

自动驾驶与机器人中的SLAM技术

高翔





章节内容

自动驾驶系统概述，数学知识回顾

- 课程主要内容与章节安排
- 自动驾驶分类，自动驾驶中的定位与地图技术
- 基础数学内容回顾：3D几何、运动学、滤波器与最优化理论

1. 本课程主要内容与安排



本课程主要内容与安排

□ 本课程教材及实验环境

- 《自动驾驶与机器人中的SLAM技术》，电子工业出版社，2023
- 本课程的配套实验代码：https://github.com/gaoxiang12/slam_in_autonomous_driving
- 配套实验环境：Ubuntu 20.04, ROS Melodic
- 实验需要的数据集
 - 百度云：<https://pan.baidu.com/s/1ELOcF1UTKdfiKBAaXnE8sQ?pwd=feky>
 - OneDrive：<https://1drv.ms/u/s!AgNFVSzSYXMahcEZeoUwCaHRcactQ?e=YsOYy2>

注：

第一期同学可以提前获取审稿形式电子版（与最终出版的排版形式有所不同，但内容一致）；
请提前下载数据集，如果数据集下载有困难，请联系深蓝。

自动驾驶与机器人中的 SLAM 技术：
从理论到实践

高翔 著

SLAM in Autonomous Driving book (SAD book)

本书向读者系统介绍了惯性导航、组合导航、激光建图、激光定位、激光惯导里程计等知识。本仓库是书籍对应的源代码仓库，可以公开使用。

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING



本课程主要内容与安排

□ 为什么要写这样一本^书？

- 从原理层面理解自动驾驶与机器人中的SLAM技术；
- 重新造一遍轮子，并造得更好；
- 简化的理论推导，剥离复杂的工程细节。

以激光SLAM为例，存在以下问题：

- (1) 之前的开源代码带有大量的工程细节：多ROS节点、进程通信、线程池、模板元、复杂的调用关系；
- (2) 或者使用早期的复杂理论推导：带有一大堆sin/cos函数的欧拉角参数形式，带有复杂下标运算的特征提取，带有各种广义操作运算符的卡尔曼滤波器等等。
- 这些问题增加了科研人员、老师的接触难度，增加了沟通成本。

laboshinl Merge pull request #119 from jlblancoc/patch-1 ...		
	25db5dd on Jan 25, 2019	150 commits
include/loam_velodyne	Fixed some compilation errors and a linker error when including the l...	5 years ago
launch	Extracted some more constants.	6 years ago
rviz_cfg	set rwiz to follow third person	7 years ago
src	Fix bug in eigenvalues classifying points	4 years ago
tests	Add a compliance test.	7 years ago
.gitignore	Decouples ROS from the core LOAM algorithms.	5 years ago
CMakeLists.txt	Fix compilation error on Ubuntu 18.04 (ROS Melodic)	5 years ago
LICENSE	Fix typos in license message.	7 years ago
README.md	Add link to solution for multiScanRegistration crashing	5 years ago
capture.bmp	added screenshot	7 years ago
package.xml	Fixed some compilation errors and a linker error when including the l...	5 years ago

cartographer-project / cartographer Public		
<> Code	Issues 191	Pull requests 11
Actions	Projects	Security
Go to file	Add file	<> Code
master	1 branch	6 tags
Wyverald update rules_boost to latest version (#1898) ...	ef80de2 on Sep 7, 2022	1,176 commits
.bazelci	Limit <code>bazel test</code> parallelism more precisely (#1094)	5 years ago
.github	Add Debian Bullseye to the install scripts, CI, docs. (#1897)	10 months ago
bazel	update rules_boost to latest version (#1898)	8 months ago
cartographer	Fix crash caused by setting gravity lower bound (#1893)	10 months ago
cmake	removed unused param from cmake macro (#1847)	10 months ago
configuration_files	Fix typo in trajectory_builder_3d.lua (#1870)	last year
docs	Add Debian Bullseye to the install scripts, CI, docs. (#1897)	10 months ago
scripts	Add Debian Bullseye to the install scripts, CI, docs. (#1897)	10 months ago



本课程主要内容与安排

□ 在《自动驾驶与机器人中的SLAM技术》课程中，你将：

- 从头推导、实现一遍惯性导航、激光SLAM、LIO、建图、点云定位中的核心算法；
- 对各种不同算法，使用前后一致的、极简化的理论推导（基于流形 SO_3 ）；
- 使用现代的C++实现（C++17）；
- 使用单元测试和模块测试实现良好的代码管理；
- 使用2D和3D的可视化程序，直观地显示各种算法的结果；
- 将大多数算法改进成风格更简洁、性能更优于原版的形式。



本课程主要内容与安排

□ 本课程需要先修的知识

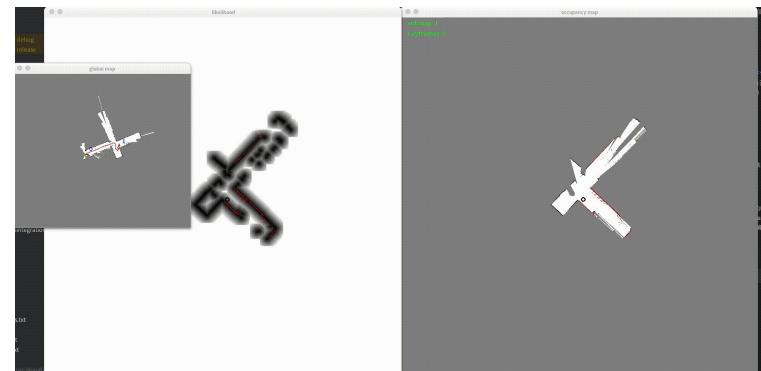
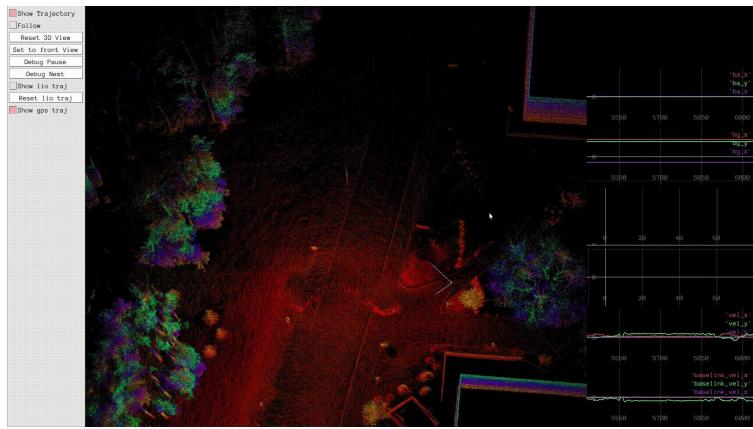
- 《视觉SLAM十四讲》1-6章内容（第5章可以略过）
- 矩阵代数、概率论、微积分
- C++、CMake、Linux
- 英语阅读



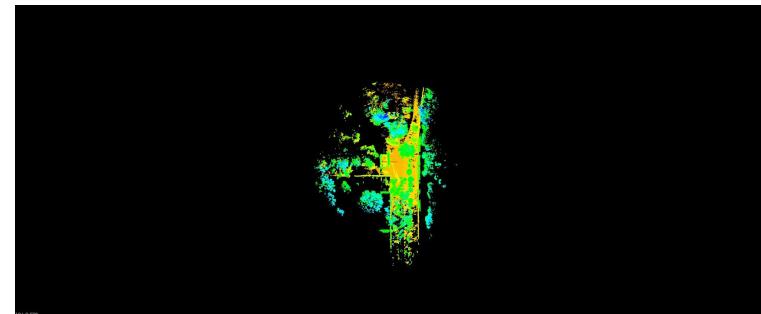
本课程主要内容与安排

□ 本课程的大体内容安排 (8节课对应书的10章)

