Numerische Mathematik Hausaufgaben

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

Aufgabe 1

Es ist zu zeigen, dass $\forall j \in \mathbb{Z} : b_j \in S^3_{\underline{t}}$.

Hierzu soll vorgegangen werden, wie in der Übung. Zunächst leiten wir die einzelnen Funktionen in den Cases ab und überprüfen die kritischen Stellen.

$$g_j(t) := \frac{1}{6h^3} \begin{cases} 0, & t < t_j \\ (t-t_j)^3 & t_j \leq t < t_j j+1 \\ h^3 + 3h^2(t-t_{j+1}) + 3h(t-t_{j+1})^2 - 3(t-t_{j+1})^3, & t_{j+1} \leq t < t_{j+2} \\ h^3 + 3h^2(t_{j+3}-t) + 3h(t_{j+3}-t)^2 - 3(t_{j+3}-t)^3, & t_{j+2} \leq t < t_{j+3} \\ (t_{j+4}-t)^3, & t_{j+3} \leq t < t_{j+4} \\ 0, & t \geq t_{j+4} \end{cases}$$

Zudem, versteht sich, die erste Ableitung:

$$g_j'(t) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} 0, & t < t_j \\ 3(t-t_j)^2, & t_j \leq t < t_{j+1} \\ 3h^2 + 6h(t-t_{j+1}) - 9(t-t_{j+1})^2, & t_{j+1} \leq t < t_{j+2} \\ 3h^2 + 6h(t_{j+3}-t) - 9(t_{j+3}-t)^2, & t_{j+2} \leq t < t_{j+3} \\ 3(t_{j+4}-t)^2, & t_{j+3} \leq t < t_{j+4} \\ 0, & t \geq t_{j+4} \end{cases}$$

Und, möglicherweise so natürlich wie der Spline selber, wenn er denn natürlich ist, auch die zweite:

$$g_j''(t) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} 0, & t < t_j \\ 6(t-t_j) & t_j \leq t < t_{j+1} \\ 6h - 18(t-t_{j+1}) & t_{j+1} \leq t < t_{j+2} \\ 6h - 18(t_{j+3}-t) & t_{j+2} \leq t < t_{j+3} \\ 6(t_{j+4}-t) & t_{j+3} \leq t < t_{j+4} \\ 0 & t \geq t_{j+4} \end{cases}$$

Auf denn überprüfen wir die kritischen Stellen sowohl für die erste als auch für die zweite Ableitung, beginnend mit der zweiten.

Da $t_k = a + kh$ und $t_0 = a$ sowie $t_n = b$ als auch $h = \frac{b-a}{2}$ für alle t der Fall ist, und die Polynome einen maximalen Grad von 3 haben, sind die Ableitungen an den kritischen Übergangsstellen stetig und die zu beweisende Aussage gilt. □'''****

Aufgabe 3

siehe ElfPunktDrei.py