Hausaufgabe 1

1.1 $T_2 f(x;0)$

a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{-\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{1} \cdot (x) + \frac{\frac{2}{(x+1)^3}}{2} \cdot (x^2)$$

$$= 1 - x + x^2$$

$\rightarrow s = \frac{1}{2}$ $\rightarrow \int = \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= (1+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (x) - \frac{1}{8(x+1)^{\frac{3}{2}}} (x^2)$$

$$= \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} x - \frac{1}{8(1)^{\frac{3}{2}}} x^2$$

$\rightarrow s = 1$ $\rightarrow \int = \frac{11}{8}$

1.2 a) $\delta_s, \delta_c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $s(a) - \delta_s \leq \sin(a) \leq s(a) \delta_s$
$c(a) - \delta_c \leq \cos(a) \leq c(a) + \delta_c$

$$s(a) = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \approx 9{,}675344 \cdot 10^{-4}$$

$$\sin(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n-1}}{(2n+1)!} \approx 9{,}6753 \cdot 10^{-4}$$

$$\delta_s = s(a) - \sin(a) = 4{,}4 \cdot 10^{-9}$$

$$c(a) = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)} \approx -9{,}9999955 \cdot 10^{-1}$$

$$\cos(a) = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)} \approx -1$$

$$\delta_c = \cos(a) - c(a) = 4{,}7 \cdot 10^{-7}$$

b) $\xi \in [a,b]$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

$$\rightarrow \frac{s(\delta_s) - s(a)}{4{,}4 \cdot 10^{-9} - 3.140625} = \frac{-0{,}00096753}{-3.1406249956}$$

1.3. $A_x := (x+1)\cdot(x+1) = (x+2)\cdot x+1$

Es gilt: $|((x \boxplus 1) \boxdot (x \boxplus 1)) - A_x| > |(((x \boxplus 2) \boxdot x) \boxplus 1) - A_x|$

Bsp.: $x = 4{,}5 \cdot 10^{-1}$ $(0{,}45)$

$A_x = (0{,}45 + 1)\cdot(0{,}45+1) = 2{,}1025$

I. $|((4{,}5\cdot 10^{-1} \boxplus 1) \boxdot (4{,}5\cdot 10^{-1} \boxplus 1)) - A_x|$

$\to (4{,}5\cdot 10^{-1} \boxplus 1) = Rd_2(4{,}5\cdot 10^{-1} + 1) = Rd_2(1{,}45) = 1{,}4$

$\to ((1{,}4) \boxdot (1{,}4)) = Rd_2(1{,}4 \cdot 1{,}4) = Rd_2(1{,}96) = 2$

$\to |(2) - A_x| = |2 - 2{,}1025| = 0{,}1025$

II. $|(((4{,}5\cdot 10^{-1} \boxplus 2) \boxdot 4{,}5\cdot 10^{-1}) \boxplus 1) - A_x|$

$\to (4{,}5\cdot 10^{-1} \boxplus 2) = Rd_2(4{,}5\cdot 10^{-1} \boxplus 2) = Rd_2(2{,}45) = 2{,}4$

$\to (2{,}4 \boxdot 4{,}5\cdot 10^{-1}) = Rd_2(2{,}4 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-1}) = Rd_2(1{,}08) = 1{,}1$

$\to (1{,}1 \boxplus 1) = Rd_2(1{,}1 + 1) = Rd_2(2{,}1) = 2{,}1$

$\to |2{,}1 - A_x| = |2{,}1 - 2{,}1025| = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$

$\Rightarrow 0{,}1025 > 2{,}5 \cdot 10^{-3}$

Beim Runden einer Zahl von ,45 wird nicht auf ,5 sondern auf ,4 gerundet.
Sodass in diesem Fall diese Rundung genutzt werden kann um $|(x \boxplus 1| \boxdot (x \boxplus 1| - A_x$ geringer zu machen, sodass der Betrag dieser größer ist als die zweite Seite. Demnach wird beim multiplizieren von $|x \boxplus 2| \boxdot x$ beispielsweise durch die ,45 rundung eine größere Zahl erzeugt als beim multiplizieren von $|x \boxplus 1| \cdot |x \boxplus 1|$, sodass der Betrag niedriger wird.

b) $\boxplus$)