Étude des ondes stationnaires : La vitesse de propagation d'une onde

Rapport du Laboratoire

Liviu Arsenescu, Cătălin Bozan

09.04.2024

Table des Matières

1 Remarques avant de commencer

Comme on le verra dans la section suivante, pour calculer la masse linéique de la corde, on a besoin de la longueur totale de celle-ci.
Parce que on est des êtres humains et que on fait toujours des erreurs enfantines, on a oublié de mesurer cette grandeur.
Pour résoudre ce problème, on a utilisé la longueur mesurée entre l'agitateur et la poulie, ce qui n'a pas eu d'impact significatif sur les résultats et les conclusions.

2 Description de l'expérience

2.1 Buts

- Étude du comportement des ondes stationnaires.
- Application et comparaison de méthodes de calcul de la vitesse de propagation d'une onde dans une corde élastique.

2.2 Éléments théoriques

2.2.1 Les différentes grandeurs physiques rencontrées

- Différentes longueurs $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{l'}, \boldsymbol{l''})$ - $[\boldsymbol{l}] = \mathrm{m}$
- Différentes masses $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m_c})$ - $[\boldsymbol{m}] = \mathrm{g}$
- Différentes forces $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F_T})$ - $[\boldsymbol{F}] = \mathrm{mN}$
- Vitesse de propagation de l'onde $(\boldsymbol{v})$ - $[\boldsymbol{v}] = \mathrm{ms}^{-1}$
- Masse linéique de la corde $(\boldsymbol{\mu})$ - $[\boldsymbol{\mu}] = \mathrm{gm}^{-1}$
- Fréquence de l'harmonique n $(\boldsymbol{f_n})$ - $[\boldsymbol{f_n}] = \mathrm{Hz}$
- Période d'oscillation n $(\boldsymbol{T})$ - $[\boldsymbol{T}] = \mathrm{s}$

2.2.2 Comment calculer la masse linéique de la corde

On sait que la masse linéique représente la masse d'un objet par unité de longueur, on peut donc écrire l'équation suivante pour la corde :

$$\boxed{\mu = \frac{m_c}{l_{tot}}}$$

La longueur l_{tot} est la longueur de la corde lorsqu'elle est complètement allongée.
Comme il est très difficile de mesurer la longueur l_{tot}, on peut calculer un "coefficient" d'allongement de la corde en utilisant une portion beaucoup plus courte d'elle, avec laquelle on fera le rapport entre la longueur initiale et la longueur après allongement.

$$l_{tot} = l_c \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{l''}{l'}$$

- $\boldsymbol{l_c}$ - longueur de la corde au repos
- $\boldsymbol{\alpha}$ - "coefficient" d'allongement
- $\boldsymbol{l'}$ - longueur étalon
- $\boldsymbol{l''}$ - longueur étalon après allongement

Alors, la masse linéique devient :

$$\boxed{\mu = \frac{m_c}{l_c} \cdot \frac{l'}{l''}}$$

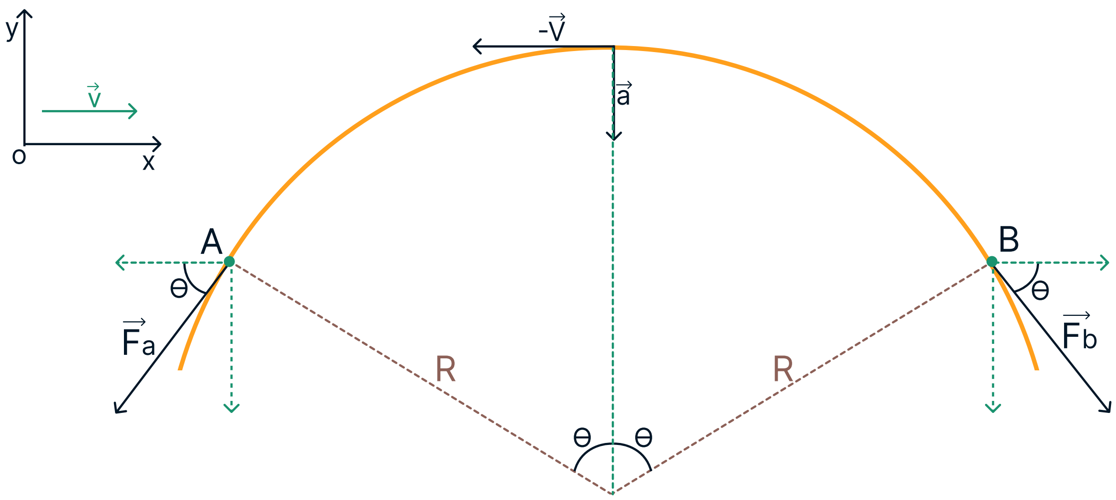
2.2.3 Vitesse de propagation de l'onde dans la corde

