



Linear Algebra

East China University of Science and Technology

目录

| | | |
|------------|-------------------|-----------|
| 第一章 | 行列式 | 3 |
| 1.1 | 基础知识 | 3 |
| 1.1.1 | 行列式 | 3 |
| 1.2 | 习题 | 4 |
| 1.2.1 | 行列式的计算 | 4 |
| 1.2.2 | 余子式和代数余子式的线性组合的计算 | 6 |
| 1.3 | 总结 | 6 |
| 1.3.1 | 重点 | 6 |
| 第二章 | 矩阵 | 7 |
| 2.1 | 基础知识 | 7 |
| 2.1.1 | 矩阵 | 7 |
| 2.1.2 | 矩阵的逆 | 10 |
| 2.1.3 | 伴随矩阵 | 10 |
| 2.1.4 | 初等矩阵 | 11 |
| 2.1.5 | 等价矩阵 | 11 |
| 2.1.6 | 矩阵的秩 | 12 |
| 2.1.7 | 常见运算汇总 | 12 |
| 2.2 | 习题 | 13 |
| 第三章 | 向量组 | 14 |
| 3.1 | 基础知识 | 14 |
| 3.1.1 | 向量 | 14 |
| 3.1.2 | 线性组合和线性相关 | 14 |
| 3.1.3 | 极大线性无关组和等价向量组 | 16 |

| | |
|---------------------|-----------|
| 目 录 | 2 |
| 3.1.4 等价向量组 | 16 |
| 3.1.5 向量组的秩 | 17 |
| 3.2 习题 | 17 |
| 3.2.1 矩阵的基本运算 | 17 |
| 3.3 基础知识 | 18 |
| 3.3.1 齐次线性方程组 | 18 |
| 3.3.2 非齐次线性方程组 | 20 |
| 第四章 特征值和特征向量 | 22 |
| 4.1 基础知识 | 22 |
| 4.1.1 特征值和特征向量 | 22 |
| 4.1.2 矩阵的相似 | 23 |
| 4.1.3 矩阵的相似对角化 | 23 |
| 4.1.4 实对称矩阵 | 24 |
| 4.2 习题 | 25 |
| 4.2.1 特征值和特征向量 | 25 |
| 4.2.2 实对称矩阵 | 25 |
| 第五章 二次型 | 27 |
| 5.1 基础知识 | 27 |
| 5.1.1 二次型 | 27 |
| 5.1.2 线性变换 | 28 |
| 5.1.3 矩阵合同 | 28 |
| 5.1.4 标准形/规范形 | 29 |
| 5.1.5 惯性定理 | 30 |
| 5.1.6 正定二次型及其判别 | 30 |
| 5.2 习题 | 31 |
| 5.2.1 标准形/规范形 | 31 |

第一章 行列式

1.1 基础知识

1.1.1 行列式

定义

1. 几何定义

n 阶行列式为 n 个 n 维向量组成的 n 维图形的体积.

2. 逆序数法定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

总共有 $n!$ 个项.

3. 展开定义

代数余子式: $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathbf{M}_{ij}$

按第 i 行展开: $a_{i1} \mathbf{A}_{i1} + a_{i2} \mathbf{A}_{i2} + \dots + a_{in} \mathbf{A}_{in}$

注意, 行列式的某行 (列) 元素分别乘另一行 (列) 的元素的代数余子式后再求和为 0

性质

1. $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$, 若 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, 则矩阵 \mathbf{A} 为对称矩阵, 若 $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$, 则矩阵 \mathbf{A} 为正交矩阵
2. 若行列式中某行 (列) 全部元素为 0, 行列式为 0

3. 若行列式中某行 (列) 元素有公因子 $k(k \neq 0)$, k 可以提到行列式外面
4. 行列式某行 (列) 元素均是两个元素之和, 可以拆成两个行列式之和
5. 两行 (列) 互换, 值取反
6. 两行 (列) 元素对应成比例, 行列式为 0
7. 行列式中某行 (列) k 倍加到另一行 (列), 值不变

重要行列式

1. 主对角线行列式 (上/下三角形行列式): $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
2. 副对角线行列式: $|\mathbf{A}| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$
3. 拉普拉斯展开式

\mathbf{A} 为 m 阶矩阵, \mathbf{B} 为 n 阶矩阵

$$\text{主对角线: } \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

$$\text{副对角线: } \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

4. 范特蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

注意, 范氏行列式中全 1 行一定在上方.

