



# Linear Algebra

East China University of Science and Technology

# 目录

|            |                   |           |
|------------|-------------------|-----------|
| <b>第一章</b> | <b>行列式</b>        | <b>4</b>  |
| 1.1        | 基础知识              | 4         |
| 1.1.1      | 行列式               | 4         |
| 1.2        | 习题                | 6         |
| 1.2.1      | 行列式的计算            | 6         |
| 1.2.2      | 余子式和代数余子式的线性组合的计算 | 7         |
| <b>第二章</b> | <b>矩阵</b>         | <b>8</b>  |
| 2.1        | 基础知识              | 8         |
| 2.1.1      | 矩阵                | 8         |
| 2.1.2      | 矩阵的逆              | 11        |
| 2.1.3      | 伴随矩阵              | 11        |
| 2.1.4      | 初等矩阵              | 12        |
| 2.1.5      | 等价矩阵              | 12        |
| 2.1.6      | 矩阵的秩              | 13        |
| 2.1.7      | 常见运算汇总            | 13        |
| 2.2        | 习题                | 14        |
| 2.2.1      | 普通矩阵的运算           | 14        |
| 2.2.2      | 伴随矩阵的计算           | 16        |
| 2.2.3      | 初等变换和初等矩阵         | 16        |
| 2.2.4      | 矩阵方程              | 16        |
| 2.2.5      | 矩阵的秩和等价矩阵         | 16        |
| <b>第三章</b> | <b>向量组</b>        | <b>17</b> |
| 3.1        | 基础知识              | 17        |

|                       |           |
|-----------------------|-----------|
| 目 录                   | 2         |
| 3.1.1 向量              | 17        |
| 3.1.2 线性组合和线性相关       | 17        |
| 3.1.3 极大线性无关组和等价向量组   | 19        |
| 3.1.4 等价向量组           | 19        |
| 3.1.5 向量组的秩           | 20        |
| 3.2 习题                | 20        |
| 3.2.1 向量组的线性表出和线性相关   | 20        |
| 3.2.2 极大线性无关组及向量组秩的求法 | 21        |
| <b>第四章 线性方程组</b>      | <b>22</b> |
| 4.1 基础知识              | 22        |
| 4.1.1 齐次线性方程组         | 22        |
| 4.1.2 非齐次线性方程组        | 24        |
| 4.2 习题                | 25        |
| 4.2.1 具体型线性方程组        | 25        |
| 4.2.2 抽象型线性方程组        | 25        |
| 4.2.3 两个方程组的公共解       | 26        |
| 4.2.4 同解方程组           | 26        |
| <b>第五章 特征值和特征向量</b>   | <b>27</b> |
| 5.1 基础知识              | 27        |
| 5.1.1 特征值和特征向量        | 27        |
| 5.1.2 矩阵的相似           | 28        |
| 5.1.3 矩阵的相似对角化        | 28        |
| 5.1.4 实对称矩阵           | 29        |
| 5.2 习题                | 30        |
| 5.2.1 具体型矩阵的特征值和特征向量  | 30        |
| 5.2.2 抽象型矩阵的特征值和特征向量  | 30        |
| <b>第六章 二次型</b>        | <b>31</b> |
| 6.1 基础知识              | 31        |
| 6.1.1 二次型             | 31        |
| 6.1.2 线性变换            | 32        |
| 6.1.3 矩阵合同            | 32        |
| 6.1.4 标准形/规范形         | 33        |

|                         |           |
|-------------------------|-----------|
| 目录                      | 3         |
| 6.1.5 惯性定理              | 34        |
| 6.1.6 正定二次型及其判别         | 34        |
| 6.2 习题                  | 35        |
| 6.2.1 标准形/规范形           | 35        |
| <b>第七章 QA</b>           | <b>36</b> |
| 7.1 行列式                 | 36        |
| 7.1.1 行列式的计算            | 36        |
| 7.1.2 余子式和代数余子式的线性组合的计算 | 37        |
| 7.2 矩阵                  | 37        |
| 7.2.1 矩阵的基本运算           | 37        |
| 7.3 向量                  | 38        |
| 7.3.1 极大线性无关组及向量组秩的求法   | 38        |

# 第一章 行列式

## 1.1 基础知识

### 1.1.1 行列式

定义

#### 1. 几何定义

$n$  阶行列式为  $n$  个  $n$  维向量组成的  $n$  维图形的体积.

#### 2. 逆序数法定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

总共有  $n!$  个项.

#### 3. 展开定义

代数余子式:  $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathbf{M}_{ij}$

按第  $i$  行展开:  $a_{i1}\mathbf{A}_{i1} + a_{i2}\mathbf{A}_{i2} + \dots + a_{in}\mathbf{A}_{in}$

注意, 行列式的某行 (列) 元素分别乘另一行 (列) 的元素的代数余子式后再求和为 0

性质

1.  $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$ , 若  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , 则矩阵  $\mathbf{A}$  为对称矩阵, 若  $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ , 则矩阵  $\mathbf{A}$  为正交矩阵
2. 若行列式中某行 (列) 全部元素为 0, 行列式为 0

3. 若行列式中某行 (列) 元素有公因子  $k(k \neq 0)$ ,  $k$  可以提到行列式外面
4. 行列式某行 (列) 元素均是两个元素之和, 可以拆成两个行列式之和
5. 两行 (列) 互换, 值取反
6. 两行 (列) 元素对应成比例, 行列式为 0
7. 行列式中某行 (列)  $k$  倍加到另一行 (列), 值不变

### 重要行列式

1. 主对角线行列式 (上/下三角形行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

2. 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$$

3. 拉普拉斯展开式

$A$  为  $m$  阶方阵,  $B$  为  $n$  阶方阵

$$\text{主对角线: } \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\text{副对角线: } \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$$

## 4. 范特蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

注意, 范氏行列式中全 1 行一定在上方.

