Étude du Pendule Simple : Analyse des Oscillations Harmoniques

Rapport du Laboratoire

Liviu Arsenescu, Cătălin Bozan

05.03.2024

Table des Matières

1 Objectifs du laboratoire

- Démontrer expérimentalement le fait que la période ne dépend pas de la masse
- Vérifier la formule de la période d'un pendule
- Trouver l'accélération gravitationnelle de la terre

2 Éléments théoriques

2.1 Les différentes quantités rencontrées

- $\boldsymbol{\theta}$ - l'angle entre la verticale et le pendule
- **L** - la longueur du fil
- **T** - la période du pendule
- **m** - masse d'objet
- **s** - la position de la masse
- **g** - l'accélération gravitationnelle de la terre

2.2 La formule fondamentale du pendule

La position de la masse suspendue est calculée à l'aide de la formule suivante:

$$s = L\theta,$$

La deuxième loi de Newton ($\sum_{i=1}^{n} F_i = ma$) selon l'axe tangentiele s'écrit:

$$-mgsin(\theta) = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

où $-mgsin(\theta)$ est l'équation obtenue pour la seule force agissant sur l'objet (P - poids), et $\frac{d^2s}{dt^2}$ est l'accélération totale du système, obtenue en dérivant deux fois la position.
On sait que $\frac{d^2s}{dt^2} = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (L - constante). Alors:

$$-mgsin(\theta) = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$
$$-\frac{g}{L}sin(\theta) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}sin(\theta) = 0$$

Pour notre expérience, nous n'utilisons que de petits angles, ce qui nous permet de faire l'approximation suivante: $sin(\theta) \approx \theta$. Le pendule simple devient alors un système oscillatoire harmonique, décrit par l'équation suivante:

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

En comparant cette équation avec l'équation du mouvement oscillatoire harmonique ($\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$), nous obtenons:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}} \quad \text{et} \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Cette approche mathématique permet de tirer les conclusions suivantes:

- La période ne dépends pas de la masse de l'objet
- La période est proportionnelle à la racine carrée de la longueur
- Nous pouvons estimer expérimentalement la norme d'accélération gravitationnelle à l'aide de la formule:
$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

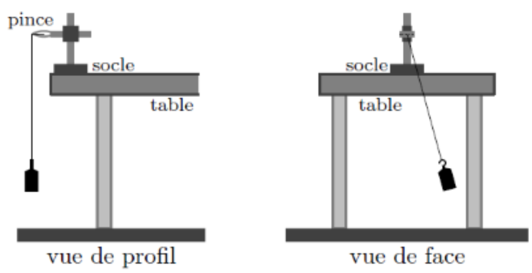
3 Manipulation

3.1 Matériel

- Socle
- Tiges
- Noix-double
- Tige-pince
- Diverses masses
- Fil non élastique
- Ruban métrique
- Camera vidéo
- Ordinateur

3.2 Configuration

La tige est fixée verticalement au socle. En utilisant la noix-double, on fixe horizontalement un'autre tige qui dispose d'un pince à l'extrémité. On a fait une boucle à l'extrémité de la ficelle et l'avons utilisée pour suspendre le poids. Ensuite, on a utilisé la pince pour saisir la corde, ce qui nous permet de modifier la longueur du pendule. Une balance a été utilisée pour peser les poids.
Un téléphone portable équipé d'une caméra capable d'enregistrer 60 images par seconde et le programme de montage vidéo Kdenlive ont été utilisés pour enregistrer et chronométrer la période du pendule.



4 Mesures

4.1 Manière de mesurer

Pour reduire l'incertitude, on n'a pas utilisé de chronomètre pour mesurer le temps, mais on a pris une vidéo avec une caméra de 60 cadres par seconde. Ensuite, on a analysé la vidéo à l'aide d'un logiciel de montage, pour mieux voir les cadres du début et de la fin.
Bien que les instructions du laboratoire indiquent que nous devrions enregistrer 10 périodes, pendant le laboratoire on a eu une erreur avec les vidéos, ce qui nous a permis d'enregistrer seulement 7 périodes. Cela n'a pas eu un grand impact sur l'incertitude.
Pour le reste des mesures(longueur, masse), on a suivi les instructions de laboratoire.