On prends un morceau de corde et considère que F_T est la tension de la corde qui est équivalente à la force gravitationnelle du poids F et la masse linéique de la corde μ.

Si on considére un morceau de corde en mouvement, on peut prendre deux points (A et B) sur la corde et analyser les forces qui agissent sur eux (F_a et F_b).

Les deux forces F_a et F_b sont équivalentes à la tension dans la corde F_T.

$$\boxed{|F_a| = |F_b| = |F_T|}$$



Dans le morceau de corde apparaît un MCU avec une norme de vitesse v.

Selon la deuxième loi de Newton:

$$\boxed{F_a \sin(\theta) + F_b \sin(\theta) = ma}$$

$$\boxed{2F_T \sin(\theta) = m\frac{v^2}{R}}$$

Où R est le rayon du cercle dont l'arc AB fait partie.

Noter que m peut également être écrit comme:

$$\boxed{m = \mu l}$$

Où

$$\boxed{l = R2\theta}$$

On considère que θ aura des valeurs petites, donc $\sin(\theta) \approx \theta$. En conséquence :

$$\boxed{2 \cdot F_T \cdot \theta = \mu \cdot R \cdot 2 \cdot \theta \cdot \frac{v^2}{R}}$$

Devient:

$$\boxed{F_T = \mu v^2} \quad \text{Ou} \quad \boxed{v = \frac{F_T}{\mu}}$$

2.2.4 Ondes progressives

D'un point de vue mathématique, les ondes peuvent être décrites par une fonction y qui accepte deux paramètres (x, t).

$$\boxed{y(x,t) = f(x \pm vt)}$$

- Avec $\{-\}$ l'onde progresse vers les x positifs
- Avec $\{+\}$ l'onde progresse vers les x négatifs

2.2.5 Ondes sinusoïdales progressives

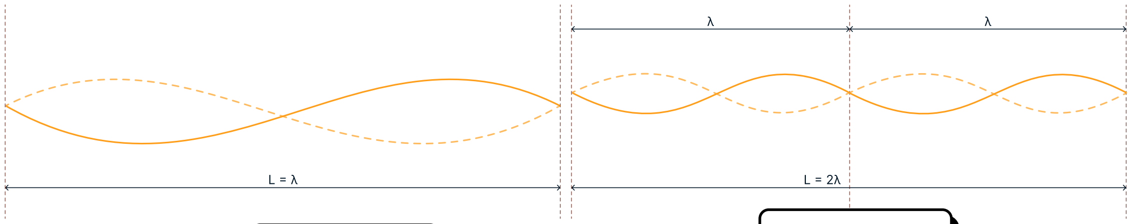
$$\boxed{y(x,t) = A\sin(kx \pm wt + \varphi)}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dy}y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f}$$

Où

- λ - Longueur d'onde
- T - Période d'oscillation
- f - Fréquence d'oscillation

2.2.6 Ondes stationnaires dans une corde attachée aux extrémités



$$\boxed{\lambda_1 = 2L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_1 = \frac{v}{2L}}$$

$$\boxed{\lambda_2 = L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_2 = \frac{v}{L}}$$

$$\boxed{\lambda_3 = \frac{2L}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_3 = \frac{3v}{2L}}$$

$$\cdots$$

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_n = \frac{nv}{2L}}$$

2.3 Principe de l'expérience

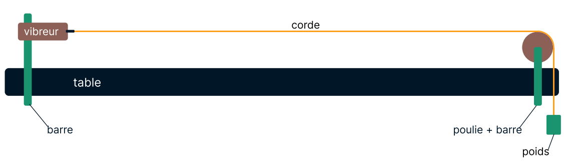
L'expérience consiste en ces deux parties :

