深蓝学院
shenlanxueyuan.com

自动驾驶与机器人中的SLAM技术

LIO系统

Contents

Contents

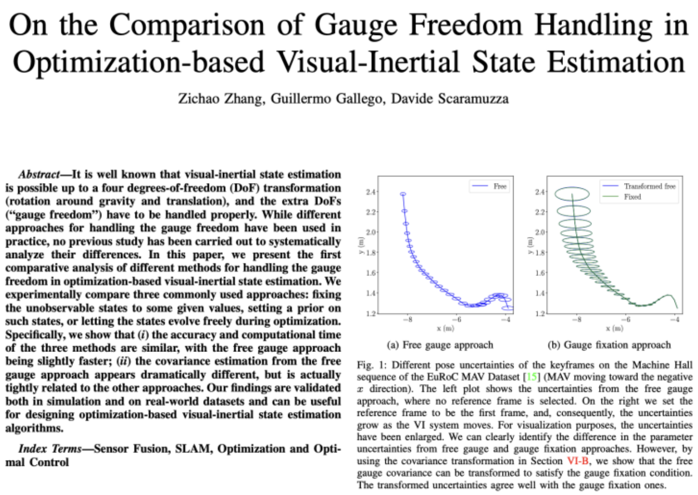
紧耦合LIO系统

上节课介绍了松耦合LIO系统

- 基于ESKF + incremental NDT LO的位姿融合

松耦合LIO系统的问题：

- LO和IMU部分都是独立运行的，虽然容易模块化，但二者均可能有失效情形，例如：IMU在没有融合Pose时会很快发散，LO在点云形状不好的时候存在退化；
- 当其中一个模块失效，松耦合系统通过重置该模块来处理失效情形，可能导致系统整体输出不连续，并且生效判定也可能存在异常。其数学解释是：单个模块的状态估计存在额外自由度（gauge freedom），仅凭模块自己并不能固定。
  - 注：gauge freedom这个词在其他领域也有应用，但在SLAM领域主要指状态估计的自由度，相当于EKF的能观维度或者优化的H阵的非零特征值个数。


On the Comparison of Gauge Freedom Handling in Optimization-based Visual-Inertial State Estimation

Zichao Zhang, Guillermo Gallego, Davide Scaramuzza

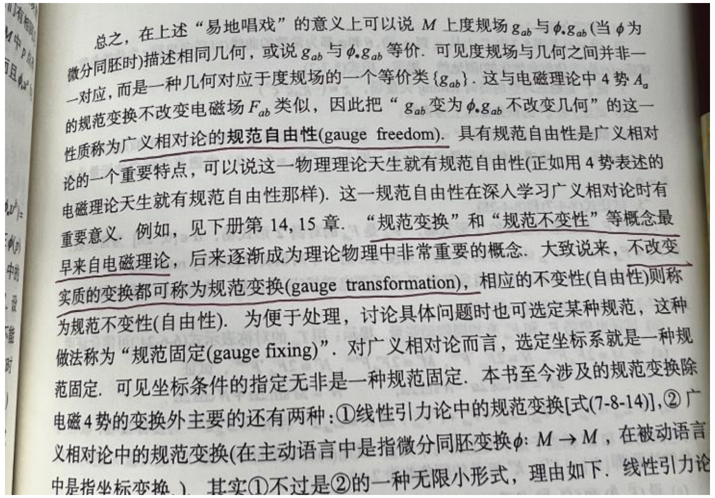
***Abstract*—It is well known that visual-inertial state estimation is possible up to a four degrees-of-freedom (DoF) transformation (rotation around gravity and translation), and the extra DoFs ("gauge freedom") have to be handled properly. While different approaches for handling the gauge freedom have been used in practice, no previous study has been carried out to systematically analyze their differences. In this paper, we present the first comparative analysis of different methods for handling the gauge freedom in optimization-based visual-inertial state estimation. We experimentally compare three commonly used approaches: fixing the unobservable states to some given values, setting a prior on such states, or letting the states evolve freely during optimization. Specifically, we show that (*i*) the accuracy and computational time of the three methods are similar, with the free gauge approach being slightly faster; (*ii*) the covariance estimation from the free gauge approach appears dramatically different, but is actually tightly related to the other approaches. Our findings are validated both in simulation and on real-world datasets and can be useful for designing optimization-based visual-inertial state estimation algorithms.**

***Index Terms*—Sensor Fusion, SLAM, Optimization and Optimal Control**

(a) Free gauge approach (b) Gauge fixation approach

Fig. 1: Different pose uncertainties of the keyframes on the Machine Hall sequence of the EuRoC MAV Dataset [15] (MAV moving toward the negative x direction). The left plot shows the uncertainties from the free gauge approach, where no reference frame is selected. On the right we set the reference frame to be the first frame, and, consequently, the uncertainties grow as the VI system moves. For visualization purposes, the uncertainties have been enlarged. We can clearly identify the difference in the parameter uncertainties from free gauge and gauge fixation approaches. However, by using the covariance transformation in Section VI-B, we show that the free gauge covariance can be transformed to satisfy the gauge fixation condition. The transformed uncertainties agree well with the gauge fixation ones.