1. 概述+数学知识回顾：几何学、运动学、KF滤波器理论、矩阵李群
2. 误差状态卡尔曼滤波器、**惯性导航**、**卫星导航**、组合导航
3. **预积分**、**图优化**、基于预积分的组合导航
4. 点云基础处理、各种**最近邻结构**、点云**线性拟合**
5. 2D激光建图，scan matching, **似然场**, **子地图**, 2D回环检测, pose graph
6. 3D激光建图, ICP, 变种ICP, NDT, NDT LO, Loam-like LO, LIO松耦合
7. 紧耦合LIO, IESKF, 预积分紧耦合LIO
8. 离线建图、融合定位、激光定位



本课程实现的算法
效果演示





本课程主要内容与安排

□ 深蓝学院的课程安排

- 一般来说，每周会有1次课程（视频部分），学员可以自行安排时间
- 每节课会留有一定数量的习题
- 学员需要按照深蓝安排的课程时间来完成习题
- 习题会有理论部分和编程部分，需要预留时间

□ 我个人的课程特点

- 讲解部分比较简单
- 作业会相对丰富一些



本课程主要内容与安排

□ 编程部分

- 学员需要准备一个带有Ubuntu 20.04/18.04的编程环境（个人笔记本或者台式机均可）
- 安装本书仓库上提到的第三方软件库和ROS环境
- 安装一个常用的编程环境（CLion, VSCode等）
- 下载本书的数据集：

百度云：<https://pan.baidu.com/s/1ELOcF1UTKdfiKBAaXnE8sQ?pwd=feky>

OneDrive：<https://1drv.ms/u/s!AgNFVSzSYXMahcEZeoUwCaHRcactQ?e=YsOYy2>

注意：总数据量较大 (~300GB)，请预留一些硬盘空间

2. 自动驾驶与定位、地图技术



自动驾驶分类

- 自动驾驶=自动行驶的汽车

- 如果让你来实现自动驾驶车辆，你会如何入手呢？



自动驾驶分类

驾驶=看到的东西+身边的导航+油门/刹车/方向盘

看到东西=感知 (perception)

导航=定位+地图 (localization+mapping)

油门/刹车/方向盘=规划控制 (planning+control)

自动驾驶=由电脑完成这三件事

当然刹车也许可以不需要





自动驾驶分类

□ 人与计算机做事情的方式并不一样

- 人类=强大的感知+很弱的定位+一般般的控制系统
- 计算机=较弱的感知+很强的定位+精确的控制系统

□ 计算机需要像人一样工作吗？

- 飞机需要像鸟一样工作吗？
- 计算机并不需要完全仿照人类来工作





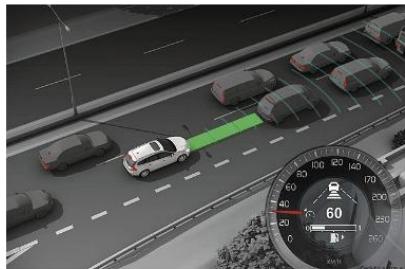
自动驾驶分类

□ 目前自动驾驶已经做到了什么程度？

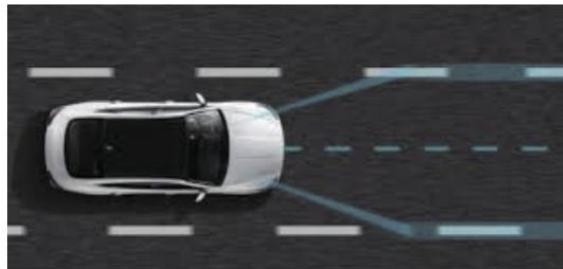
- 大部分新能源汽车已经标配了L2自动驾驶



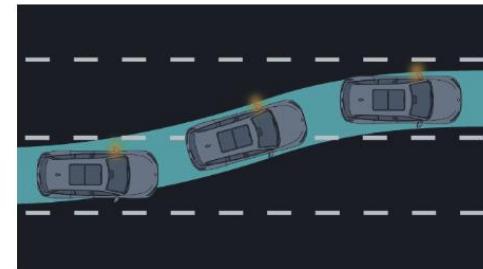
- 典型L2功能



ACC：自适应巡航



LCC：车道居中辅助



ALC：智能换道辅助



自动驾驶分类

□ 目前自动驾驶已经做到了什么程度？

- 另一方面，各种L4车辆也已经开始试点或者落地



低速L4：清扫、配送、物流、矿山

高速L4：Robotaxi、小巴、Robotruck



自动驾驶分类

□ 为什么要区分自动驾驶和辅助驾驶？

- 业务上：是否需要完全的自动化？
- 技术上：是否需要完全自动化的技术和配套传感器？

表 1-1 SAE 自动驾驶分级

等级	Level 0 (L0)	Level 1 (L1)	Level 2 (L2)	Level 3 (L3)	Level 4 (L4)	Level 5 (L5)
车辆主体	驾驶员负责驾驶车辆		计算机负责驾驶车辆			
是否接管	驾驶员应时刻准备接管		车辆请求时应 该接管	不需要接管		
典型功能	AEB: 自动紧急制动 BSD: 盲区警告 LDW: 车道偏离警告	ALC: 智能换道辅助 LCC: 车道居中 ACC: 自适应巡航	LCC+ACC	交通阻塞驾驶 自动泊车 自主召唤	Robotaxi Robotruck	所有工况下 去除方向盘、自动驾驶 踏板

表 1-2 中国汽车驾驶自动化分级

驾驶等级	名称	主要内容
L0	应急辅助 (Emergency Assistance)	部分事件的探测与响应能力
L1	部分驾驶辅助 (Partial Driver Assistance)	持续执行横向和纵向控制
L2	组合驾驶辅助 (Combined Driver Assistance)	持续执行横向和纵向控制
L3	有条件自动驾驶 (Conditionally Automated Driving)	持续执行全部驾驶任务
L4	高度自动驾驶 (Highly Automated Driving)	用户可以不接管
L5	完全自动驾驶 (Fully Automated Driving)	可在任意环境中自动驾驶

大部分L2功能并不需要复杂传感器：
车道保持、自适应巡航等功能都可以由纯视觉+近距
离超声实现。
但纯视觉L4尚没有成功的先例。



自动驾驶分类

□ 什么是区分L2和L4的标准？

- “使用不使用激光”是区分L2和L4的关键吗？

□ 区分L2和L4的标准主要有两条：

- 是否允许接管（或是否追求不接管）：L2允许，L4不允许
- 是否限定工况（或是否覆盖大部分工况）：L2限制，L4基本不限制（实际上是上一条的延伸）



自动驾驶分类

□ L2与L4总结

L2 = 允许接管+固定工况

L4=不允许接管+全部（大部分）工况

这些限制可能是由技术导致的，但更多时候是业务导致的；业务上是否需要完全自动化，决定了技术方案采用L2还是L4来实现；为了实现完全自动化，会带来巨大的成本。



自动驾驶分类

□ 例子：自动驾驶乘用车（新能源汽车）



新能源汽车首先是作为汽车来销售的，意味着几乎所有车辆都会有驾驶员。

- 所有的自动驾驶功能都可以被接管，接管之后由驾驶员负责安全性（允许接管）；
- 所有的自动驾驶功能都带有限定条件：大部分限定高速工况，城市工况要求路面线条清晰可见（限定工况）；
- 车厂选择由供应商提供L2功能（或者自研）；
- 大部分车厂对L4持观望状态。