1.2 习题

1.2.1 行列式的计算

具体型行列式

1. 化基本形法

(a) 直接展开: 适用于含 0 较多的行 (列)

(b) 爪型: 斜爪消平爪

(c) 异爪型

i. 阶数不高, 直接展开

ii. 阶数高, 用递推 (尤其适用于一横形行列式)

例题 一横形行列式
$$\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 \\ -1 & 1-x & x \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (\quad)$$

解 将其按第行展开, 得到一个相似的行列式, 可以得到一个递推公式.

(d) 行 (列) 和相等: 三种方法

i. 提取公因子: 将其余行全都加到第一行上去, 提取公因子

ii. 加边法: 例如矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ll 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix}$$

加边后矩阵的值不变, 可以将第 1 行的 -1 倍加到其他行, 再用其他行的 $(-1/b)$ 倍加到第一列.

iii. 化爪形行列式

(e) 消零化基本形:

(f) 拉普拉斯行列式: 一般为 “X 字形”

(g) 范特蒙德行列式: 化为范式行列式, 看第二行写结果

2. 递推法

3. 行列式表示的函数和方程

抽象型行列式

1. 目标行列式和矩阵的相互转换: $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

例题 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 维向量, $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $B = [\alpha_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}]$.
若 $|A| = 1$, 则 $|A - B| = (\quad)$

2. 与特征方程相结合

例题 设 A 是 3 阶方阵, 满足 $|3A+2E| = 0$, $|A-E| = 0$, $|3E-2A| = 0$, 则 $|A| = (\quad)$

解 特征方程 $|\lambda E - A| = 0$, 可以根据上面的几个等式求出矩阵 A 的特征值, 根据特征值的性质可以知道矩阵的迹和矩阵对应行列式的值

1.2.2 余子式和代数余子式的线性组合的计算

根据行列式的展开定义, 有:

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \begin{bmatrix} & & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & & \dots & & \end{bmatrix}$$

则有:

$$k_1A_{i1} + k_2A_{i2} + \dots + k_{in}A_{in} = \begin{bmatrix} & & \dots & & \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & \dots & k_{in} \\ & & \dots & & \end{bmatrix}$$

例题 设 $|A| = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A_{31} + A_{32} + A_{33} + M_{34} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

1.3 总结

1.3.1 重点

1. 一行形行列式的计算
2. 行 (列) 和相等行列式的计算
3. 余子式和代数余子式的计算
4. 结合特征方程

第二章 矩阵

2.1 基础知识

2.1.1 矩阵

本质

矩阵的本质是表达系统信息.

定义

由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的矩形表格. 当 $m = n$ 的时候称 \mathbf{A} 为 n 阶方阵.
有两个矩阵, 如果 m, n 相同, 称为同型矩阵.

运算

1. 相等: 同型矩阵且对应元素相等
2. 加法: 同型矩阵对应元素相加
3. 数乘矩阵 (重要, 与行列式不同)

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

加法运算和数乘运算统称为矩阵的线性运算, 满足以下运算规律:

- (a) 交换律: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- (b) 结合律: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

(c) 分配律: $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}, (k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{B}$

(d) 数和矩阵相乘的结合律: $k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A} = l(k\mathbf{A})$

4. 乘法: \mathbf{A} 为 $m \times s$ 矩阵, \mathbf{B} 为 $s \times n$ 矩阵, 设 $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})_{m \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

乘法满足下列运算规律:

(a) 结合律: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

(b) 分配律: $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

(c) 数乘与矩阵乘积的结合律: $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$

5. 转置矩阵: 行列互换

6. 向量的内积和正交

(a) 内积: $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T, \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_n]^T$, 内积为

$$\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

记为 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(b) 正交: 内积为 0

(c) 模: 向量的长度, 记作 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$

7. 标准正交向量组: 所有成员两两正交且模都为 1, 即:

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j = 1 \quad (i = j)$$

称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 为单位正交向量组.