SLAM中的gauge freedom


总之，在上述“易地唱戏”的意义上可以说 M 上度规场 g_{ab} 与 $\phi_* g_{ab}$ (当 ϕ 为微分同胚时)描述相同几何，或说 g_{ab} 与 $\phi_* g_{ab}$ 等价. 可见度规场与几何之间并非一一对应，而是一种几何对应于度规场的一个等价类 $\{g_{ab}\}$. 这与电磁理论中 4 势 A_a 的规范变换不改变电磁场 F_{ab} 类似，因此把“g_{ab} 变为 $\phi_* g_{ab}$ 不改变几何”的这一性质称为广义相对论的**规范自由性**(gauge freedom). 具有规范自由性是广义相对论的一个重要特点，可以说这一物理理论天生就有规范自由性(正如用 4 势表述的电磁理论天生就有规范自由性那样). 这一规范自由性在深入学习广义相对论时有重要意义. 例如，见下册第 14, 15 章. “规范变换”和“规范不变性”等概念最早来自电磁理论，后来逐渐成为理论物理中非常重要的概念. 大致说来，不改变实质的变换都可称为规范变换(gauge transformation)，相应的不变性(自由性)则称为规范不变性(自由性). 为便于处理，讨论具体问题时也可选定某种规范，这种做法称为“规范固定(gauge fixing)”. 对广义相对论而言，选定坐标系就是一种规范固定. 可见坐标条件的指定无非是一种规范固定. 本书至今涉及的规范变换除电磁4势的变换外主要的还有两种：①线性引力论中的规范变换[式(7-8-14)]，②广义相对论中的规范变换(在主动语言中是指微分同胚变换 $\phi: M \to M$，在被动语言中是指坐标变换.). 其实①不过是②的一种无限小形式，理由如下. 线性引力论

GR中的gauge freedom

紧耦合LIO系统

而在紧耦合系统中：

- 因为各模块残差被放到了同一个问题中，整个状态估计自由度由各模块一起决定；
- 于是，理论上认为，当单个模块失效时，其状态估计的有效维度仍然能保持在一定限度内。

例如：LO退化场景

- 松耦合：LO输出的Pose不稳定，导致滤波器融合的位姿异常。解决方法：在LO中引入退化检测，在退化时单独处理；
- 紧耦合：LO的残差与IMU残差在同一问题中，IMU给定了位姿（或者轮速的速度）分布，LO的残差不会离该分布太远；
- 一般来说，只要在同一问题中考虑各传感器内部残差，就视为紧耦合系统，例如紧耦合LIO、紧耦合GINS、紧耦合VIO，等等。

紧耦合LIO系统

基于EKSF的紧耦合LIO系统

- 可以将点云残差（ICP、点面、点线、NDT等）融入ESKF观测方程，而不是在IMU预测位姿上单独求解ICP或NDT（可能随点云退化而发散）；
- 由于ICP、NDT等算法均需要迭代，应该将ESKF改成迭代版本：iterated error state extended Kalman filter（IESEKF，简记IEKF）；
- 迭代过程中还需要求解最近邻;
- 下面以NDT为例，推导基于NDT观测的IEKF，并解释IEKF中的迭代观测与纯NDT迭代之间的联系。

紧耦合LIO系统

IEKF推导

状态变量： $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{p}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{b}_g, \boldsymbol{b}_a, \boldsymbol{g}]^\top \in \mathcal{M}.$

协方差的预测: $\boldsymbol{P}_{\text{pred}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^\top + \boldsymbol{Q},$

运动过程（直接写离散的，不从连续时间推了）：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{v}\Delta t + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)\right)\Delta t^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{g}\Delta t^2, \\
\boldsymbol{v}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)\Delta t + \boldsymbol{g}\Delta t, \\
\boldsymbol{R}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{R}(t)\mathrm{Exp}\left((\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\Delta t\right), \\
\boldsymbol{b}_g(t+\Delta t) &= \boldsymbol{b}_g(t), \\
\boldsymbol{b}_a(t+\Delta t) &= \boldsymbol{b}_a(t), \\
\boldsymbol{g}(t+\Delta t) &= \boldsymbol{g}(t).
\end{aligned}
$$