## 1.2 习题

## 1.2.1 行列式的计算

## 具体型行列式

## 1. 化基本形法

(a) 直接展开: 适用于含 0 较多的行 (列)

(b) 爪型: 斜爪消平爪

(c) 异爪型:

i. 阶数不高, 直接展开

ii. 阶数高, 用递推 (尤其适用于一横型行列式)

(d) 行 (列) 和相等: 三种方法

i. 提取公因子: 将其余行全都加到第一行上去, 提取公因子

ii. 加边法: 例如矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 - b & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 - b & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 - b & \dots & a_n \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ll 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n - b \end{bmatrix}$$

加边后矩阵的值不变, 可以将第 1 行的  $-1$  倍加到其他行, 再用其他行的  $(-1/b)$  倍加到第一列.

iii. 化爪形行列式

(e) 消零化基本形:

(f) 拉普拉斯行列式: 一般为“X 字形”

(g) 范特蒙德行列式: 化为范式行列式, 看第二行写结果

2. 递推法

3. 行列式表示的函数和方程

### 抽象型行列式

1. 目标行列式和矩阵的相互转换:  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

2. 与特征方程相结合

### 1.2.2 余子式和代数余子式的线性组合的计算

根据行列式的展开定义, 有:

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \begin{bmatrix} & & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & & \dots & & \end{bmatrix}$$

则有:

$$k_1A_{i1} + k_2A_{i2} + \dots + k_{i1}A_{in} = \begin{bmatrix} & & \dots & & \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & \dots & k_{in} \\ & & \dots & & \end{bmatrix}$$



## 第二章 矩阵

### 2.1 基础知识

#### 2.1.1 矩阵

##### 本质

矩阵的本质是表达系统信息.

##### 定义

由  $m \times n$  个数排成的  $m$  行  $n$  列的矩形表格. 当  $m = n$  的时候称  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶方阵.  
有两个矩阵, 如果  $m, n$  相同, 称为同型矩阵.

##### 运算

1. 相等: 同型矩阵且对应元素相等
2. 加法: 同型矩阵对应元素相加
3. 数乘矩阵 (重要, 与行列式不同)

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

加法运算和数乘运算统称为矩阵的线性运算, 满足以下运算规律:

- (a) 交换律:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- (b) 结合律:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

(c) 分配律:  $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}, (k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{B}$

(d) 数和矩阵相乘的结合律:  $k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A} = l(k\mathbf{A})$

4. 乘法:  $\mathbf{A}$  为  $m \times s$  矩阵,  $\mathbf{B}$  为  $s \times n$  矩阵, 设  $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})_{m \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

乘法满足下列运算规律:

(a) 结合律:  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

(b) 分配律:  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

(c) 数乘与矩阵乘积的结合律:  $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$

5. 转置矩阵: 行列互换

6. 向量的内积和正交

(a) 内积:  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T, \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_n]^T$ , 内积为

$$\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

记为  $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(b) 正交: 内积为 0

(c) 模: 向量的长度, 记作  $\|\boldsymbol{\alpha}\|$

7. 标准正交向量组: 所有成员两两正交且模都为 1, 即:

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j = 1 \quad (i = j)$$

称  $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$  为单位正交向量组.

8. 标准正交矩阵: 由标准正交向量组组成的矩阵

9. 施密特正交化 (正交规范化)

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1$$

上式得到的是正交向量组, 再进行单位化:

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$$

得到标准正交向量组.

10. 幂:  $A$  为一个  $n$  阶方阵, 则  $A^n = AA \dots AA$  (共  $n$  个  $A$ )

11. 方阵乘积的行列式

$$|AB| = |A||B|$$

### 重要矩阵

1. 零矩阵

2. 单位矩阵

3. 数量矩阵: 数  $k$  和单位矩阵的乘积

4. 对角矩阵: 非主对角线元素均为 0 的矩阵

5. 上 (下) 三角矩阵

6. 对称矩阵:  $A^T = A$

7. 反对称矩阵:  $A^T = -A$

8. 标准正交矩阵:  $A^T A = E$ , 即行 (列) 向量的组合是标准正交向量组

9. 分块矩阵

分块矩阵的加法和数乘与行列式不同:

(a) 加法

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

(b) 数乘

$$k \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{bmatrix}$$

(c) 乘法: 与矩阵乘法相同

## 2.1.2 矩阵的逆

## 定义

若  $AB = BA = E$ , 则矩阵  $A$  可逆,  $B$  为  $A$  的逆矩阵.

