Dr. Christian Aßmann

Methodenlehre der Statistik III

Übungsblatt 1

1. *(Stichprobenraum und Potenzmenge)* Bei einem Zufallsexperiment werden aus einer Urne mit $M = 3$ verschiedenen, mit den Zahlen 1 bis 3 versehenen Kugeln, $n = 2$ Kugeln gezogen.

   (a) Geben Sie die Anzahl der Elementarereignisse L des Stichprobenraums S beim „Ziehen mit Zurücklegen" und beim „Ziehen ohne Zurücklegen" an.

   (b) Wie viele Teilmengen besitzt der Stichprobenraum für das Experiment beim „Ziehen mit Zurücklegen".

2. *(Boolesche Mengenkörper als Ereignisraum)* Ein Mengenkörper $\mathcal{K}$ ist durch folgende Eigenschaften definiert: (i) $A \in \mathcal{K} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{K}$; (ii) $A \in \mathcal{K}$ und $B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$. Die Ergebnismenge $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, ..., 6\}$ ist der Stichprobenraum des Experiments: Zweimaliges Ausspielen eines Würfels. A_k $(k = 2, ..., 12)$ sei das Ereignis: Die Augensumme beider Ausspielungen ist kleiner oder gleich k und B_k $(k = 2, ..., 12)$ das Ereignis: Die Augensumme beider Ausspielungen ist größer als k. Welche der folgenden Teilmengen der Potenzmenge von S bilden einen Mengenkörper:

   (a) $\mathcal{K}_1 = \{\emptyset, A_2, B_2, S\}$;

   (b) $\mathcal{K}_2 = \{A_{12}, B_{12}\}$;

   (c) $\mathcal{K}_3 = \{A_{11}, B_{11}\}$;

   (d) $\mathcal{K}_4 = \{A_k, B_k : k = 2, ..., 12\}$.

3. *(Boolesche Mengenkörper als Ereignisraum)* Sei $S = \{1, 2, 3\}$. Geben Sie sämtliche nichtleeren Teilmengen der Potenzmenge von S an, die einen Mengenkörper bilden.

4. *(Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion)* Prüfen Sie, ob die jeweils angebene Mengenfunktionen $P(A)$ auch eine Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion ist.

   (a) Stichprobenraum: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   Ereignisraum: $\Upsilon = \{A : A \subset S\}$
   Mengenfunktion: $P(A) = \sum_{x \in A} x/36$ für $A \in \Upsilon$

   (b) Stichprobenraum: $S = [0, \infty)$
   Ereignisraum: $\Upsilon = \{A : A$ ist ein Teilintervall von $S \vee$ eine beliebige Menge gebildet aus Vereinigungen, Schnittmengen oder Komplementmengen dieser Teilintervalle $\}$
   Mengenfunktion: $P(A) = \int_{x \in A} e^{-x} dx$ für $A \in \Upsilon$

   (c) Stichprobenraum: $S = \{x : x$ ist eine positive ganze Zahl (1,2,3,...)$\}$
   Ereignisraum: $\Upsilon = \{A : A \subset S\}$
   Mengenfunktion: $P(A) = \sum_{x \in A} x^2/10^5$ für $A \in \Upsilon$.

5. *(Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung)* $P(\cdot)$ sei eine Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion für den Ereignisraum Υ mit $A_i \in \Upsilon$ $(i = 1, ..., r)$. Zeigen Sie, dass folgende Zusammenhänge gelten:

   (a) $P(A_1 - A_2) = P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$;

   (b) Gilt $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \neq j$, dann ist $P(\cup_{i=1}^{r} A_i) = \sum_{i=1}^{r} P(A_i)$;

   (c) $P([A_1 \cup A_2] - [A_1 \cap A_2])] = P(A_1) + P(A_2) - 2P(A_1 \cap A_2)$.

6. *(Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung)* A, B, C seien Elemente des Ereignisraums Υ und $P(\cdot)$ eine entsprechende Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion. Zeigen Sie, dass folgende Zusammenhänge gelten:

   (a) $P(A) \leq P(B) \Rightarrow P(\bar{B}) \leq P(\bar{A})$;

   (b) $A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$;

   (c) $[A \cap B] \subset C \Rightarrow P(\bar{C}) \leq P(\bar{B}) + P(\bar{A})$.

7. *(Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung)* Die Ereignisse A und B haben die Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 3/4$ und $P(B) = 3/8$. Zeigen Sie, dass (a) $P(A \cup B) \geq 3/4$ und (b) $1/8 \leq P(A \cap B) \leq 3/8$.

