

# Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Córdoba - Extensión Áulica Bariloche

Ingeniería en Sistemas de Información Año lectivo 2025

# Análisis Matemático 2

# Resumen

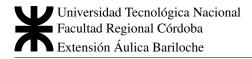
Cambiar Título

Profesor: Mónica Guraya Ayudante: Santiago Ward

Fecha: 19/04/2025

Alumno: Ricardo Nicolás Freccero

Número de legajo: 415753



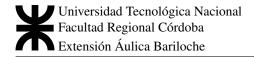
# Índice

1.	Con	juntos y puntos	3
	1.1.	Punto	3
	1.2.	Bola abierta	3
	1.3.	Bola abierta reducida	3
	1.4.	Bola cerrada	3
	1.5.	Tipos de puntos	3
		1.5.1. Punto interior	4
		1.5.2. Punto de acumulación	4
		1.5.3. Punto aislado	4
		1.5.4. Punto exterior	4
		1.5.5. Punto frontera	4
		1.5.6. Frontera de un conjunto	4
	1.6.	Conjuntos	4
		1.6.1. Conjunto abierto	4
		1.6.2. Conjunto cerrado	5
		1.6.3. Conjunto acotado	5
		1.6.4. Complemento de un conjunto	5
		1.6.5. Conjunto conexo	5
		1.6.6. Conjunto simplemente conexo	5
2.	Func	ciones	5
	2.1.	Campos Escalares o Funciones de dos o mas variables	6
		2.1.1. Líneas o Curvas de Nivel	7
		2.1.2. Superficies de Nivel	7
	2.2.	Incrementos de una función	7
3.	Lími	ites	8
	3.1.	Límites Iterados	9
	3.2.	Límites Radiales	10
4.	Con	tinuidad	12
5.	Deri	vadas Parciales	12
	5.1.	Interpretación geométrica de las derivadas parciales	13
	5.2.	Derivadas parciales sucesivas	14
	5.3.	Diferencial	15
		5.3.1. Interpretación geométrica del diferencial	15
		5.3.2. Estimación con diferenciales	17

### Análisis Matemático 2 Resumen

Profesor: Mónica Guraya Alumno: Ricardo Nicolás Freccero Fecha: 19/04/2025

Referen	orias.	32
5.11.	. Máximos y mínimos	31
5.10.	. Planos tangentes a superficies	30
	5.9.2. Maximización de la derivada direccional	29
	5.9.1. El vector gradiente	29
5.9.	Derivadas direccionales	27
5.8.	Derivación implícita	26
	5.7.3. La regla de la cadena (versión general)	26
	5.7.2. Caso 2	25
	5.7.1. Caso 1	25
5.7.	La regla de la cadena	24
5.6.	Plano tangente y recta normal a una superficie	22
5.5.	Diferencial total	19
	5.4.1. Repaso	18
5.4.	Diferencial en funciones de varias variables	18
	5.3.3. Error en la aproximación diferencial	17



# 1. Conjuntos y puntos

En  $\mathbb{R}^2$  el **entorno de un punto**  $P_0(x_0, y_0)$  y de radio  $\delta$  es el conjunto de puntos ubicados en el interior de un círculo de centro  $P_0$  y radio  $\delta$ .

En clase al entorno lo vimos como **Bola**, así que vamos a usar la B para representarlo.

### 1.1. Punto

Consideramos como punto a cualquier vector del plano o el espacio que tenga origen en el  $\overline{O}$ .

### 1.2. Bola abierta

Es el conjunto de puntos ubicados en un circulo de radio  $\delta$  alrededor de un punto  $P_0$ .

$$B(P_0, \delta) = \left\{ (x, y) \mid 0 \le +\sqrt{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2} < \delta, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

Otra notación mas facil de entender es la siguiente:

$$B(P_0, \delta) = |P - P_0| < \delta, \delta \in \mathbb{R}$$

Que podemos interpretar como: la bola abierta  $B(P_0, \delta)$  es el conjunto de todos los puntos P cuya distancia a  $P_0$  es menor a  $\delta$ , siendo  $\delta$  el radio de un circulo al rededor del punto  $P_0$ .

### 1.3. Bola abierta reducida

Es lo mismo que la bola abierta, solo que ahora el punto  $P_0$  no está incluído en el conjunto de puntos.

La denotamos como  $B_0$  y su ecuación es la siguiente:

$$B_0(P_0, \delta) = 0 < |P - P_0| < \delta, \delta \in \mathbb{R}$$

### 1.4. Bola cerrada

Es el conjunto de puntos al rededor del punto  $P_0$  que cumplen que su distancia es  $\leq \delta$ . La denotamos como  $\overline{B}$ .

$$\overline{B}(P_0, \delta) = |P - P_0| \le \delta, \delta \in \mathbb{R}$$

# 1.5. Tipos de puntos

Dados un punto *P* cualquiera y un conjunto no vacío *A* de números definimos:

#### Análisis Matemático 2 Resumen

Profesor: Mónica Guraya Alumno: Ricardo Nicolás Freccero Fecha: 19/04/2025

#### 1.5.1. Punto interior

Un punto  $P_0$  es interior de un conjunto A si existe una bola abierta alrededor de  $P_0$  que esté totalmente contenida en A.

$$P_0$$
 es punto interior  $\iff \exists B(P_0) \subset A$ 

### 1.5.2. Punto de acumulación

Cuando toda bola abierta **reducida** alrededor de un punto  $P_0$  contiene puntos de A.

$$P_0$$
 es punto de acumulación de A  $\iff \forall B_0(P_0) : \exists P \mid P \in B_0(P_0) \land P \in A$ .

#### 1.5.3. Punto aislado

Cuando existe una bola abierta al rededor del punto  $P_0$  cuya intersección con A es el mismo punto.

$$P_0$$
 es punto aislado  $\iff \exists B(P_0) \mid B(P_0) \cap A = \{P_0\}$ 

**Nota**: Fijarse que en este caso,  $P_0 \in A$ . Si bien es un punto que está separado del resto de los puntos de A (porque la intersección de una bola abierta alrededor de él con A es el mismo punto), sigue formando parte del conjunto.

#### 1.5.4. Punto exterior

Este es lo mismo que el anterior, pero para cuando el punto  $\notin A$ .

$$P_0$$
 es punto exterior  $\iff \exists B(P_0) \mid B(P_0) \cap A = \{\emptyset\}$ 

#### 1.5.5. Punto frontera

Si hay una bola alrededor de un punto  $P_0$  que contiene tanto puntos que pertenecen como puntos que no prtenecen a A.

Po es punto frontera 
$$\iff \forall B(P_0): \begin{cases} \exists P_1 \in B(P_0) \land P_1 \in A \\ \exists P_2 \in B(P_0) \land P_2 \notin A \end{cases}$$

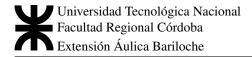
#### 1.5.6. Frontera de un conjunto

El conjunto de todos los puntos frontera de un conjunto A se llama frontera de A.

### 1.6. Conjuntos

### 1.6.1. Conjunto abierto

Es un conjunto cuyos puntos son todos interiores. No hay puntos frontera



### 1.6.2. Conjunto cerrado

Es un conjunto que contiene todos sus puntos de acumulacion, es decir, contiene sus puntos interiores y **contiene sus puntos frontera**.