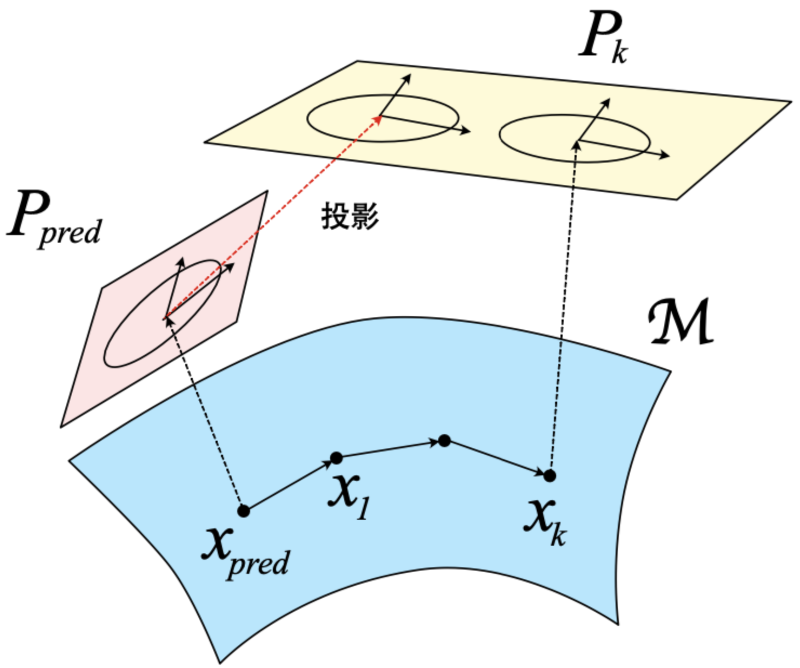
$$
\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix}
\boldsymbol{I} & \boldsymbol{I}\Delta t & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{R}(\tilde{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{b}_a)^\wedge \Delta t & \mathbf{0} & -\boldsymbol{R}\Delta t & \boldsymbol{I}\Delta t \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathrm{Exp}\left(-(\tilde{\boldsymbol{\omega}} - \boldsymbol{b}_g)\Delta t\right) & -\boldsymbol{I}\Delta t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{I}
\end{bmatrix}.
$$

预测后得到名义状态的 $\boldsymbol{x}_{\text{pred}}, \boldsymbol{P}_{\text{pred}}$，预测不参与迭代

紧耦合LIO系统

IEKF观测方程

1. 观测方程现在有一个迭代过程，记迭代次数为k
2. 迭代从pred位置出发，每次计算一个 $\delta\boldsymbol{x}_k$
3. 每次迭代需要计算最近邻、线性化矩阵和卡尔曼增益，记为$\boldsymbol{K}_k, \boldsymbol{H}_k$
4. 原则上，也需要计算每次迭代的$\boldsymbol{P}$阵。但是，实际上可以将预测的$\boldsymbol{P}$阵投影到当前工作点，形成先验分布，所以方差部分只需在迭代结束时结算即可
5. 于是，在第k次迭代时，可以看成：名义状态为 $\boldsymbol{x}_k$，误差状态为0，协方差为投影后的 $\boldsymbol{P}_{\text{pred}}$，目标是计算 $\delta\boldsymbol{x}_k$
6. 最后，ESKF的观测方程个数是固定的，而LIO的IEKF观测方程是可变的（取决于最近邻点数），且维度远大于运动方程



紧耦合LIO系统

- 在第k次迭代中，我们有工作点 $\boldsymbol{x}_k$
- 首先，将预测的P阵（即x0处）投影到当前工作点，投影方式同第3章的ESKF：

$$\boldsymbol{J}_k = \mathrm{diag}(\boldsymbol{I}_3, \boldsymbol{I}_3, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{I}_3, \boldsymbol{I}_3, \boldsymbol{I}_3), \quad \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{I} - \frac{1}{2}\delta\boldsymbol{\theta}_k^{\wedge}, \quad \delta\boldsymbol{\theta}_k = \mathrm{Log}(\boldsymbol{R}_0^{\top}\boldsymbol{R}_k).$$

- 此时预测点的给定的先验分布为：

$$\delta\boldsymbol{x}_k \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{J}_k \boldsymbol{P}_{\mathrm{pred}} \boldsymbol{J}_k^{\top}).$$

- 现在利用EKF公式计算误差状态：

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{H}_k^{\top} (\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{H}_k^{\top} + \boldsymbol{V})^{-1},$$

$$\delta\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)).$$

- 如果没有收敛，那么不需要计算P阵的更新，因为下次迭代是从预测位置投过来的
- 如果收敛了，那么计算协方差阵：

$$\boldsymbol{P}_{k+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k) \boldsymbol{J}_k \boldsymbol{P}_{\mathrm{pred}} \boldsymbol{J}_k^{\top}.$$

即：从协方差角度来说，只有最后一次迭代是有效的，其他迭代只是改变了工作点

紧耦合LIO系统

此时IEKF的观测方式相当于求解最小二乘：

$$\delta \boldsymbol{x}_k = \arg\min_{\delta \boldsymbol{x}} \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{H}_k(\boldsymbol{x}_k \boxplus \delta \boldsymbol{x})\|^2_{\boldsymbol{V}} + \|\delta \boldsymbol{x}_k\|^2_{\boldsymbol{P}_k}.$$

