U_5|S)$. Laut Bayes lässt sich für zwei Ereignisse $A,\ B$ die bedingte Wahrscheinlichkeit

$P(A|B)$ berechnen durch $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$. Es folgt:

$$\begin{aligned} P(U_5|S) &= \frac{P(S|U_5) \cdot P(U_5)}{P(S)} \\ &= \frac{(1/2) \cdot (1/5)}{3/10} && = 1/3 \end{aligned}$$

16

Gegeben:

$P(A_i = 0.1)$ für $i = 1, \ldots, 10$

Gesucht:

$P(\cap_{i=1}^{n})$ wenn ...

a)

Gegeben:

Die A_i's unabhängig sind

Lösung:

Wenn die A_i's unabhängig sind gilt:

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^{1} A_i) &= \prod_{i=1}^{10} P(A_i) \\ &= \prod_{i=1}^{10} 0.1 \\ &= 0.1^{10} \end{aligned}$$

b)

Gegeben:

Die A_i's disjunkt sind

Lösung:

Wenn die A_i's unabhängig sind gilt $\cap_{i=1}^{1} A_i = \emptyset$. Dementsprechend:

$$P(\cap_{i=1}^{1} A_i) = 0$$

c)

Gegeben:

$P(A_i|\cap_{j=1}^{i-1}) = 0.2$ für $i = 2, \ldots, 10$

Lösung:

Für $i = 10$ gilt $P(A_{10}|\cap_{j=1}^{9}) = 0.2$