Dr. Christian Aßmann

Methodenlehre der Statistik III

Methoden

- Differentialrechnung
  - Differentation einer Summe von Funktionen:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i;\theta) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta} f_i(x_i;\theta)$$

    Beispiel:

$$\begin{aligned} f(\underline{x};\theta) &= \sum_{i=1}^{n}(\ln\theta - \theta x_i) \\ \frac{\partial}{\partial\theta} f(\underline{x};\theta) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\theta} - x_i\right) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

- Integralrechung
  - partielle Integration:
    Sei $f(x) = g(x)h'(x)$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = |g(x)h(x)|_a^b - \int_a^b g'(x)h(x)dx$$

  - Substitutionsverfahren (im Verlauf der Veranstaltung auch mehrdimensional/multivariat):
    Sei $u = g(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x &= g^{-1}(u) \\ dx &= g^{-1'}(u)du \end{aligned}$$

    Somit gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g^{-1}(u))g^{-1'}(u)du$$

    Erläuterung: Anstatt $f(x)$ über x zu integrieren wird der (einfachere) funktionale Zusammenhang in u verwendet. Dabei müssen Integrand und Integrationsbereich angepasst werden.
    Beispiel: Sei $f(x) = x^2$ und $u = g(x) = x^2$. Damit gilt:

$$\int_{1,5}^{2,5} x^2 dx = \left|\frac{1}{3}x^3\right|_{1,5}^{2,5} = 4,0833$$

Mittels des Substitutionsverfahrens ergibt sich:

$$\begin{aligned}
x = g^{-1}(u) &= \sqrt{u} \text{ wegen } x \in [1,5; 2,5] \\
dx &= \frac{1}{2} u^{-0,5} du \\
x = 1,5 &\Rightarrow u = 1,5^2 = 2,25 \\
x = 2,5 &\Rightarrow u = 2,5^2 = 6,25 \\
\int_{1,5}^{2,5} x^2 dx &= \int_{2,25}^{6,25} (\sqrt{u})^2 \frac{1}{2} u^{-0,5} du = \int_{2,25}^{6,25} \frac{1}{2} u^{0,5} du \\
&= \left| \frac{1}{3} u^{1,5} \right|_{2,25}^{6,25} = 4,0833
\end{aligned}$$

– Zweifachintegration (im Verlauf auch höherdimensionale Integration):

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(F_x(b,y) - F_x(a,y)\right) dy = \ldots$$

Ein mehrfaches Integral wird durch iteratives Lösen eindimensionaler Integrale von innen nach außen berechnet. Dabei werden die Variablen die nicht 'integriert" werden als Konstante behandelt, z.B.

*
$$\int_0^1 \int_0^1 4xy dx dy = \int_0^1 \left|2yx^2\right|_0^1 dy = \int_0^1 2y dy = \left|y^2\right|_0^1 = 1$$

*
$$\int_0^1 \int_0^1 \{\min(u,v) - \max(0, v+u-1)\} du dv = \frac{1}{6}$$