### 1.6.3. Conjunto acotado

Es un conjunto para el cual es posible hallar un valor M que es mayor que el módulo de cualquier punto  $P_0$  de A.

$$M \in \mathbb{R}^+ \mid |P_0| < M \ \forall P_0 \in A$$

O lo que es lo mismo:

$$\forall P_0 \in A : \exists M \in \mathbb{R}^+ \mid |P_0| < M$$

### 1.6.4. Complemento de un conjunto

El complemento de un conjunto A es el conjunto que contiene todos los elementos del conjunto universal de A que no pertenecen a A.

### 1.6.5. Conjunto conexo

Un conjunto es conexo si cualquier par de puntos del conjunto puede ser unido por un camino formado por segmentos de recta contenidos en *A*.

### 1.6.6. Conjunto simplemente conexo

Es cuando cualquier curva cerrada contenida en el conjunto tiene su interior totalmente contenido en el conjunto.

### 2. Funciones

Existen varios tipo de funciones. Nosotros hasta ahora veníamos trabajando con funciones de una sola variable, que iban de  $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ , estas funciones son **funciones escalares** 

# **Campos escalares**

Funciones de dos o mas variables independientes.

Son funciones de vectores, y la dimensión de su imagen es 1.

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$



### **Funciones Vectoriales**

Van de  $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ 

La dimensión del dominio es 1, pero la dimensión de la imagen es m.

En  $\mathbb{R}^2$  por ejemplo, una función vectorial le asigna a cada número real una imagen que es un vector de dos componentes. La función vectorial r(t) la podemos escribir en forma paramétrica de la siguiente forma:

$$r(t) = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

En donde a cada valor de t le corresponde un par de valores de (x, y), es decir, un punto en  $\mathbb{R}^2$  Estas funciones se utilizan para describir movimientos de partículas, curvas, etc.

# **Campos Vectoriales**

Van de  $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ .

Ejemplos de campos vectoriales son el Campo Eléctrico, Campo Magnético, Campo Gravitacional, etc.

Vamos a estudiar los campos vectoriales en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

Por ejemplo, podemos tener un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$  que le asigna a cada punto del plano, otro punto del plano. (va de  $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ . Y lo mismo pasa en  $\mathbb{R}^3$ .

# 2.1. Campos Escalares o Funciones de dos o mas variables

"Se dice que z es una Función de dos Variables Independientes (x,y) definida en un dominio D si a cada par de valores (x,y) tomados de ese dominio D le corresponde un solo valor de z"(Monllor, 2015)

#### **Dominio**

El dominio es el conjunto de todos los pares ordenados (x,y) para los que está defiinida la función z = f(x,y).

 $D \in \mathbb{R}^2$ , en este caso porque las variables independientes son dos.

### **Imagen**

La imagen es el conjunto de valores que toma z para todos los puntos que conforman el domino.  $z \in \mathbb{R}$ 

### Función Explícita

Cuando está dada de la forma: z = f(x, y)

### Función Implícita

Cuando está dada de la forma: f(x, y, z) = 0

#### 2.1.1. Líneas o Curvas de Nivel

Para una función z = f(x, y) es el conjunto de todos los puntos (x, y) en los que la función toma el mismo valor.

Lo podemos pensar como la proyección sobre el plano xy de la intersección de la función z = f(x,y) con un plano paralelo al plano xy.

### 2.1.2. Superficies de Nivel

En el caso de funciones de 3 variables independientes podemos definir superficies de nivel.

Para una función w = f(x, y, z), una superficie de nivel es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) en los que la función toma el mismo valor.

**Nota**: Este tipo de funciones de 3 variables independientes no las podemos graficar porque necesitamos 4 ejes, pero sí podemos graficar sus superficies de nivel.

## 2.2. Incrementos de una función

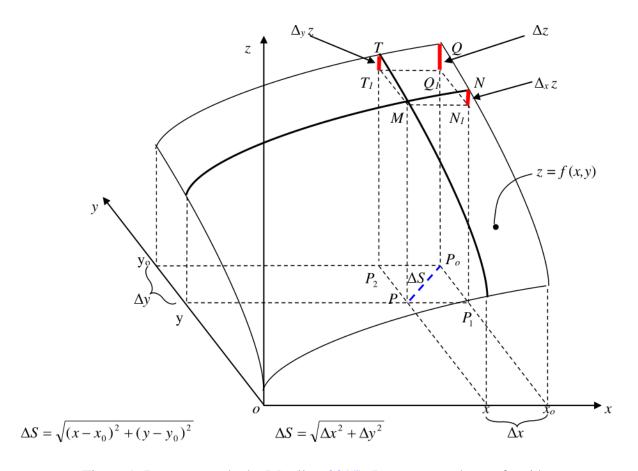


Figura 1: Imagen sacada de (Monllor, 2015). Incrementos de una función

#### Análisis Matemático 2 Resumen

Profesor: Mónica Guraya Alumno: Ricardo Nicolás Freccero Fecha: 19/04/2025

Si analizamos la curva MN, que es la intersección de la superficie z = f(x, y) y el plano y = cte, vemos que si nos movemos sobre ella, z varía solo en función de x.

Si nos movemos en el eje x una distancía  $\Delta x$ , la variación de z es lo que se conoce como:

**Incremento Parcial de** z **repecto de** x (es el segmento  $\overline{NN_1}$  de la figura 1)

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

Si en cambio, consideramos a x = cte y nos vamos moviendo sobre el eje y, la variación de z es:

**Incremento Parcial de** z **respecto de** y (es el segmento  $\overline{TT_1}$  de la figura 1)

$$\Delta_{y}z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Si incrementamos simultáneamente a x en  $\Delta x$ , y a y en  $\Delta y$ , obtenemos el:

Incremento Total de la función (segmento  $\overline{QQ_1}$  de la figura 1

# 3. Límites

Dada una función z = f(x, y), se define el límite de esta función cuando P(x, y) tiende a  $P_0(x_0, y_0)$  de la siguiente manera:

"El límite de f(x,y) es igual a L si, para cualquier número  $\varepsilon > 0$  existe un número  $\delta > 0$  tal que, si la distancia del punto P(x,y) a  $P_0(x_0,y_0)$  es menor a  $\delta$  entonces, la distancia entre f(x,y) y L es menor a  $\varepsilon$ , con  $P(x,y) \neq P_0(x_0,y_0)$ "

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \mid 0 < \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \implies |f(x,y)-L| < \varepsilon$$

Esta definición implica que por mas pequeño que sea  $\varepsilon$  siempre existe una bola reducida  $B_0(P_0, \delta)$  dentro de la cual están los puntos P(x, y). Se considera una bola reducida porque no nos interesa qué pasa en el punto  $P_0$  donde la función puede no estar definida.

Recordemos que cuando estudiabamos límites en análisis I, las trayectorias posibles para acercarse al límite eran dos (por izquierda, y por derecha) y bastaba con probar que los límites de esas dos trayectorias eran iguales para demostrar la existencia del límite en ese punto.

El problema es que ahora, como tenemos dos variables, las trayectorias que existen para acercarse a un mismo punto son infinitas y es imposible calcular el límite de todas las trayectorias para ver si son el mismo.

Una forma de demostrar la existencia de un límite de dos variables es calcularlo aplicando la definición, pero esto se puede volver muy complicado.

Lo que sí podemos hacer se algo parecido a lo que veníamos haciendo para límites de una sola variable, y si llegamos a una indeterminación vemos cómo nos las arreglamos.

