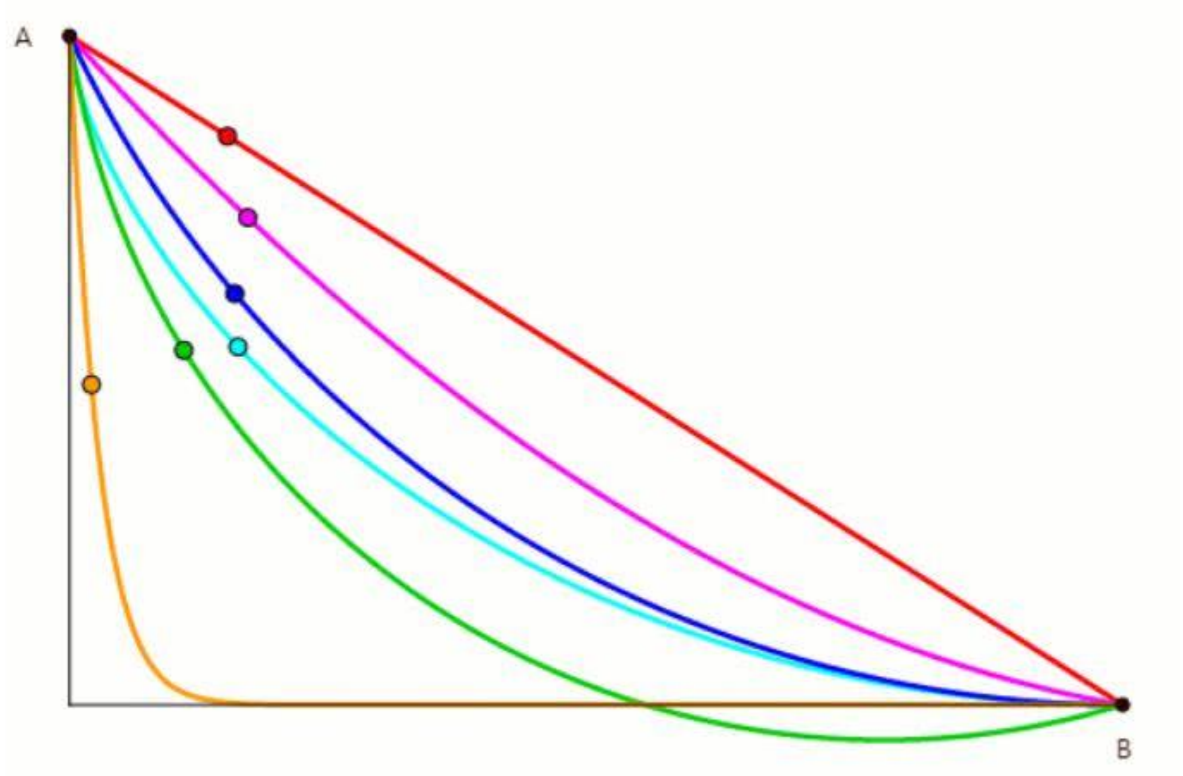
普物期末程式專題報告—最速降線之模擬

森林一 B07605083 廖威騏

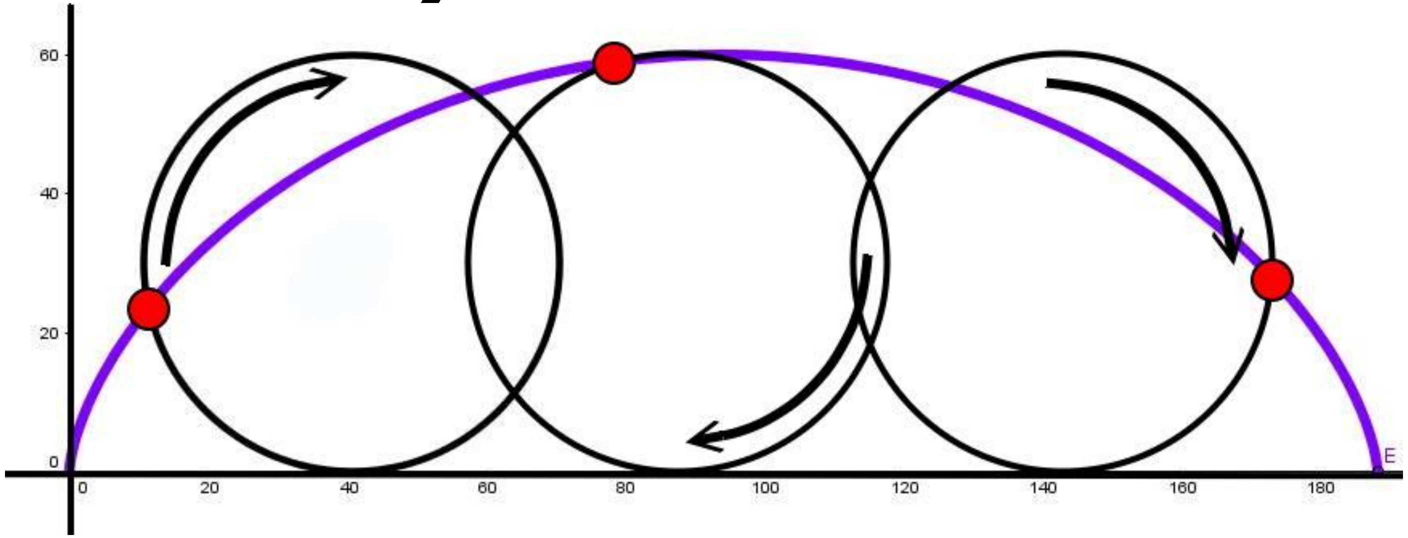
摘要

- 在空間中，讓物體在初速為零且無摩擦力的情況下，從較高的A點到較低的B點之任意路徑。
- 但什麼樣的路徑可以使物體最快到達低點?



摘要

- 在空間中，讓物體在初速為零且無摩擦力的情況下，從較高的A點到較低的B點之任意路徑。
- 但什麼樣的路徑可以使物體最快到達低點?
- Answer:**擺線**(cycloid)!



模擬動機

- 在最近的微甲課程中，老師有提到一些關於擺線(cycloid)的介紹。
- 擺線在物理上有重要意義—**最速降曲線!**
- 但是老師並沒有針對這個部分加以說明，使我產生好奇想更進一步做了解。

模擬目的

- 前人已經有用變分法或斯乃耳定律等找到最速降線的解就是擺線。
- 礙於這些方法用到一些較艱澀的數學，目前不適合透過解析解來研究。
- 而做實驗又免不了會有實際環境(摩擦力)和人為實驗的誤差。
- 所以透過程式來模擬是最適合不過的。

模擬曲線類別

- 在本次模擬中，球的移動路徑我選擇了
  (1)直線
  (2)圓弧
  (3)二次曲線
  (4)三次曲線
  (5)擺線
  來觀察個別的所需時間及切線加速度對時間的關係圖(a_t-t)、切線加速度對位移的關係圖(a_t-x) 。