点云残差　　　　先验残差

注意：这是一种相对简单的做法，和[1] [2]均有差别，其中[1]更复杂，并非将预测协方差投到当前工作点，[2] 则不需要考虑迭代时观测方程会变的问题：

[1]里的记法：

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{x}_j^o &= -\mathbf{J}^j_{k+1}(\mathbf{x}^j_{k+1|k+1} \boxminus \mathbf{x}_{k+1|k}) \\
&\quad + \mathbf{K}^j_{k+1}(\mathbf{r}^j_{k+1} + \mathbf{H}^j_{k+1}\mathbf{J}^j_{k+1}(\mathbf{x}^j_{k+1|k+1} \boxminus \mathbf{x}_{k+1|k})) \\
\mathbf{K}^j_{k+1} &= (\mathbf{Q}^j_{k+1})^{-1}(\mathbf{H}^j_{k+1})^T \bar{\mathcal{R}}^{-1}_{k+1} \\
&= \mathbf{J}^j_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}(\mathbf{J}^j_{k+1})^T(\mathbf{H}^j_{k+1})^T(\mathbf{S}^j_{k+1})^{-1} \\
\mathbf{Q}^j_{k+1} &= (\mathbf{H}^j_{k+1})^T \bar{\mathcal{R}}^{-1}_{k+1}\mathbf{H}^j_{k+1} + (\mathbf{J}^j_{k+1})^{-T}\mathbf{P}^{-1}_{k+1|k}(\mathbf{J}^j_{k+1})^{-1} \\
\mathbf{S}^j_{k+1} &= \mathbf{H}^j_{k+1}\mathbf{J}^j_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}(\mathbf{J}^j_{k+1})^T(\mathbf{H}^j_{k+1})^T + \bar{\mathcal{R}}_{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^j_{k+1} &\triangleq \mathbf{z}_{k+1} \boxminus \mathbf{h}(\mathbf{x}^j_{k+1|k+1}, \mathbf{0}) \\
&= \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}) \boxminus \mathbf{h}(\mathbf{x}^j_{k+1|k+1}, \mathbf{0}) \\
&= \mathbf{h}(\mathbf{x}^j_{k+1|k+1} \boxplus \delta \mathbf{x}_j, \mathbf{v}_{k+1}) \boxminus \mathbf{h}(\mathbf{x}^j_{k+1|k+1}, \mathbf{0}) \\
&\approx \mathbf{D}^j_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \mathbf{H}^j_{k+1}\delta \mathbf{x}_j
\end{aligned}$$

$$\delta \mathbf{x}_j \sim \mathcal{N}(-\mathbf{J}^j_{k+1}(\mathbf{x}^j_{k+1|k+1} \boxminus \mathbf{x}_{k+1|k}), \mathbf{J}^j_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}(\mathbf{J}^j_{k+1})^T)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^j_{k+1} &= (\mathbf{Q}^j_{k+1})^{-1} \\
&= (\mathbf{I} - \mathbf{K}^j_{k+1}\mathbf{H}^j_{k+1})\mathbf{J}^j_{k+1}\mathbf{P}_{k+1|k}(\mathbf{J}^j_{k+1})^T
\end{aligned}$$

[1] He D, Xu W, Zhang F. Kalman filters on differentiable manifolds[J]. arXiv preprint arXiv:2102.03804, 2021.

[2] Barfoot T D. State estimation for robotics[M]. Cambridge University Press, 2017.

紧耦合LIO系统

考虑观测方程维度较高，需要变换公式

原先的更新方程：

$\boldsymbol{H}_k$为$N \times 18$，N为匹配点云个数；

有一个$N \times N$的矩阵求逆

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{H}_k^\top (\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{P}_k \boldsymbol{H}_k^\top + \boldsymbol{V})^{-1},$$

$$\delta \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{K}_k (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)).$$

利用Sherman-Morrison-Woodbury恒等式：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1},$$

代入后：

$$\boldsymbol{K}_k = (\boldsymbol{P}_k^{-1} + \boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{H}_k)^{-1} \boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1}.$$

此处的逆矩阵为18×18

这可以大幅减少卡尔曼增益中求逆的维度，本质就是一个SMW变换。

紧耦合LIO系统

- 下面来说明IEKF和纯激光NDT的关系

- NDT变换：设某个点对应的体素中，产生了残差和协方差：

$$\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{r}_j^\top \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} \boldsymbol{r}_j.$$

当然残差为： $\boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_i + \boldsymbol{t} - \boldsymbol{\mu}_i,$