Ejemplo 1:

$$\lim_{(x,y)\to(3,1)} \left(xy - y^2\right)$$

Análisis Matemático 2 Resumen Profesor: Mónica Guraya Alumno: Ricardo Nicolás Freccero Fecha: 19/04/2025

En este caso podemos directamente reemplazar (x,y) por (3,1) y el resultado es L=2. Esto quiere decir que por cualquier camino que nos aproximemos al punto  $P_0(3,1)$  los valores de la función van a tender a 2.

En este caso, como no hay problema con ningúna de las variables, decimos que la función tiene Límite Doble y es L=2.

Ejemplo 2:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin 3xy}{x}$$

En este caso, si evaluamos la función en el (0,0) tenemos una indeterminación, pero la podemos salvar:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin 3xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y\sin 3xy}{3xy} = \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3y\right) \times \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin 3xy}{3xy}\right) = 0 \times 1 = 0$$

Vemos entonces que la función tiene Límite Doble L = 0.

Ejemplo 3:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 + y}{x^2 - y}$$

En este caso llegamos a una indeterminación si evaluamos la función en el (0,0) pero no hay forma de salvarla. La forma de saber si existe el límite en estos casos es calcularlo con la definición o fijarnos si aproximandonos por todas las infinitas direcciones obtenemos el mismo resultado. Y no queremos hacer ninguna de las dos cosas.

Entonces, no podemos (o es muy dificil) confirmar la existencia del límite, pero sí puede ser mas sencillo afirmar cuando **no** existe el mismo, ya que si los límites calculados por dos trayectorias son diferentes, el límite no existe.

Vamos a ver dos formas de hacer esto: usando Límites Iterados, y Límites Radiales.

### 3.1. Límites Iterados

Podemos calcular los límites de una función por trayectorias particulares, denominadas **Trayectorias Escalonadas**, constituidas por rectas paralelas a los ejes cartesianos y que consiste en llegar al punto  $P_0$  partiendo de P y pasando por  $P_1$ , y luego hacer lo mismo pero pasando por  $P_2$  para comparar los resultados.



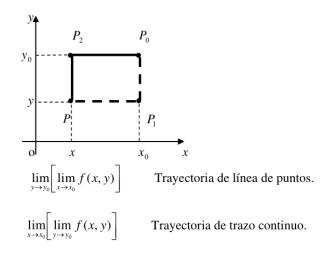


Figura 2: Imagen sacada de (Monllor, 2015). Cálculo de límites iterados.

Ejemplo 4: Dada  $z = \frac{2x^2 + y^3}{3x^2 - y^3}$ , calcular los Límites Iterados en el punto  $P_0(0,0)$ :

$$\lim_{y \to 0} \left[ \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 + y^3}{3x^2 - y^3} \right] = -1$$

$$\lim_{x \to 0} \left[ \lim_{y \to 0} \frac{2x^2 + y^3}{3x^2 - y^3} \right] = \frac{2}{3}$$

Los Límites iterados son distintos, por lo tanto la función no tiene límite en  $P_0(0,0)$ .

### **IMPORTANTE**:

Que los límites iterados sean iguales no garantiza que la función tenga límite. Hay que recordar que para que exista el límite en un punto, las infinitas trayectorias a ese punto deben tener el mismo límite, y cuando calculamos los límites iterados solo estamos calculando dos trayectorias. Podría ser que haya una trayectoria con un límite distinto.

### 3.2. Límites Radiales

Consiste entomar el límite siguiendo las trayectorias del haz de rectas que pasan por el punto  $P_0(x_0, y_0)$ :

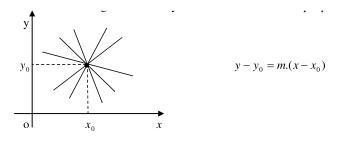
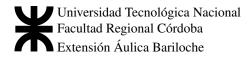


Figura 3: Imagen tomada de (Monllor, 2015). Límites radiales

Con este método, si L queda en función de m significa que tendrá un límite distinto para cada trayectoria, osea que no existe el límite en ese punto.



Ejemplo 5: Dada  $z = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$ , calcular el límite de z en el punto  $P_0(0,0)$ .

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

Como  $P_0(0,0)$ , sabemos que  $\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=0 \end{cases}$ , entonces la trayectoria es y-0=m(x-0) que es lo mismo que y=mx.

Ahora como podemos reemplazar y en función de x, podemos escribir la función y el límite en función de x:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x.mx}{3x^2 - (mx)^2}$$

Y podemos resolver el límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot mx}{3x^2 - (mx)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 2m}{x^2 (3 - (mx)^2)} = \frac{2m}{3 - m^2}$$

El resultado del límite nos quedó en función de m, así que podemos afirmar que no existe el límite para esa función en el punto  $P_0(0,0)$ .

Veamos un ejemplo mas:

Ejemplo 6: Dada  $z = \frac{2x^2y}{x^4 + 3y^2}$ , calcular el límite de la función en el punto  $P_0(0,0)$ 

Busquemos primero los límites susecivos:

$$\lim_{y \to 0} \left[ \lim_{x \to 0} \frac{2x^2y}{x^4 + 3y^2} \right] = 0$$

$$\lim_{y \to 0} \left[ \lim_{x \to 0} \frac{2x^2y}{x^4 + 3y^2} \right] = 0$$

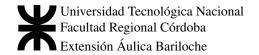
Los límites son iguales, pero habíamos dicho que solo con esta iformación no podíamos afirmar si existe o no el límite.

Calculemos ahora los límites radiales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4 + 3y^2} \qquad \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \text{ la trayectoria es } y = mx$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 mx}{x^4 + 3(mx)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2mx}{x^2 + 3m^2} = 0$$

Obtuvimos el mismo valor de límite a lo largo de cualquier trayectoria paralela a los ejes coordenados (límites iterados) y de cualquier recta que pase por el origen. **Pero esto NO demuestra que el límite de la función sea 0**, porque hay infinitas trayectorias que hay que analizar y no las analizamos todas. Por ejemplo, analicemos la trayectoria de la parábola  $y = x^2$ , y veamos si el límite nos sigue



dando 0.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+3y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2x^2}{x^4+3(x^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^4}{x^4+3x^4} = \frac{1}{2}$$

Obtuvimos un valor distinto de límite, por lo tanto el límite para esta función cuando P tiende a (0,0) NO EXISTE.

Estos métodos no sirven para demostrar si existe el límite, solo nos sirven para demostrar cuándo la funcion NO lo tiene.

# 4. Continuidad

Es lo mismo que siempre. Sea la función z = f(x, y) y  $P_0(x_0, y_0)$ , z es continua en  $P_0$  si:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Para que se cumpla esto se tiene que cumplir tres condiciones básicas:

- 1. Que el límite exista para  $P(x,y) \rightarrow P_0(x_0,y_0)$
- 2. Que la función esté definida en  $P_0(x_0, y_0)$
- 3. Que el límite de la función es igual al valor de la función en  $P_0(x_0, y_0)$

Si la igualdad no se cumple en  $P_0$  quiere decir que este es un **punto de discontinuidad**.

Si no existe el límite en ese punto, la discontinuidad es esencial.

Si existe el límite, pero la función no es continua, la discontinuidad es **evitable**. Lo que se hace es redefinir la función para que sea continua.

