Simon King, FSU Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Daniel Max

Numerische Mathematik

Sommersemester 2022 Übungsblatt 3

Hausaufgaben (Abgabe: bis 03.05.2022 $10^{\underline{00}}$ Uhr)

Abgabe paarweise — Bitte beide Namen auf der Lösung angeben.

Hausaufgabe 3.1: *Berechnung von relativer Kondition*
Berechnen Sie jeweils die relative komponentenweise Kondition $\underline{\kappa}^{\mathrm{rel}}(f, x)$:

a) (1 P.) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$.

b) (2 P.) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ für $x_1 > 0$.

c) (1 P.) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $x = 30$.

Hausaufgabe 3.2: *Kondition quadratischer Gleichungen*
Sei $D := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid q \neq 0,\ \frac{p^2}{4} - q \geq 0\}$. Für $p, q \in D$ hat $y^2 - py + q = 0$ die Lösungen $y_{1,2}(p, q) := \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ mit $f(p, q) := \binom{y_1(p,q)}{y_2(p,q)}$.

a) (4 P.) Untersuchen Sie die relative komponentenweise Kondition des Problems $(f,\ (p, q))$: Unter welcher Bedingung an p, q ist $\underline{\kappa}^{\mathrm{rel}}\left(f,\ (p, q)\right) \gg 1$?

b) (2 P.) Berechnen Sie $\underline{\kappa}^{\mathrm{rel}}\left(f,\ (p, q)\right)$ für $p := 4$ und $q := 3.999$.

Hinweis: Nach dem ***Satz von Vieta*** gilt $y_1 + y_2 = p$ und $y_1 \cdot y_2 = q$. Es ist sinnvoll, dies implizit abzuleiten, statt die p, q-Formel explizit abzuleiten.

Hausaufgabe 3.3: (3 P.) Für $0 < x \leq 1$ sei $f(x) := \frac{1-\cos(x)}{x^2}$. Wir nehmen an, dass $\cos(x)$ mit dem relativen Fehler ε berechnet wird und die Grundrechenarten exakt ausgeführt werden. Es sei ε_f der daraus resultierende relative Fehler bei der Berechnung von $f(x)$. Bestimmen Sie ein möglichst großes $x_0 > 0$, so dass $|\varepsilon_f| > 10^4 \cdot |\varepsilon|$ für alle $0 < x < x_0$.
Zusatzaufgabe: (3 Bonus-P.) Wie kann man $f(x)$ mit deutlich höherer Genauigkeit berechnen, wenn $\sin(x)$ ebenfalls mit relativem Fehler ε ausgewertet wird? *Hinweis:* Trigonometrische Umformungen.

Bitte wenden

Hausaufgabe 3.4: *Lemma 2.8*
Bitte beachten Sie die Korrektur zu der Version des Lemmas, die ursprünglich an der Tafel stand.
(3 P.) Sei $f \in \mathcal{C}^1([\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n])$, $x \in \mathbb{R}^m$. Seien $i \in \{1, ..., n\},\ j \in \{1, ..., m\}$ mit $x_j \neq 0$ und $f_i(x) \neq 0$. $e^{(j)} \in \mathbb{R}^m$ sei der j-te Standardbasisvektor. Zeigen Sie:

- $\left| f_i(x + he^{(j)}) - f_i(x) \right| \leq \underline{\kappa}^{\text{abs}}(f, x) \cdot |h| + r(h)$ mit $r(h) \in o(h)$ für $h \to 0$.
- $\frac{\left| f_i(x+he^{(j)}) - f_i(x) \right|}{|f_i(x)|} \leq \underline{\kappa}^{\text{rel}}(f, x) \cdot \frac{|h|}{|x_j|} + s(h)$ mit $s(h) \in o(h)$ für $h \to 0$.

Hinweis: Taylor. Zur Definition der Landau-Symbole siehe die vorige Hausaufgabenserie.

Erreichbare Punktzahl: 16