第一章　特征值和特征向量

1.1　基础知识

1.1.1　特征值和特征向量

定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, λ 是一个数, 若存在一个非零的 n 维向量 $\boldsymbol{\xi}$, 使得 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 则称 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

上式可以化简成 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$, $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$ 被称为特征多项式, $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 称为特征矩阵.

性质

1. 特征值的性质
   (a) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(\boldsymbol{A})$
   (b) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |\boldsymbol{A}|$
2. 特征向量的性质
   (a) k 重特征值 Λ 至多只有 k 个线性无关的向量
   (b) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征的特征向量, 则 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 线性无关
   (c) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于同一特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{\xi_1} + k_1\boldsymbol{\xi_2}$ 仍然是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量

1.1.2 矩阵的相似

定义

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$ 成立, 则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 记成 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

性质

1.
   - 反身性: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$
   - 对称性: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Rightarrow \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$
   - 传递性: $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C} \Rightarrow \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$
2. 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则有
   - $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$
   - $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$
   - $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值
   - $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 特征多项式的值相同
3. 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则有
   - $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$
   - $\boldsymbol{A}^T \sim \boldsymbol{B}^T$
   - $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^* \sim \boldsymbol{B}^*$
   - $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^{-1} \sim \boldsymbol{B}^{-1}$

1.1.3 矩阵的相似对角化

定义

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$, 则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

$$\boldsymbol{P} = \left[\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ...\boldsymbol{\xi_n}\right], \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

条件

1. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 ($|\boldsymbol{P}| = 0$)
2. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 对应于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量 (n 重特征值对应的解空间是 n 维)
3. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值 $\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 (由特征向量的性质 3 可以推出)
4. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵 $\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 可以相似对角化

上述总共两个充要条件, 两个充分条件.

1.1.4　实对称矩阵

定义

若 $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为是对称矩阵, 如果在此基础上 $\boldsymbol{A}$ 的元素都是实数, 则 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

性质

1. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交
2. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵, 且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$,

1.2　习题

1.2.1　特征值和特征向量

求具体型矩阵的特征值和特征向量

1. 用特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 求出 λ, 可以使用试根法对 λ 的高次方程进行求解
2. 用求得的 λ 解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$, 求出特征向量

求解抽象型矩阵的特征值和特征向量

矩阵	$\boldsymbol{A}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k$	$f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}$	λ
特征向量	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$

$f(x)$ 为多项式, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0} \Rightarrow f(\lambda)=0$.

1.2.2 实对称矩阵

求正交矩阵 Q

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的 λ 与 $\boldsymbol{\xi}$
2. $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},...,\boldsymbol{\xi_n}$ 施密特正交化, 单位化至 $\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},...,\boldsymbol{\eta_n}$
3. 令 $Q=(\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},...,\boldsymbol{\eta_n})$

不同的特征值 λ_i 对应的特征矩阵 $\boldsymbol{\xi_i}$ 之间是正交的.
施密特正交化:$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$.
单位化: $\eta_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}$.

总结

1. 普通矩阵 $\boldsymbol{A}$
   (a) $\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\xi_1,\xi_2$ 无关
   (b) $\lambda_1=\lambda_2\Rightarrow\xi_1,\xi_2$
      i. ξ_1,ξ_2 无关
      ii. ξ_1,ξ_2 相关
2. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$
   (a) $\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\xi_1\perp\xi_2\quad\xi_1,\xi_2$ 无关
   (b) $\lambda_1=\lambda_2\Rightarrow$
      i. $\xi_1\perp\xi_2\quad\xi_1,\xi_2$ 无关
      ii. ξ_1 不垂直于 $\xi_2\quad\xi_1,\xi_2$ 无关

第二章　二次型

2.1　基础知识

2.1.1　二次型

定义

n 元变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的二次齐次多项式称为 n 元二次型, 简称二次型.

二次型可以表示为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, 由此可以得出二次型的矩阵表达式, 令:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则二次型可以表示为:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$