### 5. Derivadas Parciales

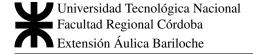
Sea la función z = f(x,y), de dos variables independientes, y consideremos que se mantiene a y constante, haciendo variar solamente a x, encontes la función planteada se comporta como una función **derivada parcial de la función con respecto a "x"**, que se expresa así:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

Otras formas de escribir la derviada parcial son las siguientes:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f_x = \dots$$

De igual manera, podemos mantener constante a x y derivar a la función para obtener la **derivada** 



### parcial respecto de "y"

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

La forma de calcular estas derivadas es la misma que usabamos cuando teníamos una sola variable, solo que ahora hay que tener en cuenta que si estamos haciendo la derivada parcial respecto de x, la variable y es una constante y la tenemos que tratar como tal.

Ejemplos:

- 1. Las derivadas parciales de la funcion  $z = y^3 \cos x$  son:  $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -y^3 \sin x \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 \cos x \end{cases}$
- 2. Calcular las derivadas parciales de la función  $z = 3x^2y y^2$  en el punto P(1,2):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6xy$$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 12$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2 - 2y$$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = -1$$

## 5.1. Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Consideremos a la función  $z = 4 - x^2 - 2y^2$  y busquemos sus derivadas parciales en los puntos  $P_0(1,1)$ .

Tenemos que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x \qquad \qquad = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -4y$$
$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = -2 \qquad \qquad = \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = -4$$

Si miramos la figura 4, podemos que ver cuando hacemos la derivada parcial respecto de x, nos estamos moviendo en el plano y = 1, y la derivada parcial es la pendiente de la recta tangente a la curva generada por la función z en la intersección con ese plano y = 1.

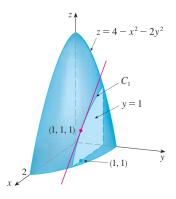


Figura 4: Imagen sacada de (James, 2012). Derivada parcial respecto de x.



Lo mismo podemos observar cuando analizamos la figura 5. En este caso, el plano sobre el que nos movemos es x = 1, y la derivada parcial es la pendiente de la recta tangente a la curva generada por la intersección de la función z con él.

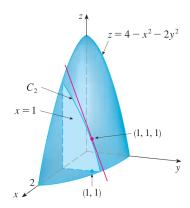


Figura 5: Imagen sacada de (James, 2012). Derivada parcial respecto de y.

### Derivavilidad de una función

Una función de varias variables independientes es derivable en un punto si es continua en ese punto.

# 5.2. Derivadas parciales sucesivas

Igual que con las derivadas normales, una derivada parcial la podemos derivar cuantas veces queramos obteniendo derivadas parciales segundas, terceras, etc., con respecto a cada una de las variables consideradas.

Así para una función de dos variables independientes sus derivadas parciales son:

$$z = f(x,y)$$

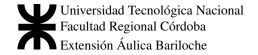
$$z = x^{4} \sin 5y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_{x}(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_{y}(x,y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^{4} \cos 5y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^{4} \cos 5y$$



Estas pueden ser derivadas nuevamente obteniendo las derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y) \qquad \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 \sin 5y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x,y) \qquad \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 20x^3 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x,y) \qquad \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 20x^3 \cos 5y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yy}(x,y) \qquad \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -25x^4 \sin 5y$$

Y así siempre que existan las derivadas correspondientes, se pueden seguir derivando de forma sucesivas.

Estas derivadas parciales sucesivas vemos que no son todas distintas entre sí. Hay un teorema que dice que: "Si las derivadas sucesivas a calcular son continuas, el orden de derivación no altera la derivada, siempre que la cantidad de veces que se derive respecto a cada variable sea la misma."

Es decir, que si derivamos primero respecto a *x* y luego respecto a *y*, o primero respecto a *y* y luego respecto a *x*, SIEMPRE QUE TODAS LAS DERIVADAS QUE CALCULAMOS SEAN CONTINUAS vamos a llegar al mismo resultado.

Esto se puede demostrar con el teorema de Schwartz, pero no lo vemos en clase.

## 5.3. Diferencial

Para explicar qué es el diferencial vamos a volver a trabajar con funciones de  $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$  y después vamos a aplicar los conocimientos en las funciones de  $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ .

La notación diferencial en realidad la venimos viendo hace un montón pero nunca supimos de dónde venía ni qué significaba. La veíamos por ejemplo cuando estudiabamos derivadas, que podiamos expresarla como  $\frac{dy}{dx}$  donde y = f(x). También la veíamos en las integrales de la forma  $\int f(x) dx$ . Esto lo tomabamos como que solo era una notación, pero en realidad no, dx y dy son dos variables que tienen la propiedad de que cuando su razón existe, esta es igual a la derivada.

### Definición de diferenciales

Sea y = f(x) una función derivable. La <u>diferencial dx</u> es una variable independiente. La diferencial dy es

$$dy = f'(x)dx$$

Como dx es una variable independiente puede tomar cualquier valor, pero el valor de dy va a depender tanto del valor que tome la variable dx como del de la variable x.

### 5.3.1. Interpretación geométrica del diferencial

En la siguiente figura podemos ver gráficamente a qué llamamos dx y dy.

Profesor: Mónica Guraya

Fecha: 19/04/2025

Alumno: Ricardo Nicolás Freccero



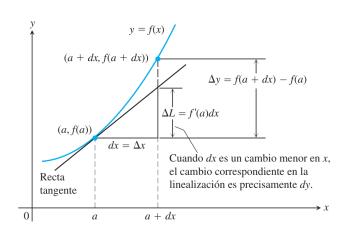


Figura 6: Imagen sacada de (George B. Thomas, 2010a). Interpretación geométrica del diferencial.

Vemos en la figura 6 que la diferencial dy es el cambio  $\Delta L$  cuando x = a cambia en una cantidad  $dx = \Delta x$ . Y lo podemos comprobar de la siguiente forma:

$$\Delta L = L(a+dx) - L(a)$$

$$\Delta L = \underbrace{f(a) + f'(a) [(a+dx) - a]}_{L(a+dx)} - \underbrace{f(a)}_{L(a)}$$

$$\Delta L = f'(a)dx$$

Entonces,  $\Delta L = dy$  y representa la magnitud que se eleva o baja la recta tangente cuando x cambia en una cantidad  $dx = \Delta x$ .

Si  $dx \neq 0$ , entonces el cociente de la diferencial dy entre la diferencial dx es igual a la derivada f'(x,y).

Si tenemos la ecuación  $f(x) = 3x^2 - 6$ , entonces dy = f'(x)dx = 6xdx.

Toda fórmula de derivación como

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad o \qquad \frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Tiene una forma diferencial correspondiente como

$$d(u+v) = du + dv$$
 o  $d(\sin u) = \cos u du$ 



#### 5.3.2. Estimación con diferenciales

#### **Aclaraciones**

Acá me mezclo un poco así que vamos a hacer un par de aclaraciones.

•  $\Delta y$  es lo que varía la función f(x) si nos movemos una distancia  $\Delta x = dx$  sobre el eje x. La variación de la función se calcula como cualquier variación, punto final menos inicial:

$$\Delta y = f(a+dx) - f(a)$$

- $dx = \Delta x$  y es la distancia que nos movemos en el eje x.
- Cuando  $\Delta x$  es pequeña, podemos decir (y se vé en la gráfica de la figua 6) que dy es aproximadamente igual a  $\Delta y$ . Osea,

$$\Delta y \approx dy$$

■ dy no es  $\Delta y$ , solo es aproximadamente igual cuando dx es muy pequeño. La fórmula de dy es:

$$dy = f'(x)dx$$

Ahora sí, supongamos que conocemos el valor de una función derivable f(x) en un punto a y necesitamos estimar cuánto cambiará este valor en f(a+dx). Si  $dx = \Delta x$  es pequeña, mirando la figura 6, podemos ver que  $\Delta y$  es aproximadamente igual a dx.

