Lösungen zum Übungsblatt 2

1. Laut Aufgabenstellung: $P(x = i) = c \cdot i$; $i = 1, \ldots, 6$; c: Konstante

   Stichprobenraum $S = \{1, \ldots, 6\}$ mit $P(S) = 1$,

   wobei $P(S) = \sum_{i=1}^{6} P(x = i) = c \sum_{i=1}^{6} i = c \cdot 21 \Rightarrow c = \frac{1}{21}$

   $\Longrightarrow$ pdf:
$$f(x) = \frac{x}{21} I_{\{1,\ldots,6\}}(x)$$

2. Stichprobenraum: $S = \{K; (Z, K); (Z, Z, K); (Z, Z, Z)\}$

   Zufallsvariable $X : f : S \to \mathbb{R}$

   Welches Elementarereignis ω_i führt zu welchem Wert der Zufallsvariablen X:

ω_i	$x(\omega_i)$
K	1
(Z,K)	2
(Z,Z,K)	3
(Z,Z,Z)	3

$P(x = 1) = P(K) = \frac{1}{2}$
$P(x = 2) = P(Z, K) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$
$P(x = 3) = P(Z, Z, K) + P(Z, Z, Z) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$$\text{pdf:} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{für } x = 2, 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{cdf:} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } 1 \le x < 2 \\ \frac{3}{4} & \text{für } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{für } x \ge 3 \end{cases}$$

3. pdf: $f(x) = \frac{1}{2}(2 - x) I_{(0,2)}(x)$

   cdf: $F(x) = \int_0^x f(x)dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_0^x = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]; 0 \le x \le 2$

   (a) $P(x < 1{,}2) = F(1{,}2) = 0{,}84$

(b) $P(x > 1{,}6) = 1 - P(x < 1{,}6) = 1 - F(1{,}6) = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$

(c) $P(1{,}2 < x < 1{,}6) = P(x < 1{,}6) - P(x < 1{,}2) = F(1{,}6) - F(1{,}2) = 0{,}12$

4. (a) $f(x)$ ist eine Dichtefunktion, wenn $\sum_{x=2}^{\infty} f(x) = 1$.

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 \Longrightarrow \text{ keine Dichtefunktion!}$$

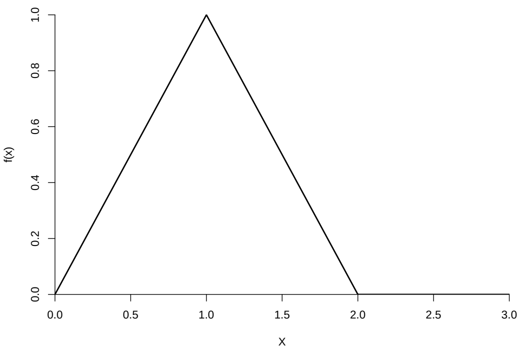
(b) $f(x) = \frac{1}{2^x} I_{\{2,3,\dots\}}(x)$

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{2^x} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{2^x} - (1 + \frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

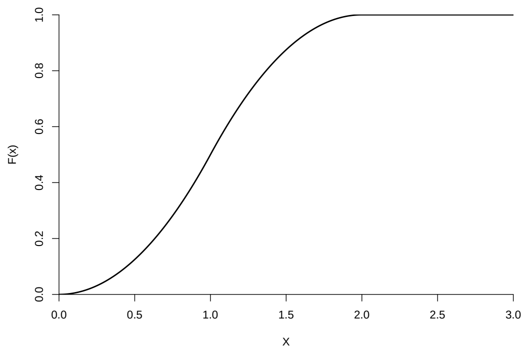
$$\Longrightarrow \text{ keine Dichtefunktion!}$$

5. (a) $x \in [0,1) : F(x) = \int_0^x x dx = \frac{1}{2}x^2$
$x \in [1,2) : F(x) = \int_1^x (2-x)dx + F(1) = 1 - \frac{1}{2}(2-x)^2$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x \in [0,1) \\ 1 - \frac{1}{2}(2-x)^2 & x \in [1,2) \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



