Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Daniel Max

Numerische Mathematik

Sommersemester 2022 Übungsblatt 12

Hausaufgaben (Abgabe bis 05.07.2022, $10^{\underline{00}}$ Uhr)

Hausaufgabe 12.1: *Newton-Cotes-Formeln*

(3 P.) Approximieren Sie $\int\limits_{1.1}^{1.5} e^x \, \mathrm{d}x$ jeweils mit der Simpson- und der Boole-Regel und berechnen Sie jeweils obere Schranken für den Betrag des Quadraturfehlers, natürlich ohne den exakten Wert des Integrals zu verwenden.

Hausaufgabe 12.2: *Quadraturfehler der Trapezregel*

(3 P.) Weisen Sie die Formel für den Quadraturfehler der Trapezregel nach, also $\forall f \in \mathscr{C}^2([a,b],\mathbb{R})\colon\ \exists \xi \in [a,b]\colon\ E(I_{a,b}^{(1)}, f) = \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$.
Hinweis: Analog zum Beweis der Fehlerabschätzung für die Simpson-Regel zu Lemma 6.7, aber viel leichter.

Hausaufgabe 12.3: *Berechnung von Integrationsgewichten*

Sei $\omega\colon\ [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\omega(t) := 1 - t^2$. Wir stören uns hier nicht daran, dass $\omega(-1) = \omega(1) = 0$ und betrachten ω als Gewichtsfunktion, denn ω ist stetig und abgesehen von den zwei Ausnahmepunkten ist ω auf $[-1,1]$ positiv.
(4 P.) Sei $\underline{t} := (-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$. Berechnen Sie die Integrationsgewichte von $Q_{\omega,\underline{t}}$.
Hinweis: Die relevante Stelle im Skript ist Beobachtung 6.5. Aber: Wir wissen, dass der Exaktheitsgrad von Q mindestens 3 ist; die Bedingung für Exaktheitsgrad mindestens 3 führt auf Bestimmungsgleichungen für die Integrationsgewichte, und wenn sie eine eindeutige Lösung haben, sind durch diese Lösung die gesuchten Integrationsgewichte gegeben.

Bitte wenden

Programmieraufgabe 12.4: *Spline-Quadratur*
Sei $\underline{t} := (t_0, ..., t_6)$ mit $t_i := i - 3$. Für $i \in \{0, ..., 6\}$ sei s_i der natürliche kubische Spline mit $\forall j \in \{0, ..., 6\}\colon\ s_i(t_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$. Dann ist $s := \sum\limits_{i=0}^{6} f(t_i) s_i$ der interpolierende natürliche kubische Spline für $f\colon\ [-3, 3] \to \mathbb{R}$ auf $\underline{t}$.
Für alle $i \in \{0, 6\}$ sei $\gamma_i := \int\limits_{-3}^{3} s_i(t)\,\mathrm{d}t$. Dann ist durch $Q(f) := \int\limits_{-3}^{3} s(t)\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{i=0}^{6} f(t_i)\gamma_i$ eine interpolatorische Quadraturformel gegeben.

a) (3 P.) Schreiben Sie ein Programm, dass $\gamma_0, ..., \gamma_6$ berechnet. **Hinweis:** Modifizieren Sie Ihre für das vorige Übungsblatt geschriebenen Programme. Für die Integration der polynomialen Teilstücke der Splines dürfen Sie Bibliotheksfunktionen verwenden.

b) (3 P.) Sei nun $f\colon\ [-3, 3] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) := \frac{1}{1+t^2}$. Berechnen Sie $Q(f)$ sowie $I^{(6)}_{-3,3}(f)$ (Weddle-Regel) und vergleichen Sie mit dem exakten Wert $\int\limits_{-3}^{3} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \arctan(t)\Big|_{-3}^{3}$.

Erreichbare Punktzahl: 16