## 性质

设  $A, B$  为同阶可逆矩阵

1.  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$  ( $k \neq 0$ )
2.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  ( $AB$ 也可逆)
3.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  ( $A^T$ 也可逆)
4.  $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$
5.  $(A^{-1})^{-1} = A$
6.  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

推导:  $|A^{-1}A| = |A^{-1}||A| = 1$

## 2.1.3 伴随矩阵

## 定义

矩阵  $A$  的伴随矩阵为:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

其中  $A$  为对应元素的代数余子式.

## 性质

1.  $AA^* = A^*A = |A|E$
2.  $|A^*| = |A|^{n-1}$
3.  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
4.  $(A)^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

### 2.1.4 初等矩阵

#### 定义

单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵, 有三种:

1. 倍乘初等矩阵

$$\mathbf{E}_2(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 互换初等矩阵

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 倍加初等矩阵

$$\mathbf{E}_{31}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意是第一行的  $k$  倍加到第三行或者是第三列的  $k$  倍加到第一列 (别搞错顺序).

#### 性质

1.  $[\mathbf{E}_{ij}]^T = \mathbf{E}_{ij}, [\mathbf{E}_i(k)]^T = \mathbf{E}_i(k), [\mathbf{E}_{ij}(k)]^T = \mathbf{E}_{ji}(k)$
2.  $[\mathbf{E}_{ij}]^{-1} = \mathbf{E}_{ij}, [\mathbf{E}_i(k)]^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k}), [\mathbf{E}_{ij}(k)]^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$
3. 左行右列定理
4. 若  $\mathbf{A}$  为可逆矩阵, 则可以表示为有限个可逆矩阵的乘积

### 2.1.5 等价矩阵

若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为  $m \times n$  矩阵, 且  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$ , 则  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为等价矩阵, 记作  $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ .  
或者说, 若存在可逆矩阵  $\mathbf{P}_{m \times m}, \mathbf{Q}_{n \times n}$ , 使得  $\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$ , 则称  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为等价矩阵.

## 2.1.6 矩阵的秩

## 定义

设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{A}$  中最高阶非零子式的阶数为矩阵  $\mathbf{A}$  的秩. 如果  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  矩阵, 则  $r(\mathbf{A}) = n$  (满秩)  $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$  可逆.

## 初等变换不改变矩阵的秩

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PA}) = r(\mathbf{AQ}) = r(\mathbf{PAQ})$$

## 重要式子

设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{B}$  为满足有关矩阵运算要求的矩阵, 则

1.  $0 \leq r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$
2. 数乘:  $r(k\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$
3.  $r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$
4.  $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$
5.  $r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n & r(\mathbf{A}) = n \\ 1 & r(\mathbf{A}) = n - 1 \text{ 其中 } \mathbf{A} \text{ 为 } n \text{ 阶方阵} \\ 0 & r(\mathbf{A}) < n - 1 \end{cases}$

## 2.1.7 常见运算汇总

1.  $|\mathbf{kA}| = k^n |\mathbf{A}|$   
 $(\mathbf{kA})^T = \mathbf{kA}^T$   
 $(\mathbf{kA})^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{A}^{-1}$   
 $(\mathbf{kA})^* = k^{n-1} \mathbf{A}^*$
2.  $|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$   
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$   
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$   
 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* \neq \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$

3.  $|AB| = |A||B|$   
 $(AB)^T = B^T A^T$   
 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$   
 $(AB)^* = B^* A^*$
4.  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$   
 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$   
 $(A^T)^* = (A^*)^T$

## 2.2 习题

### 2.2.1 普通矩阵的运算

矩阵相乘时要注意矩阵的左右位置

常见的位置变换有:  $AA^* = A^*A = |A|E$ ,  $AE = EA = A$ ,  $AB = BA = E$  ( $A$  可逆,  $B$  为  $A$  的逆矩阵),  $AA^T = A^T A = E$  ( $A$  为正交矩阵).

$A^n$  的计算

1.  $A$  为方阵,  $r(A) = 1$ , 可以将矩阵拆开:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

2. 计算  $A^2, A^3$  等, 往往会得到幂零矩阵  $A(A^n = 0(n \geq r))$
3.  $A^n = (B + C)^n$ , 2 项展开
4. 转化成对角矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nm} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a_{11}^n & & & \\ & a_{22}^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nm}^n \end{bmatrix}$$

## 5. 分块矩阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^n \end{bmatrix}$$

 $\mathbf{A}^{-1}$  的计算

## 1. 定义法 (常用于求抽象矩阵)

(a) 根据  $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ , 找到一个逆矩阵  $\mathbf{B}$  即可

(b) 将  $\mathbf{A}$  分解为若干个可逆矩阵的乘积, 即若  $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ , 且  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  可逆, 则  $\mathbf{A}$  可逆.

