Hausaufgaben Numerische Mathematik

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

Hausaufgabe 1.1:

A) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

→ $\frac{1}{1+x} + \frac{-(\frac{1}{(x+1)^2})}{1} \cdot (x) + \frac{\frac{2}{(x+1)^3}}{2} \cdot (x^2)$

= $1 - x + x^2$

→ s = $\frac{1}{2}$

→ S = $\frac{1}{2}$

B) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

→ $(1+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}} \cdot (x) - \frac{1}{8\cdot(x+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x^2)$

= $\sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot (x) - \frac{1}{8\cdot(1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x^2)$

→ s = 1

→ S = $\frac{11}{8}$

Hausaufgabe 1.2:

A) $\delta_s, \delta_c \in \mathbb{R}_{<0}$ mit $s(a) - \delta_s \leq$ sin(a) $\leq s(a) - \delta_s$

und $c(a) - \delta_c \leq$ cos(a) $\leq c(a) + \delta_c$

$a = 3.140625$

$s(a) = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \cdot a^{2m+1}}{(2n+1)!} \approx 9.675344 \cdot 10^{-4}$

$sin(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n-1}}{(2n+1)!} \approx 9.6753 \cdot 10^{-4}$

→$\delta_s = |sin(a) - s(a)| = |9.6753 \cdot 10^{-4} - 9.675344 \cdot 10^{-4}| = 4.4 \cdot 10^{-9}$

$c(a) = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n}}{(2n)} \approx -9.9999953 \cdot 10^{-1}$

$cos(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n}}{(2n)} \approx -1$

$\delta_c = |cos(a) - c(a)| = |(-1) - (-9.9999953 \cdot 10^{-1})| = 4.7 \cdot 10^{-7}$

B)

Hausaufgabe 1.3:

$A_x := (x+1) \cdot (x+1) = (x+2) \cdot x + 1$

Annahme:

→ für kleinere x gilt : $|((x \boxplus 1) \boxdot (x \boxplus 1) - A_x| > |(((x \boxplus 2) \boxdot x) \boxplus 1) - A_x|$

Bsp.: x = $4.5 \cdot 10^{-1}$

$A_x = (0.45 + 1) \cdot (0.45 + 1) = (((0.45 + 2) \cdot x) + 1) = 2.1025$

I. $|((4.5 * 10^{-1} \boxplus 1) \boxdot (4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 1)) - A_x|$

→ $|(4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 1)| = Rd_2(4.5 * 10^{-1} + 1) = Rd_2(1.45) = 1.4$

→ $|(1.4 \boxdot 1.4)| = Rd_2(1.4 \cdot 1.4) = Rd_2(1.96) = 2$

→$|(2) - A_x| = |2 - 2.1025| = 0.1025$

II. $|((4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 2) \boxdot 4.5 \cdot 10^{-1}) \boxplus 1) - A_x|$

→$|(4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 2)| = Rd_2(4.5 \cdot 10^{-1} + 2) = Rd_2(2.45) = 2.4$

→$|2.4 \boxdot 4.5 \cdot 10^{-1}| = Rd_2(4.5 \cdot 10^{-1} \cdot 2.4) = Rd_2(1.08) = 1$

→$|(1.1 \boxplus 1)| = Rd_2(1.1 + 1) = Rd_2(2.1) = 2.1$

→$|(2.1 - A_x)| = |2.1 - 2.1025| = 2.5 \cdot^{-3}$

$\curvearrowright 0.1025 > 2.5 \cdot 10^{-3}$

Bei den Runden einer Zahl von 0.45 wird nicht auf 0.5 sondern auf 0.4 gerundet, sodass in diesem Fall die Rundung genutzt werden kann $((x \boxplus 1) \boxdot (x \boxplus 1) - A_x$ geringer zu machen, sondern der Betrag dieser größer ist als $|(((x \boxplus 2) \boxdot x) \boxplus 1) - A_x|$. Des weiteren wird durch multiplizieren von $(((x \boxplus 2) \boxdot x) \boxplus 1)$ und 0.45 , durch die Rundung, eine größere Zahl erzeugt als beim bei der Multiplizieren von $(x \boxplus 1) \cdot (x \boxplus 1)$, sodass der Betrag niedriger wird.

B)