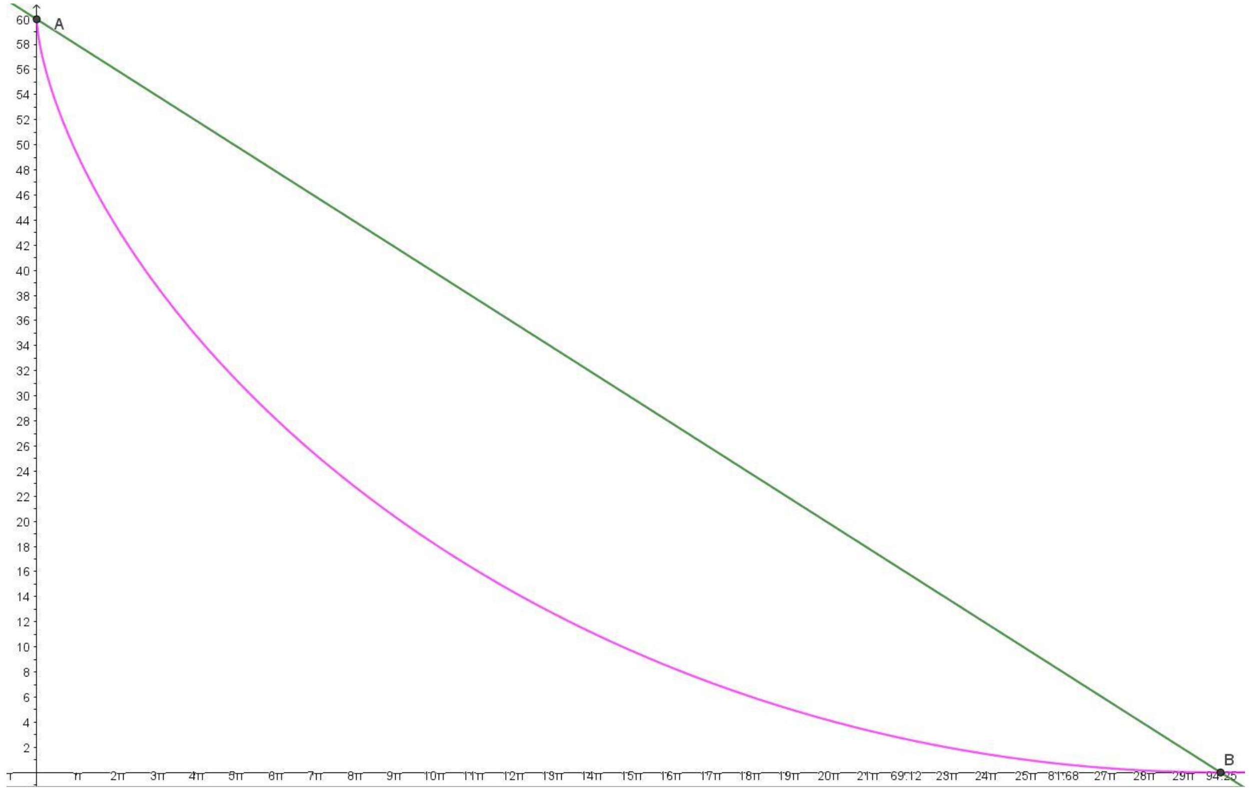
- 球質心位置起點:A(0,60), 終點:B(30π,0) 。

直線

- 一次函數: $f(x) = \frac{-2}{\pi}x + 60$
- 討論原因：直線是最短距離，與最速降線作比較。

一次函數

擺線



一次函數與擺線