8. 标准正交矩阵: 由标准正交向量组组成的矩阵

9. 施密特正交化 (正交规范化)

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1$$

上式得到的是正交向量组, 再进行单位化:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}, \boldsymbol{\eta}_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}$$

得到标准正交向量组.

10. 幂: \mathbf{A} 为一个 n 阶方阵, 则 $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}\mathbf{A}\dots\mathbf{A}\mathbf{A}$ (共 n 个 \mathbf{A})

11. 方阵乘积的行列式

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

重要矩阵

1. 零矩阵

2. 单位矩阵

3. 数量矩阵: 数 k 和单位矩阵的乘积

4. 对角矩阵: 非主对角线元素均为 0 的矩阵

5. 上 (下) 三角矩阵

6. 对称矩阵: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$

7. 反对称矩阵: $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$

8. 标准正交矩阵: $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{E}$, 即行 (列) 向量的组合是标准正交向量组

9. 分块矩阵

分块矩阵的加法和数乘与行列式不同:

(a) 加法

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3 & \mathbf{A}_4 + \mathbf{B}_4 \end{bmatrix}$$

(b) 数乘

$$k \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\mathbf{A} & k\mathbf{B} \\ k\mathbf{C} & k\mathbf{D} \end{bmatrix}$$

(c) 乘法: 与矩阵乘法相同

2.1.2 矩阵的逆

定义

若 $AB = BA = E$, 则矩阵 A 可逆, B 为 A 的逆矩阵.

性质

设 A, B 为同阶可逆矩阵

1. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ($k \neq 0$)
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (AB 也可逆)
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (A^T 也可逆)
4. $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$
5. $(A^{-1})^{-1} = A$
6. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

推导: $|A^{-1}A| = |A^{-1}||A| = 1$

2.1.3 伴随矩阵

定义

矩阵 A 的伴随矩阵为:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 A 为对应元素的代数余子式.

性质

1. $AA^* = A^*A = |A|E$
2. $|A^*| = |A|^{n-1}$
3. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
4. $(A)^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

2.1.4 初等矩阵

定义

单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵, 有三种:

1. 倍乘初等矩阵

$$\mathbf{E}_2(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 互换初等矩阵

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 倍加初等矩阵

$$\mathbf{E}_{31}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意是第一行的 k 倍加到第三行或者是第三列的 k 倍加到第一列 (别搞错顺序).

性质

1. $[\mathbf{E}_{ij}]^T = \mathbf{E}_{ij}, [\mathbf{E}_i(k)]^T = \mathbf{E}_i(k), [\mathbf{E}_{ij}(k)]^T = \mathbf{E}_{ji}(k)$
2. $[\mathbf{E}_{ij}]^{-1} = \mathbf{E}_{ij}, [\mathbf{E}_i(k)]^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k}), [\mathbf{E}_{ij}(k)]^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$
3. 左行右列定理
4. 若 \mathbf{A} 为可逆矩阵, 则可以表示为有限个可逆矩阵的乘积

2.1.5 等价矩阵

若 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均为 $m \times n$ 矩阵, 且 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$, 则 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为等价矩阵, 记作 $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

或者说, 若存在可逆矩阵 $\mathbf{P}_{m \times m}, \mathbf{Q}_{n \times n}$, 使得 $\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$, 则称 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为等价矩阵.

