深蓝学院
shenlanxueyuan.com

第四章作业思路分享

主讲人 夏韵凯

纲要

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

- 第一部分：公式推导
- 第二部分：ROS代码

1.公式推导

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

梳理求解最小值的步骤

1. 构建汉密尔顿方程
2. 根据庞特里亚金极小值原理求解最优控制u，即课程中的加加速度j(t)，与三个变量α，β，γ相关的表达式，同时得到cost与α，β，γ相关的表达式
3. 积分得到最优状态p(t),v(t),a(t)
4. 将起点与终点状态带入3，得到α，β，γ与约束，T相关的表示
5. 带入cost得出，cost只与T相关的表达式
6. 求出最优的T，得到最终的轨迹状态p(t),v(t),a(t)

1.公式推导

- 构建汉密尔顿方程与课程PPT中相同，即

$$H(s,u,\lambda)=\frac{1}{T}j^2+\lambda^T f_s(s,u)=\frac{1}{T}j^2+\lambda_1 v+\lambda_2 a+\lambda_3 j$$

- 根据庞特里亚金极小值原理求解最优解u*，即最优的加加速度方程j*(t)

For fixed final state problem:

$$h(s(T))=\begin{cases}0, & if \;\; s=s(T)\\ \infty, & otherwise\end{cases}$$

Not differentiable

For (partially)-free final state problem:

$$given \;\; s_i(T),\; i\in I$$

We have boundary condition for other costate:

$$\lambda_j(T)=\frac{\partial h(s^*(T))}{\partial s_j},\;\; for\; j\neq i$$

  - 因此课程中终点的位置，速度，加速度都固定，因此costate λ约束无法求偏导
  - 作业中位置固定，速度，加速度不固定，因此位置无法求偏导，速度，加速度可以求偏导，又因为终点位置与速度v，加速度a无关，得到 $\lambda_2=0$，$\lambda_3=0$
  - 结合课程中 $\lambda(T)=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}-2\alpha\\ 2\alpha t+2\beta\\ -\alpha t^2-2\beta t-2\gamma\end{bmatrix}$ 得到 $\begin{cases}\beta=-\alpha T\\ \gamma=\frac{\alpha}{2}T^2\end{cases}$ $\lambda(t)=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}-2\alpha\\ 2\alpha(t-T)\\ -\alpha t^2+2\alpha Tt-\alpha T^2\end{bmatrix}$

1.公式推导

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

得出最优输入为

$$u^*(t) = j^*(t) = \arg\min_{j(t)} H(s^*(t), u^*(t), \lambda(t)) = \frac{1}{2}\alpha(t-T)^2$$

向前积分可知最优状态

$$s^*(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ v(t) \\ a(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{120}(t-T)^5 + \frac{2a_0+\alpha}{12}t^2 + (v_0 - \frac{\alpha}{24}T^4)t + (p_0 + \frac{\alpha}{120}T^5) \\ \frac{\alpha}{24}(t-T)^4 + (a_0 + \frac{\alpha}{6}T^3)t + (v_0 - \frac{\alpha}{24}T^4) \\ \frac{\alpha}{6}(t-T)^3 + (a_0 + \frac{\alpha}{6}T^3) \end{bmatrix}$$

1.公式推导

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

将T带入P(t)可知终点的约束为

$$p_f = \frac{2a_0 + \alpha}{12} T^2 + (v_0 - \frac{\alpha}{24} T^4) T + (p_0 + \frac{\alpha}{120} T^5)$$

可以解出

$$\alpha = \frac{20}{T^5} (p_f - p_0 - \frac{1}{2} a_0 T^2 - v_0 T)$$

最终目标函数为

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T j^*(t) dt = \frac{20}{T^6} (\Delta p)^2$$

$$\Delta p = p_f - p_0 - \frac{1}{2} a_0 T^2 - v_0 T$$

1.公式推导

可以看出J是只关于T的函数

为了令J最小，对T进行求导，使表达式为

$$(p_f - p_0 - \frac{1}{2}a_0T^2 - v_0T)(a_0T^2 + 4v_0T - 6p_f - 6p_0) = 0$$

可以得到T的值为

$$T^* = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2a_0(p_f - p_0)}}{a_0} \text{或} T^* = \frac{-2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 + 6a_0(p_f - p_0)}}{a_0}$$

实际使用时，T不能为虚数和复数，比较正数T其cost大小，得到最优的T*

2.ROS代码

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

前向积分公式是恒加速度的运动公式

$$v_1 = v_0 + a_0 t$$

$$p_1 = p_0 + v_0 t + 0.5 a_0 t^2$$

```
pos(0) = pos(0) + vel(0)*delta_time + 0.5*acc_input(0)*delta_time*delta_time;
pos(1) = pos(1) + vel(1)*delta_time + 0.5*acc_input(1)*delta_time*delta_time;
pos(2) = pos(2) + vel(2)*delta_time + 0.5*acc_input(2)*delta_time*delta_time;

vel(0) = vel(0) + acc_input(0)*delta_time;
vel(1) = vel(1) + acc_input(1)*delta_time;
vel(2) = vel(2) + acc_input(2)*delta_time;
```

2.ROS代码

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

目标方程为：

$$J=\int_0^T(1+a_x^2+a_y^2+a_z^2)dt=T+$$
$$(\frac{1}{3}\alpha_1^2T^3+\alpha_1\beta_1+\beta_1^2T)+$$
$$(\frac{1}{3}\alpha_2^2T^3+\alpha_2\beta_2+\beta_2^2T)+$$
$$(\frac{1}{3}\alpha_3^2T^3+\alpha_3\beta_3+\beta_3^2T)$$

三个坐标轴的求解时一样的，因此已一轴为例

$$\alpha_1=-\frac{12}{T^3}\Delta p_x+\frac{6}{T^2}\Delta v_x$$
$$\beta_1=-\frac{1}{T^2}\Delta p_x+\frac{2}{T}\Delta v_x$$

2.ROS代码

带入J可知

$$J = T + \frac{12}{T^3}(\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2) -$$
$$\frac{12}{T^2}(\Delta p_x \Delta v_x + \Delta p_y \Delta v_y + \Delta p_z \Delta v_z) +$$
$$\frac{4}{T}(\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2 + \Delta v_z^2)$$

求极值即求

$$\frac{\partial J(T)}{\partial T} = 1 - \frac{36}{T^4}(\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2) +$$
$$\frac{24}{T^3}(\Delta p_x \Delta v_x + \Delta p_y \Delta v_y + \Delta p_z \Delta v_z) -$$
$$\frac{4}{T^2}(\Delta v_x^2 + \Delta v_y^2 + \Delta v_z^2) = 0$$

2.ROS代码

多项式求跟的方法

Eigen PolynomialSolver

使用Eigen内置的多项式求解器

十分简单，调用EigenAPI即可

```
Eigen::PolynomialSolver<double, Eigen::Dynamic>::RootsType & r = solver.roots();
```

http://www.ce.unipr.it/people/medici/eigen-poly.html

在线问答

Q&A

感谢各位聆听！

Thanks for Listening