重点整理

East China University of Science and Technology

目录

第一章　行列式

1. $k \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 与矩阵不同, 牢记!

第二章　矩阵

1. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$

2. $\boldsymbol{E}_{31}(k)$ 的含义是第 1 行的 k 倍加到第 3 行, 或者是第 3 列的 k 倍加到第 1 列

3. $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$

4. $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-2}\boldsymbol{A}^*$

5. $|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow$ 满秩 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可逆

第三章 向量

1. 判别线性相关性的七大定理:

   (a) 充分必要条件 (两个):

      i. $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}$ 有非零解

      ii. 向量组中至少有一个向量能够被其他的向量线性表出

   (b) 与解线性方程组有关的定理 (两个):

      i. $\Rightarrow$: 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性无关, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表示, 且表示方法唯一

      ii. $\Leftarrow$: 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表示, 则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解, 且 $r([\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}])=r([\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\beta}])$

   (c) 整体性和局部性 (两个):

      i. 向量
      如果低维是无关的, 则增加维数必无关
      如果高维是相关的, 则减少维数必相关

      ii. 向量组
      如果整体是无关的, 则部分必无关
      如果部分是相关的, 则整体必相关

   (d) 以少表多, 多的相关
   如果向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...\boldsymbol{\alpha_s}$ 能被向量组 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...\boldsymbol{\beta_t}$ 线性表示, 且 $t<s$, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...\boldsymbol{\alpha_s}$ 线性相关

2. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...\boldsymbol{\alpha_s}$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...\boldsymbol{\beta_t}$, 若后者的所有元素都能被前者线性表出, 则:

$$r([\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...\boldsymbol{\beta_t}])\leq r([\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...\boldsymbol{\alpha_s}])$$

3. $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换得到了 $\boldsymbol{B}$, 则:

   (a) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的相应部分的列向量具有相同的线性相关性 (这条性质为后面解线性方程打下基础)

   (b) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组是等价向量组 (可以互相线性表示)

第四章　线性方程组

1. 齐次线性方程组:
   (a) $m > n \Rightarrow$ 有非零解
   (b) $m = n$:
      i. $r(\boldsymbol{A}) = m \Rightarrow$ 满秩 $\Rightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0 \Rightarrow$ 线性无关 $\Rightarrow$ 唯一零解
      ii. $r(\boldsymbol{A}) = r < m \Rightarrow$ 不满秩 $\Rightarrow |\boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow$ 线性相关 $\Rightarrow$ 有非零解, 且有 $m - r$ 个线性无关解 (也可以换一种解释: 由于 $r(\boldsymbol{A}) = r < m \Rightarrow$ 独立方程组的个数为 r, 由于 $r < m$, 所以有非零解
2. 非齐次线性方程组
   (a) $r(\boldsymbol{A}) \neq r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) \Rightarrow$ 无解
   (b) $r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) = m \Rightarrow$ 唯一解
   (c) $r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) = r < m \Rightarrow$ 无穷解

第五章　特征值和特征向量

1. 特征值的性质:
   (a) 特征值的数量为 n (包括重根)
   (b) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(\boldsymbol{A})$
   (c) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |\boldsymbol{A}|$
2. 特征向量的性质:
   (a) 线性无关的特征向量的数量 $\leq n$
   (b) 每个特征值至少有一个特征向量
   (c) k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量
   (d) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 线性无关
   (e) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是属于同一特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{\xi_1} + k_2\boldsymbol{\xi_2}$ 仍然是特征值 λ 的特征向量
3. 矩阵相似的性质 (假设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$)
   (a) 反身性, 对称性, 传递性
   (b) 相等
      i. $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$
      ii. $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$
      iii. 特征值相等
      iv. 特征多项式相等
   (c) 函数 (注意是相似不是相等)
      i. $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$
      ii. $\boldsymbol{A^T} \sim \boldsymbol{B^T}$
      iii. 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{A^{-1}} \sim \boldsymbol{B^{-1}}$
      iv. 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{A^*} \sim \boldsymbol{B^*}$
4. 相似对角矩阵的条件
   (a) 充要条件

i. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量

ii. n 维特征值对应 n 维解空间

(b) 充分条件

i. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值

ii. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵

5. 实对称矩阵的性质

(a) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 正交

(b) 实对称矩阵一定相似于对角阵

(c) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{PAP^{-1}} = \boldsymbol{\Lambda}$

(d) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q^{-1}AQ} = \boldsymbol{Q^{T}AQ} = \boldsymbol{\Lambda}$

其中, $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的定义和对角矩阵里面的 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 相同

第六章　二次型

1. 二次型

   (a) 代数表达形式

$$
\begin{aligned}
f(x) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 ... + a_{1n}x_1x_n \\
+a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + ... + a_{2n}x_2x_n \\
+ \dots \\
+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

   (b) 矩阵表达形式

$$
f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
$$

2. 合同

   (a) (可逆) 线性变换

   对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, 若令

$$
\begin{cases}
x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\
x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\
\dots \\
x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n,
\end{cases}
$$

   记 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

   则上式可以写为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$. 上式称为从 $y_1, y_2, ..., y_n$ 到 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的线性变换. 如果 $\boldsymbol{C}$ 可逆, 则称为可逆线性变换.

(b) 合同

我们可以把上式 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 代入到 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 可以得到 $f(\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})$. 其中 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 记为 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$ (与相似不同的是这里是转置而不是取逆)

合同的几个性质:

i. 反身性, 对称性, 传递性
ii. 可逆线性变化不改变矩阵的秩
iii. 与对称矩阵合同的矩阵一定也是对称矩阵

3. 标准形和规范形

标准形是二次型中非二次项的系数全为 0, 规范形是在标准形的基础上规定二次型的系数都为 1, 0 或者 -1.

化为标准形有两种方法:

(a) 配方法

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\Lambda}$$

其中, $\boldsymbol{\Lambda}$ 的形式为:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

注意, 这里不一定是特征值, 不是你以为的 $\boldsymbol{\Lambda}$.

(b) 利用实对称矩阵的性质

由于实对称矩阵一定存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$, 故:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$$

其中, $\boldsymbol{\Lambda}$ 的形式为:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

可以将上述标准形进一步操作得到规范形.

4. 惯性定理

将二次型合同标准化后得到的标准形中, 正数项的个数设为 p, 负数项的个数设为 q, 有如下性质:

(a) $r(\boldsymbol{A}) = p + q$

(b) 两个矩阵合同的条件是具有相同的惯性指数

5. 正定二次型

   对于任一 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$, 称 f 为正定二次型, $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

   (a) 充要条件:

      i. 对于任一 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 有 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$
      ii. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{D}$, 使 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}$
      iii. f 的正惯性指数为 n
      iv. $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{E}$
      v. $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i > 0$
      vi. $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式都 > 0

   (b) 必要条件

      i. $|\boldsymbol{A}| > 0$
      ii. $a_{ii} > 0$