(c) 一些简单分块矩阵的逆. 若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为分块矩阵, 则有:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

## (d) 一些特殊的矩阵

## i. 对角矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nm} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & & & \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nm}^{-1} \end{bmatrix}$$

## ii. 只有副对角线元素不为 0 的矩阵

$$\begin{bmatrix} & & & a_{1m} \\ & & a_{2,m-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & 1/a_{n1} \\ & & 1/a_{n-1,2} & \\ & \ddots & & \\ 1/a_{1m} & & & \end{bmatrix}$$

## 2. 伴随矩阵法

若  $|\mathbf{A}| \neq 0$ , 则  $\mathbf{A}$  可逆, 且  $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$

## 3. 初等矩阵法

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$$



### 2.2.2 伴随矩阵的计算

通常结合伴随矩阵的五个公式考:

$$1. (k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^*$$

$$2. \mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$$

$$3. |\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$$

$$4. (\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$$

$$5. \mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$$

$$6. r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n & r(\mathbf{A}) = n \\ 1 & r(\mathbf{A}) = n-1 \text{ 其中 } \mathbf{A} \text{ 为 } n \text{ 阶方阵} \\ 0 & r(\mathbf{A}) < n-1 \end{cases}$$

题目中会给你一个等式, 按照上面的公式化简之后会得到一个较简单的等式.

### 2.2.3 初等变换和初等矩阵

这里会考的是左行右列定理和三种行/列初等变换, 以及要清楚  $\mathbf{E}_{31}(k)$  的含义是第 3 列的  $k$  倍加到第 1 列, 或者是第 1 行的  $k$  倍加到第 3 行 (注意行和列的区别).

### 2.2.4 矩阵方程

含有未知数的方程被称为矩阵方程, 方程中会含有伴随矩阵, 逆矩阵, 转置矩阵等各种类型的矩阵, 要学会把其中的一部分消掉化简.

### 2.2.5 矩阵的秩和等价矩阵

这里要注意等价的含义: 两个矩阵的秩相等, 或者说存在两个可逆矩阵  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ , 使得  $\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$  成立.

## 第三章 向量组

### 3.1 基础知识

#### 3.1.1 向量

定义

$n$  个数构成的一个有序数组  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  称为一个  $n$  维向量, 记为  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ , 并称  $\alpha$  为  $n$  维行向量,  $\alpha^T$  为  $n$  维列向量. 其中  $a_i$  称为向量  $\alpha$  或者  $\alpha^T$  的第  $i$  个分量.

#### 3.1.2 线性组合和线性相关

定义

1. 线性组合: 设有  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  和  $m$  个数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ . 则向量  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$  为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合
2. 线性表出: 若向量  $\beta$  能表示成向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合, 即  $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ , 则称  $\beta$  能够被向量组线性表出
3. 线性相关: 存在一组不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 使得下式成立:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

上式可以进一步写为  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ , 这个式子有四种形式:

$$Ax = \mathbf{0}$$

或者矩阵形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者向量形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者线性方程组形式:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_m a_{1m} = 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_m a_{2m} = 0 \\ \cdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_m a_{nm} = 0 \end{cases}$$

4. 线性无关: 只有当  $k_1, k_2, \dots, k_m$  全为 0 的时候, 才能使上式成立

### 判别相关性定理

1. 相关充要条件: 向量组中至少有一个向量能被其余的  $n-1$  的向量线性表出
2. 相关充要条件: 方程  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有非  $\mathbf{0}$  解
3. 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 而向量组  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出, 且表示方法唯一
4. 如果向量  $\beta$  能够由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出, 则  $r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]) = r([\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m])$
5. 以少表多, 多的相关: 如果向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  能够由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 且  $t > s$ , 则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关
6. 向量组的部分与整体:

如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中有一部分向量线性相关, 则整体也线性相关;

如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则其任一部分线性无关

## 7. 向量的部分与整体:

如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则将所有向量扩展到  $s$  维得到的向量组  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*$  也是线性无关的;

如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则将所有向量缩减到  $k$  维得到的向量组  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*$  也是线性相关的

## 3.1.3 极大线性无关组和等价向量组

## 定义

在向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中, 存在向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$ , 满足以下条件:

1.  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  线性无关
2. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中的任一向量能够由向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  线性表示

则称向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  为原向量组的极大线性无关组.

## 3.1.4 等价向量组

## 定义

若有两个向量组 (1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和 (2)  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ , 这两个向量组中的任一元素都可以由另一向量组线性表出, 则称这两个向量组为等价向量组.

## 性质

1. 反身性:  $(1) \simeq (1)$
2. 对称性:  $(1) \simeq (2) \Leftrightarrow (2) \simeq (1)$
3. 传递性:  $(1) \simeq (2), (2) \simeq (3) \Rightarrow (1) \simeq (3)$
4. 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组
5. 等价向量组有相等的秩

### 3.1.5 向量组的秩

#### 定义

向量组的秩是极大线性无关组成员的个数, 是线性无关向量的个数, 是向量空间的维数, 是最简化的向量数.

#### 性质

1. 三秩相等:  $r(\mathbf{A})$  矩阵的秩  $= \mathbf{A}$  的行秩  $= \mathbf{A}$  的列秩
2. 若  $\mathbf{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \mathbf{B}$ , 则
  - (a)  $\mathbf{A}$  的行向量组和  $\mathbf{B}$  的行向量组是等价向量组
  - (b)  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的任何相应部分列向量具有相同的线性相关性
3. 设向量组 (1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和 (2)  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ , 若  $\beta_i$  均可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出, 则  $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$

可以这么理解: 秩其实就是一种多样性, 多样的数据的集合肯定能够表示单一的数据的集合, 即如果秩越大, 则这些数据的多样性就越大. 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩一定大.