自动驾驶分类

□ 例子：自动驾驶清扫车、配送车辆



虽然是低速，但是需要：

1. 完全自动化工作（有人接管则失去其存在意义）
2. 覆盖大部分工作场景（不能仅在特殊条件下工作）

因此，这些公司会追求L4技术方案。尽管是L4，也有高成本的L4和低成本的L4。



自动驾驶分类

□ 由于追求低接管，L4对安全性要求更高

- 通常由接管里程数 (MPI) 来衡量一个系统的综合自动化能力；
- MPI的计算并没有统一标准，追求低MPI需要大量的资源投入（车队、人力、数据）；
- L4自动驾驶公司的车队规模远远小于月销几万的车厂，验证 Robotaxi, Robotruck的安全性非常困难，这是Robotaxi普遍面临的困境；
- L4 Robotaxi的安全责任划分，导致做错一道题容易全军覆没；
- 先有车还是先有自动驾驶？

表 1-3 2021 美国加州自动驾驶路测数据

路测企业	车辆数量(个)	接管次数	路测里程(英里)	每次接管平均里程(MPI)
Waymo	693	292	2,325,843	7,965
Cruise	138	21	876,105	41,719
小马智行	38	21	305,617	14,553
Zoox	85	21	155,125	7,387
Nuro	15	23	59,100	2,570
梅赛德斯-奔驰	17	272	58,613	215
文远知行	14	3	57,966	19,322
AutoX	44	1	50,108	50,108
滴滴	12	1	40,745	40,745
Argo AI	13	1	36,734	36,734
元戎启行	2	2	30,872	15,436
英伟达	6	82	28,004	342
丰田	4	419	13,959	33
苹果	37	663	13,272	20
Aurora	7	9	12,647	1,405
Lyft	23	23	11,200	487
Almotive	2	106	2,976	28
Gatik AI	3	6	1,924	321
高通	3	143	1,635	11
百度 Apollo	5	1	1,468	1,468
SF Motors	2	61	875	14
日产	5	17	508	39
法雷奥	2	205	336	2
Easymile	1	222	320	1
Udelv	1	46	60	1
嬴彻科技	2	0	39	-
UATC	3	31	14	0.5



自动驾驶分类

□ 相比低速L4业务，高速L4面临更多的社会责任、伦理问题

- Robotaxi由于技术问题发生交通事故，应该由谁负责？
- Robotaxi会识别其他车辆变道、超车的意图吗？
- Robotaxi会因为躲避（正确识别的）逆行车辆而撞上护栏吗？
- Robotaxi会识别临时施工路段而绕行吗？
- Robotaxi会识别摔倒在马路中央的儿童吗？
- 如果由于感知、定位的技术原因，导致Robotaxi发生了事故，应该由技术人员对事故负责吗？
- 我们能解释为何某个人、某辆车在视频中没有识别出来吗？

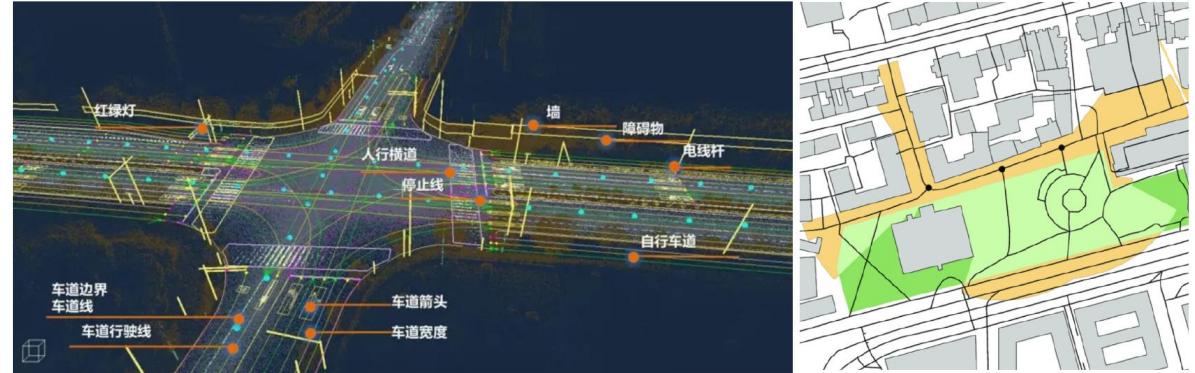
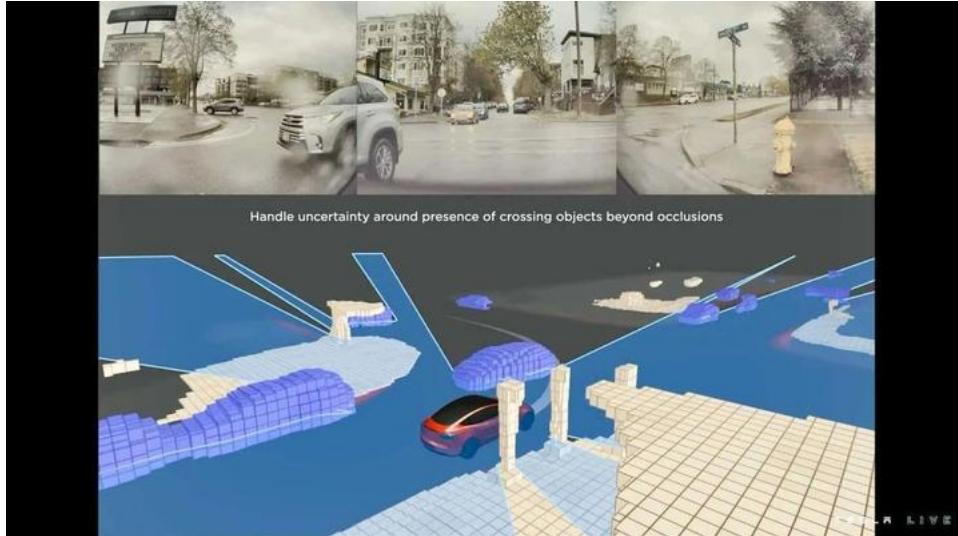


自动驾驶定位、地图技术

- 为什么自动驾驶需要定位与地图?
- 如果不追求接管率，大部分功能并不需要准确的定位和地图
 - 例如大多数L2功能并不需要高精地图（有些可以有，但不是必须）
- 高精定位和高精地图代表了高度的确定性
 - L2可以在实时生成的地图中控制车辆，因为即使错了也有人来修正
 - 但L4需要脱离人的控制，必须让机器按照预定的路径和任务来行驶



