

# Numerische Mathematik Hausaufgaben

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

## Aufgabe 1

a)

Singulärwertzerlegung von A

$$A = U \cdot D \cdot V^{\top}$$

U entspricht der unitären Matrix

D entspricht der Diagonalmatrix

$V^{\top}$  entspricht der transponierten unitären Matrix.

$$\|A\|_f^2 = \text{Spur}(A^{\top} A) = \text{Spur}((VD)^{\top} U^{\top} (UDV^{\top}))$$

$$\text{Spur}(VD^{\top} DV^{\top}) = \text{Spur}(D^{\top} D) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad n = \text{Rang}(A)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

b)  $A = Q \cdot R$

$$\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(Q \cdot R)$$

$$\text{cond}_2(Q \cdot R) = \text{cond}_2(R)$$

$$\text{Da } \|Q \cdot R\|_2 = \sup \frac{\|QR_x\|_2}{\|x\|_2} = \sup \frac{\|R_x\|_2}{\|x\|_2} = \|R_x\|_2$$

$$\Rightarrow \text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(R)$$

## Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### Jacobiverfahren

$$x_{k+1} := -D^{-1}(L + R)x_k + D^{-1}b$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q := D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3$$

$$x_1 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Gauß-Seidel Verfahren

Die Matrix ist nicht symmetrisch, somit konvergiert die Matrix auch nicht damit.

Dadurch, dass diese Aussage nicht unbedingt zutrifft, hat die Recherche ergeben, dass wenn der Spektralradius  $< 1$  ist, die Matrix konvergiert.

Der Spektralradius ist der Betrag des betragsmäßig größten Eigenwertes von A also

$$\rho(A) := \max_i |\lambda_i(A)| \rightarrow \rho(I - B^{-1}A)$$

$$\text{Für } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \rho \left( \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0 < 1 \leadsto \text{das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert nicht.}$$

## Aufgabe 3

Es handelt sich um das Tschebyschow-Polynom

Durch die allgemein gültige Beschreibung mit  $T_0 = 1$  und  $T_1 = x$ , werde ich diese für den Beweis auch verwenden.

$$a) T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= \cos((n+1)\arccos(x)) + \cos((n-1)\arccos(x)) \\ &= 2\cos(n\arccos(x))\cos(\arccos(x)) \\ &= 2T_n(x)x \end{aligned}$$

b)

$$\text{Für } T_1 = \cos(1\arccos(x)) = \cos(\arccos(x)) = x$$

$$\text{somit gilt für } T_0 = \cos(0\arccos(x)) = \cos(0) = 1$$

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x)$$

$$\rightarrow T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x)$$

$$\rightarrow T_3(x) = 2x \cdot (2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

Induktionsanfang:

$T_1$  ist vom Grad 1 da  $x^1$ .

$T_0$  ist vom Grad 0 da  $x^0$ .

Induktionsvoraussetzung:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Induktionsschritt:  $n \rightarrow n + 1$

Induktionsbehauptung:  $T_{n+1}$  ist vom Grad  $n + 1$

$R_1$  bezeichnet den Rest und a,b den Vorhang

$$T_{n+1} = 2x(a \cdot x^n + R_1) - (b - x^{n-1} + R_2)$$

$$T_{n+1} = 2x \cdot ax^n + 2 \cdot x \cdot R_1 - bx^{n-1} - R_2$$

$$T_{n+1} = 2ax^{n+1} + 2x \cdot R_1 - bx^{n-1} - R_2 \quad \square$$

## Aufgabe 4

siehe AchtPunktVier.java