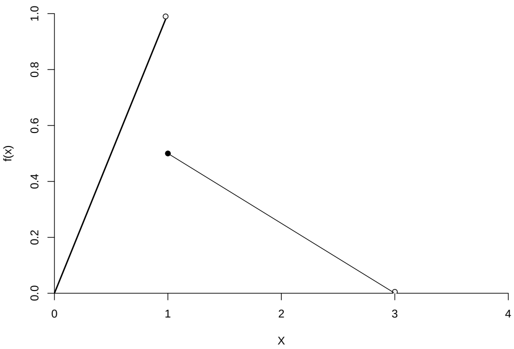
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$.



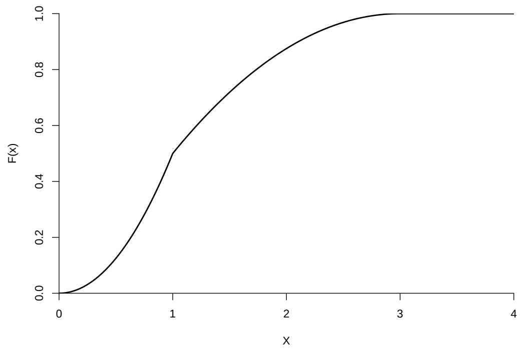
Verteilungsfunktion $F(x)$.

(b) $x \in [1,3) : F(x) = \int_1^x \frac{1}{4}(3-x)dx + F(1) = 1 - \frac{1}{8}(3-x)^2$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x \in [0,1) \\ 1 - \frac{1}{8}(3-x)^2 & x \in [1,3) \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$



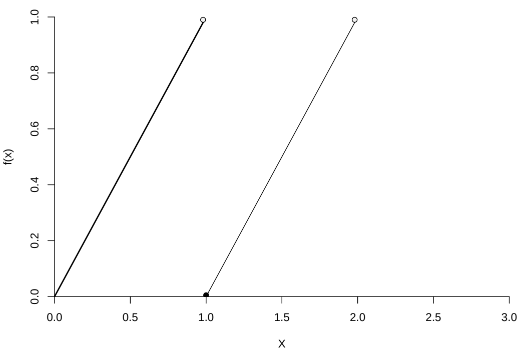
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$.



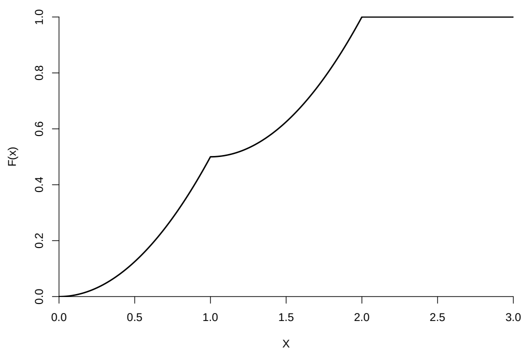
Verteilungsfunktion $F(x)$.

(c) $x \in [1,2) : F(x) = \int_1^x (x-1)dx + F(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1)^2$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-1)^2 & x \in [1,2) \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



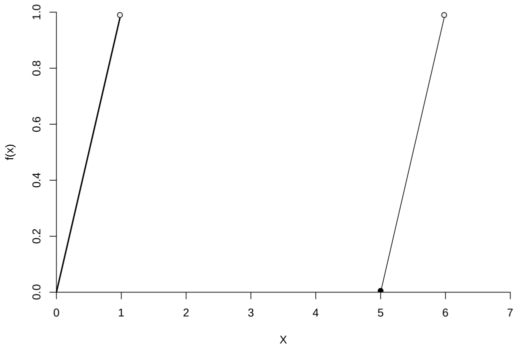
Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$.

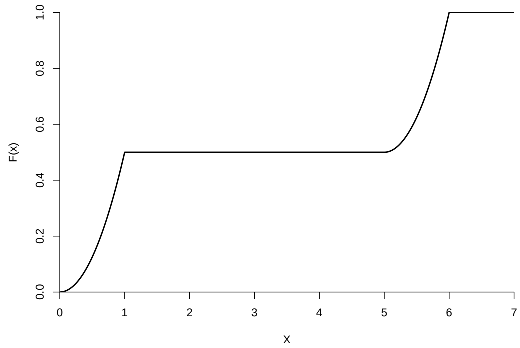


Verteilungsfunktion $F(x)$.

