Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Daniel Max

Numerische Mathematik

Sommersemester 2022 Übungsblatt 2

Hausaufgaben (Abgabe: bis 26.04.2022 $10^{\underline{00}}$ Uhr)

Abgabe paarweise — Bitte beide Namen auf der Lösung angeben.

Hausaufgabe 2.1: *Abschätzungen*
(4 P.) Sei $f(x) := \dfrac{3\,x^2 - 2\,x^3 + 1}{3\,x(2-x)}$. Zeigen Sie $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]\colon\ f(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$.
Hinweis: Formen Sie die Ungleichung $f(x) \geq \frac{1}{2}$ bzw. $f(x) \leq 1$ in eine Ungleichung $p(x) \leq 0$ bzw. $q(x) \geq 0$ um, mit Polynomen $p(x), q(x)$, denn Kurvendiskussion für Polynome ist leichter als für rationale Funktionen.

Hausaufgabe 2.2: *Landau-Symbole*
Aus der Komplexitätstheorie kennen Sie Landau-Symbole (etwa: Die Laufzeit des Bubblesort-Algorithmus ist in $\mathcal{O}(n^2)$ für Listen der Länge n). Wir werden damit den asymptotischen Fehler beschreiben.

Definition: Seien $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ein Häufungspunkt von X.

$$f \in \mathcal{O}(g) \text{ für } x \to x_0 :\Leftrightarrow \limsup_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$$

$$f \in o(g) \text{ für } x \to x_0 :\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$$

Wenn also $x_0 \in \mathbb{R}$, dann $f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists C > 0 \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in U_\varepsilon(x_0)\colon\ |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$ und $f \in o(g) \iff \forall C > 0 \exists \varepsilon > 0\colon \forall x \in U_\varepsilon(x_0)\colon\ |f(x)| \leq C \cdot |g(x)|$.

a) Seien $h_1 \in \mathcal{O}(f)$, $h_2 \in \mathcal{O}(g)$, $h_3 \in o(f)$ für $x \to x_0$. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Regeln:

   i) (1 P.) $h_1 + h_2 \in \mathcal{O}(|f| + |g|)$ für $x \to x_0$
   ii) (1 P.) $h_2 \cdot h_3 \in o(f \cdot g)$ für $x \to x_0$

b) (2 P.) Zeigen Sie $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \in \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ für $n \to \infty$. **Hinweis:** Die beiden e-Folgen kamen sicherlich in der Analysis vor. Vgl. Wikipedia.

Bitte wenden

Hausaufgabe 2.3: *Vergleich von Approximationen*
Für $x \in \mathbb{R}$ ist $E(x) := \sum\limits_{k=0}^{20} \frac{x^k}{k!} \approx \mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.
(4 P.) Bestimmen Sie jeweils eine möglichst gute obere Schranke, ohne exakte Werte von e^x zu verwenden.

a) $|E(-5.5) - \mathrm{e}^{-5.5}|$ b) $|(E(5.5))^{-1} - \mathrm{e}^{-5.5}|$ c) $|(E(-0.5))^{11} - \mathrm{e}^{-5.5}|$

Programmieraufgabe 2.4: *Numerisches Differenzieren*
Bekanntlich ist für eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Ableitung an der Stelle x_0 definiert als

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Es gilt aber auch

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2\,h} .$$

Dadurch erhält man zwei Wege, um $f'(x_0)$ zu approximieren, nämlich $D(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2\,h} =: S(h)$ für h von kleinem Betrag.
(4 P.) Schreiben Sie ein Programm zur Berechnung von $D(h)$ und $S(h)$ in double precision. Berechnen Sie damit jeweils $|D(h) - f'(x_0)|$ und $|S(h) - f'(x_0)|$ für $f(x) := x \cdot \sin(x)$, $x_0 := 0.5$ und $h := 0.25^n$ mit $n \in \{1, ..., 20\}$ und erklären Sie die Abhängigkeit von n. **Hinweis:** $f'(x) = x \cdot \cos(x) + \sin(x)$.

Erreichbare Punktzahl: 16