Sabemos que  $\Delta y = f(a+dx) - f(a)$ , entonces  $f(a+dx) = f(a) - \Delta y$ . Y recién dijimos que para valores muy chicos de dx,  $\Delta y$  era aproximadamente igual a dy así que podemos decir que

$$f(a+dx) \approx f(a) + dy$$

que es lo mismo que decir

$$dy \approx f(a+dx) - f(a)$$

Entonces podemos usar dy para estimar f(a+dx) cuando conocemos f(a) y los valores de dx son pequeños.

### 5.3.3. Error en la aproximación diferencial

Sea f(x) derivable en x = a y supongamos que  $dx = \Delta x$  es un incremento de x. Tenemos dos formas de describir el cambio en f cuando x cambia de a a  $a + \Delta x$ :

El cambio real:  $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ 

La estimación diferencial:  $df = f'(a)\Delta x$ 

¿Qué tan bien aproxima df a  $\Delta f$ ?

Podemos medir el error de la aproximación si restamos df de  $\Delta f$ :



Error de aproximacion = 
$$\Delta f - df$$
  
=  $\Delta f - f'(a)\Delta x$   
=  $\underbrace{f(a + \Delta x) - f(a)}_{\Delta f} - f'(a)\Delta x$   
=  $\underbrace{\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a)\right)}_{\text{A esta parte la llamamos } \varepsilon} \Delta x$   
=  $\varepsilon \Delta x$ 

Cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ , el cociente de diferencias

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

se aproxima a la derivada f'(a) así que la cantidad entre paréntesis se vuelve un número muy pequeño. Es decir, cuando  $\Delta x \to 0$ ,  $\varepsilon \to 0$ .

Ahora podemos afirmar lo siguiente:

$$\underline{\Delta f} = \underbrace{f'(a)\Delta x}_{\text{cambio real}} + \underbrace{\varepsilon \Delta x}_{\text{error}}$$

### **5.4.** Diferencial en funciones de varias variables

### **5.4.1.** Repaso

Recordemos el teorema del valor medio, que dice que:

### Teroema del Valor Medio

Si f es una función que satisface las siguientes hipótesis

- 1. f es continua sobre el intervalo cerrado [a,b]
- 2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a,b)

entonces existe un número x = c en (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o, equivalentemente

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Basicamente, lo que dice es que si f es continua y derivable dentro de un intervalo, entonces hay al menos un punto dentro de ese intervalo en el que la derivada de la función es igual a la pendiente

de la recta secante que va de f(a) a f(b).

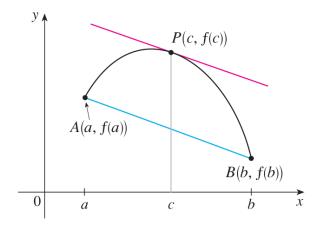


Figura 7: Imagen sacada de (James, 2012). Teorema del Valor Medio

### 5.5. Diferencial total

Dada una función z = f(x, y), vimos en la sección 2.2 que su incremento total es:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Supongamos que la función es continua y tiene derivadas parciales también continuas en el punto considerado.

A la expresion del incremento total le sumamos y restamos  $f(x + \Delta x, y)$  y la reordenamos un poquito:

$$\Delta z = \underbrace{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}_{\Delta z_1} + \underbrace{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}_{\Delta z_2}$$

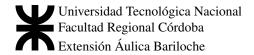
A los primeros dos términos de la ecuación los podemos considerar como un  $\Delta z_1$ , que simboliza el incremento de z al movernos desde el punto f(x,y) hasta el punto  $f(x+\Delta x,y)$ . Osea, que nos movimos en un plano paralelo al eje x con y=cte.

A los últimos dos términos los podemos considerar como un  $\Delta z_2$ , que es ahora el incremento de z al movernos desde el punto final anterior  $f(x + \Delta x, y)$  hasta el punto  $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ . En este caso nos movemos sobre un eje paralelo al eje y, manteniendo x = cte.

Lo que estamos haciendo es calcular el incremento real de z pero en dos partes. Primero nos movemos una distancia  $\Delta x$  con y=cte, y luego desde ese punto en el que quedamos nos movemos una distancia  $\Delta y$  con x=cte.

Ahora, en  $z_1$ , como estamos considerando que y = cte podemos aplicar el Teorema del Valor Medio sobre ese plano. Este teorema nos dice que existe un valor c entre x y  $x + \Delta x$  donde

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = f_x(c, y) \Delta x$$



Y podemos hacer lo mismo en  $z_2$  ya que x=cte. En este caso el Teorema del Valor medio nos dice que existe un número d entre y y  $y + \Delta y$  donde

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) = f_y(x, d)\Delta y$$

Entonces la ecuación del incremento de z queda así:

$$\Delta z = f_x(c, y)\Delta x + f_y(x + \Delta x, d)\Delta y$$

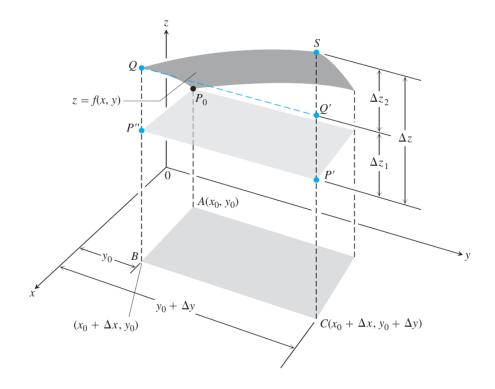


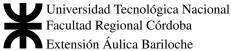
Figura 8: Imagen sacada de (George B. Thomas, 2010b)

Miremos la figura 8. Lo que acabamos de hacer en cuentas lo podemos explicar graficamente de la siguiente forma.

Partimos del punto  $P_0$  que sería nuestro f(x,y). De ahí, lo que habíamos hecho era movernos sobre el eje x una distancia  $\Delta x$  manteniendo un y=cte, que sería lo mismo que movernos desde  $P_0$  hacia P''. Esto representaría el incremento del  $z_1$  que habíamos identificado antes. Ese incremento sería el módulo del segmento  $\overline{P''Q}$ .

Después lo que habíamos hecho fue movernos desde ese último punto en el que habíamos quedado, pero ahora nos movíamos sobre el eje y mientras manteníamos un x = cte. En el gráfico sería el equivalente a partir del punto P'' e ir hacía el punto P'. Esto sería el incremento  $z_2$ , que en el gráfico es el módulo del segmento  $\overline{Q'S}$ .

Entonces ahora es mas facil ver que cuando sumamos esos dos incrementos, estamos obteniendo el valor real del incremento total de *z*.



Esto es buenísimo, pero en realidad nosotros queríamos calcular el diferencial total, no el incremento total. Y acá pasa lo mismo que pasa cuano teníamos una sola variable, solo que ahora tenemos dos. Entonces ahora, dx y dy son las variables independientes, y dz es la variable dependiente.