5 Analyse des mesures et résultats

5.1 Période d'oscillation T en fonction de la masse m

Pour cette expérience, on a une longueur fixe pour le fil et on a augmenté la masse. Les valeurs suivantes restent constantes pour chaque mesure:

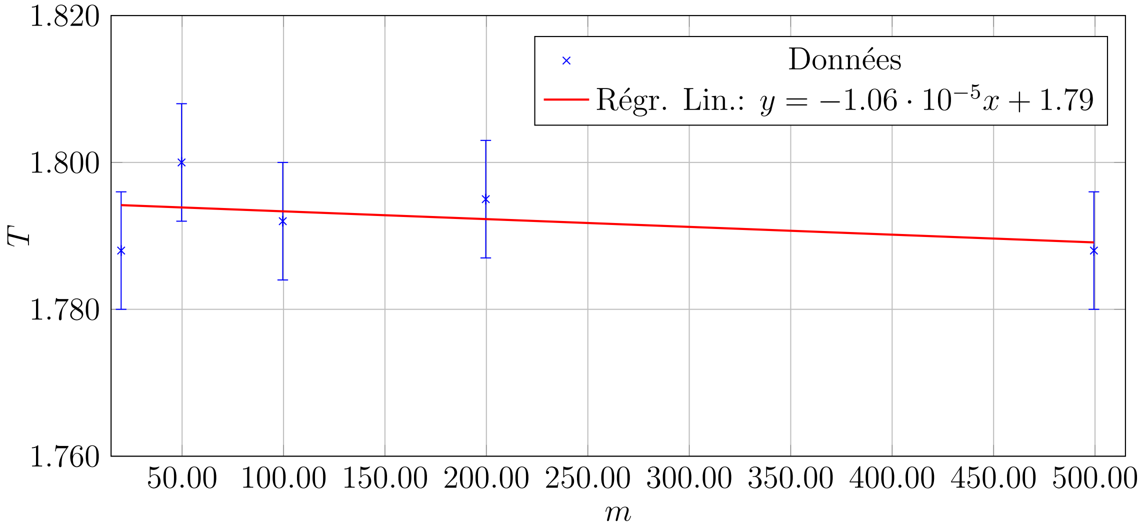
- Longueur: $L = 80.0cm$
- Incertitude de la longueur: $\Delta L = \pm 0.4cm$
- Incertitude de la masse: $\Delta m = \pm 0.01g$
- Incertitude de 7 périodes: $\Delta 7T = \pm 0.05s \Rightarrow \Delta T = \pm 0.008s$

Le reste des valeurs peut être représenté dans un tableau:

No.	**m(g)**	**7T(s)**	**T(s)**
1	19.96	12.52	1.788
2	49.76	12.60	1.800
3	99.63	12.55	1.792
4	199.69	12.57	1.795
5	499.46	12.52	1.788

Symb.		description
m(g)	-	masse en grammes
7T(s)	-	mesure de 7 périodes en secondes
T(s)	-	période en secondes

On peut utiliser cet ensemble de données pour faire un graphique:



Après l'analyse du graphique, on constate que la pente est en fait incroyablement faible, et qu'elle tend vers 0 ($-1.06 \cdot 10^{-5}$).
On sait qu'un graphique dont la pente est égale à 0 nous donne une valeur constante de la fonction sur laquelle on travaille.
Avec le fait que nos mesures étant très proches des prédictions théoriques, on peut conclure que la période du pendule ne dépend pas de la masse de l'objet.

5.2 Période d'oscillation T en fonction de la longueur L

Pour cette expérience, on a la masse qui reste fixe, et on a augmenté la longueur du fil.
Les valeurs suivantes restent constantes pour chaque mesure:

- Masse: $m = 199.42g$
- Incertitude de la masse: $\Delta m = \pm 0.01g$
- Incertitude de 7 périodes: $\Delta 7T = \pm 0.05s \Rightarrow \Delta T = \pm 0.008s$

Pour calculer l'incertitude de T^2, on a utilisé la formule suivante:

