Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Daniel Max

Numerische Mathematik

Sommersemester 2022 Übungsblatt 5

Hausaufgaben (paarweise Abgabe bis 17.05.2022 $10^{\underline{00}}$ Uhr)

Hausaufgabe 5.1: *Wertebereich des Newton-Verfahrens*
(2 P.) Beweisen Sie Lemma 3.15. **Hinweise:** Kurvendiskussion für $N_f(x)$. Drücken Sie $N_f'(x)$ durch $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ aus.

Hausaufgabe 5.2: *Hohe Konvergenzordnungen*
(4 P.) Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$ mit $k \in \mathbb{N}^*$, $m_1(f) > 0$ und $x^* \in D$ mit $f(x^*) = 0$. Ferner sei $\phi\colon D \to D$ stetig differenzierbar und $T_{k-1}(\phi(x);\, x) \in \mathcal{O}(|\phi(x) - x|^k)$ für $x \to x^*$. Zeigen Sie, dass ϕ lokale Konvergenzordnung mindestens k in x^* hat. **Hinweise:** Wie wächst $\phi(x) - x^*$ verglichen mit $f(\phi(x))$? Wie wächst $\phi(x) - x$ verglichen mit $x - x^*$?

Hausaufgabe 5.3: *Fehlerabschätzung des Newton-Verfahrens*

a) (1 P.) Sei $f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})$, $a < x^* < b$ mit $f(x^*) = 0$ und $m_1(f) > 0$. Ferner sei $\forall x \in [a, b]\colon\ N_f(x) \in [a, b]$ und $C := \frac{M_2(f)}{2m_1(f)}$. Zeigen Sie: Wenn $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ die durch N_f gegebene Fixpunktiteration zum Startwert $x_0 \in [a, b]$ ist, dann gilt $\forall \nu \in \mathbb{N}\colon\ |x_\nu - x^*| \leq \frac{1}{C} \cdot (C \cdot (b - a))^{2^\nu}$.

b) Sei nun $f\colon [0.5, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x - \mathrm{e}^{-x^2}$. Sie dürfen verwenden, dass f eine eindeutige Nullstelle $x^* \in [0.5, 1]$ hat und dass $\forall x \in [0.5, 1]\colon\ N_f(x) \in [0.5, 1]$.

   (4 P.) Finden Sie mit der Fehlerabschätzung aus der vorigen Teilaufgabe ein $\nu \in \mathbb{N}$, so dass für jeden Startwert $x_0 \in [0.5, 1]$ gilt $|x_\nu - x^*| < 10^{-5}$.

Programmieraufgabe 5.4: *Implizite Funktionen*
Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x, y, z) := \begin{pmatrix} x^2 + 10\,yz \\ 20\,y^2 z + 3\,xy - 5 \end{pmatrix}$.
(5 P.) Schreiben Sie ein Programm, dass für jedes $x \in [-3, -0.5]$ mit dem Newton-Verfahren jeweils $y(x), z(x)$ so berechnet, dass $|F_1(x, y(x), z(x))| < 10^{-8}$ und $|F_2(x, y(x), z(x))| < 10^{-8}$. Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens explizit an. Stellen Sie $\{(y(x), z(x)) \mid x \in [-3, -0.5]\} \subset \mathbb{R}^2$ graphisch dar.
Zur Klarstellung: Für jedes feste x ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(y, z) := F(x, y, z)$. Die Rede ist vom Newton-Verfahren für f, also $N_f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Erreichbare Punktzahl: 16