- 雅可比矩阵，也就是线性化系数为：

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial \boldsymbol{R}} = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{q}_j^\wedge, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial \boldsymbol{t}} = \boldsymbol{I}.$$

$$\boldsymbol{J}_j = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial \boldsymbol{t}}, \boldsymbol{0}_3, \frac{\partial \boldsymbol{r}_j}{\partial \boldsymbol{R}}, \boldsymbol{0}_3, \boldsymbol{0}_3, \boldsymbol{0}_3\right]$$

- 对应到IEKF中，等效于H阵的第j行：

$$\boldsymbol{H}_k = \begin{bmatrix} \cdots, \\ \boldsymbol{J}_j, \\ \cdots \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V} = \mathrm{diag}(\cdots, \boldsymbol{\Sigma}_j, \cdots).$$

紧耦合LIO系统

- 对匹配点云残差求平方和，并求最小二乘，即为 $\sum_i (\boldsymbol{J}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{J}_i)\Delta \boldsymbol{x} = -\sum_i \boldsymbol{J}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{e}_i.$
- 同时，卡尔曼增益为：

$$\boldsymbol{K}_k = (\boldsymbol{P}_k^{-1} + \boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{H}_k)^{-1} \boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1}.$$

中间部分代入:

$$\boldsymbol{H}_k = \begin{bmatrix} \cdots, \\ \boldsymbol{J}_j, \\ \cdots \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{V} = \mathrm{diag}(\cdots, \boldsymbol{\Sigma}_j, \cdots).$$

得到:

$$\boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{H}_k = \sum_j \boldsymbol{J}_j^\top \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} \boldsymbol{J}_j.$$

右侧部分:

$$\boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)) = [\cdots, \boldsymbol{J}_j^\top, \cdots]\, \mathrm{diag}(\cdots, \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}, \cdots) \begin{bmatrix} \cdots \\ \boldsymbol{r}_j \\ \cdots \end{bmatrix},$$

$$= \sum_j \boldsymbol{J}_j^\top \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} \boldsymbol{r}_j.$$

紧耦合LIO系统

NDT求了什么？

$$\sum_i (\boldsymbol{J}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{J}_i)\Delta \boldsymbol{x} = -\sum_i \boldsymbol{J}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{e}_i.$$

EKF求了什么？

$$\boldsymbol{K}_k = (\boldsymbol{P}_k^{-1} + \boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{H}_k)^{-1} \boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1}.$$

$$\delta \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)).$$

$$\delta \boldsymbol{x}_k = (\boldsymbol{P}_k^{-1} + \boxed{\boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{H}_k})^{-1} \boxed{\boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k))}$$

$$\boxed{\boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{H}_k = \sum_j \boldsymbol{J}_j^\top \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} \boldsymbol{J}_j.}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)) &= [\cdots, \boldsymbol{J}_j^\top, \cdots] \operatorname{diag}(\cdots, \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}, \cdots) \begin{bmatrix} \cdots \\ \boldsymbol{r}_j \\ \cdots \end{bmatrix}, \\ &= \sum_j \boldsymbol{J}_j^\top \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} \boldsymbol{r}_j. \end{aligned}$$

所以IEKF实际上就是一个带着先验分布的NDT！

类似的结论也可以推广至EKF+ICP中。

紧耦合LIO系统

- 基于IEKF的NDT LO实现

- NDT部分计算：

$$\boxed{\boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{H}_k = \sum_j \boldsymbol{J}_j^\top \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} \boldsymbol{J}_j.}$$

18 × 18

$$\boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k)) = [\cdots, \boldsymbol{J}_j^\top, \cdots] \operatorname{diag}(\cdots, \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1}, \cdots) \begin{bmatrix} \cdots \\ \boldsymbol{r}_j \\ \cdots \end{bmatrix},$$

$$= \sum_j \boldsymbol{J}_j^\top \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} \boldsymbol{r}_j.$$

18x1

EKF部分融入之后，计算：

$$\boldsymbol{Q}_k = (\boldsymbol{P}_k^{-1} + \boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{H})^{-1}$$