自动驾驶定位、地图技术



实时感知通常是粗糙的、动态的、不确定的

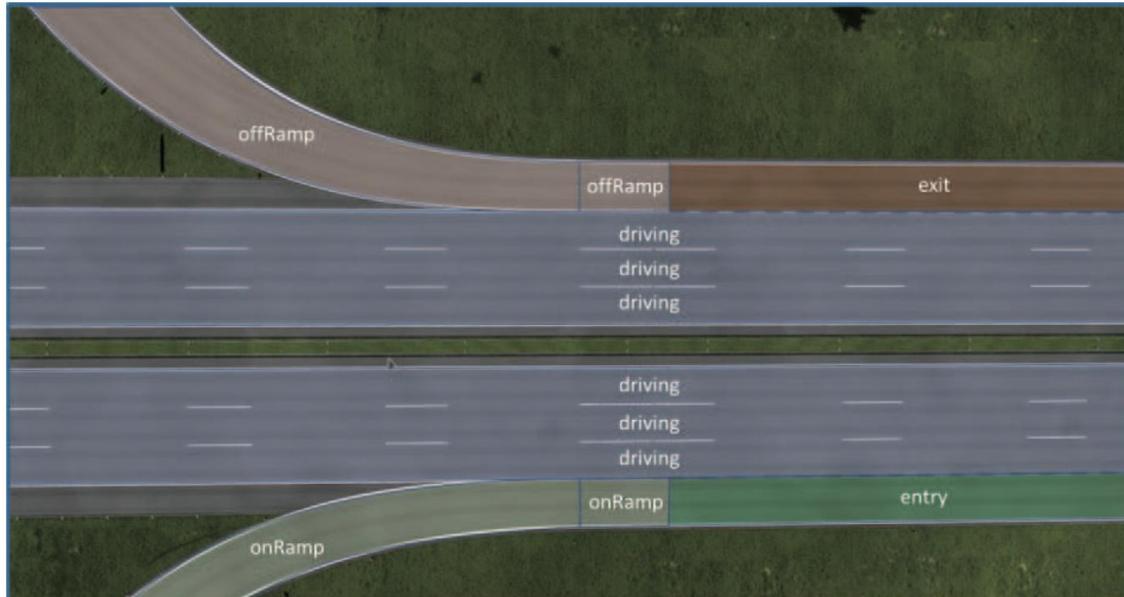
高精地图则是固定的、精确的、全覆盖的

尽管它们可以实现相似的任务，但实时感知的不确定性必然导致整个系统无法做到完全的自主。



自动驾驶定位、地图技术

- 高精地图代表着严格和准确的理念，但也背负了沉重、死板的负担；
- 地图本质是把不确定的、局限的感知元素，变成静态的、精确的数据信息；
- 为了使用高精地图，必须首先去采集、生产、标注它们。



高精地图内部通常是一些结构化的矢量信息

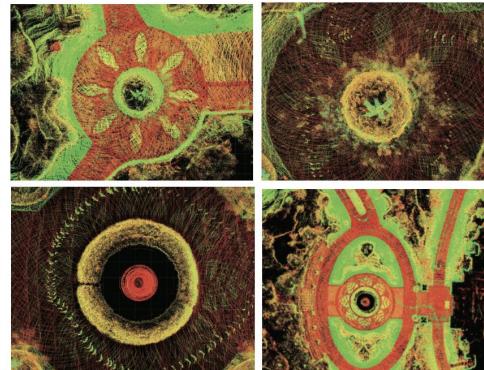
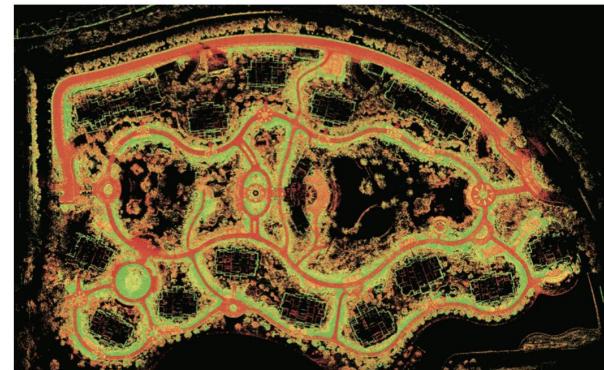