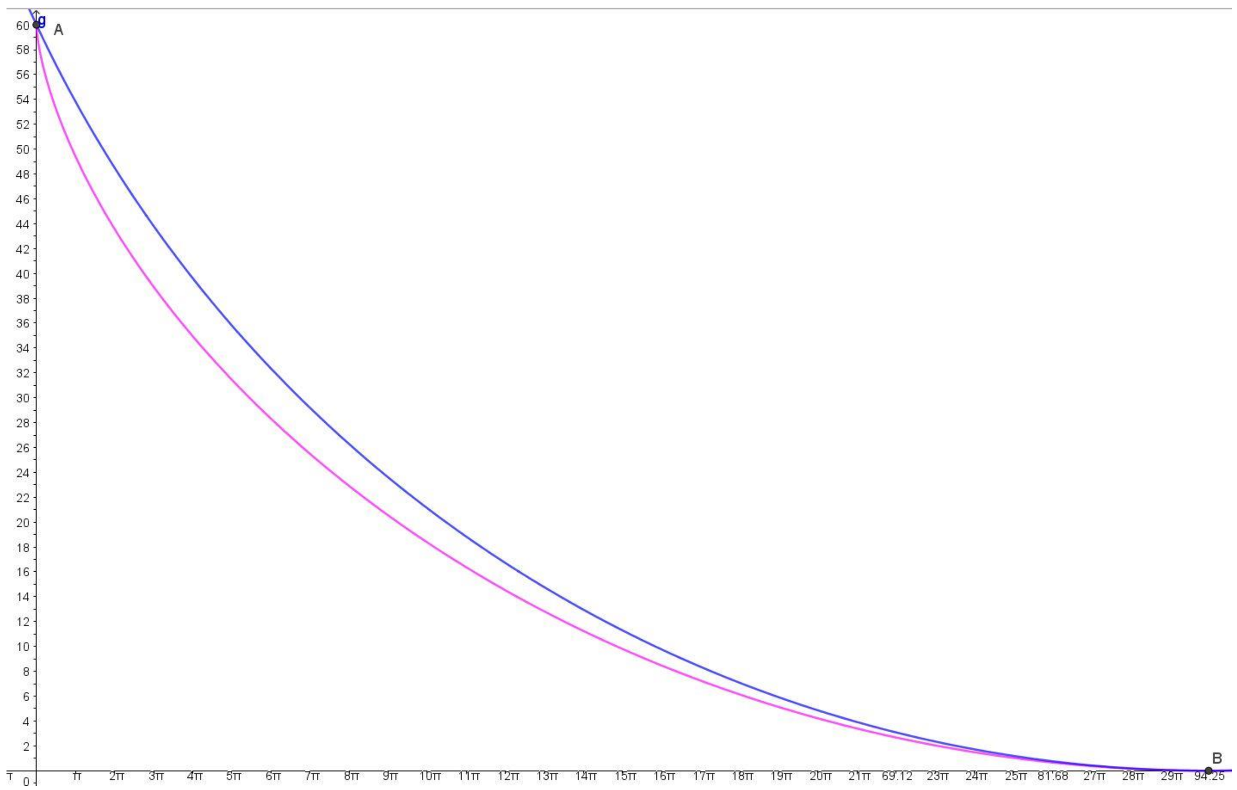
圓弧

- 圓弧: $f(x)=\dfrac{15\pi^2+60-\sqrt{225\pi^4-1800\pi^2+240\pi x-4x^2+3600}}{2}$
- 討論原因：輪廓與擺線相似，伽利略以為圓弧就是最速降線。