$$\delta \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{r}_k,$$

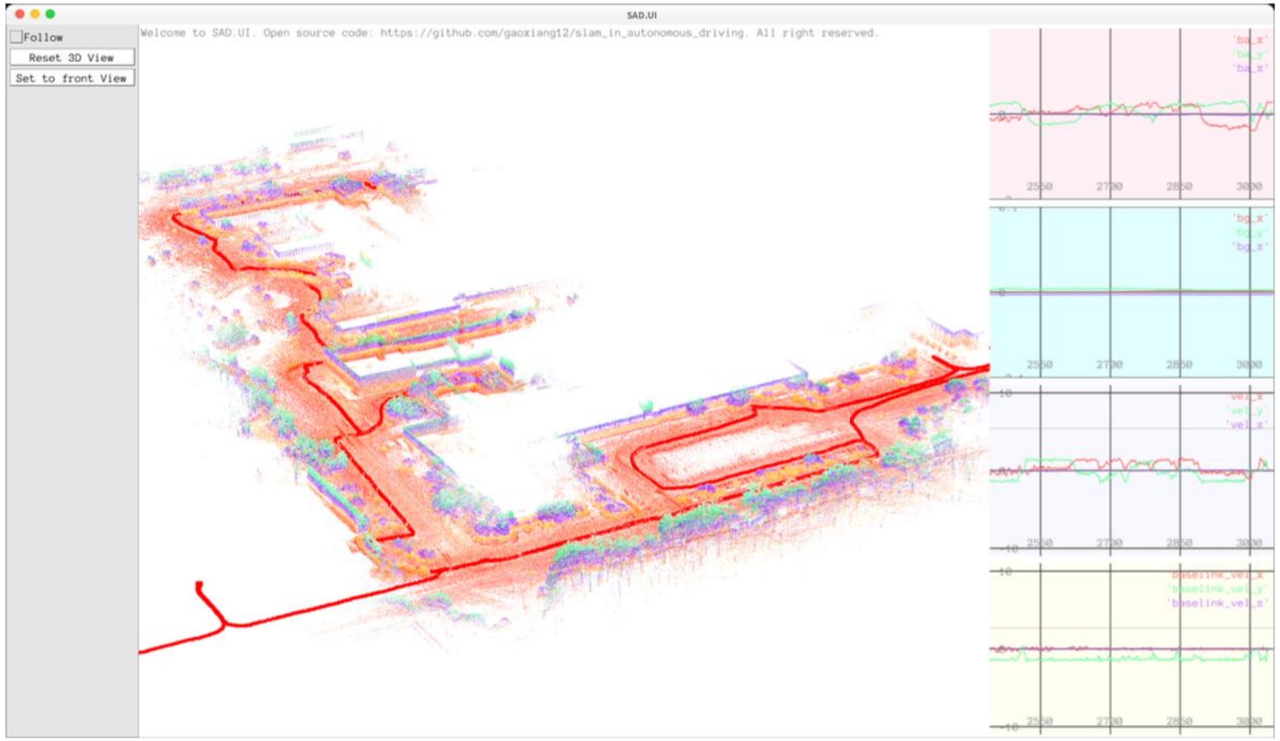
$$\boldsymbol{P}_{k+1} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}_k \boldsymbol{H}_k^\top \boldsymbol{V}^{-1} \boldsymbol{H}_k) \boldsymbol{P}_k.$$

只需在收敛时计算

- 地图部分仍然使用增量NDT更新（没有local map点云，更简洁）

紧耦合LIO系统

- 代码实现及结果讨论
- 框架部分可直接沿用LooselyLIO，保留数据同步、去畸变等代码



效率上和松耦合接近

松耦合：NDT迭代+EKF融合6自由度pose

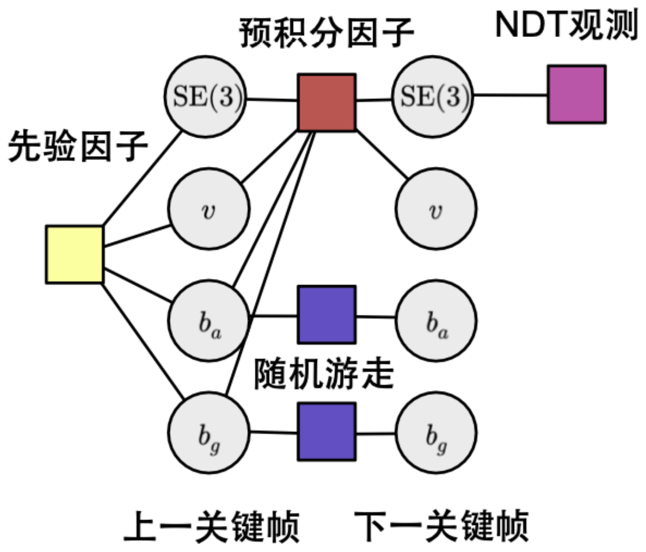
紧耦合：EKF直接融合NDT残差，也需要迭代

预积分LIO系统

预积分LIO系统

- 在第3、4章，我们实现了基于ESKF和预积分的GINS系统，同样可以推广至LIO系统。
- 由于我们没有直接实现NDT factor（NDT edge），现在主要演示用图优化来融合NDT LO的位姿效果（类似于GINS中融GNSS观测）。

图模型:



预积分LIO系统

预积分LIO实现要点：

1. 预积分因子较为灵活，需要增加先验因子；
2. NDT观测给定位姿（也可以写成NDT factor，把最近邻搜索写在内部，但效率较低，且数量不可变）；
3. 预积分将预测位姿传递给LO；
4. 但LO的观测位姿与GNSS有本质区别：GNSS观测有固定精度，而LO有两个缺点：(1) 位姿是发散的 (2) 当预测位姿不准时，也可能给不出正确结果。