## 3.2 习题

### 3.2.1 向量组的线性表出和线性相关

这里主要考的是七大判别定理, 简单的可以说成:

1. 两个充要条件: 至少有一个向量能被其他向量线性表示;  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  有非  $\mathbf{0}$  解
2. 与非齐次线性方程组的解相关的判定: 建议结合第四章非齐次线性方程组的解. 若  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  无关, 且  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$  相关, 则  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示, 且表示方法唯一. 若  $\beta$  可以由  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  线性表示, 则  $r([\alpha_1, \dots, \alpha_m]) = r([\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta])$
3. 以少表多, 多的相关
4. 向量个数的扩/缩和向量维度的扩/缩

如果遇到证明线性相关性或者线性无关性, 可以转化成  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  或者  $\mathbf{Ax} = \beta$  解的问题.

### 3.2.2 极大线性无关组及向量组秩的求法

这类问题用到最多的定理：[初等变换不会改变矩阵的秩](#)，或者说一个矩阵乘以可逆矩阵不会改变其线性相关性（可逆矩阵也是由初等矩阵经过初等变换形成的）。

求极大线性无关组的方法是通过高斯消元法得到行阶梯型矩阵，再找到阶梯列，该列对应的向量组成的就是极大线性无关组（实际上也是用到了“初等变换不会改变对应列的线性相关性”）。

## 第四章 线性方程组

### 4.1 基础知识

#### 4.1.1 齐次线性方程组

设有一齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} = 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{2m} = 0 \\ \dots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} = 0 \end{cases}$$

其矩阵形式为:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### 有解的条件

由上矩阵可以得到, 未知数的个数为  $m$ , 方程的个数为  $n$ .

1. 若  $m > n$ , 则必有非零解

说明: 由于行秩 = 列秩, 故系数矩阵  $\mathbf{A}$  的秩  $r(\mathbf{A}) \leq n$ , 即  $r(\mathbf{A}) < m$

2. 若  $m = n$ , 用秩判断:

(a) 若  $r(\mathbf{A}) = m$  (向量组线性无关,  $|\mathbf{A}| \neq 0$ ), 则仅有零解

说明: 由于行秩 = 列秩, 所以列秩为  $m$ , 说明独立方程组个数为  $m$ .

- (b) 若  $r(\mathbf{A}) = r < m$  (向量组线性相关,  $|\mathbf{A}| = 0$ ), 则必有非零解, 且有  $m - r$  个线性无关解

说明: 由于行秩 = 列秩, 所以列秩为  $r$ , 说明独立方程组个数为  $r$ .

3. 若  $m < n$ ,

注: 如果方程  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  有无穷解, 则  $r(\mathbf{A}) < m$ , 对应上述 1, 2(b) 两种情况.

### 解的性质

若  $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{0}$ , 则  $k_1\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ , 其中  $k_1, k_2$  为任意常数.

### 基础解系和解的结构

1. 基础解系

设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$  满足:

- (a) 是方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的解
- (b) 线性无关
- (c) 方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的任一解均可由  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$  线性表出, 则称  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$  是方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的基础解系

2. 通解

设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$  是方程  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  的基础解系, 则  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r}$  是其通解.

### 求解方法

1.  $\mathbf{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \mathbf{B}$ , 其中  $\mathbf{B}$  为行阶梯形矩阵,  $r(\mathbf{A}) = r$

高斯消元法:

- ① 保证最靠左的非全 0 列的最上方为非 0 元素, 如果不是, 通过“互换”初等行变换使最靠左非全 0 列的最上方为非 0 元素
  - ② 通过“倍加”初等行变换使这个非 0 元素所在列的下方元素全为 0
  - ③ 遮住矩阵的最上面一行不看, 将其余行看作一个新矩阵, 重复①②, 直至矩阵化为阶梯形
- 高斯-若当消元法:

- ① 由高斯消元法得到阶梯形矩阵



- ② 对于每一个非全 0 行, 通过“倍乘”初等行变换使得这一行的非 0 首位为 1
- ③ 对于每一个非全 0 行, 通过“倍加”初等行变换使得这一行的非 0 首项所在列的上方元素全为 0, 直至得到简化行阶梯型矩阵
2. 按列找出一个秩为  $r$  的子矩阵, 剩余列位置对应的未知数设为自由变量
3. 算出共有  $m - r$  个线性无关解, 求出  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$ , 写出通解

#### 4.1.2 非齐次线性方程组

设有一非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{2m} = b_2 \\ \dots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} = b_n \end{cases}$$

其矩阵形式为:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

特殊的有矩阵  $\mathbf{A}$  的增广矩阵:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

有解的条件

1. 若  $r(\mathbf{A}) \neq r([\mathbf{A}, \mathbf{b}])$  ( $\mathbf{b}$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出), 方程组无解  
实际上,  $r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r(\mathbf{A}) + 1$ .
2. 若  $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = m$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \mathbf{b}$  线性相关), 方程组有唯一解<sup>3</sup>
3. 若  $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r < m$ , 方程组有无穷多解

### 解的性质

设  $\eta_1, \eta_2, \eta$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解,  $\xi$  是对应齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解, 则:

1.  $\eta_1 - \eta_2$  是  $Ax = 0$  的解
2.  $k\xi + \eta$  是  $Ax = b$  的解

### 求解方法

1. 写出  $Ax = b$  的导出方程组  $Ax = 0$ , 并求出其通解  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r}$
2. 求出  $Ax = b$  的一个特解  $\eta$
3.  $Ax = b$  的通解为  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r} + \eta$

## 4.2 习题

### 4.2.1 具体型线性方程组

#### 齐次线性方程组

齐次线性方程组求解方法已经在前面提及.