圓弧

擺線

圓弧與擺線

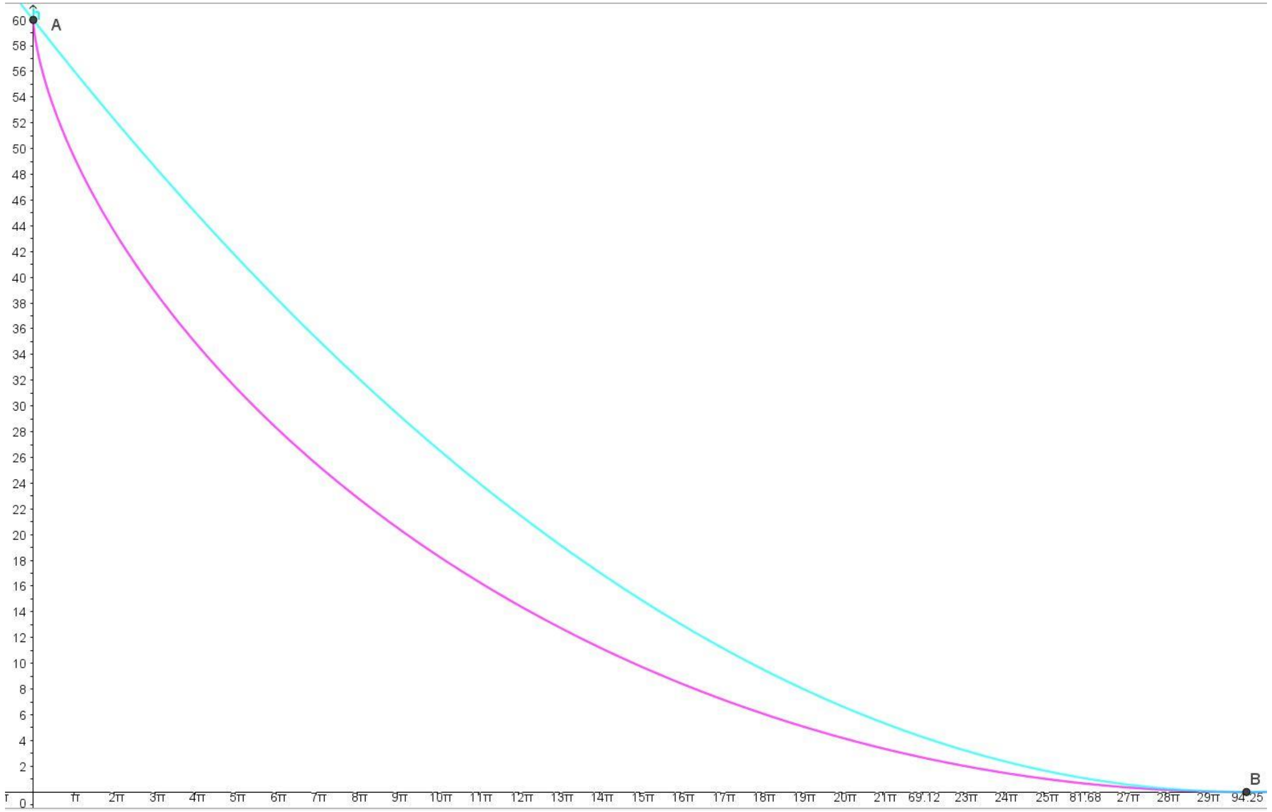


二次函數

- 二次函數: $f(x) = \frac{60}{(-30\pi)^2}(x - 30\pi)^2$
- 討論原因：和擺線同為曲線，但下凹程度不如擺線。

二次函數

擺線



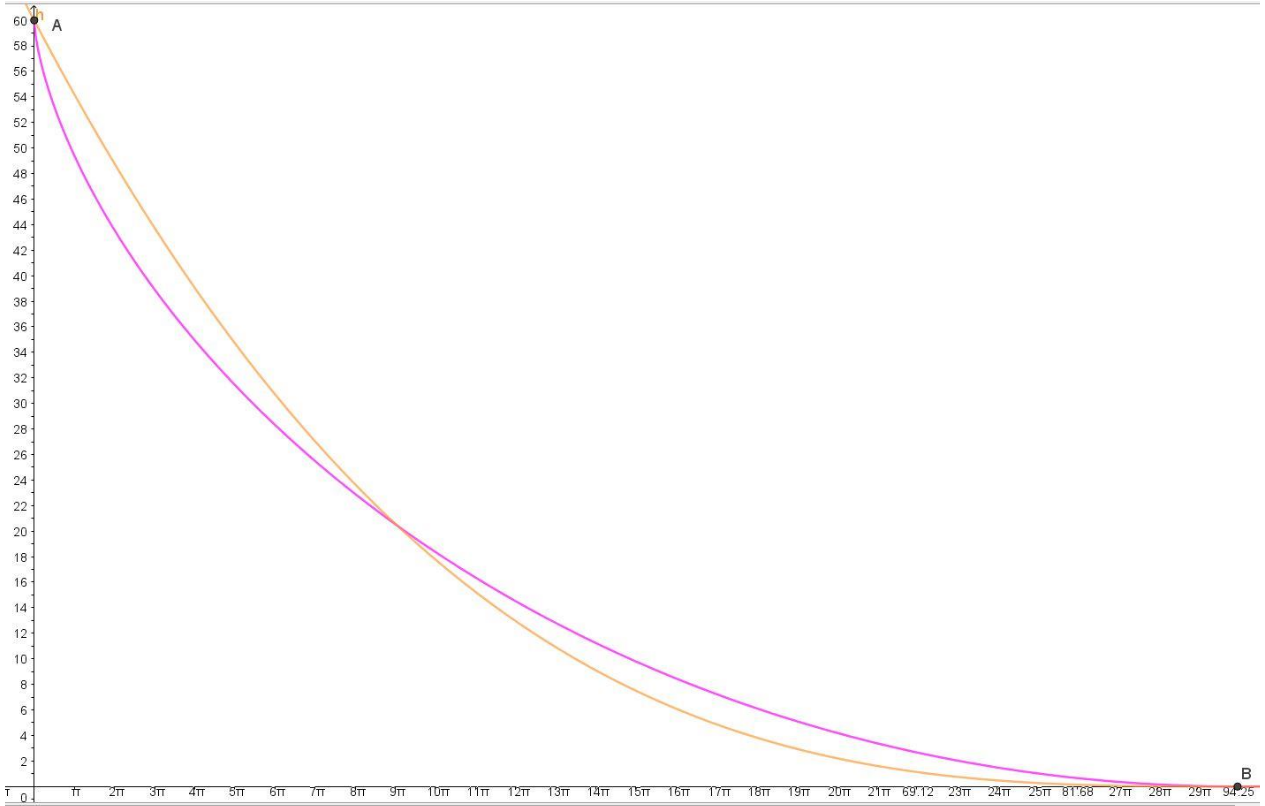
二次函數與擺線

三次函數

- 三次函數: $f(x) = \dfrac{60}{(-30\pi)^3}(x - 30\pi)^3$
- 討論原因：和擺線同為曲線，下凹程度類似擺線。

三次函數

擺線

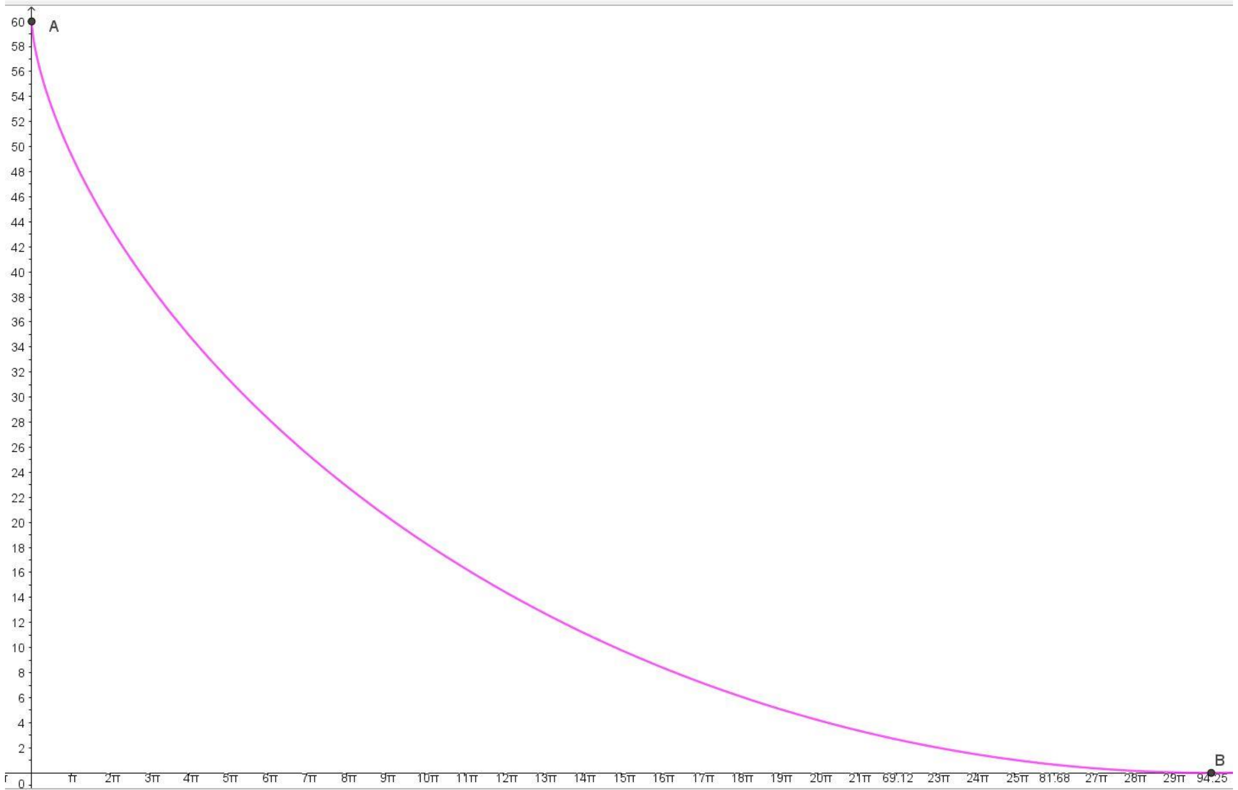


三次函數與擺線

擺線

- 擺線: C: $\begin{cases} x = 30\theta - 30sin\theta \\ y = 30cos\theta + 30 \end{cases}, 0 \leq \theta \leq \pi$
- 討論原因：此為最速降線的解。

