Numerische Mathematik Hausaufgaben

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

Aufgabe 1

Z.z. Eine Matrixnorm ist eine Vektornorm.
Definition 4.22:
$\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n} : ||A|| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{y \in \mathbb{R}^n, ||y||=1} = ||Ay||$

a)$\forall v \in V : ||v|| = 0 \Leftrightarrow = 0$ Definitheit
Beweis:
$||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ Eindeutig

b)$\forall V v \in V, \alpha \in \mathbb{R}; ||\alpha \cdot v|| = |\alpha| \cdot |v|$ Homogenität
Beweis:
$||sA|| = \max_{||x||=1} ||sAx|| = \max_{||x||=1} |s| ||Ax|| = |s| \max_{||x||=1} ||Ax|| = |s| ||Ax||$

c) $\forall v, w \in V : ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ Dreiecksungleichung
Beweis:
$||A + B|| = \max_{||x||=1} ||(A + B)x|| = \max_{||x||=1} ||Ax + Bx|| \leq \max_{||x||=1} (||Ax|| + ||Bx||) \leq \max_{||x||=1} ||Ax|| + \max_{||x||=1} ||Bx|| = ||A|| +$

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Z.z. $cond(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||$
Aus der Definition 4.25:
$||A|| \cdot ||A^{-1}|| = \left(\max_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \right) \cdot \left(\min_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} \right)^{-1}$
$\curvearrowright ||A||$ ist das Maximum von $\frac{||A||}{||x||}$ für alle $x \neq 0$.Wenn ein A^{-1} existiert so müsste es das Maximum von $\frac{||A^{-1} \cdot x||}{||x||}$ über alle $x \neq 0$. Folgend daraus, wenn $y = A^{-1} \cdot x$ ist, dann $\rightarrow x = Ay$ und $x \neq 0$, $y \neq 0$ sobald nur eines davon diesen Eigenschaft besitzt.
$\curvearrowright$ Das Maximum von $\frac{||A^{-1}x||}{||x||} = \frac{||y||}{||Ay||}$ und der Kehrwert davon ist das Minimum von $\frac{||Ay||}{||y||}$ über jeweils $x \neq 0$ und $y \neq 0$

Aufgabe 4

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$||v_1|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\alpha = -\sqrt{2}$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{2}e_1 = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v^\top v = (1+\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2 = 3 + 2\sqrt{2} + 1 = 2(2+\sqrt{2})$

$\frac{2}{v^\top v} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$

$$vv^\top = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+3 & 0 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_v = \mathbb{1}_3 - \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot vv^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{3+2\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} & 0 & \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_0 := H_v A = A - \frac{1}{2+\sqrt{2}} v(v^\top \cdot A) = A - \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{2+\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 & \frac{\sqrt{2}+2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = R := \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

siehe SiebenPunktfuenf.java

Q lässt sich durch $H_v(\dots)$ berechnen. Die v werte werden in vList gespeichert.