Numerische Mathematik Hausaufgaben

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

Aufgabe 1

a)
Singulärwertzerlegung von A

$A = U \cdot D \cdot V^\top$
U entspricht der unitären Matrix
D entspricht der Diagonalmatrix

$V^\top$ entspricht der transponierten unitären Matrix.
$||A||_f^2 = Spur(A^\top A) = Spur((VD)^\top U^\top (UDV^\top))$
$Spur(VD^\top DV^\top) = Spur(D^\top D) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$ n=Rang(A)

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$
$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

b) $A = Q \cdot R$

$cond_2(A) = cond_2(Q \cdot R)$

$cond_2(Q \cdot R) = cond_2(R)$

Da $||Q \cdot R||_2 = sup\frac{||QR_x||_2}{||x||_2} = sup\frac{||R_x||_2}{||x||_2} = ||R_x||_2$

$\Rightarrow cond_2(A) = cond_2(R)$

Aufgabe 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jacobiverfahren

$x_{k+1} := -D^1(L+R)x_k + D^{-1}b$

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$Q := D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3$$

$$x_1 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\curvearrowright \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauß-Seidel Verfahren

Die matrix ist nicht symmetrisch, somit konvergiert die Matrix auch nicht damit.
Dadurch, dass diese aussage nicht unbedingt zutrifft hat recherche Ergeben, dass wenn der Spektralradius <1 ist die Matrix konvergiert.

Der Spektralradius ist die der Betrag des Betragsmäßig größten Eigenwertes von A also
$p(A) := \max_i |\lambda_i(A)| \rightarrow p(I - B^{-1}A)$

Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$p(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix})$$

Dadurch, dass dies noch kein Ausschluss Kriterium ist müssen wir $G \cdot G^\top$ rechnen um genau zu sagen , dass

$p(\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}) = 12 > 1 \curvearrowright$ das Gauß-Seidel-Verfahren nicht konvergiert .

Aufgabe 3

Es handelt sich um das Tschebyschow-Polynom
Durch die allgemein gültige Beschreibung mit $T_0 = 1$ und $T_1 = x$, werde ich diese für den Beweis auch verwenden.

a)$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) &= cos((n+1)arccos(x)) + cos((n-1)arccos(x)) \\ &= 2cos(narccos(x))cos(arccos(x)) \\ &= 2T_n(x)x \end{aligned}$$

b)
Für $T_1 = cos(1arrcos(x)) = cos(arccos(x)) = x$
somit gilt für $T_0 = cos(0arrcos(x)) = cos(0)) = 1$

$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x)$
$\rightarrow T_2(x) = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x)$
$\rightarrow T_3(x) = 2x \cdot (2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$

Induktionsanfang:
T_1 ist vom Grad 1 da x^1 .
T_0 ist vom Grad 0 da x^0.

Induktionsvorrausetzung:
$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

Induktionsbehauptung: T_{n+1} ist vom Grad $n+1$
R_1 bezeichnet den Rest und a,b den Vorhang
$T_{n+1} = 2x(a \cdot x^n + R_1) - (b - x^{n-1} + R_2)$
$T_{n+1} = 2x \cdot ax^n + 2 \cdot x \cdot R_1 - bx^{n-1} - R_2$
$T_{n+1} = 2ax^{n+1} + 2x \cdot R_1 - bx^{n-1} - R_2 \square$

Aufgabe 4

siehe AchtPunktVier.java