图 1-8 高精地图的数据来源：卫星影像图、无人机航拍图、激光生成的点云地图（全局和局部）



自动驾驶定位、地图技术

我们的课程主要介绍L4中的高精地图与高精定位。

为此，我们首先要回顾一些数学知识，然后一点点介绍惯性导航、组合导航、点云处理等基础理论和数据结构

3. 基础数学知识回顾

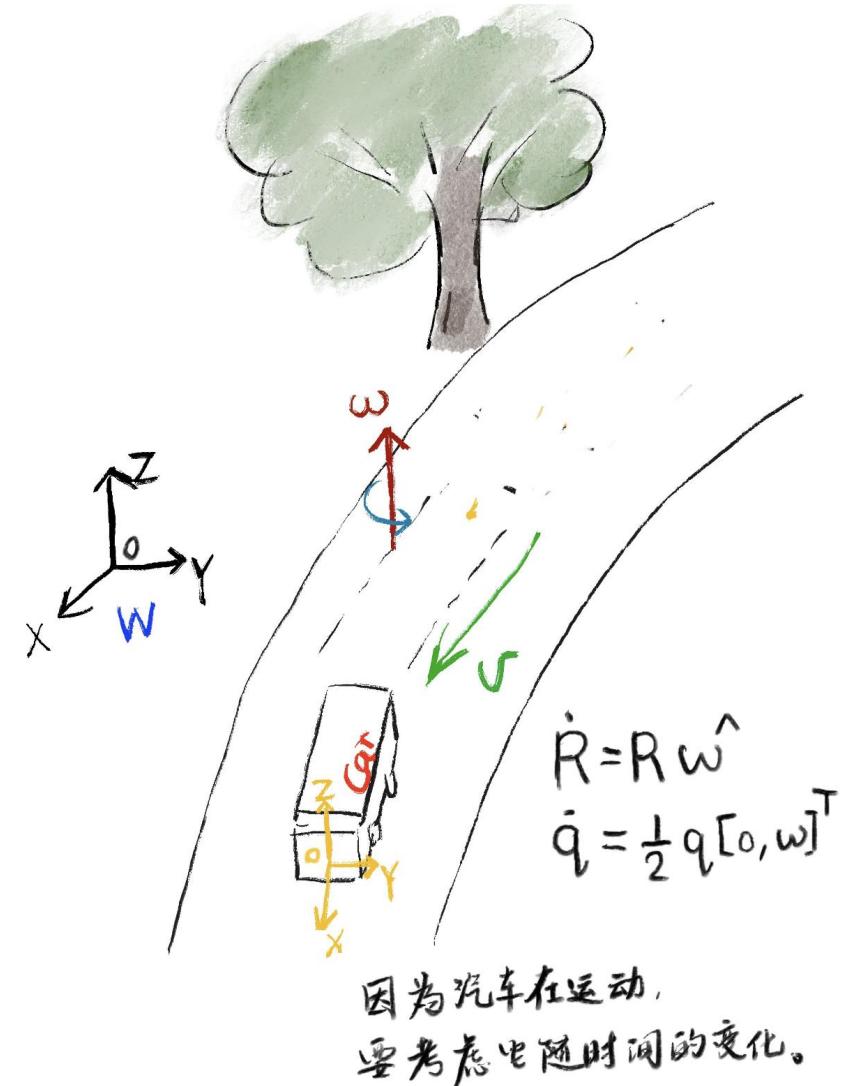


基础数学知识回顾

□ 说明

本节部分知识在《十四讲》中介绍过已经在《十四讲》中展开过的，大略谈一谈；没有展开的，详细推一下。

主要差异点：推导基于SO3的运动学，对比四元数和SO3两种参数化形式。





基础数学知识回顾

□ 点与坐标系

- 我们通常定义固定的世界坐标系和运动的车辆坐标系；
- 物理空间中的点，在不同坐标系下有不同的坐标表达。

一个点在一组基下的坐标表达：

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3,$$

定义世界坐标系 w 和机体坐标系 b ，那么坐标转换由旋转矩阵和平移矢量来描述：

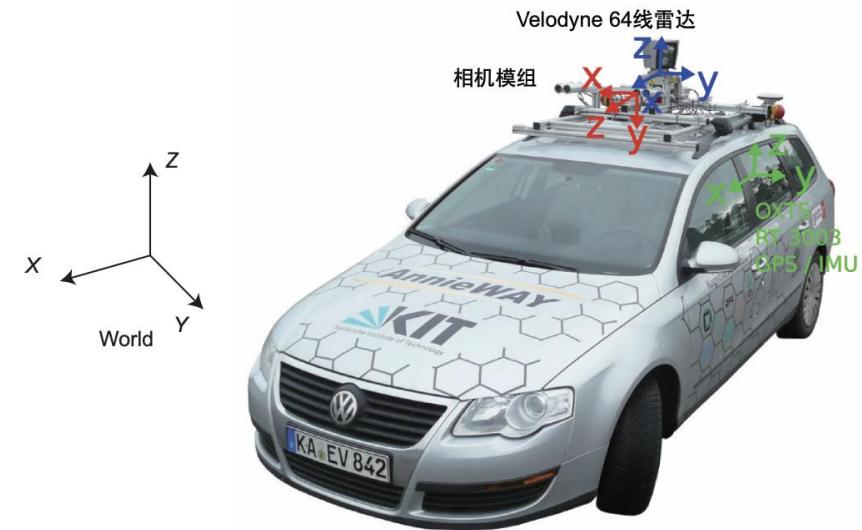
$$\mathbf{p}_w = \mathbf{R}_{wb}\mathbf{p}_b + \mathbf{t}_{wb}, \quad \text{或} \quad \mathbf{p}_w = \mathbf{T}_{wb}\mathbf{p}_b.$$

$$\mathbf{T}_{wb} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wb} & \mathbf{t}_{wb} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

需要说明的是：

和《十四讲》一样，我们使用右侧的下标定义，下标从右读到左；

本书统一使用 w, b 下标，所以在默认定义下，通常会省略此下标。





基础数学知识回顾

- 旋转可以由其他几种参数化表达：

四元数： $\mathbf{q} = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$,

旋转矢量： $\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n}\mathbf{n}^\top + \sin \theta \mathbf{n}^\wedge = \exp(\mathbf{w}^\wedge)$.

注意：后文记 $\text{Exp}(\mathbf{w}) = \exp(\mathbf{w}^\wedge)$

- 本课程不涉及欧拉角（和它的各种变换）
- 本课程主要使用SO3流形



基础数学知识回顾

□ 李群和李代数

- 旋转矩阵称为SO3群，变换矩阵称为SE3群
- SO3群的李代数记为so3，实际上就是旋转矢量
- SO3到so3的映射称为指数和对数映射，实际即为旋转矢量到旋转矩阵的转换公式

$$\exp(\phi^\wedge) = \mathbf{R}, \quad \phi = \log(\mathbf{R})^\vee,$$

- BCH公式给出了李群上（左右）乘小量和李代数上的关系：

$$\text{李群乘小量: } \exp(\Delta\phi^\wedge) \exp(\phi^\wedge) = \exp\left((\phi + \mathbf{J}_l^{-1}(\phi)\Delta\phi)^\wedge\right).$$

$$\text{李代数加小量: } \exp((\phi + \Delta\phi)^\wedge) = \exp((\mathbf{J}_l(\phi)\Delta\phi)^\wedge) \exp(\phi^\wedge) = \exp(\phi^\wedge) \exp((\mathbf{J}_r(\phi)\Delta\phi)^\wedge).$$

对SE3也可以定义类似操作，但本课程不涉及。



基础数学知识回顾

□ SO3的左右雅可比阵：

$$\boldsymbol{J}_l(\theta \boldsymbol{a}) = \frac{\sin \theta}{\theta} \boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\sin \theta}{\theta}\right) \boldsymbol{a} \boldsymbol{a}^\top + \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \boldsymbol{a}^\wedge$$

$$\boldsymbol{J}_l^{-1}(\theta \boldsymbol{a}) = \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2} \boldsymbol{I} + \left(1 - \frac{\theta}{2} \cot \frac{\theta}{2}\right) \boldsymbol{a} \boldsymbol{a}^\top - \frac{\theta}{2} \boldsymbol{a}^\wedge.$$

□ 左右之间的关系：

$$\boldsymbol{J}_r(\phi) = \boldsymbol{J}_l(-\phi).$$

注：以上内容都在《视觉SLAM十四讲》中给出了详细展开，更进一步内容请参考《机器人学中的状态估计》。



基础数学知识回顾

□ 运动学

车辆是在运动的，我们需要考虑它随时间变化的情况，称为运动学。下面推导 \mathbf{R} 的运动学。

首先 \mathbf{R} 是正交阵： $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}$,

两侧求时间导数：

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{R}^\top \mathbf{R}) = \dot{\mathbf{R}}^\top \mathbf{R} + \mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0},$$

于是 $\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}} = -(\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}})^\top$ $\mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}}$ 是反对称矩阵，即 $\boldsymbol{\omega}^\wedge$ 是反对称矩阵

定义： $\boldsymbol{\omega}^\wedge \in \mathbb{R}^{3 \times 3} = \mathbf{R}^\top \dot{\mathbf{R}}$

那么， $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}^\wedge$

该式称为泊松方程。

注意：也可以从 $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top = \mathbf{I}$ ，推导得到 $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}^\wedge \mathbf{R}$



基础数学知识回顾

□ 如果仅考虑瞬时变化，在固定时间 t ，可以认为 ω 不变

- 称为瞬时角速度
- 瞬时角速度同时也是旋转向量，模长代表旋转轴，长度代表旋转速度

□ 固定角速度后，泊松方程 $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\omega^\wedge$ 可视为常微分方程 (ODE)，给定初始条件，解得：

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0) \exp(\omega^\wedge(t - t_0)).$$

实际上就是李群和李代数的关系。

□ 利用 $\text{Exp}(\mathbf{w}) = \exp(\mathbf{w}^\wedge)$ ，记为： $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0)\text{Exp}(\omega\Delta t)$

□ 它的一阶近似形式：

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(t_0 + \Delta t) &\approx \mathbf{R}(t_0) + \dot{\mathbf{R}}(t_0)\Delta t \\ &= \mathbf{R}(t_0) + \mathbf{R}(t_0)\omega^\wedge\Delta t \\ &= \mathbf{R}(t_0)(\mathbf{I} + \omega^\wedge\Delta t).\end{aligned}$$

或者展开 Exp 也可以： $\text{Exp}(\omega\Delta t) = \mathbf{I} + \omega^\wedge\Delta t + \frac{1}{2}(\omega^\wedge\Delta t)^2 + \dots$



基础数学知识回顾

于是，得到连续形式和离散形式上的运动学：

连续形式 $\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^\wedge$

离散形式 $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}(t_0)\text{Exp}(\boldsymbol{\omega}\Delta t)$

这是处理IMU角速度的基础。



基础数学知识回顾

□ 四元数形式的运动学

有不少文献使用四元数形式，我们来比较它和SO3形式的差异。

同样，从单位四元数定义出发： $\mathbf{q}^* \mathbf{q} = 1$

求时间导数： $\dot{\mathbf{q}}^* \mathbf{q} + \mathbf{q}^* \dot{\mathbf{q}} = 0$,

移到等式另一边： $\mathbf{q}^* \dot{\mathbf{q}} = -\dot{\mathbf{q}}^* \mathbf{q} = -(q^* \dot{q})^*$.

