Dr. C. Aßmann, Dr. A. Würbach

Abschlussklausur zur Lehrveranstaltung
Statistik III (WS 2016/2017)

Dienstag, 14. Februar 2017, 9.00 - 10.00 Uhr

Allgemeine Hinweise:
Die Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Es sind **alle** Aufgaben zu bearbeiten.

Dauer der Klausur:
60 Minuten

Hilfsmittel:
In der Vorlesung verwendete Formelsammlungen, nichtprogrammierbarer Taschenrechner.

Wichtiger Hinweis:
Alle aus den Formelsammlungen herangezogenen Ergebnisse sind unter Verwendung ihrer Bezeichnung zu zitieren (z.B. „Theorem (Jensen-Inequality)") und ihre Voraussetzungen zu prüfen.

Viel Erfolg!

Aufgabe A (25 Punkte)

Die gemeinsame Dichtefunktion (pdf) der zweidimensionalen Zufallsvariable (X, Y) sei

$$f(x,y) = ke^{-x-2y} I_{(0,\infty)}(x) I_{(0,\infty)}(y) \ .$$

a1) *(4 Punkte)* Ermitteln Sie denjenigen Wert für k, für den $f(x,y)$ tatsächlich eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist.

a2) *(5 Punkte)* Geben Sie die entsprechende gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x,y)$ an.

a3) *(4 Punkte)* Geben Sie die marginalen Dichefunktionen der beiden Komponenten X und Y an.

a4) *(4 Punkte)* Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}[XY]$.

a5) *(2 Punkte)* Ermitteln Sie die bedingte Dichtefunktion $f(x \mid y)$.

a6) *(4 Punkte)* Berechnen Sie $P(x < \frac{1}{2}y \ , \ 0 < y < 2)$.

a7) *(2 Punkte)* Sind die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Aufgabe B (15 Punkte)

Sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable auf dem Intervall (a, b) mit zugehöriger Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x) \quad \text{mit } \{(a,b) : -\infty < a < b < \infty\} \ .$$

b1) *(8 Punkte)* Zeigen Sie per Induktion, dass die nichtzentralen Momente gegeben sind durch

$$\mu'_r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(b-a)(r+1)} \qquad r = 1, 2, \dots \ .$$

b2) *(2 Punkte)* Ist die gegebene Dichte ein Mitglied der Exponentialfamilie? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

b3) *(5 Punkte)* Es liege nun eine Zufallsstichprobe der Größe $n = 5$ aus obiger Gleichverteilung mit den Grenzen $(0, 1)$ vor. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der n-ten Ordnungsstatistik, d.h. $F_{X_{[n]}}$.

Aufgabe C (8 Punkte)

Es sei $\mathbf{X}$ eine Zufallsvariable, die einer bivariaten Normalverteilung $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ mit

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

folgt.

c1) *(4 Punkte)* Bestimmen Sie die Regressionsfunktion von X_1 auf X_2, und berechnen Sie $\mathrm{E}(X_1 \mid x_2 = 1)$.

c2) *(1 Punkt)* Wie groß ist die bedingte Varianz von X_1 gegeben $x_2 = 0$?

c3) *(3 Punkte)* Geben Sie die entsprechende momenterzeugende Funktion $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ an.

Aufgabe D (12 Punkte)

Es sei $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ eine Folge von *iid*-verteilten Zufallsvariablen aus einer Exponentialverteilung mit

$$f(u;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{u}{\theta}} I_{(0,\infty)}(u) \qquad \theta > 0\ .$$

Ferner sei Z_n das arithmetische Mittel dieser Zufallsvariablen, d.h.

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} U_i\ .$$

d1) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass für Z_n Konvergenz im quadratischen Mittel gilt und geben Sie den Grenzwert an.

d2) *(4 Punkte)* Ermitteln Sie die asymptotische Verteilung von Z_n.

d3) *(4 Punkte)* Wie lautet die asymptotische Verteilung von $Y_n = e^{-Z_n}$?