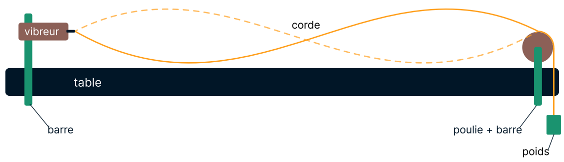
1. Avant de procéder à l'expérience proprement dite, on calcule la masse linéique de la corde à l'aide de différentes mesures liées au poids et à la corde, qu'on utilise ensuite, avec la force F, pour calculer la vitesse v_{calc}.
2. On mesure les paires de (n, f_n) pour les douze premières harmoniques, puis on les utilise pour construire une régression linéaire, à partir de la pente de laquelle on extrait la vitesse v_{exp}.

2.4 Schéma et montage de l'expérience

Pour réaliser l'expérience, on a besoin d'un agitateur qui fait vibrer une corde à différentes fréquences. Une extrémité de la corde est attachée au agitateur et l'autre passe dans une poulie. Un poids est accroché à la corde afin de la maintenir en tension.
Dans notre cas, on a utilisé :

- Une corde
- Un agitateur à fréquence variable
- Une poulie
- Des barres pour fixer l'agitateur et la poulie





2.5 Déroulement de l'expérience

2.5.1 Les mesures préalables

- On prend une balance et on mesure la masse totale de la corde.
- On établit une longueur étalon, qui servira à calculer le coefficient d'allongement de la corde.
- Avec cette longueur initiale, on calcule la longueur de la corde après avoir attaché le même poids que on utilise plus tard pour mettre en place l'expérience.

2.5.2 Le calcul des harmoniques

- On met l'agitateur sur une tige fixée à la table de travail.
- En prenant une distance considérable, on met une poulie de la même manière.
- On attache et on place la corde entre l'agitateur et la poulie, et on la tend à l'aide d'un poids à l'extrémité libre.
- On mesure la distance résultante entre l'extrémité de l'agitateur et la poulie.
- On connecte l'agitateur à un générateur de courant alternatif réglable.
- En ajustant la fréquence et la tension (amplitude) du générateur, on génère les douze premières harmoniques du notre système.

3 Mesures

3.1 Mesures constantes :

- $L = (1.79 \pm 0.05)$ m - longueur entre l'agitateur et la poulie
- $m = (199.6 \pm 0.1)$ g - poids pour la fixation de la corde
- $m_c = (10.3 \pm 0.1)$ g - masse de la corde
- $l' = (0.39 \pm 0.03)$ m - longueur de la corde avant l'étirement
- $l'' = (0.43 \pm 0.03)$ m - longueur de la corde après l'étirement

3.2 Tableau des mesures :

n	f_n (Hz)	Δf_n (Hz)
1	6.37	0.02
2	13.18	0.02
3	19.68	0.02
4	26.21	0.02
5	32.51	0.02
6	39.51	0.02
7	45.71	0.02
8	52.81	0.02
9	59.21	0.02
10	65.71	0.02
11	72.51	0.02
12	78.71	0.02

Tableau 1: Les douze premières harmoniques

Légende :

- n - nombre de l'harmonique
- f_n - fréquence de l'harmonique n (en Hz)
- Δf_n - incertitude de la fréquence (en Hz)

4 Analyse des mesures et résultats

4.1 Vitesse avec la masse linéique

Pour calculer la vitesse à l'aide de la force F et la masse linéique μ, on utilise la formule de la partie théorique :

$$\boxed{v_{calc} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

On obtient, donc :