于是有： $\mathbf{q}^* \dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\omega}$. 或者 $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \boldsymbol{\omega}$.

右侧为纯虚四元数，定义为： $\boldsymbol{\omega} = [0, \underbrace{\omega_1, \omega_2, \omega_3}_{\boldsymbol{\omega}}]^\top \in \mathcal{Q}$



基础数学知识回顾

同样视为ODE, 解得:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t_0) \exp(\boldsymbol{\varpi} \Delta t) \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \boldsymbol{\varpi}.$$

我们需要定义四元数的指数映射:

注意对比SO3: $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}^\wedge$

$$\exp(\boldsymbol{\varpi}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{\varpi}^k. \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t_0) \text{Exp}(\boldsymbol{\omega} \Delta t)$$

分离方向和长度: $\boldsymbol{\varpi} = \mathbf{u}\theta$, 其中 θ 为 $\boldsymbol{\varpi}$ 的长度, \mathbf{u} 为纯虚单位四元数,

其中, \mathbf{u} 满足 $\mathbf{u}^2 = -1$, $\mathbf{u}^3 = -\mathbf{u}$,

将 \mathbf{u} 的高次幂化简, 于是可得

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{u}\theta) &= 1 + \mathbf{u}\theta - \frac{1}{2!}\theta^2 - \frac{1}{3!}\theta^3\mathbf{u} + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots\right)}_{\cos \theta} + \underbrace{\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \dots\right)}_{\sin \theta} \mathbf{u} \\ &= \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta. \end{aligned}$$

实际上是复数欧拉公式的拓展:

$$\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$$



基础数学知识回顾

于是有: $\exp(\boldsymbol{\varpi}) = [\cos \theta, \mathbf{u} \sin \theta]^\top.$

这是纯虚四元数到单位四元数之间的指数映射!

由于四元数、旋转矩阵、旋转矢量之间都存在转换关系, 那么四元数表示的角速度和旋转矢量表示的角速度之间有什么关系?

SO3上的Exp: $\mathbf{R} = \text{Exp}(\boldsymbol{\phi}) = \text{Exp}(\theta \mathbf{n}),$

再转换到四元数: $\mathbf{q} = [\cos \frac{\theta}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2}],$

容易看出四元数角速度 $\boldsymbol{\varpi} = \mathbf{u}\theta$, 应该满足: $\boldsymbol{\varpi} = [0, \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}]^\top,$ 或 $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}.$

$$\boldsymbol{\varpi} = [0, \underbrace{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_3}_{\boldsymbol{\omega}}]^\top \in \mathcal{Q}$$

所以四元数表示的角速度, 实际要取成旋转矩阵角速度的“一半”!

这里的“一半”是指实部为零, 虚部取一半。



基础数学知识回顾

□ 重新统一数学符号

后文把瞬时角速度记作: $\omega \in \mathbb{R}^3$

SO3表达

运动学:

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}^\wedge$$

四元数表达

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q}[0, \boldsymbol{\omega}]^\top, \text{ 或者 } \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q}\boldsymbol{\omega} \text{ (简记形式)}$$

指数映射: $\mathbf{R} = \text{Exp}(\boldsymbol{\omega}) = \exp(\boldsymbol{\omega}^\wedge),$

$$\mathbf{q} = \exp\left(\frac{1}{2}[0, \boldsymbol{\omega}]^\top\right) \triangleq \text{Exp}(\boldsymbol{\omega}).$$

注意:

- (1) 这里的角速度是统一的, 所以四元数公式要带1/2。
- (2) 简记形式蕴涵着将矢量转换到四元数乘法。

当角速度为小量时: $\text{Exp}(\boldsymbol{\omega}\Delta t) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}^\wedge\Delta t + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}^\wedge\Delta t)^2 + \dots$

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx 1, \mathbf{n} \sin \frac{\theta}{2} \approx \mathbf{n} \frac{\theta}{2} \quad \text{Exp}(\boldsymbol{\omega}) \approx [1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}],$$

$$\mathbf{q}\text{Exp}(\boldsymbol{\omega}) \approx \mathbf{q}[1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}],$$



基础数学知识回顾

由于上文中角速度的定义是相同的，所以，

- 我们可以对SO3或四元数使用同样的测量方程（以及滤波器、图优化）；
- 而如果图优化和滤波器计算的某个角度更新量为 $\omega \in \mathbb{R}^3$ ，那么可按照下式更新，

$$\mathbf{R} = \text{Exp}(\boldsymbol{\omega}) = \exp(\boldsymbol{\omega}^\wedge), \quad \text{或} \quad \mathbf{q}\text{Exp}(\boldsymbol{\omega}) \approx \mathbf{q}[1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}],$$

也可以使用：

$$\exp(\varpi) = [\cos \theta, \mathbf{u} \sin \theta]^\top$$

那样没有约等号，也不需要归一化

- 常见的四元数更新式中，右侧并不是单位四元数，四元数更新以后，通常需要[重新归一化](#)，而SO3则不用。



基础数学知识回顾

□ 其他几种参数化形式 (so3, SE3, se3)

- 不常用, 请参考书本, 课件中略过



基础数学知识回顾

□ 线速度与加速度

考虑带有旋转关系的两个坐标系，某个点 p 在两个坐标系下满足： $\mathbf{p}_1 = \mathbf{R}_{12}\mathbf{p}_2$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_1 &= \dot{\mathbf{R}}_{12}\mathbf{p}_2 + \mathbf{R}_{12}\dot{\mathbf{p}}_2 \\ &= \mathbf{R}_{12}\boldsymbol{\omega}^\wedge\mathbf{p}_2 + \mathbf{R}_{12}\dot{\mathbf{p}}_2 \\ &= \mathbf{R}_{12}(\boldsymbol{\omega}^\wedge\mathbf{p}_2 + \dot{\mathbf{p}}_2). \end{aligned}$$

记 $\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{v}_1, \dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{v}_2$

那么， $\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}_{12}(\boldsymbol{\omega}^\wedge\mathbf{p}_2 + \mathbf{v}_2)$.