2.1.6 矩阵的秩

定义

设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{A} 中最高阶非零子式的阶数为矩阵 \mathbf{A} 的秩. 如果 \mathbf{A} 为 $n \times n$ 矩阵, 则 $r(\mathbf{A}) = n$ (满秩) $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$ 可逆.

初等变换不改变矩阵的秩

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PA}) = r(\mathbf{AQ}) = r(\mathbf{PAQ})$$

重要式子

设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{B} 为满足有关矩阵运算要求的矩阵, 则

1. $0 \leq r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$
2. 数乘: $r(k\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$
3. $r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$
4. $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$
5. $r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n & r(\mathbf{A}) = n \\ 1 & r(\mathbf{A}) = n - 1 \text{ 其中 } \mathbf{A} \text{ 为 } n \text{ 阶方阵} \\ 0 & r(\mathbf{A}) < n - 1 \end{cases}$

2.1.7 常见运算汇总

1. $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$
 $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$
 $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{A}^{-1}$
 $(k\mathbf{A})^* = k^{n-1} \mathbf{A}^*$
2. $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* \neq \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$

3. $|AB| = |A||B|$
 $(AB)^T = B^T A^T$
 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
 $(AB)^* = B^* A^*$
4. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$
 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
 $(A^T)^* = (A^*)^T$

2.2 习题

第三章 向量组

3.1 基础知识

3.1.1 向量

定义

n 个数构成的一个有序数组 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ 称为一个 n 维向量, 记为 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, 并称 α 为 n 维行向量, α^T 为 n 维列向量. 其中 a_i 称为向量 α 或者 α^T 的第 i 个分量.

3.1.2 线性组合和线性相关

定义

1. 线性组合: 设有 m 个 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 和 m 个数 k_1, k_2, \dots, k_m . 则向量 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合
2. 线性表出: 若向量 β 能表示成向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 的线性组合, 即 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$, 则称 β 能够被向量组线性表出
3. 线性相关: 存在一组不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_m , 使得下式成立:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

上式可以进一步写为 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$, 这个式子有四种形式:

$$Ax = \mathbf{0}$$

或者矩阵形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者向量形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者线性方程组形式:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_m a_{1m} = 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_m a_{2m} = 0 \\ \cdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_m a_{nm} = 0 \end{cases}$$

4. 线性无关: 只有当 k_1, k_2, \dots, k_m 全为 0 的时候, 才能使上式成立

判别相关性定理

1. 相关充要条件: 向量组中至少有一个向量能被其余的 $n-1$ 的向量线性表出
2. 相关充要条件: 方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非 $\mathbf{0}$ 解
3. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而向量组 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则 β 可由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出, 且表示方法唯一
4. 如果向量 β 能够由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出, 则 $r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]) = r([\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m])$
5. 以少表多, 多的相关: 如果向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 能够由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表示, 且 $t > s$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性相关
6. 向量组的部分与整体:

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中有一部分向量线性相关, 则整体也线性相关;

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则其任一部分线性无关

7. 向量的部分与整体:

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则将所有向量扩展到 s 维得到的向量组 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*$ 也是线性无关的;

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关, 则将所有向量缩减到 k 维得到的向量组 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*$ 也是线性相关的

3.1.3 极大线性无关组和等价向量组

定义

在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中, 存在向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$, 满足以下条件:

1. $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$ 线性无关
2. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 中的任一向量能够由向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$ 线性表示

则称向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$ 为原向量组的极大线性无关组.

3.1.4 等价向量组

定义

若有两个向量组 (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和 (2) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 这两个向量组中的任一元素都可以由另一向量组线性表出, 则称这两个向量组为等价向量组.

性质

1. 反身性: $(1) \simeq (1)$
2. 对称性: $(1) \simeq (2) \Leftrightarrow (2) \simeq (1)$
3. 传递性: $(1) \simeq (2), (2) \simeq (3) \Rightarrow (1) \simeq (3)$
4. 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组
5. 等价向量组有相等的秩

3.1.5 向量组的秩

定义

向量组的秩是极大线性无关组成员的个数, 是线性无关向量的个数, 是向量空间的维数, 是最简化的向量数.