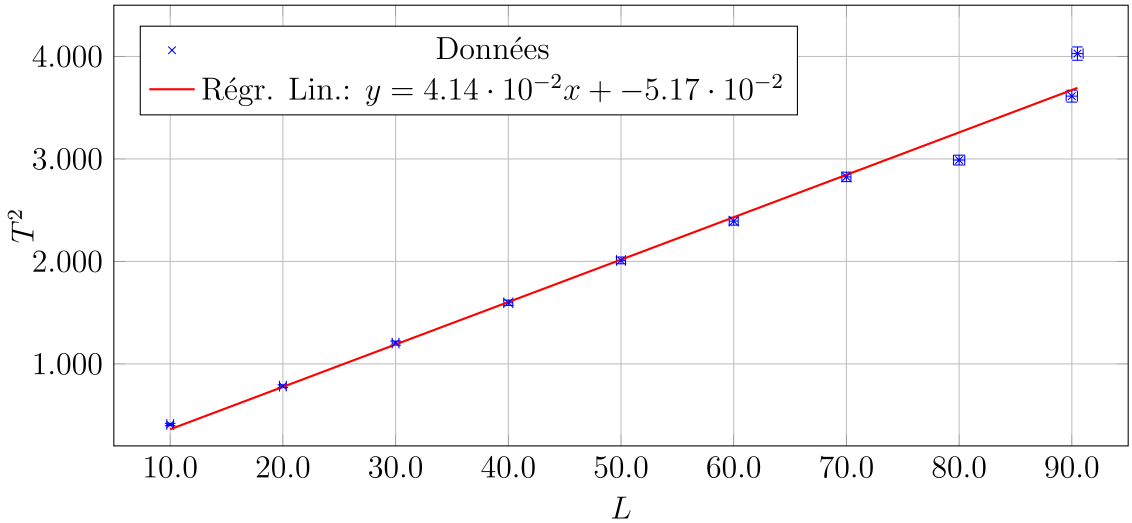
$$\Delta T^2 = 2\Delta T \cdot T$$

Le reste des valeurs peut être représenté dans un tableau:

No.	**L(cm)**	**ΔL(cm)**	**T(s)**	**$\Delta T^2(s^2)$**
1	10	0.3	0.640	0.011
2	20	0.3	0.885	0.013
3	30	0.3	1.097	0.020
4	40	0.4	1.264	0.026
5	50	0.4	1.418	0.033
6	60	0.4	1.547	0.039
7	70	0.4	1.681	0.046
8	80	0.5	1.792	0.048
9	90	0.5	1.901	0.058
10	90.5	0.5	2.007	0.065

Symb.		description
L(cm)	-	longueur en centimetres
ΔL(cm)	-	incertitude de la longueur
T(s)	-	période en secondes
$\Delta T^2(s^2)$	-	incertitude de T^2

On peut utiliser cet ensemble de données pour faire un graphique:



Après l'analyse du graphique, on constate plusieurs choses:

- L'imprécision des mesures augmente de plus en plus quand les valeurs augmentent (à cause de T^2)
- On a, en effet, une dépendance linéaire de $\sqrt{L}$ pour la période (ou une dépendance linéaire de L pour T^2)
- Avec la pente obtenue, on peut estimer l'accélération gravitationnelle de la terre

Pour calculer l'accélération gravitationnelle, on procède à l'approche mathématique suivante (on appelle a la pente de $T^2(L)$):

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{a}$$
$$g \approx 9.54ms^{-2}$$

On estime $\Delta a = \pm 0.01$, alors:

$$g = \frac{4\pi^2}{a} \Rightarrow \Delta g = 4\pi^2 \Delta a$$
$$\Delta g = \pm 0.40ms^{-2}$$

Donc le résultat final est:

$$\boxed{g = (9.5 \pm 0.4) ms^{-2}}$$

6 Synthèse et conclusion

Suite aux deux expériences et aux mesures effectuées, on constate que, comme le dit la théorie, la période du pendule varie en fonction de la longueur de la corde, et qu'elle est indépendante du poids.
En outre, nous avons réussi à déduire la constante d'accélération gravitationnelle ($g = (9.5 \pm 0.4) ms^{-2}$) qui est très proche de la constante réelle ≈ 9.81.