(d) $x \in [5,6) : F(x) = \int_5^x (x-5)dx + F(5) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-5)^2$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & x \in [1,5) \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-5)^2 & x \in [5,6) \\ 1 & x \geq 6 \end{cases}$$





Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$. Verteilungsfunktion $F(x)$.

6. (a) $F' : f(x) = 2xI_{[0,1]}(x)$

   (b) $F' : f(x) = 3(x-2)^2 I_{[2,3]}(x)$

   (c) $F' : f(x) = \lambda \exp\{-\lambda(x-c)\} I_{[c,\infty)}(x)$

7. (a) i. für $\alpha > 0$ ist $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R_X$

   ii. $\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = 1$

   $\sum_{x=1}^{\infty} \alpha(1-\beta)^{x-1} = \frac{\alpha}{1-\beta} \sum_{x=1}^{\infty} (1-\beta)^x = \frac{\alpha}{1-\beta} \left(\sum_{x=0}^{\infty} (1-\beta)^x - 1\right)$

   $= \frac{\alpha}{1-\beta} \left(\frac{1}{1-(1-\beta)} - \frac{\beta}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{1-\beta} \cdot \frac{1-\beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

   Ergebnis gleich eins setzen! $\Rightarrow \alpha = \beta$

   $\Rightarrow f(x) = \beta(1-\beta)^{x-1} I_{\{1,2,3,\dots\}}(x)$

(b) $P(x=1) = 0{,}05 = f(x=1) = \beta(1-\beta)^0 = 0{,}05 \Rightarrow \beta = 0{,}05$

$f(x) = 0{,}05(0{,}95)^{x-1} I_{\{1,2,3,\dots\}}(x)$

$f(x=10) = 0{,}05(0{,}95)^9$

(c)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \sum_{j=1}^{x} \beta(1-\beta)^{j-1} & 1 \leq x < \infty \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$F(10) = \sum_{j=1}^{10} \beta(1-\beta)^{j-1} = 0{,}4013$

8. (a)

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{1}{4} dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^{x_1} \left[\frac{1}{4}x_2\right]_0^{x_2} dx_1 = \int_0^{x_1} \frac{1}{4}x_2 dx_1 = \frac{1}{4}x_1 x_2 \end{aligned}$$

Da die obige Herleitung nur für einen bestimmten Definitionsbereich ($x_1 \in [0;4]$; $x_2 \in [0;1]$) zutrifft, ist eine weitere Fallunterscheidung notwendig.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x_1 < 0 \text{ und/oder } x_2 < 0 \\ \frac{1}{4}x_1 x_2 & x_1 \in [0;4] \text{ und } x_2 \in [0;1] \\ x_2 & x_1 > 4 \text{ und } x_2 \in [0;1] \\ \frac{1}{4}x_1 & x_1 \in [0;4] \text{ und } x_2 > 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beachte, dass die in der Übung behandelten Fälle in den Formulierungen *und/oder* sowie *sonst* enthalten sind.
Die Wkt. $P(2 \leq x_1 \leq 3; 0{,}5 \leq x_2 \leq 1)$ ist als Rauminhalt über einer Grundfläche zu denken, die durch X_1 und X_2 gegeben ist. Das Integral, das $F(3;1)$ entspricht, ist zu groß, da für die korrespondierende Grundfläche $x_1 \in [0;3]$ und $x_2 \in [0;1]$ gilt. Für die relevante Grundfläche gilt jedoch nur $x_1 \in [2;3]$ und $x_2 \in [0{,}5;1]$, so dass folgender Ansatz gilt:

$$\begin{aligned} P(2 \leq x_1 \leq 3; 0{,}5 \leq x_2 \leq 1) &= F(3;1) - F(2;1) \\ &\quad - F(3;0{,}5) + F(2;0{,}5) \\ &= 0{,}125 \end{aligned}$$

$F(2;0{,}5)$ wird einmal hinzuaddiert, weil diese Wkt. zuvor schon zweimal abgezogen wurde (in $F(2;1)$ und $F(3;0{,}5)$ jeweils enthalten).

