Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Daniel Max

Numerische Mathematik

Sommersemester 2022 Übungsblatt 13

Hausaufgaben (Abgabe bis 12.07.2022, $10^{\underline{00}}$ Uhr)

Hausaufgabe 13.1: *Gauß-Quadratur*
(4 P.) Berechnen Sie Stützstellen und Integrationsgewichte der Gaußschen Quadraturformel $G_{\mathbb{1}}^{(2)} = Q_{\mathbb{1},\underline{x}}$. **Hinweis:** Die Stützstellen sind also die Nullstellen des Legendre-Polynoms $\mathcal{P}_3$.

Hinweis für die nachfolgenden Aufgaben: Sie sollten hier die Stützstellen $-\sqrt{\frac{3}{5}}$, 0, $\sqrt{\frac{3}{5}}$ mit den Gewichten $\gamma_0 = \gamma_2 = \frac{5}{9}$ und $\gamma_1 = \frac{8}{9}$ gefunden haben. Dies dürfen Sie in den weiteren Aufgaben dieser Übungsserie verwenden. Dazu müssen sie noch von $[-1, 1]$ auf andere Integrationsintervalle übertragen werden.

Hausaufgabe 13.2: *Tücken numerischer Integration*
Lösungen per Computerprogramm sind erlaubt, aber das Programm muss dokumentiert und die Rechnung nachvollziehbar dargestellt sein.

a) (1 P.) Substituieren Sie $x := t^2$ in $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$. Welchen Vorteil hat dies für die Anwendung von Quadraturmethoden?

b) (4 P.) Approximieren Sie $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$, indem Sie Romberg-Quadratur, ausgehend von den n-fach summierten Trapezregeln für $n \in \{1, 2, 4, 8\}$, einerseits auf den ursprünglichen Integrand, andererseits auf den durch die Substitution aus a) entstehenden Integrand anwenden.

c) **(1 Bonus-P.)** Approximieren Sie $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$, indem Sie nach der Substitution aus a) die Gaußsche Quadraturformel $G_{\mathbb{1}}^{(2)}$ anwenden.

Hausaufgabe 13.3: *Beziehung zwischen Quadraturformeln*
(4 P.) Sei $a < b$ und $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Weisen Sie nach, dass die Romberg-Quadratur für $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ basierend auf den 1-fach und 3-fach summierten Trapezregeln mit Newtons $\frac{3}{8}$-Regel übereinstimmt.

Bitte wenden

Hausaufgabe 13.4: *Quadratur für uneigentliche Integrale*
Um uneigentliche Integrale numerisch zu approximieren, sucht man nach einer Substitution, die das uneigentliche in ein eigentliches Integral überführt. Auf dieses wendet man dann eine Quadraturmethode an.

(3 P.) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ näherungsweise, indem Sie zuerst $t = \ln(\frac{1}{2}(x+1))$ substituieren und dann die Gaußsche Quadraturformel $G_{\mathbb{1}}^{(2)}$ anwenden.

(1 Bonus-P.) Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{0} t\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ exakt.

Erreichbare Punktzahl: 16