Probeklaur

Victor Minig

January 27, 2025

1)

Gegeben:

X_1, X_2 sind i.i.d. verteilt mit

$$f(x_i) = e^{-x_i}, \quad i = 1, 2$$

a)

Gesucht:

Gemeinsame Dichte

Lösung:

Da unabhängig:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \\ &= e^{-x_1} \cdot e^{-x_2} I_{(0,\infty)}(x_1) I_{(0,\infty)}(x_2) \end{aligned}$$

b)

Gesucht:

Gemeinsame Verteilung

Lösung:

$$\begin{aligned} F(b_1, b_2) &= \int_{-\infty}^{b_1} \int_{-\infty}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} e^{-x_1 - x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^{b_1} \left[-e^{-x_1 - x_2}\right]_0^{b_2} dx_1 \\ &= \int_0^{b_1} \left[-e^{-x_1 - b_2} + e^{-x_1}\right] dx_1 \\ &= \left[e^{-x_1 - b_2} - e^{-x_1}\right]_0^{\infty} \\ &= e^{-b_1 - b_2} - e^{b_2} - e^{b_1} + 1 \end{aligned}$$

c)

Gesucht:

$E(X_1X_2)$

Lösung:

$$\begin{aligned}
E(X_1X_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f(x_1,x_2)dx_1dx_2\\
&= \int_0^{\infty} x_2e^{-x_2}\int_0^{\infty} x_1e^{-x_1}dx_1dx_2\\
&= \int_0^{\infty} x_2e^{-x_2}(\left[-e^{-x_1}x_1\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x_1})dx_2\\
&= \int_0^{\infty} x_2e^{-x_2}\left((0-0)-[0-1]\right)dx_2\\
&= 1
\end{aligned}$$

d)

Gesucht:

$$P(x_1 < \frac{1}{2}x_2, 0 < x_2 < 2)$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
P(x_1 < \frac{1}{2}x_2, 0 < x_2 < 2) &= \int_0^2\int_0^{\frac{1}{2}x_2} e^{-x_1-x_2}dx_1dx_2\\
&= \int_0^2 e^{-x_2}\left[-e^{-\frac{1}{2}x_2}+1\right]dx_2\\
&= \left[\frac{1}{2}e^{-x_2-\frac{1}{2}x_2} - e^{-x_2}\right]_0^2\\
&= \frac{1}{2}e^{-2-1} + e^{-2} + 1 - 1\\
&= \frac{1}{2}e^{-2-1} + e^{-2}
\end{aligned}$$

e)

Gesucht:

Verteilungen von $S = X_1 + X_2$ und $D = X_1 - X_2$