这里要强调的是要特别重视  $m - r$  解空间中线性无关向量的个数, 题目中可能会给你线性无关向量的个数, 反而求系数矩阵的秩. 其次, 如果求得  $m - r = 1$  的话, 令自由变量的值为 1, 这样就保证了线性无关性.

#### 非齐次线性方程组

非齐次线性方程组求解方法已经在前面提及.

这里要特别注意的是在求齐次线性方程组通解的时候, 要注意有多少的线性无关的解 ( $m - r$ ), 这个可以通过非齐次线性方程组的两个特殊解相减获得. 其次, 非齐次线性方程组的特殊解只要一个就可以了.

### 4.2.2 抽象型线性方程组

#### 方程组有解的条件和解的判别

齐次方程组有解的条件和非齐次方程组有解的条件已经在前面提及, 请背熟.

这里要特别强调齐次方程组下有无穷解的情况包括 1, 2b) 两种情况.

## 解的结构

齐次方程组解的结构是  $k_1\xi_1 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r}$ .

非齐次方程组解的结构是  $k_1\xi_1 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r} + \eta$ , 其中  $\eta$  为特解.

方程组  $Ax = 0$  的基础解系的讨论

基础解系其实就是几个线性无关的解的集合, 这个问题核心是线性无关解的个数  $m - r$ .

## 线性方程组系数矩阵列向量和解的关系

主要是理解一种思想: “方程组的解是描述列向量组中各向量之间数量关系的系数”.

## 4.2.3 两个方程组的公共解

齐次线性方程组  $A_{m \times n}x = 0$  和  $B_{m \times n}x = 0$  的公共解是满足方程  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0$  的解.

## 4.2.4 同解方程组

若两个方程组  $A_{n \times m}x = 0$  和  $B_{s \times m}x = 0$  有完全相同的解, 则称它们为同解方程组.

$$Ax = 0, Bx = 0 \text{ 为同解方程组} \Leftrightarrow r(A) = r(B) = r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right)$$

# 第五章 特征值和特征向量

## 5.1 基础知识

### 5.1.1 特征值和特征向量

#### 定义

设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶矩阵,  $\lambda$  是一个数, 若存在一个非零的  $n$  维向量  $\boldsymbol{\xi}$ , 使得  $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$ , 则称  $\boldsymbol{\xi}$  为  $\mathbf{A}$  的特征向量,  $\lambda$  为  $\mathbf{A}$  的特征值.

上式可以化简成  $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ ,  $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$  被称为特征多项式,  $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$  称为特征矩阵.

推导: 由于  $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ , 且  $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ , 说明方程  $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  有非零解 (构成特征矩阵的向量线性相关), 即  $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ .

#### 性质

##### 1. 特征值的性质

(a) 特征值的个数为  $n$  (包括重根)

(b)  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(\mathbf{A})$

(c)  $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\mathbf{A}|$

##### 2. 特征向量的性质

(a) 线性无关的特征向量的数量  $\leq n$

(b) 每个不同的特征值至少有一个特征向量

(c)  $k$  重特征值  $\lambda$  至多只有  $k$  个线性无关的特征向量

(d) 若  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  是  $\mathbf{A}$  的属于不同特征值的特征的特征向量, 则  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  线性无关

(e) 若  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  是  $\mathbf{A}$  的属于同一特征值  $\lambda$  的特征向量, 则  $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$  仍然是  $\mathbf{A}$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量

## 5.1.2 矩阵的相似

## 定义

设  $A$  和  $B$  为两个  $n$  阶方阵, 若存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$  成立, 则称  $A$  相似于  $B$ , 记成  $A \sim B$ .

## 性质

1.
  - 反身性:  $A \sim A$
  - 对称性:  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
  - 传递性:  $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$
2. 若  $A \sim B$ , 则有
  - $r(A) = r(B)$
  - $|A| = |B|$
  - $A, B$  具有相同的特征值
  - $A, B$  特征多项式的值相同
3. 若  $A \sim B$ , 则有
  - $f(A) \sim f(B)$
  - $A^T \sim B^T$
  - $A$  可逆,  $A^* \sim B^*$
  - $A$  可逆,  $A^{-1} \sim B^{-1}$

## 5.1.3 矩阵的相似对角化

## 定义

设  $n$  阶矩阵  $A$ , 存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 则  $A \sim \Lambda$ ,  $\Lambda$  是  $A$  的相似标准形.

$$P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

## 条件

如果说  $\mathbf{A}$  可以相似对角化, 即  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ , 其中  $\mathbf{P}$  可逆, 我们可以将等式两边左乘  $\mathbf{P}$ , 得到:

$$\mathbf{A}_{n \times n} [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n]_{n \times n} = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n]_{n \times n} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

即:

$$[\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_n] = [\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1, \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2, \dots, \lambda_n\boldsymbol{\xi}_n]$$