Resumen

Para una variable habíamos dicho que cuando dx era muy chico, se cumplía que  $dy \approx \Delta y$  y ahora pasa lo mismo. Podemos decir que  $dz \approx \Delta z$  cuando  $dx \to 0$  y  $dy \to 0$ .

Analicemos entonces la función que obtubimos del incremento total cuando  $\Delta x \to 0 \land \Delta y \to 0$ . Como c es un valor que está entre  $(x, x + \Delta x)$  y d es un valor entre  $(y, y + \Delta y)$ , sabemos que cuando  $\Delta x \to 0$  y  $\Delta y \to 0$ ,  $c \to x$  y  $d \to y$ . Pero estos valores no son exactamente x e y. Son una aproximación, pero con esa aproximación viene un error.

$$\varepsilon_1 = f_x(x, y) - f_x(x, y)$$
  
$$\varepsilon_2 = f_y(x + \Delta x, d) - f_y(x, y)$$

Entonces ahora podemos decir lo siguiente:

$$\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$$

$$= f_x(c, y)\Delta x - f_y(x + \Delta x, d)\Delta y$$

$$= [f_x(x, y) + \varepsilon_1] \Delta x + [f_y(x, y) + \varepsilon_2] \Delta y$$

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

La suma de los dos primeros términos recibe el nombre de parte principal del incremento y es el Diferencial Total de la función:

$$dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

También se puede expresar:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

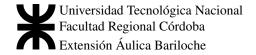
Esto que acabamos de demostrar acá sirve para funciones de *n* variables:

#### Ejemplo:

Calculemos el diferencial total de la función  $z = 2x^3y^2$ , en el punto P(1,2), para cuando la variable independiente x se incrementa en dx = 0.03 y la variable independiente y se incrementa en dy = 0.02.

$$df(x,y) = 6x^2y^2dx + 4x^3ydy$$
$$df(1,2) = 6 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 0,03 + 4 \cdot 1^3 \cdot 2 \cdot 0,02$$
$$df(1,2) = 0,88$$

Significa que cuando las variables independientes x e y se incrementan en dx = 0.02 y en dy = 0.03respectivamente, la función se incrementa aproximadamente en dz = 0.88.



### 5.6. Plano tangente y recta normal a una superficie

Recordemos algo de teoría primero. Sabemos que la ecuación de un plano está dada por el producto escalar entre un vector normal al plano y un punto cualquiera del mismo.

$$\pi = \overrightarrow{n_{\pi}} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

donde  $\overrightarrow{n_{\pi}} = (A, B, C)$  y  $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ . Si desarrollamos esta ecuación obtenemos lo siguiente

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

Al dividir esta ecuación por C, podemos decir que a = -A/C y que b = -B/C, y de esta manera podemos reescribir la ecuación anterior como sigue

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$
(1)

Quedemonos con esto en la cabeza porque lo vamos a usar enseguida, pero primero tenemos que llegar hasta ahí. Imaginemos que tenemos una superficie S dada por la ecuación z = f(x,y), donde f tiene primeras derivadas parciales continuas. Habíamos visto mas arriba que cuando calculabamos las derivadas parciales de una función, lo que hacíamos era analizar las curvas dadas por la intersección de dicha función con los planos verticales  $y = y_0$  y  $x = x_0$ , y el resultado era la pendiente de la recta tangente a dicha curva. Vamos a llamar  $T_1$  a la recta tangente a la curva dada por la intersección de z con el plano  $y = y_0$ , y  $T_2$  a la recta tangente a la curva dada por la intersección de z con el plano  $x = x_0$ . También vamos a definir al punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  como el punto que se encuentra sobre la superficie S; notar que al tener coordenadas  $x_0$  y  $y_0$  este punto se encuentra en la intersección de las rectas  $T_1$  y  $T_2$ . (Ver Figura 9)

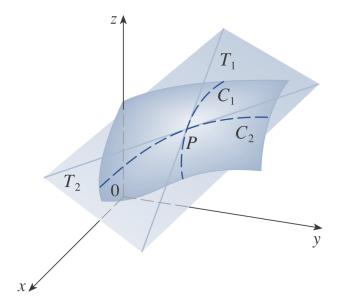
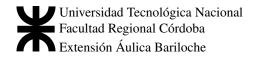


Figura 9: Imagen sacada de (James, 2012). El plano tangente contiene a las rectas  $T_1$  y  $T_2$ .



En la Figura 9 podemos ver que el **plano tangente** a la función z = f(x, y) en el punto P es el plano que contiene a las dos rectas tangentes  $T_1$  y  $T_2$ .

Ahora sí, volvamos a la ecuación 1 y analicémosla. Si dicha ecuación representa el plano tangente en el punto  $P(x_0, y_0, z_0)$ , su intersección con el plano  $y = y_0$  tiene que ser la recta tangente  $T_1$ . Al calcular esta intersección obtenemos

$$z - z_0 = a(x - x_0)$$

Vemos que esta es la ecuación de una recta con pendiente a, pero habíamos dicho recién que la pendiente de esta recta era tangente a la función  $z = f(x_0, y_0)$  por lo que  $a = f_x(x_0, y_0)$ .

De forma análoga, si hacemos la intersección con el plano  $x = x_0$  obtenemos  $z - z_0 = b(y - y_0)$ , que representa a la recta  $T_2$ , así que  $b = f_y(x_0, y_0)$ .

Ahora que sabemos todo esto podemos afirmar lo siguiente:

#### Ecuación del plano tangente

Si una función f tiene derivadas parciales continuas, una ecuación del plano tangente a la superficie z = f(x,y) en el punto  $P(x_0,y_0,z_0)$  es

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

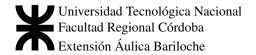
## Ejemplo 1:

Determinar las ecuaciones del Plano Tangente y la Recta Normal a la superficie  $z = 9 - x^2 - y^2$  en el punto M(1,2,4).

$$z-z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} (x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} (y-y_0)$$
 Ecuación del Plano Tangente 
$$z-4 = \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} (x-1) + \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} (y-2)$$
 
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = -2$$
 
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = -4$$
 
$$z-4 = -2(x-1)-4(y-2) \rightarrow \boxed{2x+4y+z=14}$$
 Plano Tangente 
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{1}$$
 Recta Normal

# Ejemplo 2:

Determinar el plano tangente al paraboloide elíptico  $z=2x^2-y^2$  en el punto (1,1,3). Armamos nuesetra función:  $f(x,y)=2x^2+y^2$ 



Calculamos sus derivadas paraciales:

$$f_x(x,y) = 4x$$
  $\rightarrow$   $f_x(1,1) = 4$   
 $f_y(x,y) = 2y$   $\rightarrow$   $f_y(1,1) = 2$ 

Entonces la ecuación del plano tangente es:

$$z-3 = 4(x-1) + 2(y-1)$$
$$z = 4x + 2y - 3$$

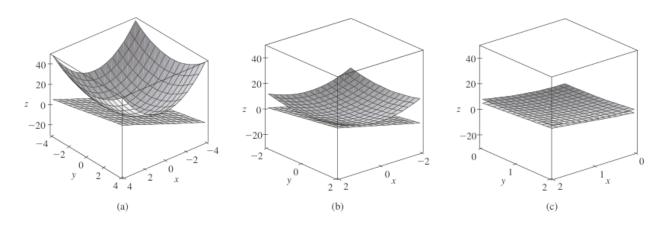


Figura 10: Imagen sacada de (James, 2012). Plano tangente a  $z = 2x^2 + y^2$ 

Si prestamos atención a la Figura 10 podemos ver que a medida que nos acercamos al punto (1,1,3), la función y su plano tangente en dicho punto se asemejan cada vez mas. Podemos decir entonces que la función lineal de dos variables

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

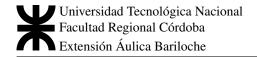
es una buena aproximación a  $f(x,y)=2x^2+y^2$  cuando estamos en una bola alrededor del punto (1,1,3). La función L se llama *linealización* de f en (1,1) y la aproximación

$$f(x, y) \approx 4x + 2y - 3$$

se llama **aproximación lineal** del plano tangente de f en (1,1).

