Numerische Mathematik Hausaufgaben

von Rico Kölling 192316 und Svaran Singh Chandla 193922

Aufgabe 1

$$A = \begin{pmatrix} 7.29 & 8.1 & 9 \\ 0.9 & 1 & 1 \\ 0.6655 & 0.605 & 0.55 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 7.29 & 8.1 & 9 \\ 0.9 & 1 & 1 \\ 0.6655 & 0.605 & 0.55 \end{pmatrix} \mathrm{II} - (0.1234) \cdot \mathrm{I} \to \mathrm{II} \begin{pmatrix} 7.29 & 8.1 & 9 \\ 0 & 0 & -0.1111 \\ 0.6655 & 0.605 & 0.55 \end{pmatrix} \mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}$$

$$\to \begin{pmatrix} 7.29 & 8.1 & 9 \\ 0.6655 & 0.605 & 0.55 \\ 0 & 0 & -0.1111 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 7.29 & 8.1 & 9 \\ 0.6655 & 0.605 & 0.55 \\ 0 & 0 & -0.1111 \end{pmatrix} \mathrm{II} - (0.09128) \cdot \mathrm{I} \to \begin{pmatrix} 7.29 & 8.1 & 9 \\ 0 & -0.1344 & -0.2716 \\ 0 & 0 & -0.1111 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.9128 & 1 & 0 \\ 0.1234 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 7.29 & 8.1 & 9 \\ 0 & -0.1344 & -0.2716 \\ 0 & 0 & -0.1111 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$\begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & l_{3,1} \\ 0 & l_{2,2} & l_{3,2} \\ 0 & 0 & l_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} l_{1,1}^2 & l_{1,1} \cdot l_{2,1} & l_{1,1} \cdot l_{3,1} \\ l_{1,1} \cdot l_{2,1} & l_{2,1}^2 + l_{2,2}^2 & l_{2,1} \cdot l_{3,1} + l_{2,2} \cdot l_{3,2} \\ l_{1,1} \cdot l_{3,1} & l_{2,1} \cdot l_{3,1} + l_{2,2} \cdot l_{3,2} & l_{3,1}^2 + l_{3,2}^2 + l_{3,3}^2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 25 & -6 & -1 \\ -6 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinanten:

- 25
- $25 \cdot 4 - (-6 \cdot -6) = 64$

- $25 \cdot 4 \cdot 1 + (-6) \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-6) \cdot 2 - (-1) \cdot 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 25 - 1 \cdot (-6) \cdot -6 = -16$

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1} - \sum_{k=1}^{0} L_{i,k}^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$l_{2,1} = \frac{1}{l_{1,1}} \left(a_{1,2} - \sum_{k=1}^{0} l_{i,k} \cdot l_{j,k} \right) = \frac{1}{25} \cdot -6 = -1.2$$
$$l_{3,1} = \frac{1}{l_{1,1}} \left(a_{1,3} - \sum_{k=1}^{0} l_{i,k} \cdot l_{j,k} \right) = \frac{1}{5} \cdot -1 = -0.2$$
$$l_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - \sum_{k=1}^{1} l_{i,k}^2} = \sqrt{4 - (-1.2)^2} = 1.6$$
$$l_{3,2} = \frac{1}{l_{2,2}} \cdot \left(a_{3,2} - \sum_{k=1}^{1} l_{3,k} \cdot l_{2,k} \right) = \frac{1}{1.6} \cdot (2 - (-0.2 \cdot -1.2)) = 1.1$$
$$l_{3,3} = \sqrt{a_{3,3} - \sum_{k=1}^{2} l_{i,k}^2} = \sqrt{1 - (-0.2^2 + 1.1^2)} = \sqrt{-0.17}$$

↷ die symmetrische Matrix ist nicht positiv definit, weil eine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen wird.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 5 \\ -4 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Determinanten:

- 4
- $4 \cdot 2 - (-2 \cdot -2) = 4$
- $4 \cdot 2 \cdot 14 + (-2) \cdot 5 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-2) \cdot 5 - (-4) \cdot 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 5 \cdot 4 - 14 \cdot (-2) \cdot (-2) = 4$