也即:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\xi}_i, i = 1, 2, \dots, n$$

1.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  可以相似对角化  $\Leftrightarrow \mathbf{A}$  有  $n$  个线性无关的特征向量 ( $|\mathbf{P}| \neq 0$ )

解释: 由于  $\mathbf{P}$  可逆, 故  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$  线性无关, 且上述过程可逆

2.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  可以相似对角化  $\Leftrightarrow n$  重特征值对应的解空间是  $n$  维 ( $\mathbf{A}$  对应于每个  $k_i$  重特征值都有  $k_i$  个线性无关的特征向量)

解释:  $k_i$  重特征值至多有  $k_i$  个线性无关的特征向量

3.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  有  $n$  个不同特征值  $\Rightarrow \mathbf{A}$  可以相似对角化

解释: 每个特征值至少有一个特征向量

4.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  为实对称矩阵  $\Rightarrow \mathbf{A}$  可以相似对角化

上述总共两个充要条件, 两个充分条件.

总结: 一个萝卜一个坑, 八重萝卜八个坑. 一个特征值一个特征向量, 八重特征值八个线性无关的特征向量.

## 5.1.4 实对称矩阵

## 定义

若  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ , 则  $\mathbf{A}$  为是对称矩阵, 如果在此基础上  $\mathbf{A}$  的元素都是实数, 则  $\mathbf{A}$  是实对称矩阵.

### 性质

1. 实对称矩阵  $\mathbf{A}$  的属于不同特征值的特征向量相互正交
2. 实对称矩阵  $\mathbf{A}$  必相似于对角矩阵, 必有可逆矩阵  $\mathbf{P} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ , 使得  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ .  
且存在正交矩阵  $\mathbf{Q}$ , 使得  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$

$$P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

## 5.2 习题

### 5.2.1 具体型矩阵的特征值和特征向量

求解具体性矩阵的特征值和特征向量的方法很固定:

1.  $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$  求出特征值
2. 将特征值回代到  $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  中, 运用齐次方程组求解方法求出  $\boldsymbol{\xi}$

特别注意, 求解出的  $\xi$  是一个解空间, 而不是基础解系, 即应该求出齐次方程组的通解. 如果题目中要求的是线性无关的特征向量的话, 求得基础解系即可.

其次, 在求特征值的时候, 如果行列式的值的次数特别高的话, 建议用试根法先求出一个特殊的根, 再用多项式除法求出另外的根.

### 5.2.2 抽象型矩阵的特征值和特征向量

牢记这个表格:

[illegible]

# 第六章 二次型

## 6.1 基础知识

### 6.1.1 二次型

定义

$n$  元变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次多项式称为  $n$  元二次型, 简称二次型. 二次型有两种常见表达形式:

1. 代数形式

$$\begin{aligned} f(x) = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 \dots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \dots \\ & + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

2. 矩阵形式

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则二次型可以表示为:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

必须强调的是, 这里的  $\mathbf{A}$  是一个对称矩阵.



## 6.1.2 线性变换

对于  $n$  元二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 若令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

$$\text{记 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

则上式可以写为  $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ . 上式称为从  $y_1, y_2, \dots, y_n$  到  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的线性变换. 如果  $\mathbf{C}$  可逆, 则称为可逆线性变换.

如果  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 令  $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ , 则有  $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{C}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y}$ .

记  $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ , 则有  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = g(\mathbf{y})$ . 至此我们通过线性变换得到了一个新的二次型  $g(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ .

## 6.1.3 矩阵合同

定义

设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为  $n$  阶矩阵, 若存在可逆矩阵  $\mathbf{C}$ , 使得:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$$

则称  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  合同, 记作  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$ . 此时称  $f(\mathbf{x})$  与  $g(\mathbf{x})$  为合同二次型.

所谓合同, 就是指同一个二次型在可逆线性变换下的两个不同状态的联系.

性质

1. 反身性:  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}$
2. 对称性:  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$
3. 传递性:  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}, \mathbf{B} \simeq \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{C}$
4. 秩相等: 若  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$ , 则  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$  (可逆线性变化不改变二次型的秩)

5. 和对称矩阵合同的矩阵一定是对称矩阵

### 6.1.4 标准形/规范形

#### 定义

若二次型中只含有平方项, 没有交叉项, 形如

$$d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \dots + d_nx_n^2$$

的二次型称为标准形 (合同标准形).

若标准形中, 系数  $d_i$  仅为  $1, -1, 0$  的二次型称为规范形.

#### 求法

我们的目标是使得  $\mathbf{B}$  矩阵是一个对角矩阵, 即只有主对角线有元素, 才可以得到标准型. 有两种方法:

1. 任何二次型可以通过配方法 (作可逆线性变换) 化为标准形和规范形, 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (不一定是特征值  $\lambda$ ):

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

此外, 它还可以转化成规范形:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

2. 任何二次型可以通过正交变换化成标准形 (见6.2.1), 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (特征值不一定是  $0, 1, -1$ ):

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

### 6.1.5 惯性定理

#### 定义

无论选取什么样的线性变换 (配方还是正交合同变换), 将二次型化为标准形或者规范形, 其正项系数个数  $p$ , 负项个数  $q$  都是不变的,  $p$  称为正惯性指数,  $q$  称为负惯性指数.

