Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Daniel Max

Numerische Mathematik

Sommersemester 2022 — Übungsblatt 10

Hausaufgaben (Abgabe bis 21.06.2022, $10^{\underline{00}}$ Uhr)

Hausaufgabe 10.1: *Fehlerabschätzung*

a) Sei $f \in \mathscr{C}^3([a,b],\mathbb{R})$ und $M_3 := \max_{\tau\in[a,b]} |f'''(\tau)|$.
Sei $h := \frac{b-a}{2}$, $\underline{t} := (a, t+h, b)$ und $p := P(f|\underline{t})$.
(3 P.) Zeigen Sie $\forall \theta \in [a,b]\colon\ |f(\theta) - p(\theta)| \le \frac{\sqrt{3}}{27} h^3 M_3$.

b) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) := \ln(t)$ und $\underline{t} := (10, 11, 12)$.
(1 P.) Schätzen Sie $|f(11.1) - P(f|\underline{t})(11.1)|$ nach oben ab. **Anmerkung:** Natürlich soll bei einer solchen Aufgabenstellung die Fehlerschranke möglichst klein sein, doch der exakte Funktionswert darf bei der Bestimmung der Schranke nicht verwendet werden.

Hausaufgabe 10.2: *Neville-Aitken*

Sei $p(t)$ das Interpolationspolynom für die Wertetabelle

i	0	1	2	3
t_i	0	1	3	4
f_i	4	5	7	-4

.

a) (2 P.) Bestimmen Sie $p(2)$ mithilfe des Neville-Schemas.

b) (2 P.) Geben Sie die vier Lagrange-Polynome zu den Stützstellen $\underline{t} := (0, 1, 3, 4)$ explizit an und drücken Sie p als Linearkombination der Lagrange-Polynome aus.

c) (2 P.) Bestimmen Sie p mit der Methode der dividierten Differenzen als Linearkombination der Newton-Basispolynome.

Bitte wenden

Hausaufgabe 10.3: *Extrapolation*

Es sei $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $f\colon U_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die mit ihrer Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ übereinstimmt, d.h. $\forall h \in \left]-\varepsilon, \varepsilon\right[:\ f(x_0 + h) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$.

Wie in Programmieraufgabe 2.4 sei $S(h) := \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2\,h}$ der ***symmetrische Differenzenquotient***.

a) (1 P.) Zeigen Sie: $S(h)$ ist gleich einer Potenzreihe, in der nur gerade Potenzen von h auftreten.

b) **Programmieraufgabe:** Im Hinblick auf die vorige Teilaufgabe ist es sinnvoll, $S(h)$ durch ein Polynom in der Variable $t := h^2$ zu interpolieren. Seien also $0 < h_0, ..., h_n < \varepsilon$ paarweise verschieden und sei $p(t)$ das Interpolationspolynom zu den Stützpunkten $((h_k^2,\ S(h_k))_{k \in \{0,...,n\}}$. Dann ist $p(0)$ eine sinnvolle Approximation von $\lim\limits_{h \to 0} S(h) = f'(x_0)$.

   (5 P.) Schreiben Sie ein Programm, das zu gegebenen Stützpunkten $p(0)$ mit Hilfe des Neville-Schemas berechnet. Nutzen Sie Ihr Programm zur Approximation von $f'(0.5)$ für $f(x) := x \sin(x)$, wobei $h_k := \frac{1}{2^{k+1}}$ für $k \in \{0, ..., n\}$. Vergleichen Sie die so berechneten Approximationen von $f'(0.5)$ für alle $n \in \{1, ..., 8\}$ mit dem exakten Wert $f'(0.5) = 0.5\cos(0.5) + \sin(0.5)$. Verwenden Sie double precision.

Erreichbare Punktzahl: 16