Numerische Mathematik Hausaufgaben

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

Hausaufgabe 2.1

$f(x) = \frac{3x^2-2x^3+1}{3x(2-x)}$ Zz. $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$: $f(x) \in [\frac{1}{2}, 1]$

für $f(x) \geq \frac{1}{2} \rightarrow p(x)$
$\frac{3x^2-2x^3+1}{3x(2-x)} \geq \frac{1}{2}$
=$3x^2 - 2x^3 + 1 \geq \frac{1}{2} \cdot (3x(2-x))$
=$-2x^3 + 3x^2 + 1 \geq \frac{1}{2} \cdot (6x - 3x^2)$
=$-2x^3 + 3x^2 + 1 \geq 3x - \frac{3}{2}x^2$
= $-2x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 3x + 1 \geq 0$

für $f(x) \leq 1 \rightarrow q(x)$
$\frac{3x^2-2x^3+1}{3x(2-x)} \leq 1$
= $3x^2 - 2x^3 + 1 \leq 1(3x(2-x))$
=$3x^2 - 2x^3 + 1 \leq 6x - 3x^2$
=$-2x^3 + 6x^2 - 6x + 1 \leq 0$

Für p(x) ist $x \geq \frac{1}{12}(9 + \sqrt[3]{189 - 108\sqrt{3}} + 3\sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}})$
→ ≈ 1.45541
→ $x \geq 1.45541$
Für g(x) ist $x \geq 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
→ ≈ 0.206299
→ $x \geq 0.206299$

Wir betrachten nur den Bereich von $[\frac{1}{2}, 1]$, in diesem ist die Funktion stetig
Durch das Umstellen um die Intervallgrenzen haben wir festgestellt, dass weder p(x), noch q(x) in den Intervall liegen.
$\curvearrowright$ Die Funktion kann für $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ nur die Werte $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] erhalten$

Hausaufgabe 2.2

a) $h_1 \in O(f)$, $h_2 \in O(g)$, $h_3 \in o(f)$ für $x \rightarrow x_0$

i) $h_1 + h_2 \in O(|f| + |g|)$ für $x \rightarrow x_0$
$\limsup\limits_{x \rightarrow x_0} |\frac{(h_1+h_2)(x)}{(f+g)(x)}|$ = $\limsup\limits_{x \rightarrow x_0} |\frac{h_1(x)+h_2(x)}{f(x)+g(x)}|$ =$\limsup\limits_{x \rightarrow x_0} \frac{h_1(x)}{f(x)} + \limsup\limits_{x \rightarrow x_0} \frac{h_2(x)}{g(x)} < \infty$
da beide $< \infty$ sind und somit ist auch $|f| + |g|$ < ∞

ii)$h_2 \cdot h_3 \in o(f \cdot g)$ für $x \rightarrow x_0$
$\limsup\limits_{x \rightarrow x_0} |\frac{(h_2 \cdot h_3)(x)}{(f \cdot g)(x)}| = \limsup\limits_{x \rightarrow x_0} |\frac{h_2(x) \cdot h_3(x)}{f(x) \cdot g(x)}| \leq |\limsup\limits_{x \rightarrow x_0} |\frac{h_2(x)}{f(x)}| \cdot |\limsup\limits_{x \rightarrow x_0} |\frac{h_3(x)}{g(x)}| = 0$
da h_3 = 0 ist und bei der Multiplikation mit 0 alles automatisch null wird, kommt somit auch das Folgende Ergebnis auf 0
Somit muss auch $(f \cdot g) = 0$ sein also somit $o(f \cdot g)$

b) $(1+\frac{1}{n})^n - e \in O(\frac{1}{n})$ für $n \to \infty$

Der Limes Superior $\limsup\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ hat als Grenzwert e, also wird ist die Formel
$\limsup\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n - e \approx 0$
Für $O(\frac{1}{n})$ mit $n \to \infty$ gilt, desto näher das n gegen ∞ läuft desto mehr nähert es sich 0 null an.

Es ist festzuhalten, dass $\limsup\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ ein monoton steigendes Wachstum hat, während $O(\frac{1}{n})$ monoton fallend ist.
Dadurch, dass wir den Betrag von $|\limsup\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n|$ benutzen ist das Wachstum nun $\in O(\frac{1}{n})$

Hausaufgabe 2.3

a) $|E(-5.5) - e^{-5.5}|$
$\forall x < 0: \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k(|x|)^k}{k!} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{(|x|)^k}{k!}$

Aus Leibniz Kriterium (Vorlesungsnotizen) folgt:
$\forall < 0: \sum\limits_{k=21}^{\infty} (-1)^k \frac{(|x|)^k}{k!} = \frac{(|x|)^{21}}{21!}$
→ $|\sum\limits_{k=0}^{20} \frac{-5.5^k}{k!} - \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{-5.5^k}{k!}|$
→ $|-\sum\limits_{k=21}^{\infty} \frac{-5.5^k}{k!}| < |-\frac{-5.5^{21}}{21!}| \approx 6.907 \cdot 10^{-5}$

b) $|E(5.5)^{-1} - e^{-5.5}|$
→ $|\frac{1}{E(5.5)} - \frac{1}{e^{5.5}}|$
→ $|\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{20} \frac{5.5^k}{k!}} - \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{5.5^k}{k!}}|$
→$|\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{20} \frac{5.5^k}{k!}} - (\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{20} \frac{5.5^k}{k!}} - \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{5.5^k}{k!}})|$
→ $|-\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{20} \frac{5.5^k}{k!}}| < |\frac{1}{\frac{5.5^{21}}{21!}}| \approx 14478.63$

c)

Hausaufgabe 2.4

Code siehe NumDiff.java

Durch den Anstieg von $n \in \{1, \dots, 20\}$ wird $h = 0.25^n$ immer kleiner. Durch das kleiner werden von h wird auch der Unterschied zu $f'(x_0)$ kleiner. Also minimiert n den Fehler.