预积分LIO系统

- 先验因子与边缘化
- 之前在第4章跳过去的部分（在第4章介绍，内容太多了）
- 边缘化是指从联合分布得到一部分随机变量分布的过程

$$K_k = P_{k,\mathrm{pred}} C_k^\top \left(C_k P_{k,\mathrm{pred}} C_k^\top + Q_k \right)^{-1}.$$

$$P_k = \left(I - K_k C_k \right) P_{k,\mathrm{pred}}.$$

可对比KF协方差部分
实际上边缘化了x_k-1，详见状态估计3.3.2节

联合分布

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_x \\ \boldsymbol{\mu}_y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix} \right)$$

$$p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) p(\boldsymbol{y})$$ 联合分布

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_x + \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}_y), \boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{yx} \right)$$

$$p(\boldsymbol{y}) = \mathcal{N}\left(\boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \right)$$

条件分布

Schur分解（左右高斯消元）

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{xx} - \boldsymbol{\Sigma}_{xy} \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{yy}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{yx} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

预积分LIO系统

- 优化问题中的边缘化
- 对优化问题来说，协方差实际上就是左侧的Hessian之逆

$$\sum_i (\boldsymbol{J}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{J}_i)\Delta \boldsymbol{x} = -\sum_i \boldsymbol{J}_i^\top \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} \boldsymbol{e}_i.$$

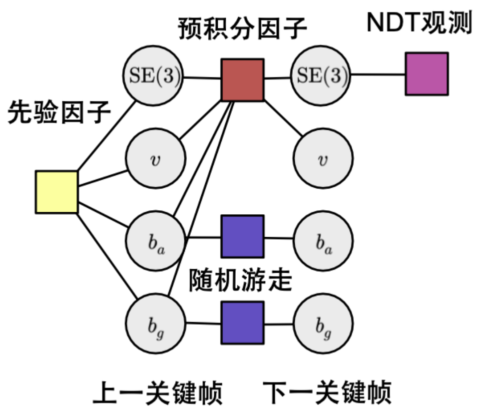
Hessian阵

对应KF公式：

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k^{-1}\hat{\boldsymbol{x}}_k = \check{\boldsymbol{P}}_k^{-1}\check{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{C}_k^\mathrm{T}\boldsymbol{R}_k^{-1}\boldsymbol{y}_k$$

$$\underbrace{(\boldsymbol{H}^\mathrm{T}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{H})}_{\text{协方差的逆}}\underbrace{\hat{\boldsymbol{x}}}_{\text{均值}} = \underbrace{\boldsymbol{H}^\mathrm{T}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{z}}_{\text{信息向量}}$$

所以，对Hessian阵进行Schur分解后，可得当前时刻状态的条件分布，即对过去时刻进行边缘化。



预积分图优化共两个时刻状态，所以对前一个时刻状态进行边缘化即可

此时得到后一个时刻的先验分布

Hessian阵需要调用g2o的雅可比阵和信息矩阵来获得

预积分LIO系统

- 预积分的代码实现和效果

将LIO系统用于建图前端

将LIO系统用于建图前端

- **LIO系统的用途**
- **在部分场景下，可以作为一种Odom类的位姿来源**
- **Odom类位姿的局限性：**

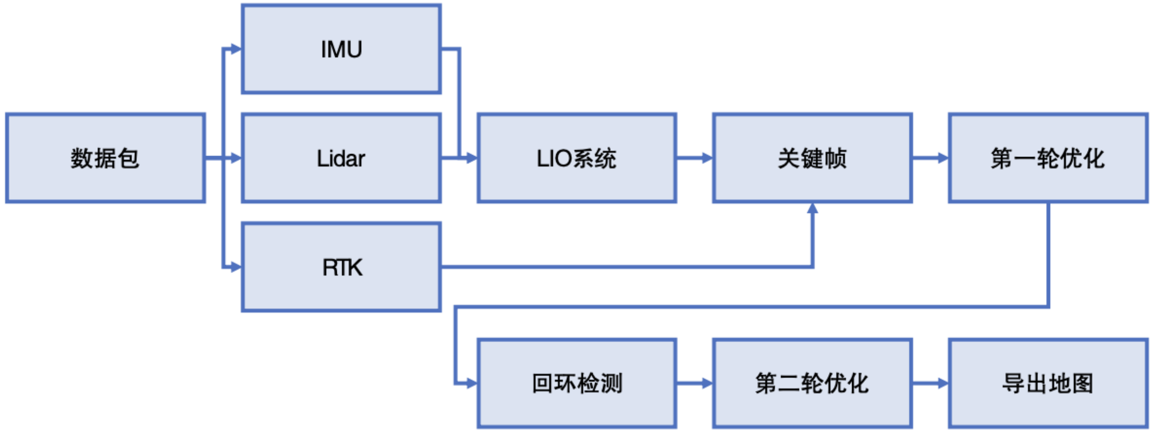
1. 跟真值相比，位姿最终是发散的（尽管EKF的P阵不会发散，因为相信地图点云是正确的）；
2. 不可避免地存在累积误差，误差大小取决于器件精度和算法，累积误差可能体现在高度上，也可能体现在角度或者水平位置上；
3. 用于建图的话，必然存在重影现象，但是LO/LIO可以作为建图软件的前端使用。

