Numerische Mathematik Hausaufgaben

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

Hausaufgabe 3.1

a) $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$

$K^{rel}(f,x) = max_{i,j} \cdot \frac{|x|}{|\sqrt{x}|} \cdot \left|\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial x}(x)\right|$
→ $max_{i,j} \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
→ $\frac{1}{2}$
Damit beträgt der relative Fehler 50%

b)$f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ für $x_1 > 0$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \cdot x_1^{x_{2-1}} \to \frac{x_1}{x_1^{x_2}} \cdot x_1 \cdot x_1^{x_2-1} = \frac{1}{x_1^{x_2-1}} \cdot x_1^{x_2-1} \cdot = x_2$ und
$f = x_1^{x_2} = e^{x_2 ln(x_2)} \to \frac{\partial f}{\partial x_2} = f \cdot ln(x_1) \to \frac{x_2}{f} \cdot f \cdot ln(x_1) = x_2 \cdot ln(x_1)$, also Konditionszahl
$max\{|x_2|, |x_2| \cdot |ln(x_1)|\}$
→ $x_1 \in [e, \frac{1}{e}]$
$K^{rel}(f,x) = \begin{cases} |x_2| & falls \quad x_1 \in [\frac{1}{e}, e] \\ |x_2 \cdot ln(x_1)| & sonst \end{cases}$

c)$f : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := ln(x - \sqrt{x^2 - 1}), x = 30$

$K^{rel}(f,x) = max_{i,j} \cdot \frac{|x|}{|ln(x-\sqrt{x^2-1})|} \cdot \left|\frac{\partial ln(x-\sqrt{x^2-1})}{\partial x_j(x)}\right|$
→ $max_{i,j} \cdot \frac{|x|}{|ln(x-\sqrt{x^2-1})|} \cdot \left|-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right|$
→$\frac{|30|}{|ln(30-\sqrt{30^2-1})|} \cdot \left|-\frac{1}{\sqrt{30^2-1}}\right|$
→ 0.24

Damit beträgt der relative Fehler 24%

Hausaufgabe 3.2

a) Wir betrachten die Abbildung $(p, q) \mapsto (y_1, y_2)$

Aus $\frac{\partial y_1}{\partial p} + \frac{\partial y_2}{\partial p} = 1$ und $\frac{\partial y_1}{\partial p} \cdot y_2 + y_1 \cdot \frac{\partial y_2}{\partial p} = 0$ (vom y_1-Fachen der ersten Gleichung wird die zweite abgezogen)
→ $\frac{\partial y_1}{\partial p} \cdot (y_1 - y_2) = y_1$ und dann $\frac{\partial y_1}{\partial p} = \frac{y_1}{y_1 - y_2}$
$\curvearrowright \frac{\partial y_2}{\partial p} = \frac{y_2}{y_2 - y_1}$.

Aus $\frac{\partial y_1}{\partial q} + \frac{\partial y_2}{\partial q} = 0$ und $\frac{\partial y_1}{\partial q} \cdot y_2 + y_1 \cdot \frac{y_2}{q} = 1 \to \frac{\partial y_1}{\partial q} \cdot (y_2 - y_1) = 1$ (es wird das y_1-Fache der ersten Gleichung von der zweiten abgezogen)
$\curvearrowright \frac{\partial y_1}{\partial q} = \frac{1}{y_2 - y_1}$, analog $\frac{\partial y_2}{\partial q} = \frac{1}{y_1 - y_2}$.

Daher ist

$$\frac{|p|}{|y_1|}\left|\frac{\partial y_1}{\partial p}\right| = \frac{|y_1+y_2|}{|y_1|}\frac{|y_1|}{|y_1-y_2|} = \frac{|y_1+y_2|}{|y_1-y_2|} = \frac{|1+\frac{y_2}{y_1}|}{|1-\frac{y_2}{y_1}|}$$

$$\frac{|q|}{|y_1|}\frac{\partial y_1}{\partial q} = \frac{|y_1 \cdot y_2|}{|y_1|}\frac{1}{|y_2-y_1|} = \frac{|y_2|}{|y_2-y_1|} = \frac{1}{|1-\frac{y_1}{y_2}|}$$

b)

$p := 4$

$q := 3.999$

$$\left|\frac{|4|}{\sqrt{4^2-4 \cdot 3.999}}\right| = \left|\frac{4}{\sqrt{16-15.996}}\right| = \left|\frac{4}{\sqrt{0.004}}\right| \approx 63.246$$

$$\frac{|q|}{|\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}}-q|} \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{\frac{p^2}{4} \cdot q}}\right| = \frac{3.999}{|2-\sqrt{4-3.999}|} \cdot \left|\frac{1}{2 \cdot \sqrt{4-3.999}}\right| = 32.1228$$

$K^{rel}(f,(4,3.999)) \approx 63.246$

Hausaufgabe 3.3

$$f(x)_{cos(x)+\epsilon} = \frac{1-cos(x)+\epsilon}{x^2} = \frac{1-cos(x)}{x^2} + \frac{\epsilon}{x^2} = f(x) + \frac{\epsilon}{x^2} = \epsilon_f$$

Für x_0:

$|\epsilon_f| > |10^4 \cdot |\epsilon| \leftrightarrow |\frac{\epsilon}{x^2}| > 10^4 \cdot |\epsilon|$

x_0 bei $\frac{\epsilon}{x^2} = 10^4 \cdot |\epsilon|$

$$|\frac{\epsilon}{x^2}| = 10^4 \cdot |\epsilon| \to |\frac{1}{x^2}| = 10^4 \curvearrowright x_0 = 0.01$$

$0 < x < 0.01$

Hausaufgabe 3.4

Differenzierbarkeit (bzw. Satz von Taylor)

$\Rightarrow f(\overline{x}) = f(x) + J_f(x) \cdot (\overline{x} - x) + o(||\overline{x} - x||)$ für $\overline{x} \to x$.

Daher $L^{abs}_{(f,x)}(\delta) = ||J_f(x)|| + o(1)$ für $\delta \to 0$. Daraus folgen beide Aussagen