(b) Marginale Wkt.dichtefunktionen:

$f_1(x_1) = \frac{1}{4} I_{[0,4]}(x_1)$; $\qquad f_2(x_2) = I_{[0,1]}(x_2)$

Bedingte Wkt.dichtefunktionen:

$$f_1(x_1|x_2) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_2(x_2)} = \frac{\frac{1}{4} I_{[0,4]}(x_1) I_{[0,1]}(x_2)}{I_{[0,1]}(x_2)} = \frac{1}{4} I_{[0,4]}(x_1)$$

$$f_2(x_2|x_1) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_1(x_1)} = \frac{\frac{1}{4} I_{[0,4]}(x_1) I_{[0,1]}(x_2)}{\frac{1}{4} I_{[0,4]}(x_1)} = I_{[0,1]}(x_2)$$

9. Obwohl die Funktion F die Grenzwerteigenschaften einer Verteilungsfunktion erfüllt, ist sie dennoch keine, denn sie besitzt Sprungstellen. Sprungstellen führen zu Widersprüchen bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, z.B.:

$$\begin{aligned} P(-1 \leq x_1 \leq 1; 0 \leq x_2 \leq 2) &= F(1;2) - F(-1;2) \\ &\quad -F(1;0) + F(-1;0) \\ &= -1. \end{aligned}$$

10. (a) cdf:

$x_1 < 0$ und/oder $x_2 < 0$: $F(x_1, x_2) = 0$

x_1 und $x_2 \in [0,1]$: $F(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \frac{1}{2}(4x_1x_2 + 1) dx_2 dx_1 = \frac{1}{2} x_1 x_2 (x_1 x_2 + 1)$

$x_1 \in [0,1]$ und $x_2 > 1$: $F(x_1,x_2) = F(x_1,1) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_1)$

$x_1 > 1$ und $x_2 \in [0,1]$: $F(x_1,x_2) = F(1,x_2) = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_2)$

$x_1 > 1$ und $x_2 > 1$: $F(x_1,x_2) = 1$

(b) Randdichten:

$f_1(x_1) = \int_0^1 \frac{1}{2}(4x_1x_2 + 1) dx_2 = x_1 + \frac{1}{2}$; $x_1 \in [0,1]$

$f_1(x_1) = \int_0^1 \frac{1}{2}(4x_1x_2 + 1) dx_1 = x_2 + \frac{1}{2}$; $x_2 \in [0,1]$

$\Rightarrow f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{2}\right) = x_1x_2 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + \frac{1}{4} \neq f(x_1,x_2)$

$\Rightarrow$ stochastisch abhängig

(c)

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1,x_2)}{f_2(x_2)} = \frac{4x_1x_2+1}{2x_2+1} \quad \text{für } x_1 \in [0,1] \text{ und } x_2 \in [0,1]$$

$$F(x_1|x_2) = \int_0^{x_1} f(x_1|x_2)dx_1 = \frac{2x_1^2x_2+x_1}{2x_2+1} \quad \text{für } x_1 \in [0,1] \text{ und } x_2 \in [0,1]$$

11. (a) Für $x_1 \in [0,4]$ und $x_2 \in [0, \frac{1}{4}x_1]$:

$$F(x_1,x_2) = \int_0^{x_2}\int_{4x_2}^{x_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} F(x_1,x_2) &= \int_0^{x_2}\int_{4x_2}^{x_1} \frac{1}{2}dx_1dx_2 = \int_0^{x_2}\left[\frac{1}{2}x_1\right]_{4x_2}^{x_1} dx_2 \\ &= \int_0^{x_2}\left(\frac{1}{2}x_1 - 2x_2\right)dx_2 = \frac{1}{2}x_1x_2 - x_2^2 \end{aligned}$$