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1} - \sum_{k=1}^{0} L_{i,k}^2} = \sqrt{4} = 2$$
$$l_{2,1} = \frac{1}{l_{1,1}} \left(a_{1,2} - \sum_{k=1}^{0} l_{i,k} \cdot l_{j,k} \right) = \frac{1}{2} \cdot -2 = -1$$
$$l_{3,1} = \frac{1}{l_{1,1}} \left(a_{1,3} - \sum_{k=1}^{0} l_{i,k} \cdot l_{j,k} \right) = \frac{1}{2} \cdot -4 = -2$$
$$l_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - \sum_{k=1}^{1} l_{i,k}^2} = \sqrt{2 - (-0.5)^2} = 1$$
$$l_{3,2} = \frac{1}{l_{2,2}} \cdot \left(a_{3,2} - \sum_{k=1}^{1} l_{3,k} \cdot l_{2,k} \right) = \frac{1}{1} \cdot (5 - (-2 \cdot -1)) = 3$$
$$l_{3,3} = \sqrt{a_{3,3} - \sum_{k=1}^{2} l_{i,k}^2} = \sqrt{14 - (-2^2 \cdot 3^2)} = \sqrt{1} = 1$$

↷ die symmetrische Matrix ist positiv definit, weil keine Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen wird

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 5 \\ -4 & 5 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$C = \begin{pmatrix} 0.1341 & -0.2665 \\ -0.2665 & 1.623 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ und $b = \begin{pmatrix} -0.9322 \\ -0.9352 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

a) $C \cdot x \overset{!}{=} b$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0.1341 & -0.2665 \\ -0.2665 & 1.623 \end{pmatrix} \mathrm{II} \Leftrightarrow \mathrm{I} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.2665 & 1.623 \\ 0.1341 & -0.2665 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} -0.2665 & 1.623 \\ 0 & 0.5502 \end{pmatrix} \mathrm{II} - (-0.5032) \cdot \mathrm{I}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.5032 & 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$Ly = b$ und $R\tilde{x} = y$

$y = \begin{pmatrix} -0.9322 \\ -0.9352 - (-0.5032 \cdot (-0.9322)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.9322 \\ -1.404 \end{pmatrix}$

$R\tilde{x} = y$

$\begin{pmatrix} 0.1341 & 1.623 \\ 0 & 0.5502 \end{pmatrix} \cdot \tilde{x} = \begin{pmatrix} -0.9322 \\ -1.404 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6.090 & -3.498 \\ 0 & 1 & -2.552 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12.04 \\ 0 & 1 & -2.552 \end{array}\right)$

$\tilde{x} = \begin{pmatrix} 12.04 \\ -2.552 \end{pmatrix}$

$C \cdot h = (b - C\tilde{x})$

$C \cdot h = \begin{pmatrix} -0.9322 \\ -0.9352 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.1341 & -0.2665 \\ -0.2665 & 1.623 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12.04 \\ -2.552 \end{pmatrix}$ NR: $p^{-1} = p$

$C \cdot h = b - \begin{pmatrix} 2.294672 \\ -7.350556 \end{pmatrix}$

$C \cdot h = \begin{pmatrix} -3.226872 \\ 6.415356 \end{pmatrix}$

$h = \begin{pmatrix} -24.058597 \\ 2.3041698 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$

$\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} \cdot h$

$\tilde{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 12.04 \\ -2.552 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} -24.058597 \\ 2.3041698 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12.02 \\ 2.550 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$

b) $C \cdot x \overset{!}{=} b$

$$\begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} \\ 0 & l_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1}^2 & l_{1,1} \cdot l_{2,1} \\ l_{1,1} \cdot l_{2,1} & l_{2,1}^2 + l_{2,2}^2 \end{pmatrix}$$

$$l_{1,1} = \sqrt{C_{1,1} - \sum_{k=1}^{0} L_{i,k}^2} = \sqrt{0.1341} = 0.3662$$

$$l_{2,1} = \frac{1}{l_{1,1}} \cdot \left(C_{2,1} - \sum_{k=1}^{0} L_{i,k} \cdot L_{j,k} \right) = \frac{1}{3.361 \cdot 10^{-1}} \cdot -0.2665 = -0.7278$$

$$l_{2,2} = \sqrt{C_{2,2} - \sum_{k=1}^{1} L_{i,k}^2} = \sqrt{1.623 - (-0.7929^2)} = 1.045$$