该式为速度矢量的变换关系。

注意：

- 速度矢量的变换，并不是速度矢量的坐标转换；
- 由于 p 在运动，同时两个坐标系也在转动，所以 p 在两个坐标系中的速度本身就不一样；
- 该式描述了 p 在1系中的速度与2系中速度之间的转换关系，而不是某个固定的速度矢量在两个系中取坐标（这个有时候也会用）。



基础数学知识回顾

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{R}_{12}(\boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{v}_2).$$

继续求时间导数：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}_1 &= \dot{\boldsymbol{R}}_{12}(\boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{R}_{12}(\dot{\boldsymbol{\omega}}^\wedge \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{\omega}^\wedge \dot{\boldsymbol{p}}_2 + \dot{\boldsymbol{v}}_2) \\ &= \boldsymbol{R}_{12}(\boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{v}_2 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^\wedge \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{\omega}^\wedge \dot{\boldsymbol{p}}_2 + \dot{\boldsymbol{v}}_2) \\ &= \boldsymbol{R}_{12}(\dot{\boldsymbol{v}}_2 + 2\boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{v}_2 + \dot{\boldsymbol{\omega}}^\wedge \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{p}_2).\end{aligned}$$

定义： $\boldsymbol{a}_1 = \dot{\boldsymbol{v}}_1, \boldsymbol{a}_2 = \dot{\boldsymbol{v}}_2$

那么：

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{R}_{12}(\underbrace{\boldsymbol{a}_2}_{\text{加速度}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{v}_2}_{\text{科氏加速度}} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}^\wedge \boldsymbol{p}_2}_{\text{角加速度}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{\omega}^\wedge \boldsymbol{p}_2}_{\text{向心加速度}}).$$

同样，这是两个系中的加速度矢量变换，而非坐标变换！



基础数学知识回顾

□ 实际例子：

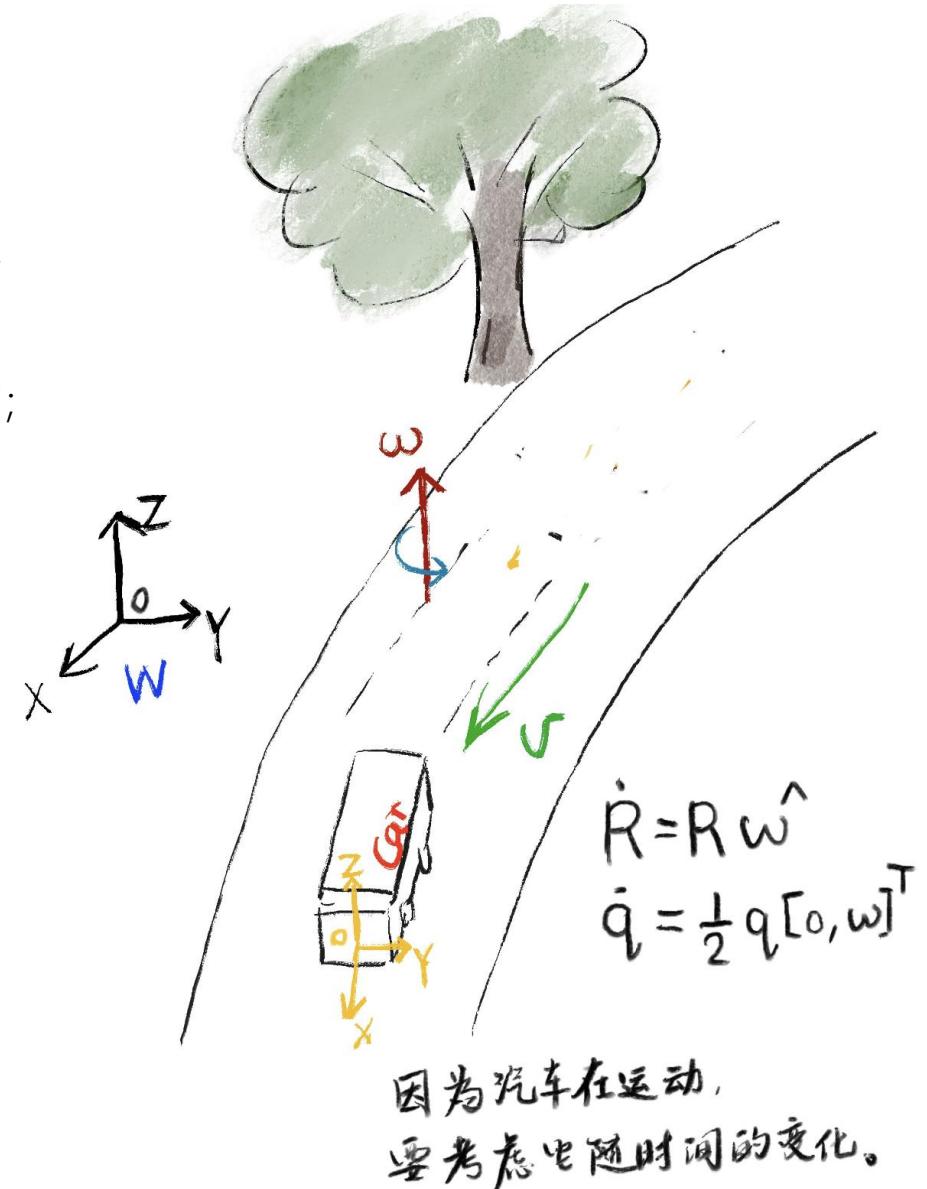
车辆在世界系中运动，我们关心车辆的运动速度，请问应该如何表示？

- 车的运动速度是指车身坐标系原点在世界坐标系中的速度矢量，记作 \mathbf{v}_w ；
- 该点在车体系下一直为原点，速度为零，所以不谈论这个点的速度；
- 我们谈论 \mathbf{v}_w 在车体系下的坐标表示，即：

$$\mathbf{R}_{bw} \mathbf{v}_w \quad \text{记作 } \mathbf{v}_b$$

这是坐标变换，并非前文的矢量变换；

- 该速度可以通过轮子、电机等设备测量到。





基础数学知识回顾

□ SO3的求导

将李群和李代数引入SO3后，求导相关的操作变得十分简单，而且全部都可以写成矩阵式操作

算例（右扰动模型）：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{R}\mathbf{a}}{\partial \mathbf{R}} &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}\text{Exp}(\phi) \mathbf{a} - \mathbf{R}\mathbf{a}}{\phi} \\ &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{I} + \phi^\wedge) \mathbf{a} - \mathbf{R}\mathbf{a}}{\phi} = -\mathbf{R}\mathbf{a}^\wedge.\end{aligned}$$

注：在《视觉SLAM十四讲》中我们主要使用左扰动，而在本课程中我们主要使用右扰动。

这主要是因为在vSLAM中，我们使用 \mathbf{R}_{cw} ，而本课程中习惯用 \mathbf{R}_{wb} ，因此角速度公式、导数公式都使用右侧的扰动。当然，这个导数也可以用左扰动求解。



基础数学知识回顾

□ 四元数的求导

- 四元数可以选择对本身四个元素求导，但比较麻烦 [1]:

$$\frac{\partial \mathbf{q} \mathbf{a} \mathbf{q}^*}{\partial \mathbf{q}} = 2 \left[w\mathbf{a} + \mathbf{v}^\wedge \mathbf{a}, \mathbf{v}^\top \mathbf{a} \mathbf{I}_3 + \mathbf{v} \mathbf{a}^\top - \mathbf{a} \mathbf{v}^\top - w \mathbf{a}^\wedge \right] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

- 我们也可以对四元数进行扰动，使用： $\mathbf{q}\text{Exp}(\boldsymbol{\omega}) \approx \mathbf{q}[1, \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}]$,
- 由于扰动量定义和 \mathbf{R} 是完全一致的，因此对该扰动的雅可比也一致：

$$\frac{\partial \mathbf{R} \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = -\mathbf{R} \mathbf{a}^\wedge.$$

- 这说明在实践当中，使用四元数或者SO3并没有什么本质区别。

[1] J.Sola, "Quaternion kinematics for the error-state kalman filter," *CoRR*, vol.abs/1711.02508, 2017.