Für $x_1 > 4$ und $x_2 \in [0,1]$:

$F(x_1,x_2) = F(4,x_2) = 2x_2 - x_2^2$

Für $x_1 \in [0,4]$ und $x_2 > \frac{1}{4}x_1$:

$F(x_1,x_2) = F(x_1, \frac{1}{4}x_1) = \frac{1}{16}x_1^2$

Für $x_1 < 0$ und $x_2 < 0$: $F(x_1,x_2) = 0$

Für $x_1 > 4$ und $x_2 > 1$: $F(x_1,x_2) = 1$

$P(2 \leq x_1 \leq 3; \frac{1}{2} \leq x_2 \leq \frac{3}{2}) = F(3; \frac{3}{2}) - F(3; \frac{1}{2}) - F(2; \frac{3}{2}) + F(2; \frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$

(b) Marginale Dichtefunktionen:

$x_1 \in [0,4] : f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_2 = \int_0^{\frac{1}{4}x_1} \frac{1}{2}dx_2 = \frac{1}{8}x_1$

$x_2 \in [0,1] : f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)dx_1 = \int_{4x_2}^{4} \frac{1}{2}dx_1 = 2 - 2x_2$

(c) Bedingte Dichtefunktionen:

$$f\left(x_1|x_2=\frac{1}{4}\right)=\frac{f\left(x_1,x_2=\frac{1}{4}\right)}{f_2(x_2=\frac{1}{4})}=\begin{cases}\frac{1}{2}/\frac{3}{2}=\frac{1}{3} & \text{für } x_1\in[1,4]\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

$$f(x_2|x_1=1)=\frac{f(x_1=1,x_2)}{f_1(x_1=1)}=\begin{cases}\frac{1}{2}/\frac{1}{8}=4 & \text{für } 0<x_2\leq\frac{1}{4}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

12. Die Aufgabe stammt aus dem Mittelhammer (1996) „Mathematical Statistics for Economics and Business“, S. 97 ff. Als kleiner Vorgeschmack auf die englische Fachliteratur, hier die Lösung auf Englisch:

    a continuous trivariate random variable with joint density function

    $$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{3}{16}\,x_1\,x_2^2\,e^{-x_3}I_{[0,2]}(x_1)I_{[0,2]}(x_2)I_{[0,\infty]}(x_3).$$

    (a) What is the marginal density of X_1 ? of X_2 ? of X_3 ?

    $$\begin{aligned}f_1(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,x_3)dx_2dx_3\\ &= \frac{3}{16}x_1I_{[0,2]}(x_1)\int_{-\infty}^{\infty}x_2^2I_{[0,2]}(x_2)dx_2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_3}I_{[0,\infty]}(x_3)dx_3\\ &= \frac{3}{16}x_1I_{[0,2]}(x_1)\left(\frac{8}{3}\right)(1)=\frac{1}{2}x_1I_{[0,2]}(x_1).\end{aligned}$$

    Similarly,

    $$\begin{aligned}f_2(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_3=\frac{3}{8}x_2^2I_{[0,2]}(x_2)\\ f_3(x_3) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2=e^{-x_3}I_{[0,\infty)}(x_3).\end{aligned}$$

    (b) What is the probability that $x_1\geq 1$?

    $$P(x_1\geq 1)=\int_1^{\infty}f_1(x_1)dx_1=\int_1^2\frac{1}{2}x_1dx_1=\left.\frac{x_1^2}{4}\right|_1^2=0.75$$

    (c) Are the three random variables independent?
    Yes. Since we have derived the marginal densities of X_1, X_2, and X_3, it is clear that

    $$f(x_1,x_2,x_3)=f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)\qquad\forall\,(x_1,x_2,x_3).$$

(d) What is the marginal cumulative distribution function for X_2 ? for X_3 ?

