



重点整理

East China University of Science and Technology

目录

第一章 行列式	2
第二章 矩阵	3
第三章 向量	4
第四章 线性方程组	5

第一章 行列式

$$1. \ k \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{与矩阵不同, 牢记!}$$

第二章 矩阵

1. $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$
2. $\mathbf{E}_{31}(k)$ 的含义是第 1 行的 k 倍加到第 3 行, 或者是第 3 列的 k 倍加到第 1 列
3. $|k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$
4. $(k\mathbf{A})^* = k^{n-2} \mathbf{A}^*$
5. $|\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow$ 满秩 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 可逆

第三章 向量

1. 判别线性相关性的七大定理:

(a) 充分必要条件 (两个):

- i. $Ax = 0$, x 有非零解
- ii. 向量组中至少有一个向量能够被其他的向量线性表出

(b) 与解线性方程组有关的定理 (两个):

- i. \Rightarrow : 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ 线性相关, 则 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示
- ii. \Leftarrow : 如果 β 能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示, 则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 有解, 且 $r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]) = r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta])$

(c) 整体性和局部性 (两个):

- i. 向量
如果低维是无关的, 则增加维数必无关
如果高维是相关的, 则减少维数必相关
- ii. 向量组
如果整体是无关的, 则部分必无关
如果部分是相关的, 则整体必相关

(d) 以少表多, 多的相关

如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 能被向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示, 且 $t < s$, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关

2. 设有向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 和向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$, 若后者的所有元素都能被前者线性表出, 则:

$$r([\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t]) \leq r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s])$$

3. A 经过初等变换得到了 B , 则:

- (a) A 和 B 的相应部分的列向量具有相同的线性相关性 (这条性质为后面解线性方程打下基础)
- (b) A 的行向量组和 B 的行向量组是等价向量组 (可以互相线性表示)

第四章 线性方程组

1. 齐次线性方程组:

(a) $m > n \Rightarrow$ 有非零解

(b) $m = n$:

i. $r(\mathbf{A}) = m \Rightarrow$ 满秩 $\Rightarrow |\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow$ 线性无关 \Rightarrow 唯一零解

ii. $r(\mathbf{A}) = r < m \Rightarrow$ 不满秩 $\Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \Rightarrow$ 线性相关 \Rightarrow 有非零解, 且有 $m - r$ 个线性无关解 (也可以换一种解释: 由于 $r(\mathbf{A}) = r < m \Rightarrow$ 独立方程组的个数为 r , 由于 $r < m$, 所以有非零解)

2. 非齐次线性方程组:

(a) $r(\mathbf{A}) \neq r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) \Rightarrow$ 无解

(b) $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = m \Rightarrow$ 唯一解

(c) $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r < m \Rightarrow$ 无解