性质

1. 三秩相等: $r(\mathbf{A})$ 矩阵的秩 $= \mathbf{A}$ 的行秩 $= \mathbf{A}$ 的列秩
2. 若 $\mathbf{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \mathbf{B}$, 则
 - (a) \mathbf{A} 的行向量组和 \mathbf{B} 的行向量组是等价向量组
 - (b) \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的任何相应部分列向量具有相同的线性相关性
3. 设向量组 (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和 (2) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 若 β_i 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 则 $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$

可以这么理解: 秩其实就是一种多样性, 多样的数据的集合肯定能够表示单一的数据的集合, 即如果秩越大, 则这些数据的多样性就越大. 所以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 的秩一定大.

3.2 习题

3.2.1 矩阵的基本运算

矩阵相乘时要注意矩阵的左右位置

例题 1 设 \mathbf{E} 是 n 阶单位矩阵, $\mathbf{E} + \mathbf{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 则下列关系式中不成立的是:

- a) $(\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{E} + \mathbf{A})^2 = (\mathbf{E} + \mathbf{A})^2(\mathbf{E} - \mathbf{A})$
- b) $(\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{E} + \mathbf{A})^T = (\mathbf{E} + \mathbf{A})^T(\mathbf{E} - \mathbf{A})$
- c) $(\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{E} + \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{A})$
- d) $(\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{E} + \mathbf{A})^* = (\mathbf{E} + \mathbf{A})^*(\mathbf{E} - \mathbf{A})$

3.3 基础知识

3.3.1 齐次线性方程组

设有一齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} = 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{2m} = 0 \\ \dots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} = 0 \end{cases}$$

其矩阵形式为:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

有解的条件

由上矩阵可以得到, 未知数的个数为 m , 方程的个数为 n .

1. 若 $m > n$, 则必有非零解

2. 若 $m = n$, 用秩判断:

(a) 若 $r(\mathbf{A}) = m$ (向量组线性无关, $|\mathbf{A}| \neq 0$), 则仅有零解

说明: 由于行秩 = 列秩, 所以列秩为 m , 说明独立方程组个数为 m .

(b) 若 $r(\mathbf{A}) = r < m$ (向量组线性相关, $|\mathbf{A}| = 0$), 则必有非零解, 且有 $m - r$ 个线性无关解

说明: 由于行秩 = 列秩, 所以列秩为 r , 说明独立方程组个数为 r .

3. 若 $m < n$,

解的性质

若 $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{0}$, 则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 = \mathbf{0}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

基础解系和解的结构

1. 基础解系

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$ 满足:

- (a) 是方程组 $Ax = 0$ 的解
- (b) 线性无关
- (c) 方程组 $Ax = 0$ 的任一解均可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$ 线性表出, 则称 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$ 是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系

2. 通解

设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$ 是方程 $Ax = 0$ 的基础解系, 则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r}$ 是其通解.

求解方法

1. $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$, 其中 B 为行阶梯形矩阵, $r(A) = r$

高斯消元法:

- ① 保证最靠左的非全 0 列的最上方为非 0 元素, 如果不是, 通过“互换”初等行变换使最靠左非全 0 列的最上方为非 0 元素
 - ② 通过“倍加”初等行变换使这个非 0 元素所在列的下方元素全为 0
 - ③ 遮住矩阵的最上面一行不看, 将其余行看作一个新矩阵, 重复①②, 直至矩阵化为阶梯形
- 高斯-若当消元法:

- ① 由高斯消元法得到阶梯形矩阵
- ② 对于每一个非全 0 行, 通过“倍乘”初等行变换使得这一行的非 0 首位为 1
- ③ 对于每一个非全 0 行, 通过“倍加”初等行变换使得这一行的非 0 首项所在列的上方元素全为 0, 直至得到简化行阶梯型矩阵