擺線

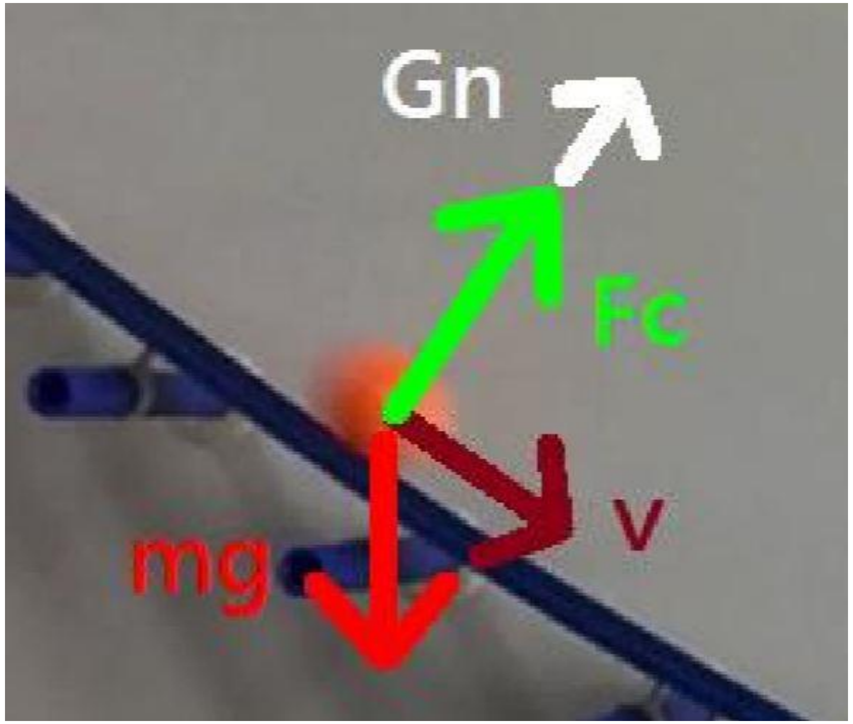


擺線

模擬程式構思

- dt or dx?
- 受力分析:

  滑動中質點只受重力 mg 與軌道給的正向力 Fn 影響，而正向力 Fn 的量值為質點對某一瞬間該點的密切圓中心進行等速率圓周運動的向心力 Fc 與正向力Gn 的和。



受力分析圖

使用dt法遇到的困難

- 使用dt法必須先算出球的受力，但法向力必須牽扯到密切圓的公式:

$$R(x)=\frac{(1+\left(f'(x)\right)^{2})^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|}$$

這會用到一階和二階微分，在vpython裡很難處理。

- 所以二次、三次和擺線我是採用另一種做法—dx法。

dx法

- 概念其實跟dt法一樣，只不過切割的對象從時間變成空間。
- $y = f(x)$:

$$x_i = \frac{30\pi}{n} i, \qquad y_i = f(x_i), \qquad i = 1,2, \dots, n$$

令n很大，則得到的誤差結果就會很小。

- 缺點是此法n必須要到達幾十萬才不會讓球滑到後段時軌跡就看起來變成線段，也因此程式跑起來會很慢。

dt法

- 由於直線軌道不用擔心圓周運動問題，所以能採用dt法。
- 圓弧因為每一點的密切圓圓心就是此圓弧的中心，所以也能採用dt法。

切向加速度a_t之推導

- 若要計算的軌道函數為：

$$y = f(x)$$

將水平方向總長度平分成 n 等分，取$(\frac{30\pi}{n}) \cdot i$當作$x_1$，$(\frac{30\pi}{n}) \cdot (i+1)$當作$x_2$：

$$x_1 = x_1(i) = \frac{30\pi}{n} \cdot i\text{，}x_2 = x_2(i) = \frac{30\pi}{n} \cdot (i+1)$$

則x_1對應到的函數值為$f(x_1)$，x_2對應到的函數值為$f(x_2)$，點$P(x_1, f(x_1))$和點$Q(x_2, f(x_2))$之間的距離 S 為：

