Numerische Mathematik Hausaufgaben

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

Aufgabe 1

Bei der Berechnung der einzelnen q_i's wird am Ende in $\hat{Q}$ lediglich Gram-Schmidt der A-Matrix berechnet (ohne nomierung)

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

$\epsilon > 0$ so dass $1 \boxplus \epsilon \neq 1$ aber $1 \boxplus \epsilon^2 = 1$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \\ -\epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

a)$A^\top \boxdot A$

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \epsilon & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 \boxplus \epsilon^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 \boxplus \epsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \boxplus \epsilon^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Für $j = 1$

  $$q_1 := a_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - Für i von 1 bis j-1 also 1 bis 0 $\curvearrowright R_{1,1} = 1$

- Für j=2

  $$q_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - Für i von 1 bis j-1 also 1 bis 1
    - i=1

    - $R_{1,2} = \frac{q_1^\top q_2}{q_1^\top q_1} = \frac{1}{x^2 \boxplus 1} = 1$
    - $q_2 := q_2 - 1q_1$
      $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon \\ \epsilon \\ 0 \end{pmatrix}$
    - $R_{2,2} = 1$

- Für $j = 3$

  $q_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{pmatrix}$

  - Für i von 1 bis j-1 also 1 bis 2
    - i=1
    - $R_{1,3} = \frac{q_1^\top q_3}{q_1^\top q_1} = \frac{1}{x^2 \boxplus 1} = 1$
    - $q_3 := q_3 - 1q_1$
      $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon \\ 0 \\ \epsilon \end{pmatrix}$
    - i=2
    - $R_{2,3} = \frac{q_2^\top q_3}{q_2^\top q_2} = \frac{\epsilon^2}{2\epsilon^2} = \frac{1}{2}$
    - $q_3 := q_3 - \frac{1}{2}q_2$
      $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\epsilon \\ 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\epsilon}{2} \\ \frac{\epsilon}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-\epsilon}{2} \\ \frac{-\epsilon}{2} \\ \epsilon \end{pmatrix}$
  - $R_{3,3} = 1$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \epsilon & -\epsilon & \frac{-\epsilon}{2} \\ 0 & \epsilon & \frac{-\epsilon}{2} \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

b) Unter der Bedingung $Rang(A) = n$ ist $A^\top A \in K^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Das System der Normalengleichungen und das lineare Ausgleichsproblem somit eindeutig lösbar.

Ist andererseits $Rang(A) < n$, so ist $Kern(A) \neq \{0\}$. Somit sind die Normalengleichungen und auch das lineare Ausgleichsproblem nicht eindeutig lösbar.

Aufgabe 3

siehe NeunPunktDrei.py