2. 按列找出一个秩为 r 的子矩阵, 剩余列位置对应的未知数设为自由变量

3. 算出共有 $m - r$ 个线性无关解, 求出 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$, 写出通解

3.3.2 非齐次线性方程组

设有一非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{2m} = b_2 \\ \dots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} = b_n \end{cases}$$

其矩阵形式为:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

特殊的有矩阵 \mathbf{A} 的增广矩阵:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

有解的条件

1. 若 $r(\mathbf{A}) \neq r([\mathbf{A}, \mathbf{b}])$ (\mathbf{b} 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出), 方程组无解
实际上, $r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r(\mathbf{A}) + 1$.
2. 若 $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = m$ ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \mathbf{b}$ 线性相关), 方程组有唯一解³
3. 若 $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r < m$, 方程组有无穷多解

解的性质

设 η_1, η_2, η 是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解, ξ 是对应齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解, 则:

1. $\eta_1 - \eta_2$ 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解
2. $k\xi + \eta$ 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解

求解方法

1. 写出 $Ax = b$ 的导出方程组 $Ax = 0$, 并求出其通解 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r}$
2. 求出 $Ax = b$ 的一个特解 η
3. $Ax = b$ 的通解为 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r} + \eta$

第四章 特征值和特征向量

4.1 基础知识

4.1.1 特征值和特征向量

定义

设 \mathbf{A} 为 n 阶矩阵, λ 是一个数, 若存在一个非零的 n 维向量 $\boldsymbol{\xi}$, 使得 $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 则称 $\boldsymbol{\xi}$ 为 \mathbf{A} 的特征向量, λ 为 \mathbf{A} 的特征值.

上式可以化简成 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$, $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ 被称为特征多项式, $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ 称为特征矩阵.

推导: 由于 $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, 且 $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$, 说明方程 $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ 有非零解 (构成特征矩阵的向量线性相关), 即 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$.

性质

1. 特征值的性质

(a) 特征值的个数为 n (包括重根)

(b) $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(\mathbf{A})$

(c) $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\mathbf{A}|$

2. 特征向量的性质

(a) 线性无关的特征向量的数量 $\leq n$

(b) 每个不同的特征值至少有一个特征向量

(c) k 重特征值 λ 至多只有 k 个线性无关的特征向量

(d) 若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是 \mathbf{A} 的属于不同特征值的特征的特征向量, 则 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关

(e) 若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是 \mathbf{A} 的属于同一特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 仍然是 \mathbf{A} 的属于特征值 λ 的特征向量

4.1.2 矩阵的相似

定义

设 A 和 B 为两个 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$ 成立, 则称 A 相似于 B , 记成 $A \sim B$.

性质

1.
 - 反身性: $A \sim A$
 - 对称性: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
 - 传递性: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$
2. 若 $A \sim B$, 则有
 - $r(A) = r(B)$
 - $|A| = |B|$
 - A, B 具有相同的特征值
 - A, B 特征多项式的值相同
3. 若 $A \sim B$, 则有
 - $f(A) \sim f(B)$
 - $A^T \sim B^T$
 - A 可逆, $A^* \sim B^*$
 - A 可逆, $A^{-1} \sim B^{-1}$

4.1.3 矩阵的相似对角化

定义

设 n 阶矩阵 A , 存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 则 $A \sim \Lambda$, Λ 是 A 的相似标准形.

$$P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

条件

如果说 \mathbf{A} 可以相似对角化, 即 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$, 其中 \mathbf{P} 可逆, 我们可以将等式两边左乘 \mathbf{P} , 得到:

$$\mathbf{A}_{n \times n} [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n]_{n \times n} = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n]_{n \times n} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

即:

$$[\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_n] = [\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1, \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2, \dots, \lambda_n\boldsymbol{\xi}_n]$$

也即:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\xi}_i, i = 1, 2, \dots, n$$