8. *(Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung)* Aus einer Urne mit M Kugeln werden n Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wengistens eine Kugel mehrfach auftritt?

9. *(bedingte Wahrscheinlichkeit)* Aus einem gut gemischten Kartenspiel mit 52 Karten werden zwei Karten ohne Zurücklegen gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Karten ein Ass sind?

10. *(bedingte Wahrscheinlichkeit/Satz von Bayes)* Betrachten Sie 5 Urnen, die nummeriert sind von 1 bis 5. Jede dieser Urnen enthält 10 Kugeln. Die Urne i $(i = 1, \ldots, 5)$ enthält i schwarze und $10 - i$ rote Kugeln. Es wird folgendes Zufallsexperiment durchgeführt: Zunächst wird zufällig eine Urne ausgewählt und dann aus der gewählten Urne eine Kugel gezogen.

    (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen?

    (b) Es wurde eine schwarze Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel aus der Urne $i = 5$ stammt?

11. *(Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung)*
    Seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse des Stichprobenraums S.

    (a) Für $n = 2$ gilt $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$. Zeigen Sie, dass für $n = 3$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &- P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

    gilt.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass folgende verallgemeinerte Beziehung erfüllt ist:

$$
\begin{aligned}
P(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \quad &- \quad \sum_{k_1<k_2}^{n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2}) \\
&+ \quad \sum_{k_1<k_2<k_3}^{n} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap A_{k_3}) \\
&+ \quad \ldots + (-1)^{n+1} P(\cap_{k=1}^{n} A_k).
\end{aligned}
$$

12. *(Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung)* Ein fairer Würfel wird 2 mal ausgespielt. Die Elementarereignisse in $S = \{(i,j) : i,j = 1,...,6\}$ sind gleichwahrscheinlich. Sei A das Ereignis "Augenzahl des 1. Wurfs ist kleiner gleich 2" und B das Ereignis "Augenzahl des 2. Wurfs ist größer gleich 5". Ermitteln Sie $P(A \cup B)$.

13. *(Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung)* Es wird zufällig ein Punkt im 'Einheitsquadrat' (die Seitenlänge ist eins) bestimmt. Der Stichprobenraum ist $S = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$. Der Ereignisraum Υ sei durch einen Borelschen Mengenkörper in S gegeben. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \leq y \leq 1\}$$

und für das Ereignis, dass der Punkt innerhalb des Kreises mit dem Zentrum in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und dem Radius $\frac{1}{2}$ liegt, d.h.

$$B = \{(x,y) : 0 \leq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1\} .$$

14. *(Bedingte Wahrscheinlichkeit)* Ein Medikament wird zur Behandlung einer Krankheit K verwendet. Die Wahrscheinlichkeit, dass keine Nebenwirkungen auftreten ist $\frac{2}{3}$. Unter der Voraussetzung, dass keine Nebenwirkungen eintreten, ist die Wahrscheinlichkeit für eine Heilung $\frac{3}{4}$. Andernfalls ist sie 0. Das Medikament wird 3 Versuchspatienten verabreicht, wobei die Versuchsergebnisse stochastisch unabhängig sind.

    (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

        i. alle Patienten genesen?

        ii. mindestens ein Patient geheilt wird?

    (b) Wie vielen Patienten müsste mindestens das Medikament verabreicht werden, damit mit Wahrscheinlichkeit $\geq 0{,}95$ gilt:

        i. mindestens ein Patient erleidet keine Nebenwirkungen?

        ii. mindestens ein Patient geheilt wird?

15. *(Stochastische Unabhängigkeit)* Sei (S, Υ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Stichprobenraum $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, dem Ereignisraum Υ bestehend aus der Potenzmenge von S und einer Wahrscheinlichkeitsmengenfunktion P mit $P(E_i) = \frac{1}{4}$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Betrachten Sie folgende Ereignisse:

$$A_1 = \{E_1, E_2\}\ , \quad A_2 = \{E_1, E_3\}\ , \quad A_3 = \{E_1, E_4\}\ ,$$

und zeigen Sie, dass diese Ereignisse zwar paarweise stochastisch unabhängig aber nicht gemeinsam stochastisch unabhängig sind.

16. *(Unabhängigkeit versus Disjunktheit)* Sei $P(A_i) = 0{,}1$ für $i = 1, \ldots, 10$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\cap_{i=1}^{n} A_i)$, wenn

(a) die A_i's unabhängig sind;

(b) die A_i's disjunkt sind;

(c) $P(A_i | \cap_{j=1}^{i-1} A_j) = 0{,}2$ für $i = 2, \ldots, 10$ ist.