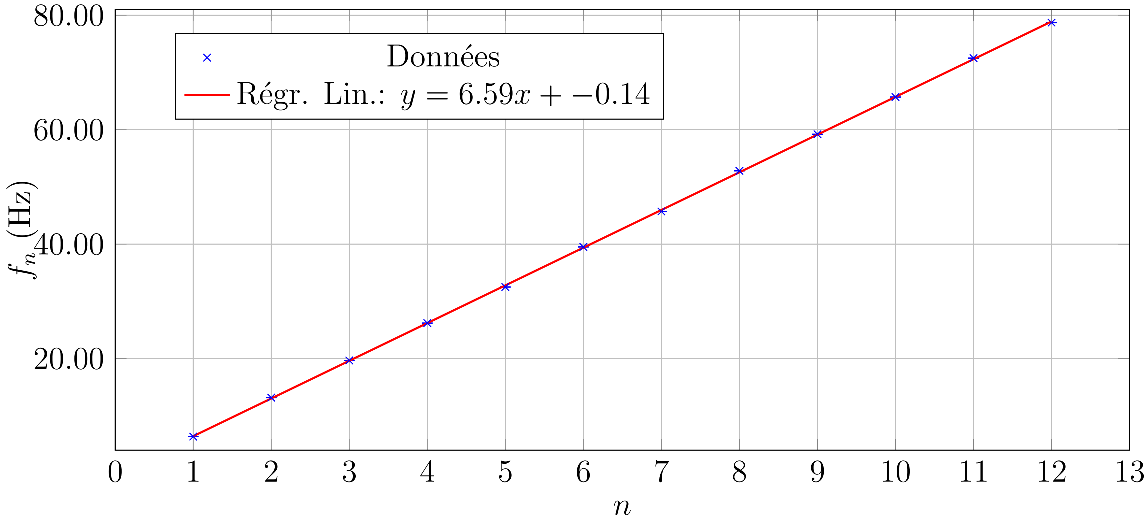
$$\boxed{v_{calc} = (20 \pm 6)\ \mathrm{ms}^{-1}}$$

4.2 Vitesse avec les harmoniques

Pour construire la régression linéaire, on partira de la formule suivante déduite dans la partie théorique :

$$\boxed{f_n = \frac{v_{exp}}{2L} \cdot n}$$

On constate que la valeur f_n est une fonction de n, et on voit aussi que $\frac{v_{exp}}{2L}$ est la pente de la fonction, qu'on note par a pour les calculs qui suivre.
On obtient, donc :



Après avoir extrait la vitesse et l'incertitude de la valeur de la pente, on a :

$$\boxed{v_{exp} = (23.6 \pm 0.8)\ \mathrm{ms}^{-1}}$$

4.3 Choix et calcul d'incertitudes

4.3.1 Choix des incertitude :

- Pour la longueur de la corde : lorsque la longueur est proche de 2 mètres, notre précision diminue, on a donc choisi une incertitude plus grande de $\Delta L = 0.05$ m.
- Pour les deux longueurs l' et l'' : compte tenu du fait que les mesures ont été effectuées sur de petites distances, on a choisi une incertitude $\Delta l = 0.03$ m.
- Pour les masses : on utilise l'incertitude indiquée par la balance $\Delta m = 0.01$ g.
- Pour l'incertitude de la fréquence : dans ce cas, l'incertitude peut provenir de plusieurs facteurs :
  - On ne sait pas si l'agitateur répond exactement à la fréquence indiquée par le générateur.
  - On ne sait pas si cette fréquence est exactement la fréquence correspondant à l'harmonique n.

  Ainsi, par expérience, on a observé qu'il n'y a pas de changement visible dans la forme de l'harmonique si on change la fréquence de ± 0.02 Hz.