1. n 阶矩阵 \mathbf{A} 可以相似对角化 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 ($|\mathbf{P}| \neq 0$)

解释: 由于 \mathbf{P} 可逆, 故 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$ 线性无关, 且上述过程可逆

2. n 阶矩阵 \mathbf{A} 可以相似对角化 $\Leftrightarrow n$ 重特征值对应的解空间是 n 维 (\mathbf{A} 对应于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量)

解释: k_i 重特征值至多有 k_i 个线性无关的特征向量

3. n 阶矩阵 \mathbf{A} 有 n 个不同特征值 $\Rightarrow \mathbf{A}$ 可以相似对角化

解释: 每个特征值至少有一个特征向量

4. n 阶矩阵 \mathbf{A} 为实对称矩阵 $\Rightarrow \mathbf{A}$ 可以相似对角化

上述总共两个充要条件, 两个充分条件.

总结: 一个萝卜一个坑, 八重萝卜八个坑. 一个特征值一个特征向量, 八重特征值八个线性无关的特征向量.

4.1.4 实对称矩阵

定义

若 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 则 \mathbf{A} 为是对称矩阵, 如果在此基础上 \mathbf{A} 的元素都是实数, 则 \mathbf{A} 是实对称矩阵.

性质

1. 实对称矩阵 \mathbf{A} 的属于不同特征值的特征向量相互正交
2. 实对称矩阵 \mathbf{A} 必相似于对角矩阵, 必有可逆矩阵 $\mathbf{P} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$, 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$. 且存在正交矩阵 \mathbf{Q} , 使得 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$

$$\mathbf{P} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n], \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

4.2 习题

4.2.1 特征值和特征向量

求具体型矩阵的特征值和特征向量

1. 用特征方程 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ 求出 λ , 可以使用试根法对 λ 的高次方程进行求解
2. 用求得的 λ 解齐次线性方程组 $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\xi = \mathbf{0}$, 求出特征向量

求解抽象型矩阵的特征值和特征向量

| 矩阵 | \mathbf{A} | $k\mathbf{A}$ | \mathbf{A}^k | $f(\mathbf{A})$ | \mathbf{A}^{-1} | \mathbf{A}^* | $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ |
|------|--------------|---------------|----------------|-----------------|-------------------|--------------------------------|---------------------------------------|
| 特征值 | λ | $k\lambda$ | λ^k | $f(\lambda)$ | λ^{-1} | $\frac{ \mathbf{A} }{\lambda}$ | λ |
| 特征向量 | ξ | ξ | ξ | ξ | ξ | ξ | $\mathbf{P}^{-1}\xi$ |

$f(x)$ 为多项式, 若矩阵 \mathbf{A} 满足 $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \Rightarrow f(\lambda) = 0$.

4.2.2 实对称矩阵

求正交矩阵 \mathbf{Q}

1. 求 \mathbf{A} 的 λ 与 ξ
2. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 施密特正交化, 单位化至 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$
3. 令 $\mathbf{Q} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

不同的特征值 λ_i 对应的特征矩阵 ξ_i 之间是正交的.

施密特正交化: $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$.

单位化: $\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$.

总结

1. 普通矩阵 A

(a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$ 无关

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$

i. ξ_1, ξ_2 无关

ii. ξ_1, ξ_2 相关

2. 实对称矩阵 A

(a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1 \perp \xi_2$ ξ_1, ξ_2 无关

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$

i. $\xi_1 \perp \xi_2$ ξ_1, ξ_2 无关

ii. ξ_1 不垂直于 ξ_2 ξ_1, ξ_2 无关

第五章 二次型

5.1 基础知识

5.1.1 二次型

定义

n 元变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式称为 n 元二次型, 简称二次型. 二次型有两种常见表达形式:

1. 代数形式

$$\begin{aligned} f(x) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

2. 矩阵形式

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则二次型可以表示为:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

必须强调的是, 这里的 \mathbf{A} 是一个对称矩阵.