- **大部分自动驾驶定位功能都通过离线建图+在线定位实现，而不是在线SLAM方式**
- **LO/LIO可以用于建图的前端或者定位的Odom观测**

将LIO系统用于建图前端

离线建图相比在线建图的好处

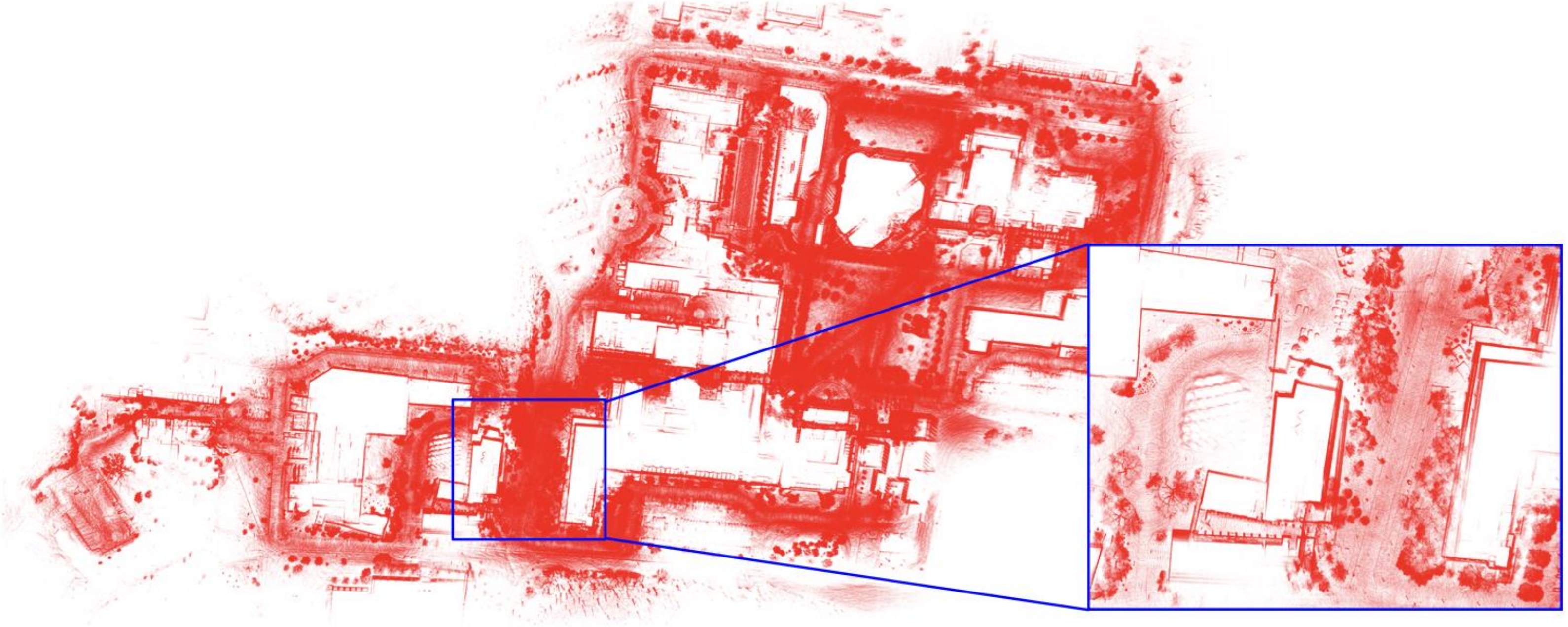
1. 结果更加确定，没有线程间调度和等待关系
2. 点云质量可以有更充分的保证
3. 框架设计更加灵活
4. 任务层面和关键步骤层面都可以实现并发
5. 可以做成云计算+服务器模式
6. 可以接入后处理感知算法，实现更多自动化功能



本课程利用LIO作为前端

将LIO系统用于建图前端

- 建图端使用LIO的演示
- 下节课介绍后端优化、GNSS融合与异常值去除，并发的回环检测、地图切分等功能



LIO虽然有较好的相对精度，但点云仍然存在明显重影

习题

1. 如果在IEKF中引入点面ICP作为观测方程，请说明观测方程的具体处理方式，以及IEKF和纯激光ICP之间的关系。
2. 实现基于点面ICP的IEKF LIO系统，给出实现代码和实验展示（注意local map的处理方式和NDT有所不同）。

深蓝学院
shenlanxueyuan.com

感谢聆听！

Thanks for Listening