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2}$$

切向加速度a_t之推導

- 而P 點會有初速度V_0為：

$$V_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (60 - f(x_1))}$$

- 這條線段上的加速度a_t為重力加速度的切向分量：

$$a_t = \frac{|f(x_2) - f(x_1)|}{S} \cdot g$$

- 則P 、Q兩點之間的時間T_{PQ}可透過下列方程式解出：

$$T_{PQ} = \frac{\sqrt{V_0^2 + 2a_t S} - V_0}{a_t}$$

計算總時間

- 把所有的T_{PQ}加起來即可得到:

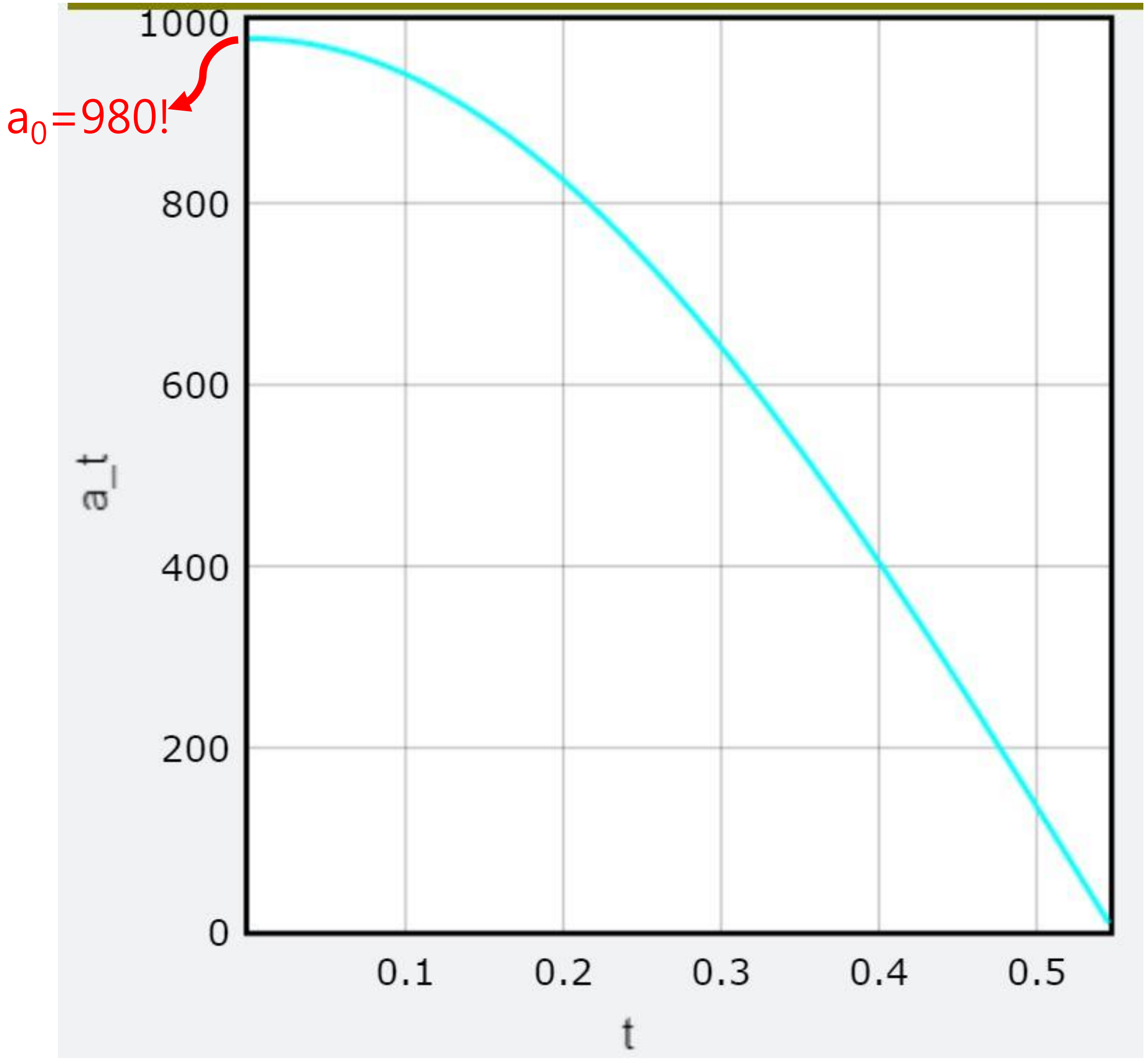
$$T_{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{V_0^2 + 2a_t S} - V_0}{a_t}$$

模擬值&理論值

數據類別 / f(x)	模擬值(s)	理論值(s)	誤差%
一次函數	0.65160	0.65159	0.0015347
圓弧	0.55610	0.55620	-0.017979
二次函數	0.57259	0.57324	-0.11339
三次函數	0.55781	0.55852	-0.12712
擺線	0.54966	0.54966	0

