重点整理

East China University of Science and Technology

目录

第一章　行列式

1. $k \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 与矩阵不同, 牢记!

第二章　矩阵

1. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$

2. $\boldsymbol{E}_{31}(k)$ 的含义是第 1 行的 k 倍加到第 3 行, 或者是第 3 列的 k 倍加到第 1 列

3. $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$

4. $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-2}\boldsymbol{A}^*$

5. $|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow$ 满秩 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可逆

第三章 向量

1. 判别线性相关性的七大定理:

   (a) 充分必要条件 (两个):

      i. $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}$ 有非零解

      ii. 向量组中至少有一个向量能够被其他的向量线性表出

   (b) 与解线性方程组有关的定理 (两个):

      i. $\Rightarrow$: 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_n}$ 线性无关, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_n}, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表示

      ii. $\Leftarrow$: 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表示, 则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有解, 且 $r([\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_n}]) = r([\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_n}, \boldsymbol{\beta}])$

   (c) 整体性和局部性 (两个):

      i. 向量
      如果低维是无关的, 则增加维数必无关
      如果高维是相关的, 则减少维数必相关

      ii. 向量组
      如果整体是无关的, 则部分必无关
      如果部分是相关的, 则整体必相关

   (d) 以少表多, 多的相关
   如果向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ...\boldsymbol{\alpha_s}$ 能被向量组 $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, ...\boldsymbol{\beta_t}$ 线性表示, 且 $t < s$, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ...\boldsymbol{\alpha_s}$ 线性相关

2. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ...\boldsymbol{\alpha_s}$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, ...\boldsymbol{\beta_t}$, 若后者的所有元素都能被前者线性表出, 则:

$$r([\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, ...\boldsymbol{\beta_t}]) \leq r([\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ...\boldsymbol{\alpha_s}])$$

3. $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换得到了 $\boldsymbol{B}$, 则:

   (a) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的相应部分的列向量具有相同的线性相关性 (这条性质为后面解线性方程打下基础)

   (b) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组是等价向量组 (可以互相线性表示)

第四章　线性方程组

1. 齐次线性方程组:
    (a) $m > n \Rightarrow$ 有非零解
    (b) $m = n$:
        i. $r(\boldsymbol{A}) = m \Rightarrow$ 满秩 $\Rightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0 \Rightarrow$ 线性无关 $\Rightarrow$ 唯一零解
        ii. $r(\boldsymbol{A}) = r < m \Rightarrow$ 不满秩 $\Rightarrow |\boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow$ 线性相关 $\Rightarrow$ 有非零解, 且有 $m - r$ 个线性无关解 (也可以换一种解释: 由于 $r(\boldsymbol{A}) = r < m \Rightarrow$ 独立方程组的个数为 r, 由于 $r < m$, 所以有非零解

        i. $r(\boldsymbol{A}) \neq r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) \Rightarrow$ 无解
        ii. $r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) = m \Rightarrow$ 唯一解
        iii. $r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) = r < m \Rightarrow$ 无穷解

第五章　特征值和特征向量

1. 特征值的性质:
   (a) 特征值的数量为 n (包括重根)
   (b) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(\boldsymbol{A})$
   (c) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |\boldsymbol{A}|$
2. 特征向量的性质:
   (a) 线性无关的特征向量的数量 $\leq n$
   (b) 每个特征值至少有一个特征向量
   (c) k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量
   (d) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 线性无关
   (e) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是属于同一特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{\xi_1} + k_2\boldsymbol{\xi_2}$ 仍然是特征值 λ 的特征向量
3. 矩阵相似的性质 (假设 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$)
   (a) 反身性, 对称性, 传递性
   (b) 相等
      i. $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$
      ii. $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$
      iii. 特征值相等
      iv. 特征多项式相等
   (c) 函数 (注意是相似不是相等)
      i. $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$
      ii. $\boldsymbol{A^T} \sim \boldsymbol{B^T}$
      iii. 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{A^{-1}} \sim \boldsymbol{B^{-1}}$
      iv. 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, $\boldsymbol{A^*} \sim \boldsymbol{B^*}$
4. 相似对角矩阵的条件
   (a) 充要条件

  i. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量
  ii. n 维特征值对应 n 维解空间
(b) 充分条件
  i. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值
  ii. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵

5. 实对称矩阵的性质
   (a) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是属于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征向量, 则 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 正交
   (b) 实对称矩阵一定相似于对角阵
   (c) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{PAP^{-1}} = \boldsymbol{\Lambda}$
   (d) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q^{-1}AQ} = \boldsymbol{Q^{T}AQ} = \boldsymbol{\Lambda}$

   其中, $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的定义和对角矩阵里面的 $\boldsymbol{\Lambda}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 相同