基础数学知识回顾

□ 算例 (旋转的复合, 右扰动) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{\partial \mathbf{R}_1} &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(\mathbf{R}_1 \text{Exp}(\phi) \mathbf{R}_2) - \text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{\phi} \\ &= \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \text{Exp}(\mathbf{R}_2^\top \phi)) - \text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{\phi} \\ &= \mathbf{J}_r^{-1}(\text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)) \mathbf{R}_2^\top.\end{aligned}$$

利用 $\mathbf{R}^\top \text{Exp}(\phi) \mathbf{R} = \text{Exp}(\mathbf{R}^\top \phi)$ 来交换 \mathbf{R} 。

同理可求:

$$\frac{\partial \text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{\partial \mathbf{R}_2} = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \text{Exp}(\phi)) - \text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)}{\phi} = \mathbf{J}_r^{-1}(\text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)).$$

BCH公式 $\text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \text{Exp}(\mathbf{R}_2^\top \phi)) = \text{Log}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) + \mathbf{J}_r^{-1}(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) \text{Log}(\text{Exp}(\mathbf{R}_2^\top \phi)).$



基础数学知识回顾

□ 实践：运动学模型演示

- 我们演示刚才的四元数角速度和SO3角速度，利用3D可视化模拟一个方向盘固定，速度固定的车辆运动（应该呈圆周运动）。



基础数学知识回顾

□ 滤波器理论回顾

SLAM通常由运动方程和观测方程组成：

非线性形式

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k, & k = 1, \dots, N \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k, \end{cases}$$

线性形式

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{cases}.$$

线性形式的最优估计由卡尔曼滤波器给出。



基础数学知识回顾

□ 卡尔曼滤波器

状态由高斯分布描述, 上一时刻为 $\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}$

1. 预测:

$$\mathbf{x}_{k,\text{pred}} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{P}_{k,\text{pred}} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^\top + \mathbf{R}_k.$$

2. 更新: 先计算 \mathbf{K} , 它又称为卡尔曼增益。

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k,\text{pred}} \mathbf{C}_k^\top \left(\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{k,\text{pred}} \mathbf{C}_k^\top + \mathbf{Q}_k \right)^{-1}.$$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k,\text{pred}} + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{x}_{k,\text{pred}}),$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k,\text{pred}}.$$



基础数学知识回顾

□ 非线性系统卡尔曼滤波

通常先对系统进行线性化，本质就是泰勒展开，保留第一项或者第二项：

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J}\Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^\top \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} + O(\Delta\mathbf{x}^2),$$

然后使用线性系统结论，就得到了EKF：

线性化 $\mathbf{x}_k \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{F}_k\Delta\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k,$

预测 $\mathbf{x}_{k,\text{pred}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k), \quad \mathbf{P}_{k,\text{pred}} = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^\top + \mathbf{R}_k.$

线性化 $\mathbf{z}_k \approx \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k,\text{pred}}) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k,\text{pred}}) + \mathbf{n}_k,$

观测 $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k,\text{pred}} \mathbf{H}_k^\top (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,\text{pred}} \mathbf{H}_k^\top + \mathbf{Q}_k)^{-1},$

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k,\text{pred}} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_{k,\text{pred}}),$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k) \mathbf{P}_{k,\text{pred}}.$$

说明：这些只是抽象形式，后面会代入具体的预测和观测，在流形上处理线性化，最后在代码层面实现它们。



基础数学知识回顾

□ 最优化和图优化

最优化把上述状态估计问题转换为最小二乘问题，定义误差：

$$\boldsymbol{e}_{\text{motion}} = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{R}_k),$$

$$\boldsymbol{e}_{\text{obs}} = \boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k) \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q}_k).$$

最优化的顺序：

$$\boldsymbol{x}^* = \arg \min_{\boldsymbol{x}} \sum_k (\boldsymbol{e}_k^\top \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \boldsymbol{e}_k).$$

1. 首先，从 \boldsymbol{x} 的某个初始值出发，例如 \boldsymbol{x}_0 。
2. 设第 i 次的迭代值为 \boldsymbol{x}_i ，那么对上述误差函数，在 \boldsymbol{x}_i 处进行线性化，得到：

$$\boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{x}_i + \Delta \boldsymbol{x}) \approx \boldsymbol{e}_k(\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{J}_{k,i} \Delta \boldsymbol{x}_i, \quad (2.120)$$

这里线性化矩阵为 $\boldsymbol{J}_{k,i}$ 。

3. 利用高斯牛顿法或者类似的求解方法，解得本次迭代的增量 $\Delta \boldsymbol{x}_i$ 。以高斯牛顿法为例，其求解的线性方程为：

$$\sum_k (\boldsymbol{J}_{k,i} \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \boldsymbol{J}_{k,i}^\top) \Delta \boldsymbol{x}_i = - \sum_k (\boldsymbol{J}_{k,i} \boldsymbol{\Omega}_k^{-1} \boldsymbol{e}_k). \quad (2.121)$$

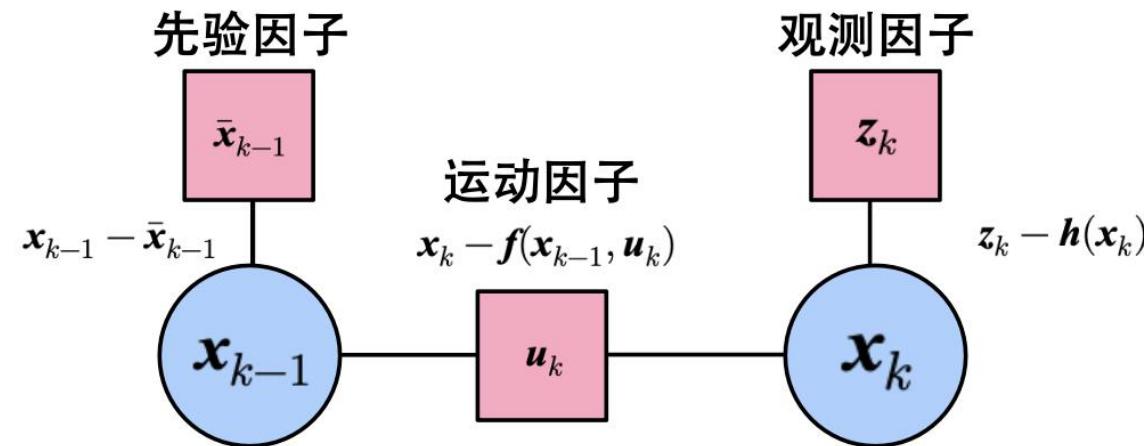
4. 更新 \boldsymbol{x}_i ，得到下次迭代值： $\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i + \Delta \boldsymbol{x}_i$ 。
5. 判断算法是否收敛。若收敛则退出，不收敛则进行下一次迭代。



基础数学知识回顾

□ 卡尔曼滤波器等价于三个节点组成的图优化

- 为了保证算法连续处理，还需要对这个图优化模型进行边缘化；
- 本课程后续将对同样的问题，分别使用滤波器和图优化各实现一遍，方便读者对比记忆。





习题

1. 分别使用左右扰动模型, 计算: $\frac{\partial \mathbf{R}^{-1} \mathbf{p}}{\partial \mathbf{R}}$.
2. 分别使用左右扰动模型, 计算: $\frac{\partial \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2^{-1}}{\partial \mathbf{R}_2}$.
3. 将实践环节中的运动学修改成带且一定角速度的平抛运动。车辆受固定的Z轴角速度影响, 具有一定的初始水平速度, 同时受-Z方向的重力加速度影响。请修改程序, 给出动画演示。
4. 自行寻找相关材料, 说明高斯牛顿法和Levenberg-Marquardt在处理非线性迭代时的差异。