

Chapter 1

特征值和特征向量

1.1 基础知识

1.1.1 特征值和特征向量

性质

1. 特征值的性质
2. 特征向量的性质
 - (a) k 重特征值 Λ 至多只有 k 个线性无关的向量
 - (b) 若 ξ_1, ξ_2 是 A 的属于不同特征值的特征的特征向量, 则 ξ_1, ξ_2 线性无关
 - (c) 若 ξ_1, ξ_2 是 A 的属于同一特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\xi_1 + k_2\xi_2$ 仍然是 A 的属于特征值 λ 的特征向量

1.1.2 矩阵的相似对角化

定义

设 n 阶矩阵 A , 存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 则 $A \sim \Lambda$, Λ 是 A 的相似标准形.

$$P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

条件

1. n 阶矩阵 A 可以相似对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量 ($|P| \neq 0$)
2. n 阶矩阵 A 可以相似对角化 $\Leftrightarrow A$ 对应于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量 (n 重特征值对应的解空间是 n 维)
3. n 阶矩阵 A 有 n 个不同特征值 $\Rightarrow A$ 可以相似对角化 (由特征向量的性质 3 可以推出)
4. n 阶矩阵 A 为实对称矩阵 $\Rightarrow A$ 可以相似对角化

上述总共两个充要条件, 两个充分条件.

1.1.3 实对称矩阵

定义

若 $A^T = A$, 则 A 为是对称矩阵, 如果在此基础上 A 的元素都是实数, 则 A 是实对称矩阵.

性质

1. 实对称矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量相互正交
2. 实对称矩阵 A 必相似于对角矩阵