Numerische Mathematik Hausaufgaben

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

Hausaufgabe 4.1

A) Seien $\epsilon_{y1}, \epsilon_{y2}, \epsilon_p, \epsilon_w$ die jeweiligen relativen Fehler. Die Konditionszahlen für y_2 sind $\frac{p}{p/2-w} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1-2w/p}$ und $\frac{w}{p/2-w} \cdot (-1) = \frac{1}{1-p/2w}$. Demnach $\delta_{y_2} = \frac{1}{1-2w/p}\delta_p + \frac{1}{1-p/2w}\epsilon_w + o(|\epsilon_p| + |\epsilon_w|)$ für $(\epsilon_p, \epsilon_W) \to (0,0)$. Für y_1 sind die Konditionszahlen $\frac{p}{p/2+w} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1+2w/p}$ und $\frac{w}{p/2+w} \cdot (+1) = \frac{1}{1+p/2w}$. also $\epsilon_{y_1} = \frac{1}{1+2w/p}\epsilon_p + \frac{1}{1+p/2w}\epsilon_w + o(|\epsilon_p| + |\epsilon_w|)$ für $(\epsilon_p, \epsilon_w) \to (0,0)$.

Wegen $|q| \ll p^2/4 = u$ ist $v \approx u$ und somit $w \approx \sqrt{u} = \frac{|p|}{2}$. Wegen $p < 0$ betragen die Konditionszahlen für y_2 etwa 1/2, also $\epsilon_{y_2} \approx \frac{1}{2}\epsilon_p + \frac{1}{2}\epsilon_w$. Für y_1 sind die Nenner der Konditionszahlen fast $0 \rightsquigarrow$ Fehlerverstärkung.

B) Wie in der vorigen Teilaufgabe gesehen, führt der Rechenweg $y_1 = p/2 + w$ zu einem relativen Fehler für y_1, der unter den genannten Voraussetzung viel größer als ϵ_{y_2} ist. Mit $y_1 = q/y_2$ erhält man jedoch $\epsilon_{y_1} = \epsilon_q - \epsilon_{y_2} + o(|\epsilon_p| + |\epsilon_w|) \approx \epsilon_p - \frac{1}{2}\epsilon_p - \frac{1}{2}\epsilon_w$. Dieser Rechenweg ist günstiger als der andere, es sei denn, $|\epsilon_q| \gg |\epsilon_p|$.
Wenn q und p als Gleitkommazahlen gegeben sind, gilt $|\epsilon_q| \approx |\epsilon_p|$, also sit realistischerweise nicht $|\epsilon_q| \gg |\epsilon_p|$.

C) $p^2 = 16$, also $u = 4$; $v = 4 -^* 0.01 = 3.99$; $w = Rd_4(\sqrt{3.99}) = 1.997$. Somit $y_2 = -4/2 -^* 1.997 = -3.997$. Erster Rechenweg: $y_1 = -4/2 +^* 1.997 = -0.003$. Zweiter Rechenweg: $y_1 = 0.01/^*(-3.997) = -0.002502$. Genauere Lösung: $y_1 \approx -0.00250156$ und $y_2 \approx -3.9974984$. Der zweite Rechenweg ist also deutlich genauer als der erste.

Wenn ϵ_q und ϵ_p nicht einfach Rundungsfehler sind, könnte $\epsilon_q \gg \epsilon_p$ sein. Sei etwa $\overline{p} = 0.02$, Also $\epsilon_q = 1$. Dann erhalten wir $v = 3.98$, $w = 1.995$ und $y_2 = -3.995$. Im ersten Rechenweg erhalten wir $y_1 = -0.005$, im zweiten $y_1 = -0.005006$. Der zweite Rechenweg wird also für $\epsilon_q \gg \epsilon_p$ auch in der praktischen Rechnung ungünstig

Hausaufgabe 4.2

$f(x) = 2^x - 4x - 1$

f ist stetig, $f(4) = -1$, $f(4.5) > 3.62 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz hat f in $[4, 4.5]$ mindestens eine Nullstelle.

$f'(x) = ln(2) \cdot 2^x - 4$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$. Wegen $f'(4) = 16 \cdot ln(2) - 4 > 7.09 > 0$ ist $f'(x) > 0, \forall x \in [4, 4.5]$. Daher ist f streng monoton wachsend auf $[4, 4.5]$ und hat dort höchstens eine Nullstelle.

$a_0 := 4, b_0 := 4.5$

- $M := \frac{a_0+b_0}{2} = 4.25, f(M) > 1.02 \rightsquigarrow a_1 := a_0, b_1 := M$
- $M := \frac{a_1+b_1}{2} = 4.125, f(M) < -0.05 \rightsquigarrow a_2 := M, b_2 := b_1$

- $M := \frac{a_2+b_2}{2} = 4.1875, f(M) > 0.47 \rightsquigarrow a_3 := a_2, b_3 := M$
- $\frac{b_3-a_3}{2} = 0.03125 < 0.04$, also löst $\overline{x} := \frac{a_3+b_3}{2} = 4.15625$ die Aufgabe

$x^* \approx 4.131388$, daher $|\overline{x} - x^*| < 0.0249$

Hausaufgabe 4.3

Für stetig differenzierbare Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ lässt sich also eine Lipschitz- Konstante mit einer Kurvendiskussion von $|f'|$ berechnen. Ist $f \in \xi(I, \mathbb{R})$, aber $supx \in I \left|f\ '\ (\xi)\right| = \infty$, dann ist f nicht lipschitzsch. Mittelwertsatz: $\forall x \neq y \in [a, b]$: $\exists \xi$ zwischen x, y mit $\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} = f\ '\ (\xi)$, also $\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|} = \left|f\ '\ (\xi)\right| \leq L$, also $\left|f(y) - f(x)\right| \leq L \cdot \left|y - x\right|$

Hausaufgabe 4.4

A) siehe Main.py

B)
$a := 1.61801916$
$b := 1.61801917$

Für die Funktion
$f(x) = 223200658x^3 - 1083557822x^2 + 1753426039x - 945804881$
$f'(x) = 669601974x^2 - 2167115644x + 1753426039$

In das Newton-Verfahren eingesetzt wäre dies
$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
→ $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
mit $x_0 = a$
$x_1 = 1.61801916 - \frac{f(1.61801916)}{f'(1.61801916)} = 1.61801916 - \frac{-1.708110511232 \cdot 10^{-12}}{0.0009390686664544} = 1.61801916$
mit $x_0 = b$

$x_2 = 1.61801917 - \frac{f(1.61801917)}{f'(1.61801917)} = 1.61801917 - \frac{-5.217050063846}{-0.0016408342569114} = 1.61830\ldots$
→ $x_3 = 1.618015..$

Somit ist zu sagen, wenn man mit dem Newton verfahren versucht die Nullstelle genau zu approximieren, bleibt nur eine mögliche Über, a.
↷ Es gibt nur eine Nullstelle und diese ist a.

siehe second.py