#### 性质

1. 若二次型的秩为  $r$ , 则  $r = p + q$ , 可逆线性变换不改变正/负惯性指数
2. 两个二次型 (或者实对称矩阵) 合同的条件是有相同的正/负惯性指数

### 6.1.6 正定二次型及其判别

#### 定义

$n$  元二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 若对于任意的  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \neq \mathbf{0}$  均有二次型大于 0, 即  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , 则称  $f$  为正定二次型,  $\mathbf{A}$  为正定矩阵.

#### 条件

1. 充要条件:

$n$  元二次型正定  $\Leftrightarrow$  对于任意  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , 有  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$

$\Leftrightarrow f$  的正惯性指数  $p = n$  (所有的系数全正, 即对角线元素全正)

$\Leftrightarrow$  存在可逆矩阵  $\mathbf{D}$ , 使  $\mathbf{A} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$

$\Leftrightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{E}$

$\Leftrightarrow \mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$

$\Leftrightarrow \mathbf{A}$  的全部顺序主子式均大于 0 (左上角行列式)

顺序主子式:

设  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ , 则:

$$|\mathbf{A}_k| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

称为  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  的  $k$  阶顺序 (或左上角) 主子式, 当  $k$  取  $1, 2, \dots, n$  时, 就得到  $\mathbf{A}$  的  $n$  个顺序主子式.

2. 必要条件:

$$n \text{元二次型正定} \Leftrightarrow a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Leftrightarrow |\mathbf{A}| > 0$$

## 6.2 习题

### 6.2.1 标准形/规范形

用正交变换法化二次型为标准形

1. 写出二次型矩阵  $\mathbf{A}$
2. 求  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda$  和特征向量  $\xi$
3. 将  $\xi_1, \dots, \xi_n$  通过正交化/单位化成正交矩阵  $\mathbf{Q} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$
4. 令  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{y} \Rightarrow f(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

**注意** 正交变换只能化二次型为标准形, 不能化为规范形 (除非特征值都是  $0, 1, -1$ )

## 第七章 QA

### 7.1 行列式

#### 7.1.1 行列式的计算

##### 具体型行列式

- 一横型行列式

例题 一横形行列式 
$$\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 \\ -1 & 1-x & x \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = ( \quad )$$

解 将其按第行展开, 得到一个相似的行列式, 可以得到一个递推公式.

##### 抽象型行列式

- 目标行列式和矩阵的相互转换

例题 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $n$  维向量,  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ ,  $B = [\alpha_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}]$ .  
若  $|A| = 1$ , 则  $|A - B| = ( \quad )$

- 与特征方程相结合

例题 设  $A$  是 3 阶方阵, 满足  $|3A+2E| = 0$ ,  $|A-E| = 0$ ,  $|3E-2A| = 0$ , 则  $|A| = ( \quad )$

解 特征方程  $|\lambda E - A| = 0$ , 可以根据上面的几个等式求出矩阵  $A$  的特征值, 根据特征值的性质可以知道矩阵的季和矩阵对应行列式的值

## 7.1.2 余子式和代数余子式的线性组合的计算

例题 设  $|A| = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $A_{31} + A_{32} + A_{33} + M_{34} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

## 7.2 矩阵

## 7.2.1 矩阵的基本运算

矩阵相乘时要注意矩阵的左右位置

例题 1 设  $E$  是  $n$  阶单位矩阵,  $E + A$  是  $n$  阶可逆矩阵, 则下列关系式中不成立的是:

- a)  $(E - A)(E + A)^2 = (E + A)^2(E - A)$
- b)  $(E - A)(E + A)^T = (E + A)^T(E - A)$
- c)  $(E - A)(E + A)^{-1} = (E + A)^{-1}(E - A)$
- d)  $(E - A)(E + A)^* = (E + A)^*(E - A)$

解 题目中已经提示了  $E + A$  是  $n$  阶可逆矩阵, 所以下列成立:

$$\begin{aligned} (E + A)^{-1}(E + A) &= (E + A)(E + A)^{-1}E \\ (E + A)^*(E + A) &= (E + A)(E + A)^* = |E + A|E \end{aligned}$$

可以将题目中的  $E - A$  拆成  $2E - (E + A)$ , 以 b) 为例: 左式  $= (2E - (E + A))(E + A)^T = 2(E + A)^T E - (E + A)(E + A)^T$ , 由于  $(E + A)(E + A)^T \neq (E + A)(E + A)$ , 故左式  $\neq$  右式, 选 b).

例题 2 已知  $E_{32}(1)ABE_{13}(-3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , 求  $AB$

解 注意只能左乘  $[E_{32}(1)]^{-1}$ , 右乘  $[E_{13}(-3)]^{-1}$

## 7.3 向量

### 7.3.1 极大线性无关组及向量组秩的求法

**例题 1** 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性相关, 若  $\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$  亦线性无关, 则  $a$  的取值

**解**  $\alpha_1 - 3\alpha_3, a\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3$  可以拆分成两个矩阵:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

由于  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性无关, 根据一个矩阵乘以可逆矩阵之后其线性相关性不变, 可以得到这个矩阵是可逆的:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

故上述矩阵的行列式为 0, 进而求出  $a$  的值为  $\frac{1}{9}$ .