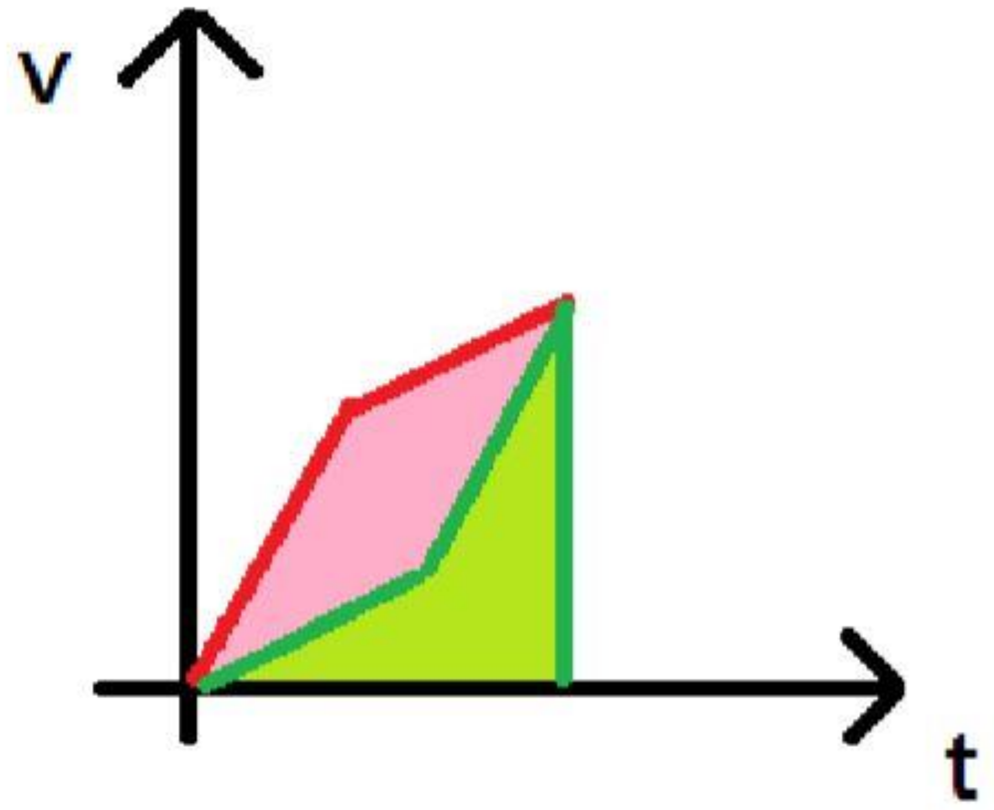
從a_t-t圖中觀察為何擺線會是最速降線

- 球在擺線的最一開始就獲得了最大的切向加速度。也因此相較於其他的函數軌道，擺線可以讓球在前半段的速度較快。而由v-t圖可知，先加速的曲線其底下的面積(也就是位移)會較大。



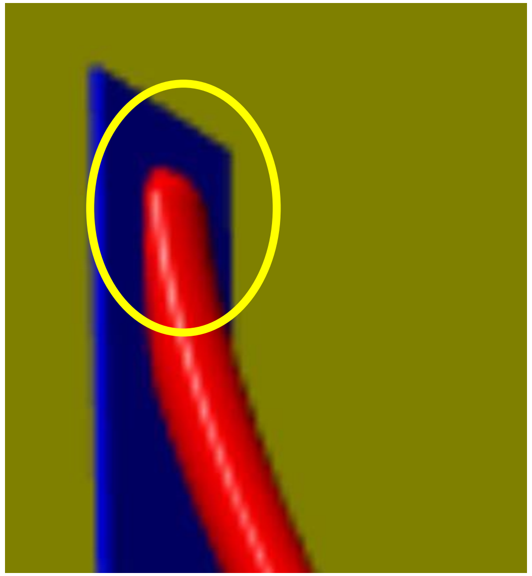
v-t示意圖

- 同樣的初速和末速，但先有較大加速度者其v-t圖底下面積較大，位移較大。



為何擺線最一開始的a_0=980cm/s^2?

- g=980cm/s^2 ⇒ 自由落體?
- 計算(0,60) ⇒ $\theta = 0$時的切線斜率:
- $slope = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{30-30\cos\theta}{-30\sin\theta}\Big|_{\theta = 0} = \frac{0}{0}$ →無意義!
- 擺線起點為鉛直線!



結論

- 擺線的結果最快，接續是圓弧，三次函數，二次函數，直線反而最慢。
- 擺線為最速降線的原因在於，它讓球在最一開始就獲得能達到的最大切線加速度(=g=980cm/s^2)。

謝謝大家~
新年快樂!