Advanced Mathematics

East China University of Science and Technology

目录

第一章　预备知识

1.1　基础知识

1.1.1　函数的概念和特性

函数

设 x 与 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 若对于每一个 $x \in D$, 按照一定的法则 f, 有一个唯一确定的 y 与之对应, 则称 y 为 x 的函数, 记为 $y = f(x)$, 称 x 为自变量, y 为因变量, D 为定义域.

反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 R, 若对于每一个 $y \in R$, 必存在唯一的 $x \in D$ 使得 $y = f(x)$ 成立, 则由此定义了一个新的函数 $x = \varphi(y)$, 称这个函数是 $y = f(x)$ 的反函数, 一般记作 $x = f^{-1}(y)$, 它的定义域为 R, 值域为 D.

1. 严格单调的函数一定有反函数 (严格单调函数不一定是反函数, 如某些分段函数)
2. $x = f^{-1}(y)$ 和 $y = f(x)$ 是同一个函数, 只有写成 $y = f^{-1}(x)$, 图像才关于 $y = x$ 对称

复合函数

函数 $u = g(x)$ 在 $x \in D$ 上有定义, 函数 $y = f(u)$ 在 $u \in D_1$ 上有定义, 且 $g(D) \subset D_1$, 则称 $y = f(g(x))$ 为复合函数, 定义域为 D, u 为中间变量.

函数的四种特性和重要结论

1. 有界性

   设 $f(x)$ 的定义域为 D, 数集 $I \subset D$. 若存在某个正数 M, 使得对于任一 $x \in I$, 有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 I 上有界. 如果这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无上界.

2. 单调性

   设 $f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I \subset D$, 如果对于区间上的任一两点 x_1, x_2, 当 $x_1 < x_2$ 的时候有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加. 反之如果 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少.

3. 奇偶性

   设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(x) = f(-x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$, 恒有 $f(x) = -f(-x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数. 偶函数的图像关于 y 轴对称, 奇函数的图像关于原点对称.

   (a) 奇函数在 0 点有定义则 $f(0) = 0$

   (b) 偶函数当 $f'(0)$ 存在时则 $f'(0) = 0$

   (c) 函数 $f(x)$ 和 $-f(x)$ 关于 x 轴对称, 函数 $f(x)$ 和 $f(-x)$ 关于 y 轴对称, 函数 $y(x)$ 和 $-y(-x)$ 关于原点对称

   (d) 函数 $f(x)$ 关于 $x = T$ 对称 $\Leftrightarrow f(x+T) = f(T-x)$

4. 周期性

   设 $f(x)$ 的定义域为 D, 若存在一个正数 T, 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$. 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

5. 重要结论

   (a) 函数和其导函数

   偶函数的导函数是奇函数

   奇函数的导函数是偶函数

周期函数的周期和其导函数的周期相同

(b) 函数和其原函数

连续的奇函数的原函数是偶函数

连续的偶函数的原函数只有一个是奇函数

连续的周期函数和其原函数的周期相同

(c) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且 $f'(x)$ 有界, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界

1.1.2　函数的图像

直角坐标系

1. 常见图像

   (a) 基本初等函数与初等函数

   i. 常数函数

   $y=C$, C 为常数, 图形为平行于 x 轴的水平直线.

   ii. 幂函数

   $y=x^{\mu}$ (μ 是实数)

   A. 见到 $\sqrt{u}, \sqrt[3]{u}$, 用 u 来研究最值

   B. 见到 $|u|$ 时, 用 u^2 来研究最值

   C. 见到 $u_1u_2u_3$ 时, 用 $ln(u_1u_2u_3)=lnu_1+lnu_2+lnu_3$ 来研究最值

   D. 见到 $\frac{1}{u}$ 时, 用 u 来研究最值

   iii. 指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$

   iv. 对数函数 $y=log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$

   常用公式: $x=e^{lnx}$ $(x>0), u^v=e^{lnu^v}=e^{vlnu}$ $(u>0)$

   v. 三角函数

   A. 正弦函数和余弦函数

   正弦函数 $y=\sin x$, 余弦函数 $y=\cos x$.

B. 正切函数和余切函数

正切函数 $y = \tan x$, 余切函数 $y = \cot x$.