# Numerische Mathematik Hausaufgaben

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

## Hausaufgabe 5.1

$N'_f(x) = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)' = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$
$m_2 > 0 \Rightarrow f''(x) \neq$ auf $[a, b]$
also $N'_f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*$, und nur dort kann $N_f$ ein lokales Extremum haben.
$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ monoton $\Rightarrow$ höchstens eine Nullstelle
$f$ hat genau eine Nullstelle $x^* \in [a, b]$
$N_f$ ist monoton auf $[a, x^*]$ und $[x^*, b]$

## Hausaufgabe 5.2

$f \in \mathscr{C}^k(D, \mathbb{R})$ $\mathscr{C}$: menge der Stetigen Funktionen von $D \to \mathbb{R}$
$k \in \mathbb{R}$
$x^*$= Fixpunkt

Wir wissen, dass $\phi$ eine lokale Konvergenzordnung von mindestens p in $x^*$
$\Leftrightarrow \phi(x) - x^* \in \mathcal{O}(||x - x^*||^p)$ für $x \to x^*$ hat.

Es ist zu sagen, für den Wachstum von $\phi(x) - x^*$ im Vergleich von $f(\phi(x))$, dass diese genau gegensätzlich wachsen. Für $x \to x^*$ wird $\phi(x) - x^*$ immer größer, weil $\phi(x^*) = x^*$ ist, somit ist es monoton wachsend. Währenddessen wird $f(\phi(x))$ immer kleiner da, $f(x^*) = 0$ ist. Das umgekehrte Wachstum bedeutet aber auch das $\phi(x) - x^* \in \Theta(f(\phi(x)))$. Dasselbe stimmt mit $\phi(x) - x$ und $x - x^*$ überein. Während $\phi(x)$ zu $\phi(x^*)$ wird und $x \to x^*$, also $\phi(x^*) - x^* = 0$ wird. Ist es so, dass $x^* - x^*$ auch zu Null wird, somit $\phi(x) - x \in \Theta(x - x^*)$.

Für das Taylorpolynom von Grad $k - 1$ von $(\phi(x); x)$ haben wir sozusagen dann das $T_{k-1}(\phi(x^*); x^*)$ . Wir wissen aus der vorherigen Feststellung, dass für $x \to x^*$ in diesen Fällen das Wachstum $\theta$ ist. In diesem Fall wird aber vom Taylorpolynom von Grad $k - 1$ ausgegangen somit ist es $\mathcal{O}$ und die lokale Konvergenz hat mindestens Ordnung von k. Wie in der Newtondefinition erwähnt, hat $\phi$ eine lokale Konvergenzordnung von mindestens p in $x^*$
$\Leftrightarrow \phi(x) - x^* \in \mathcal{O}(||x - x^*||^p)$ für $x \to x^*$ hat. Somit können wir analog sagen, dass die Konvergenzordnung k in $x^*$ ist.

# Hausaufgabe 5.3

b)
$f(n) = x - e^{-x^2}$
$f'(x) = 1 + e^{-x^2} \cdot 2x$
$f''(x) = 2e^{-x^2} - e^{-x^2} \cdot 4x^2 = 2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

$x^* \in [a, b]\ a = 0.6, b = 1$
$f'(a) = 1 + e^{-\frac{1}{4}} \approx 1.7788$
$f''(a) = 2e^{-\frac{1}{4}} \cdot (\frac{1}{2}) \approx 0.7788$

$f'(b) = 1 + 2e^{-1} \approx 1.735$
$f''(b) = 2e^{-1} \cdot (-1) \approx 0.735476$

$f(x)$ hat den Intervall $[a, b]$ streng monoton steigend, das x immer positiv ist und $-\frac{1}{e^{x^2}}$ in 0 eine Extremstelle hat und keine Nullstellen.

$\Rightarrow m_1(f) = min\{f'(x)\} = f'(b) \approx 1.73576$
$\Rightarrow M_2(f) = max\{f''(x)\} = f''(a) \approx 0.7788$

$C = \frac{M_2(f)}{2m_1(f)} \approx 0.22434\ |x_v - x^*| = \frac{1}{c}\dot{(}C\dot{(}b - a))^{2v}$
$|x_v - x^*| < 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{1}{c} \cdot (\frac{c}{2})^{2v} < 10^{-5} \Leftrightarrow \frac{2m_1(f)}{M_2(f)} \cdot \left(\frac{M_2(f)}{4m_1(f)}\right)^{2v} < 10^{-5}$
Durch einsetzen ergibt sich für $v = 2$ :
$\frac{2m_1(f)}{M_2(f)} \cdot \left(\frac{M_2(f)}{4m_1(f)}\right)^{2 \cdot 2} = 7.0567 \cdot 10^{-4} > 10^{-5}$
bei $v = 3$ :
$\frac{2m_1(f)}{M_2(f)} \cdot \left(\frac{M_2(f)}{4m_1(f)}\right)^{2 \cdot 3} = 8.8787 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$
Für $v \geq 3$ gilt $|x_v - x^*| < 10^{-5}$

# Hausaufgabe 5.4

siehe main.cpp

für die Daten siehe output.txt