Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Daniel Max

Numerische Mathematik

Sommersemester 2022 Übungsblatt 4

Hausaufgaben (paarweise Abgabe bis 10.05.2022 $10^{\underline{00}}$ Uhr)

Hausaufgabe 4.1: *Stabilität der p, q-Formel*
Annahmen: $p, q \in \mathbb{R}$, $0 < q \ll p^2/4$, $p < 0$.
Die quadratische Gleichung $y^2 - py + q = 0$ hat die Lösungen $y_{1,2} = y_{1,2}(p, q) = p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$. Laut HA 3.2 ist unter obigen Annahmen das Problem der Berechnung von $y_{1,2}$ zu gegebenem p, q gut konditioniert.
Sei $u := p^2/4$, $v := u - q$ und $w := \sqrt{v}$. Dann gilt $y_1 = p/2 + w$ und $y_2 = p/2 - w$.

a) (2 P.) Drücken Sie den relativen Fehler von y_1 und y_2 aus in Abhängigkeit von p, w und den relativen Fehlern von p und w. Zeigen Sie, dass es unter obigen Annahmen bei der Berechnung von y_1 zu einer Fehlerverstärkung kommt, nicht jedoch bei der Berechnung von y_2.

b) (1 P.) Nach dem Satz von Vieta ist $y_1 y_2 = q$, also $y_1 = q/y_2$. Untersuchen Sie den relativen Fehler: Warum ist es unter den obigen Annahmen günstiger, $y_1 = q/y_2$ statt $y_1 = p/2 + w$ zu rechnen?

c) (1 P.) Es sei $p = -4$ und $q = 0.01$. Berechnen Sie gerundet mit einer Mantissenlänge von 4 Dezimalstellen u, v, w, y_2 sowie einerseits $y_1 = p/2 + w$ und andererseits $y_1 = q/y_2$. Vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis.

Hausaufgabe 4.2: *Bisektionsverfahren*
Sei $f(x) = 2^x - 4x - 1$.
(3 P.) Zeigen Sie, dass es genau ein $x^* \in [4,\ 4.5]$ mit $f(x^*) = 0$ gibt, und berechnen Sie mit Hilfe des Bisektionsverfahrens ein $\tilde{x} \in [4,\ 4.5]$, so dass $|\tilde{x} - x^*| < 0.04$.

Hausaufgabe 4.3: *Lipschitz-Stetigkeit*

a) (2 P.) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Wenn $L := \sup_{\xi \in I} |f'(\xi)| \in \mathbb{R}$ existiert, dann ist L eine Lipschitz-Konstante für f auf I, und f hat auf I keine kleinere Lipschitz-Konstante als L.

b) (3 P.) Durch $f(x) := (x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) = x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$ sei $f\colon\ [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ definiert.
Zeigen Sie, dass f kontrahierend ist und dass $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]\colon\ f(x) \in [0, \frac{1}{2}]$.

Bitte wenden

Hausaufgabe 4.4: *Wie viele Nullstellen?*
Sei $f(x) := 223200658\,x^3 - 1083557822\,x^2 + 1753426039\,x - 945804881$,
$a := 1.61801916$ und $b := 1.61801917$.

a) (1 P.) Programmieraufgabe: Stellen Sie den Funktionsgraph von f im Intervall $[a, b]$ bildlich dar, wobei in double precision gerechnet werden soll.

b) (3 P.) Der in a) berechnete Funktionsgraph erweckt den Eindrück, dass f in $[a, b]$ zahlreiche Nullstellen hat, was für ein Polynom vom Grad 3 natürlich nicht sein kann. Wie viele Nullstellen von f liegen tatsächlich in $[a, b]$? Natürlich ist Ihre Vorgehensweise zu begründen, Rechnungen müssen nachvollziehbar dargestellt werden. **Hinweis:** Es gibt verschiedene Lösungswege, einer davon basiert darauf, dass f eine Nullstelle in $\mathbb{Q}$ hat. Ihre Argumentation darf auch Rechnungen mit einem Computer beinhalten, aber es muss aus Ihrer Lösung klar werden, dass sie nicht durch Rundungsfehler verfälscht wurde.

Erreichbare Punktzahl: 16