4.3.2 Calcul d'incertitudes

On sait que v_{calc} est représenté par la formule :

$$\boxed{v_{calc} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

On peut donc calculer l'incertitude à l'aide du calcul suivant :

$$\boxed{\frac{\Delta v_{calc}}{|v_{calc}|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta F/\mu}{|F/\mu|}}$$

On sait que :

$$\begin{cases} F & = mg \\ \mu & = \frac{m_c}{L} \cdot \frac{l'}{l''} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta F & = 1\,\text{mN} \\ \Delta\mu & = 2\,\text{gm}^{-1} \end{cases}$$

Donc:

$$\boxed{\Delta v_{calc} = 6 \text{ ms}^{-1}}$$

Pour calculer l'incertitude de v_{exp}, on va utiliser quelques notions de statistiques simples :

- On connait l'erreur standard de la pente : $err_{st} \approx 0.016$

- On admet que on a une confiance de 95% dans nos résultats, donc on a une valeur critique de $val_{crt} \approx 1.96$

On en déduit la formule suivante :

$$\boxed{\Delta a = err_{st} \cdot val_{crt} = 0.04}$$

En utilisant la pente, on a donc le calcul suivant :

$$\frac{\Delta v_{\text{exp}}}{v_{\text{exp}}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta(2L)}{2L}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\Delta v_{\text{exp}} = 0.8\,\text{ms}^{-1}}$$

4.4 Discussion des résultats :

On a obtenu deux valeurs pour la vitesse:

$$v_{exp} = (23.6 \pm 0.8)\ \text{ms}^{-1} \text{ et } v_{calc} = (20 \pm 6)\ \text{ms}^{-1}$$

Ces résultats nous permettent de tirer les conclusions suivantes sur la manière de les atteindre :

- En utilisant la masse linéique μ et la force de la pesanteur F :
  - Cette façon d'obtenir la vitesse est très facile à mettre en pratique, car on n'a pas besoin d'une installation compliquée pour obtenir les mesures nécessaires.
  - L'inconvenient de cette méthode est que le résultat est très imprécis (on a obtenu une incertitude de 6 ms^{-1}, ce qui représente presque la moitié de la valeur obtenue pour la vitesse elle-même, et pour des calculs plus prècis cela peut coûter cher).
  - L'incertitude élevée provient du fait que la formule elle-même dépend de nombreux produits, divisions et calculs avec des puissances :

$$v_{calc} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{mgL}{m_c} \cdot \frac{l''}{l'}}$$

- En faisant une régression linéaire avec les n premières harmoniques :
  - Cette méthode d'obtenir la vitesse est beaucoup plus précise que la précédente (une incertitude de 0.8 ms^{-1} au lieu de 6 ms^{-1}), parce que on n'a que l'incertitude de la fréquence et de la longueur de l'installation qui affecte le résultat final.
  - L'inconvenient de cette méthode est que l'expérience nécessite beaucoup plus de préparation que la précédente, et que de nombreux facteurs peuvent conduire à des mesures qui s'écartent des valeurs idéales (par exemple, on ne sait pas si l'agitateur répond à la même fréquence que celle affichée sur le générateur).

- On a toujours une incertitude assez élevée, car il este très difficile de prédire si la fréquence que on a récoltée est vraiment la fréquence théorique de l'harmonique que on génere.

En général, les deux méthodes sont deux bons outils pour calculer la vitesse, le seul facteur qui influence le choix de l'une des deux étant le niveau de précision dont on a besion dans les calculs que on fait ensuite avec cette vitesse.

5 Synthèse et conclusion

Dans ce laboratoire, on a cherché à comprendre le comportement des ondes stationnaires et à appliquer les formules données par la théorie.
Afin de réaliser cet objectif, on a calculé la vitesse de propagation d'une onde de deux manières différentes :

- En utilisant la masse linéique de la corde μ et la force de pesanteur F.
- En collectant des paires $(n,\ f_n)$ pour les douze premières harmoniques de l'onde, puis en les utilisant pour construire une régression linéaire.

Le résultat de cette expérience est que on a démontré que on dispose de deux outils pratiques pour calculer cette vitesse, qui présentent différents niveaux de difficulté d'application et de précision des résultats.
En utilisant et en comparant les résultats des ces deux méthodes de calcul, on a également confirmé que les formules déduites par le raisonnement théorique correspondent à des résultats réels et tangibles.