### 5.7. La regla de la cadena

La regla de la cadena funciona de manera similar a como lo hacía cuando trabajabamos con funciones reales, solo que ahora al tener mas variables se agregan algunas cosas. La regla conviene explicarla en dos casos separados y después presentar el caso general que aplica para cualquier función  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ .



### 5.7.1. Caso 1

Supongamos que z = f(x, y) es una función derivable de x y y, donde x = g(t) y y = h(t) son funciones derivables de t. Entonces, z es una funcion derivable de t y

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Ejemplo:

 $\overline{\text{Si } z = x^2}y + 3xy^4$ , donde  $x = \sin 2t$ , y  $y = \cos t$ , determinar dz/dt cuando t = 0.

La regla de la cadena dice

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Así que

$$\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4)(2\cos 2t) + (x^2 + 12xy^3)(-\sin t)$$

Evaluamos para t = 0

$$\frac{dz}{dt}\Big|_{t=0} = (0+3)(2\cos 0) + (0+0)(-\sin 0) = 6$$

#### 5.7.2. Caso 2

Supongamos que z = f(x, y) es una función derivable de x y y, donde x = g(s, t) y y = h(s, t) son funciones derivables de s y t. Entonces,

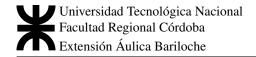
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ejemplo:

Si  $z = e^x \sin y$ , donde  $x = st^2$  y  $y = s^2t$ , determinar  $\partial z/\partial s$  y  $\partial z/\partial t$ .

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \sin y) (t^2) + (e^x \cos y) (2st)$$
$$= t^2 e^{st^2} \sin(s^2 t) + 2st e^{st^2} \cos(s^2 t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \sin(y))(2st) + (e^x \cos(y))(s^2)$$
$$= 2ste^{st^2} \sin(s^2t) + s^2e^{st^2} \cos(s^2t)$$



### 5.7.3. La regla de la cadena (versión general)

Supongamos que u es una función derivable de las n variables  $x_1, x_2, \ldots, x_n$  y que cada  $x_j$  es una función derivable de las m variables  $t_1, t_2, \ldots, t_m$ . Entonces, u es una función de  $t_1, t_2, \ldots, t_m$  y

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Ejemplo:

Si  $u = x^4y + y^2z^3$ , donde  $x = rse^t$ ,  $y = rs^2e^{-t}$ ,  $y = r^2s\sin(t)$ , determinar el valor de  $\partial u/\partial s$  cuando r = 2, s = 1, t = 0.

Lo mas fácil es primero empezar por identificar las funciones y sus varialbes independientes.

$$u = f(x, y, z)$$
  $x, y, z = f(r, s, t)$ 

Ahora escribimos en símbolos la derivada parcial

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

Ahora resolvemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left(4x^3y\right)\left(re^t\right) + \left(x^4 + 2yz^3\right)\left(2rse^{-t}\right) + \left(3y^2z^2\right)\left(r^2\sin(t)\right)$$

Y evaluamos cuando r = 2, s = 1 y t = 0.

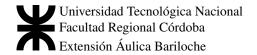
$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

# 5.8. Derivación implícita

Podemos usar la regla de la cadena para encontrar la derivada de una función que esté dada de forma implícita. Recordemos que una función está dada de forma explícita cuando se presenta de la forma z = f(x,y). Otra forma que existe de definir a z en función de x,y es F(x,y,z) = 0, que se llama forma implícita de z.

Pasar de la forma explicita a la implicita es inmediato, simplemente restamos z de ambos lados de la ecuación y la función queda definida en su forma implícita. Sin embargo, hacer el camino inverso puede ser muy complicado e incluso imposible en algunos casos. Cuando es así, si queremos obtener la derivada de z, y esta está dada de forma implícita, podemos aplicar el **teoréma de la función implícita** para encontrarla sin tener que conocer su forma explícita.

Supongamos que tenemos una ecuación de la forma F(x,y) = 0, que define a y implícitamente como una función derivable de x, es decir y = f(x), donde F(x,f(x)) = 0 para todas las x que pertenecen al dominio de f. Si F es derivable, podemos derivar los dos miembros de la ecuación F(x,y) = 0



con respecto a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Pero dx/dx = 1, así que si  $F_y \neq 0$  podemos despejar dy/dx para obtener

$$\begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Ejemplo:

Determinar y' si  $x^3 + y^3 = 6xy$ .

Podemos escribir la ecuación de forma implícita como

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

Aplicamos el teorema

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 6y}{3y^2 - 6x} = -\frac{x^2 - 2y}{y^2 - 2x}$$

Ahora supongamos que z es dada implícitamente como una función z = f(x,y) por una ecuación de la forma F(x,y,z) = 0. Esto significa que F(x,y,f(x,y)) = 0 para todas las tuplas (x,y) que pertenecen al dominio de f. Si F y f son derivables podemos encontrar las derivadas parciales de F(x,y,z) = 0 de la siguiente manera:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Pero  $\partial x/\partial x = 1$  y  $\partial y/\partial x = 0$ . (Recordemos que z es una función de (x,y), por eso  $\partial z/\partial x \neq 0$ . Así que la ecuación se convierte en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Si  $\partial F/\partial z \neq 0$ , podemos despejar  $F_x$ . El procedimiento es el mismo para despejar  $F_y$  solo que derivamos respecto a y. El resultado final de ambos despejes es el siguiente

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))} \qquad z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z(x,y))}{F_z(x,y,z(x,y))}$$
(3)

#### **5.9.** Derivadas direccionales

Dada una función z = f(x, y), las derivadas parciales  $f_x$  y  $f_y$  representan las razones de cambio de z en las direcciones de x y y. Podríamos pensarlo como que representan las razones de cambio en las direcciones de los versores  $\hat{\mathbf{i}}$  y  $\hat{\mathbf{j}}$ .

Supongamos ahora que queremos determinar la razón de cambio de z en  $(x_0, y_0)$  en la dirección de un vector unitario arbitrario  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ . Consideremos la superficie S con la ecuación z = f(x, y) (Figura 11) y digamos que  $z_0 = f(x_0, y_0)$ . De esta manera, el punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  pertenece a la superficie

S.

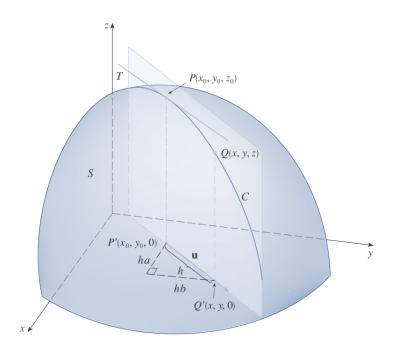


Figura 11: Imagen sacada de (James, 2012).