5.1.2 线性变换

对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

$$\text{记 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

则上式可以写为 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$. 上式称为从 y_1, y_2, \dots, y_n 到 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性变换. 如果 \mathbf{C} 可逆, 则称为可逆线性变换.

如果 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 令 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$, 则有 $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{C}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y}$.

记 $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$, 则有 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = g(\mathbf{y})$. 至此我们通过线性变换得到了一个新的二次型 $g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$.

5.1.3 矩阵合同

定义

设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 \mathbf{C} , 使得:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$$

则称 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 合同, 记作 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$. 此时称 $f(\mathbf{x})$ 与 $g(\mathbf{x})$ 为合同二次型.

所谓合同, 就是指同一个二次型在可逆线性变换下的两个不同状态的联系.

性质

1. 反身性: $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}$
2. 对称性: $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$
3. 传递性: $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}, \mathbf{B} \simeq \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{C}$
4. 秩相等: 若 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$, 则 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$ (可逆线性变化不改变二次型的秩)

5. 和对称矩阵合同的矩阵一定是对称矩阵

5.1.4 标准形/规范形

定义

若二次型中只含有平方项, 没有交叉项, 形如

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \dots + d_nx_n^2$$

的二次型称为标准形 (合同标准形).

若标准形中, 系数 d_i 仅为 $1, -1, 0$ 的二次型称为规范形.

求法

我们的目标是使得 \mathbf{B} 矩阵是一个对角矩阵, 即只有主对角线有元素, 才可以得到标准型. 有两种方法:

1. 任何二次型可以通过配方法 (作可逆线性变换) 化为标准形和规范形, 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (不一定是特征值 λ):

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

此外, 它还可以转化成规范形:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

2. 任何二次型可以通过正交变换化成标准形 (见5.2.1), 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (特征值不一定是 $0, 1, -1$):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

5.1.5 惯性定理

定义

无论选取什么样的线性变换 (配方还是正交合同变换), 将二次型化为标准形或者规范形, 其正项系数个数 p , 负项个数 q 都是不变的, p 称为正惯性指数, q 称为负惯性指数.

性质

1. 若二次型的秩为 r , 则 $r = p + q$, 可逆线性变换不改变正/负惯性指数
2. 两个二次型 (或者实对称矩阵) 合同的条件是有相同的正/负惯性指数

5.1.6 正定二次型及其判别

定义

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 若对于任意的 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \neq \mathbf{0}$ 均有二次型大于 0, 即 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, 则称 f 为正定二次型, \mathbf{A} 为正定矩阵.

条件

1. 充要条件:

n 元二次型正定 \Leftrightarrow 对于任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$

$\Leftrightarrow f$ 的正惯性指数 $p = n$ (所有的系数全正, 即对角线元素全正)

\Leftrightarrow 存在可逆矩阵 \mathbf{D} , 使 $\mathbf{A} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$

$\Leftrightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{E}$

$\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的特征值 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$

$\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 的全部顺序主子式均大于 0 (左上角行列式)

顺序主子式:

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, 则:

$$|\mathbf{A}_k| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

称为 n 阶矩阵 \mathbf{A} 的 k 阶顺序 (或左上角) 主子式, 当 k 取 $1, 2, \dots, n$ 时, 就得到 \mathbf{A} 的 n 个顺序主子式.

2. 必要条件:

$$n \text{元二次型正定} \Leftrightarrow a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Leftrightarrow |\mathbf{A}| > 0$$

5.2 习题

5.2.1 标准形/规范形

用正交变换法化二次型为标准形

1. 写出二次型矩阵 \mathbf{A}
2. 求 \mathbf{A} 的特征值 λ 和特征向量 ξ
3. 将 ξ_1, \dots, ξ_n 通过正交化/单位化成正交矩阵 $\mathbf{Q} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$
4. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{y} \Rightarrow f(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

注意 正交变换只能化二次型为标准形, 不能化为规范形 (除非特征值都是 $0, 1, -1$)