By definition,

$$\begin{aligned} F_2(b) &= \int_{-\infty}^{b} f_2(x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{b} \frac{3}{8}x_2 I_{[0,2]}(x_2)dx_2 \\ &= \frac{1}{8}x_2^3\bigg|_0^b I_{[0,2]}(b) + I_{[2,\infty)}(b) = \frac{1}{8}b^3 I_{[0,2]}(b) + I_{[2,\infty)}(b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(b) &= \int_{-\infty}^{b} f_3(x_3)dx_3 = \int_{-\infty}^{b} e^{-x_3} I_{[0,\infty)}(x_3)dx_3 \\ &= -e^{-x_3}\big|_0^b I_{[0,\infty)}(b) = (1-e^{-b})I_{[0,\infty)}(b). \end{aligned}$$

(e) What is the joint cumulative distribution function for X_1, X_2, and X_3 ?

By definition,

$$\begin{aligned} F(b_1,b_2,b_3) &= \int_{-\infty}^{b_1}\int_{-\infty}^{b_2}\int_{-\infty}^{b_3} f(x_1,x_2,x_3)dx_3dx_2dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{b_1} \frac{1}{2}x_1 I_{[0,2]}(x_1)dx_1 \int_{-\infty}^{b_2} \frac{3}{8}x_2^2 I_{[0,2]}(x_2)dx_2 \\ &\quad \cdot \int_{-\infty}^{b_3} e^{-x_3} I_{[0,\infty)}(x_3)dx_3 \\ &= \left[\frac{b_1^2}{4} I_{[0,2]}(b_1) + I_{[2,\infty)}(b_1)\right]\left[\frac{b_2^3}{8} I_{[0,2]}(b_2) + I_{[2,\infty)}(b_2)\right] \\ &\quad \cdot \left[(1-e^{-b_3})I_{[0,\infty)}(b_3)\right]. \end{aligned}$$

What is the probability that $x_1 \le 1, x_2 \le 1, x_3 \le 10$?

$F(1;1;10) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{24} \cdot (1-e^{-10}) = 0.031$

(f) What is the conditional PDF of X_1, given that $x_2 = 1$ and $x_3 = 0$?
By definition,

$$f(x_1|x_2 = 1, x_3 = 0) = \frac{f(x_1, 1, 0)}{f_{23}(1, 0)}.$$

Also,

$$f_{23}(x_2, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)dx_1 = \frac{3}{8}x_2^2 I_{[0,2]}(x_2)e^{-x_3} I_{[0,\infty)}(x_3).$$

Thus,

$$f(x_1|x_2 = 1, x_3 = 0) = \frac{\frac{3}{16}x_1 I_{[0,2]}(x_1)}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2}x_1 I_{[0,2]}(x_1).$$

13. (a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 k(x^2 + y^2)dxdy &\overset{!}{=} 1 \\
&= k \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right]_0^1 dy \\
&= k \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2\right) dy - k \int_0^1 \left(0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot y^2\right) dy \\
&= k \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2\right) dy = k \left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 \\
&= k \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \overset{!}{=} 1 \\
&\Rightarrow k = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = k \int_0^1 \left(x^2 + y^2\right) dy \\
&= k \left[\frac{1}{3}y^3 + x^2 y\right]_0^1 = k \left(\frac{1}{3} + x^2\right) I_{(0,1)}(x)
\end{aligned}$$

analog:

$$f(y) = k \left(\frac{1}{3} + y^2\right) I_{(0,1)}(y)$$

(c)

$$
\begin{aligned}
P(3x > y) &= \int_0^{\frac{1}{3}} \int_0^{3x} \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right) dydx + \int_{\frac{1}{3}}^1 \int_0^1 \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right) dydx \\
\text{oder:} & \\
P(3x > y) &= \int_0^1 \int_{\frac{1}{3}y}^1 \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right) dxdy = \frac{3}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right]_{\frac{1}{3}y}^1 dy \\
&= \int_0^1 \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}+y^2\right) dy - \int_0^1 \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}y\right]^3 + \frac{1}{3}y^3\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}y^2\right) dy - \int_0^1 \frac{14}{27}y^3 dy \\
&= \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}\cdot\frac{14}{27}y^4\right]_0^1 = 1 - \frac{7}{54} = \frac{47}{54}
\end{aligned}
$$