Hausaufgaben Numerische Mathematik

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

Hausaufgabe 1.1:

A) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

→ $\frac{1}{1+x} + \frac{-(\frac{1}{(x+1)^2})}{1} \cdot (x) + \frac{\frac{2}{(x+1)^3}}{2} \cdot (x^2)$

= $1 - x + x^2$

→ s = $\frac{1}{2}$

→ S = $\frac{1}{2}$

B) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

→ $(1+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+1}} \cdot (x) - \frac{1}{8 \cdot (x+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x^2)$

= $\sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot (x) - \frac{1}{8 \cdot (1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x^2)$

→ s = 1

→ S = $\frac{11}{8}$

Hausaufgabe 1.2:

A) $\delta_s, \delta_c \in \mathbb{R}_{<0}$ mit $s(a) - \delta_s \leq$ sin(a) $\leq s(a) + \delta_s$

und $c(a) - \delta_c \leq$ cos(a) $\leq c(a) + \delta_c$

$a = 3.140625$

$s(a) = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \cdot a^{2m+1}}{(2n+1)!} \approx 9.675344 \cdot 10^{-4}$

$sin(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n-1}}{(2n+1)!} \approx 9.6753 \cdot 10^{-4}$

→$\delta_s = |sin(a) - s(a)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n-1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \cdot a^{2m+1}}{(2n+1)!}| = 1.02752 \cdot 10^{-11}$

$c(a) = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n}}{(2n)} \approx -9.9999953 \cdot 10^{-1}$

$cos(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n}}{(2n)} \approx -1$

$\delta_c = |cos(a) - c(a)| = |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n}}{(2n)} - \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n}}{(2n)}| = 7.51407 \cdot 10^{-11}$

B) Um sich an π anzunähern muss sich der Bereich um π angeschaut werden

Wir nutzen nähern uns Sinus und Cosinus an. Durch den Mittelwertsatz können wir die Sekante berechnen, also diese von Sinus mit dem 0-Schnittpunkt finden.

Durch den Negativen anstieg des Sinus wird eine $+1$ addiert.

$s'(x_0) = \frac{s(a+\delta_s) - S(a-\delta_s)}{(a+\delta_s)-(a-\delta_s)} = \frac{(\sum_{n=0}^{10} (-1)^n \cdot \frac{(a+\delta_s)^{2n+1}}{(2n+1)!}) - (\sum_{n=0}^{10} (-1)^n \cdot \frac{(a-\delta_s)^{2n+1}}{(2n+1)!})}{(a+\delta_s)-(a-\delta_s)} + 1 = -1.39227 \cdot 10^{-5}$

$c'(x_0) = \frac{c(a+\delta_c) - c(a-\delta_c)}{(a+\delta_c)-(a-\delta_c)} = \frac{(\sum_{n=0}^{10} (-1)^n \cdot \frac{(a+\delta_c)^{2n}}{(2n)!}) - (\sum_{n=0}^{10} (-1)^n \cdot \frac{(a-\delta_c)^{2n}}{(2n)!})}{(a+\delta_c)-(a-\delta_c)} = -9.65562 \cdot 10^{-4}$

Somit kommen wir für $L \leq \pi \leq U$ auf

$L = a - c'(x_0) = 3.141590562$

$U = a - (c'(x_0) + s'(x_0)) = 3.1416044847$

→ $3.141596562 \leq \pi \leq 3.1416044847$

Hausaufgabe 1.3:

$A_x := (x+1)\cdot(x+1) = (x+2)\cdot x+1$

Annahme:

→ für kleinere x gilt : $|((x \boxplus 1) \boxdot (x \boxplus 1) - A_x| > |(((x \boxplus 2) \boxdot x) \boxplus 1) - A_x|$

Bsp.: x = $4.5 \cdot 10^{-1}$

$A_x = (0.45+1)\cdot(0.45+1) = (((0.45+2)\cdot x)+1) = 2.1025$

I. $|((4.5 * 10^{-1} \boxplus 1) \boxdot (4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 1)) - A_x|$

→ $|(4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 1)| = Rd_2(4.5 * 10^{-1} + 1) = Rd_2(1.45) = 1.4$

→ $|(1.4 \boxdot 1.4)| = Rd_2(1.4 \cdot 1.4) = Rd_2(1.96) = 2$

→$|(2) - A_x| = |2 - 2.1025| = 0.1025$

II. $|((4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 2) \boxdot 4.5 \cdot 10^{-1}) \boxplus 1) - A_x|$

→$|(4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 2)| = Rd_2(4.5 \cdot 10^{-1} + 2) = Rd_2(2.45) = 2.4$

→$|2.4 \boxdot 4.5 \cdot 10^{-1}| = Rd_2(4.5 \cdot 10^{-1} \cdot 2.4) = Rd_2(1.08) = 1$

→$|(1.1 \boxplus 1)| = Rd_2(1.1+1) = Rd_2(2.1) = 2.1$

→$|(2.1 - A_x)| = |2.1 - 2.1025| = 2.5 \cdot^{-3}$

$\curvearrowright 0.1025 > 2.5 \cdot 10^{-3}$

Bei den Runden einer Zahl von 0.45 wird nicht auf 0.5 sondern auf 0.4 gerundet, sodass in diesem Fall die Rundung genutzt werden kann $((x \boxplus 1) \boxdot (x \boxplus 1) - A_x$ geringer zu machen, sondern der Betrag dieser größer ist als $|(((x \boxplus 2) \boxdot x) \boxplus 1) - A_x|$. Des weiteren wird durch multiplizieren von $(((x \boxplus 2) \boxdot x) \boxplus 1)$ und 0.45 , durch die Rundung, eine größere Zahl erzeugt als beim bei der Multiplizieren von $(x \boxplus 1) \cdot (x \boxplus 1)$, sodass der Betrag niedriger wird.

Hausaufgabe 1.4:

Die Berechnung der Werte erfolgt laut unserer Berechnung korrekt und werden angezeigt. Leider sind die Dimension und die Größenverhältnisse nicht angegeben aus Technischen Gründen.