El plano vertical que pasa por P en la dirección  $\mathbf{u}$  interseca a S en un curva C. La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de  $\mathbf{u}$ .

Si Q(x, y, z) es otro punto en C y P', Q' son las proyecciones de P, Q en el plano xy, el vector  $\overrightarrow{P'Q'}$  es paralelo a  $\mathbf{u}$  y por lo tanto

$$\overrightarrow{P'Q'} = h\mathbf{u} = \langle ha, hb \rangle \qquad h \in \mathbb{R}$$

Así,  $x - x_0 = ha$ ,  $y - y_0 = hb$ , entonces  $x = x_0 + ha$  y  $y = y_0 + hb$ , con lo que podemos decir que

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Si calculamos el límite cuando  $h \to 0$ , obtenemos la razón de cambio de z en la dirección de  $\mathbf{u}$ , que se conoce como **derivada direccional** de f en la dirección de  $\mathbf{u}$ 

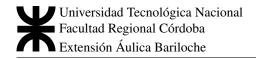
#### **Derivada direccional**

La derivada direccional de f en  $(x_0, y_0)$  en la dirección de un vector unitario  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  es

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si ese límite existe.

Viendo esta definición podemos ver que si  $\mathbf{u} = \mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ , entonces  $D_i f = f_x$ , y que si  $\mathbf{u} = \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$ , entonces  $D_j = f_y$ . Osea que, en realidad, las derivadas parciales respecto de y y x son casos especiales de las derivadas direccionales.



#### Teorema

Si f es una función derivable de x y y, entonces f tiene una derivada direccional en la dirección de cualquier vector unitario  $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$  y

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Tarea, demostrar;)

### 5.9.1. El vector gradiente

Si vemos el teorema anterior, podemos notar que la derivada direccional de una función derivable puede escribirse comom el producto punto de dos vectores:

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$
$$= \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle \cdot \langle a,b \rangle$$
$$D_u f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle \cdot \mathbf{u}$$

El primer vector en este producto recibe el nombre de **gradiente** de f y se denota como  $\nabla f$ .

### Gradiente

Dada una función  $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ , podemos definir el gradiente de la función, y lo denotamos como  $\nabla f$ , como un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de todas sus variables independientes.

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle$$

Ademas, siempre podemos escribir la derivada direccional como el producto punto entre el vector gradiente y el vector unitario **u** que marca la dirección.

$$D_u f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

### 5.9.2. Maximización de la derivada direccional

Como la derivada direccional  $D_u f(x)$  es el producto escalar entre dos vectores  $\nabla f(x) \cdot \hat{\mathbf{u}}$ , el valor **máximo** de la derivada direccional lo vamos a obtener cuando la dirección de  $\nabla f(x)$  sea la misma que el versor  $\hat{\mathbf{u}}$ . Esto es porque cuando dichos vectores tienen la misma dirección el producto escalar dá su valor máximo ya que el  $\cos(\theta) = 1$ . Cuando esto ocurre, el valor de la derivada direccional  $D_u f(x) = \|\nabla f(x)\|$ .

Ejemplo:

a) Si  $f(x,y) = xe^y$ , determine la razón de cambio de f en el punto P(2,0) en la dirección de  $P \to Q(\frac{1}{2},2)$ .

- b) ¿En qué dirección tiene f la máxima razón de cambio? ¿Cuál es la máxima razón de cambio?
- a) Nos piden obtener la derivada direccional de  $f(x,y) = xe^y$  en el punto P(2,0), en dirección  $P \to Q(\frac{1}{2},2)$ .

$$D_{\overrightarrow{PQ}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}$$

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y, xe^y \rangle$$

El versor en la dirección  $\overrightarrow{PQ} = \left\langle -\frac{3}{2} \right\rangle$  es  $\hat{\mathbf{u}} = \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$ , así que la razón de cambio de f en la diarección  $\overrightarrow{PQ}$  es

$$D_u f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \langle 1,2 \rangle \cdot \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle = 1$$

b) La máxima razón de cambio se dá cuando  $\hat{\mathbf{u}}$  tiene la misma dirección de  $\nabla f(x,y)$ , y es igual a  $\|\nabla f(x,y)\|$  en el punto (2,0)

$$\|\nabla f(2,0)\| = \|\langle 1,2\rangle\| = \sqrt{5}$$

# 5.10. Planos tangentes a superficies

Supongamos que S es una superficie de nivel con ecuación F(x,y,z)=k, y sea  $P(x_0,y_0,z_0)$  un punto en S. Sea C cualquier curva de la superficie S que pasa por el punto P. La función de la curva que pasa C la podemos escribir en su forma paramétrica de manera que  $C=r(t)=\langle x(t),y(t),z(t)\rangle$ . Sea  $t_0$  el valor paramétrico correspondiente a P; es decir,  $r(t_0)=\langle x_0,y_0,z_0\rangle$ . Como C reside en S, cualquier punto (x(t),y(t),z(t)), debe satisfacer la ecuación de S, es decir

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k$$
(4)

Si en la ecuación 4, x, y y z son funciones derivables de t y F también es derivable, podemos derivar F respecto de t usando la regla de la cadena como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5}$$

Pero habíamos visto que  $\nabla F = \langle F_x, F_y, F_z \rangle$  y sabemos que  $r'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$ , así que a la ecuación 5 la podemos expresar como un producto punto de la siguiente forma

$$\langle F_x, F_y, F_z \rangle \cdot \left\langle \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0$$

$$\nabla F \cdot r'(t) = 0 \tag{6}$$

Si lo analizamos cuando  $t = t_0$  tenemos que  $r(t_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ , así que

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot r'(t_0) = 0 \tag{7}$$

Análisis Matemático 2 Resumen Profesor: Mónica Guraya Alumno: Ricardo Nicolás Freccero Fecha: 19/04/2025

La ecuación 7 establece que *el vector gradiente en P dado por*  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ , *es perpendicular al vector tangente*  $r'(t_0)$  *a cualquier curva C en S que pase por P*. De esta manera podemos afirmar que, si  $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , el **plano tangente a la superficie de nivel** F(x, y, z) = k en el punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  es el plano cuyo vector normal es  $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$  y pasa por el punto P.

La ecuación del **plano tangente a la superficie de nivel** F(x,y,z) = k está dada por la ecuación 7 En el caso especial enel que la ecuación de una superficie S es de la forma z = f(x,y), podemos definir la ecuación como

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0$$

y considerar a S como una superficie de nivel con k = 0, de manera que

$$F_x(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0)$$

$$F_{y}(x_{0}, y_{0}, z_{0}) = f_{y}(x_{0}, y_{0})$$

$$F_z(x_0, y_0, z_0) = -1$$

# 5.11. Máximos y mínimos

Análisis Matemático 2 Resumen Profesor: Mónica Guraya Alumno: Ricardo Nicolás Freccero Fecha: 19/04/2025

# Referencias

George B. Thomas, J. (2010a). Cálculo, una variable (12.ª ed.). Pearson Educación.

George B. Thomas, J. (2010b). Cálculo, varias variables (12.ª ed.). Pearson Educación.

James, S. (2012). Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. (7.ª ed.). Cengage Learning.

Monllor, I. M. O. (2015). *Lecciones de Análisis Matemático II*. Universidad Tecnológica Nacional - Facultad Regional Córdoba.