



重点整理

East China University of Science and Technology

目录

第一章 行列式	2
第二章 矩阵	3
第三章 向量	4
第四章 线性方程组	5
第五章 特征值和特征向量	6
第六章 二次型	8

第一章 行列式

$$1. \ k \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{与矩阵不同, 牢记!}$$

第二章 矩阵

1. $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$
2. $\mathbf{E}_{31}(k)$ 的含义是第 1 行的 k 倍加到第 3 行, 或者是第 3 列的 k 倍加到第 1 列
3. $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$
4. $(k\mathbf{A})^* = k^{n-1} \mathbf{A}^*$
5. $|\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow$ 满秩 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 可逆

第三章 向量

1. 判别线性相关性的七大定理:

(a) 充分必要条件 (两个):

- i. $Ax = 0, x$ 有非零解
- ii. 向量组中至少有一个向量能够被其他的向量线性表出

(b) 与解线性方程组有关的定理 (两个):

- i. \Rightarrow : 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性相关, 则 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 且表示方法唯一
- ii. \Leftarrow : 如果 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 有解, 且 $r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta])$

(c) 整体性和局部性 (两个):

- i. 向量
如果低维是无关的, 则增加维数必无关
如果高维是相关的, 则减少维数必相关
- ii. 向量组
如果整体是无关的, 则部分必无关
如果部分是相关的, 则整体必相关

(d) 以少表多, 多的相关

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 能被向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 且 $t < s$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

2. 设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 若后者的所有元素都能被前者线性表出, 则:

$$r([\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t]) \leq r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s])$$

3. A 经过初等变换得到了 B , 则:

- (a) A 和 B 的相应部分的列向量具有相同的线性相关性 (这条性质为后面解线性方程打下基础)
- (b) A 的行向量组和 B 的行向量组是等价向量组 (可以互相线性表示)

第四章 线性方程组

1. 齐次线性方程组:

(a) $m > n \Rightarrow$ 有非零解

(b) $m = n$:

i. $r(\mathbf{A}) = m \Rightarrow$ 满秩 $\Rightarrow |\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow$ 线性无关 \Rightarrow 唯一零解

ii. $r(\mathbf{A}) = r < m \Rightarrow$ 不满秩 $\Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Rightarrow$ 线性相关 \Rightarrow 有非零解, 且有 $m - r$ 个线性无关解 (也可以换一种解释: 由于 $r(\mathbf{A}) = r < m \Rightarrow$ 独立方程组的个数为 r , 由于 $r < m$, 所以有非零解)

2. 非齐次线性方程组

(a) $r(\mathbf{A}) \neq r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) \Rightarrow$ 无解

(b) $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = m \Rightarrow$ 唯一解

(c) $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r < m \Rightarrow$ 无穷解

第五章 特征值和特征向量

1. 特征值的性质:

(a) 特征值的数量为 n (包括重根)

(b) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(\mathbf{A})$

(c) $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\mathbf{A}|$

2. 特征向量的性质:

(a) 线性无关的特征向量的数量 $\leq n$

(b) 每个特征值至少有一个特征向量

(c) k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量

(d) 若 ξ_1, ξ_2 是属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 ξ_1, ξ_2 线性无关

(e) 若 ξ_1, ξ_2 是属于同一特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 仍然是特征值 λ 的特征向量

3. 矩阵相似的性质 (假设 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$)

(a) 反身性, 对称性, 传递性

(b) 相等

i. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$

ii. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$

iii. 特征值相等

iv. 特征多项式相等

(c) 函数 (注意是相似不是相等)

i. $f(\mathbf{A}) \sim f(\mathbf{B})$

ii. $\mathbf{A}^T \sim \mathbf{B}^T$

iii. 若 \mathbf{A} 为可逆矩阵, $\mathbf{A}^{-1} \sim \mathbf{B}^{-1}$

iv. 若 \mathbf{A} 为可逆矩阵, $\mathbf{A}^* \sim \mathbf{B}^*$

4. 相似对角矩阵的条件

(a) 充要条件

- i. 矩阵 \mathbf{A} 有 n 个线性无关的特征向量
- ii. n 维特征值对应 n 维解空间

(b) 充分条件

- i. 矩阵 \mathbf{A} 有 n 个不同的特征值
- ii. 矩阵 \mathbf{A} 为实对称矩阵

5. 实对称矩阵的性质

- (a) 若 ξ_1, ξ_2 是属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 ξ_1, ξ_2 正交
- (b) 实对称矩阵一定相似于对角阵
- (c) 存在可逆矩阵 \mathbf{P} , 使 $\mathbf{PAP}^{-1} = \mathbf{\Lambda}$
- (d) 存在正交矩阵 \mathbf{Q} , 使 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} = \mathbf{Q}^T\mathbf{AQ} = \mathbf{\Lambda}$

其中, $\mathbf{\Lambda}$ 和 \mathbf{P} 的定义和对角矩阵里面的 $\mathbf{\Lambda}$ 和 \mathbf{P} 相同

第六章 二次型

1. 二次型

(a) 代数表达形式

$$\begin{aligned} f(x) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

(b) 矩阵表达形式

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2. 合同

(a) (可逆) 线性变换

对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

$$\text{记 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

则上式可以写为 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$. 上式称为从 y_1, y_2, \dots, y_n 到 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性变换. 如果 \mathbf{C} 可逆, 则称为可逆线性变换.

(b) 合同

我们可以把上式 $x = Cy$ 代入到 $f(x) = x^T Ax$, 令 $B = C^T AC$, 可以得到 $f(y) = y^T By$. 其中 A 与 B 合同, 记为 $A \simeq B$ (与相似不同的是这里是转置而不是取逆)

合同的几个性质:

- i. 反身性, 对称性, 传递性
- ii. 可逆线性变化不改变矩阵的秩
- iii. 与对称矩阵合同的矩阵一定也是对称矩阵

3. 标准形和规范形

标准形是二次型中非二次项的系数全为 0, 规范形是在标准形的基础上规定二次型的系数都为 1, 0 或者 -1.

化为标准形有两种方法:

(a) 配方法

$$x = Cy, C^T AC = \Lambda$$

其中, Λ 的形式为:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

注意, 这里不一定是特征值, 不是你以为的 Λ .

(b) 利用实对称矩阵的性质

由于实对称矩阵一定存在一个正交矩阵 Q , 使得 $Q^T AQ = Q^{-1}AQ = \Lambda$, 故:

$$x = Qy, Q^T AQ = \Lambda$$

其中, Λ 的形式为:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

可以将上述标准形进一步操作得到规范形.

4. 惯性定理

将二次型合同标准化后得到的标准形中, 正数项的个数设为 p , 负数项的个数设为 q , 有如下性质:

(a) $r(A) = p + q$

(b) 两个矩阵合同的条件是具有相同的惯性指数

5. 正定二次型

对于任一 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, 称 f 为正定二次型, \mathbf{A} 为正定矩阵.

(a) 充要条件:

- i. 对于任一 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$
- ii. 存在可逆矩阵 \mathbf{D} , 使 $\mathbf{A} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$
- iii. f 的正惯性指数为 n
- iv. $\mathbf{A} \simeq \mathbf{E}$
- v. \mathbf{A} 的特征值 $\lambda_i > 0$
- vi. \mathbf{A} 的顺序主子式都 > 0

(b) 必要条件

- i. $|\mathbf{A}| > 0$
- ii. $a_{ii} > 0$