

Hausaufgaben Numerische Mathematik

von Rico Kölling

Hausaufgabe 1.1:

$$\begin{aligned} \text{A) } f(x) &= \frac{1}{1+x} \\ &\rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{-\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{1} \cdot (x) + \frac{\frac{2}{(x+1)^3}}{2} \cdot (x^2) \\ &= 1 - x + x^2 \\ &\rightarrow s = \frac{1}{2} \\ &\rightarrow S = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{B) } f(x) &= \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \\ &\rightarrow (1+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x+1}} \cdot (x) - \frac{1}{8 \cdot (x+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x^2) \\ &= \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot (x) - \frac{1}{8 \cdot (1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x^2) \\ &\rightarrow s = 1 \\ &\rightarrow S = \frac{11}{8} \end{aligned}$$

Hausaufgabe 1.2:

$$\text{A) } \delta_s, \delta_c \in \mathbb{R}_{<0} \text{ mit } s(a) - \delta_s \leq \sin(a) \leq s(a) - \delta_s$$

$$\text{und } c(a) - \delta_c \leq \cos(a) \leq c(a) + \delta_c$$

$$a = 3.140625$$

$$s(a) = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \cdot a^{2m+1}}{(2n+1)!} \approx 9.675344 \cdot 10^{-4}$$

$$\sin(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n-1}}{(2n+1)!} \approx 9.6753 \cdot 10^{-4}$$

$$\rightarrow \delta_s = |\sin(a) - s(a)| = |9.6753 \cdot 10^{-4} - 9.675344 \cdot 10^{-4}| = 4.4 \cdot 10^{-9}$$

$$c(a) = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n}}{(2n)!} \approx -9.9999953 \cdot 10^{-1}$$

$$\cos(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot a^{2n}}{(2n)!} \approx -1$$

$$\delta_c = |\cos(a) - c(a)| = |(-1) - (-9.9999953 \cdot 10^{-1})| = 4.7 \cdot 10^{-7}$$

B)

Hausaufgabe 1.3:

$$A_x := (x+1) \cdot (x+1) = (x+2) \cdot x + 1$$

$$\text{Annahme: für kleinere } x \text{ gilt: } |((x \boxplus 1) \boxminus (x \boxplus 1)) - A_x| > |(((x \boxplus 2) \boxminus x) \boxplus 1) - A_x|$$

$$\text{Bsp.: } x = 4.5 \cdot 10^{-1} - 1$$

$$A_x = (0.45 + 1) \cdot (0.45 + 1) = (((0.45 + 2) \cdot x) + 1) = 2.1025$$

$$\text{I. } |((4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 1) \boxminus (4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 1)) - A_x|$$

$$\rightarrow |(4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 1)| = Rd_2(4.5 \cdot 10^{-1} + 1) = Rd_2(1.45) = 1.4$$

$$\rightarrow |(1.4 \boxminus 1.4)| = Rd_2(1.4 \cdot 1.4) = Rd_2(1.96) = 2$$

$$\rightarrow |(2) - A_x| = |2 - 2.1025| = 0.1025$$

$$\begin{aligned} \text{II. } &|((4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 2) \boxminus 4.5 \cdot 10^{-1}) \boxplus 1) - A_x| \\ \rightarrow &|(4.5 \cdot 10^{-1} \boxplus 2)| = Rd_2(4.5 \cdot 10^{-1} + 2) = Rd_2(2.45) = 2.4 \\ \rightarrow &|2.4 \boxminus 4.5 \cdot 10^{-1}| = Rd_2(4.5 \cdot 10^{-1} \cdot 2.4) = Rd_2(1.08) = 1 \\ \rightarrow &|(1.1 \boxplus 1)| = Rd_2(1.1 + 1) = Rd_2(2.1) = 2.1 \\ \rightarrow &|(2.1 - A_x)| = |2.1 - 2.1025| = 2.5 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\curvearrowright 0.1025 > 2.5 \cdot 10^{-3}$$