



Linear Algebra

East China University of Science and Technology

目录

第一章	行列式	3
1.1	基础知识	3
1.1.1	行列式	3
1.2	习题	4
1.2.1	行列式的计算	4
1.2.2	余子式和代数余子式的线性组合的计算	5
第二章	特征值和特征向量	6
2.1	基础知识	6
2.1.1	特征值和特征向量	6
2.1.2	矩阵的相似	7
2.1.3	矩阵的相似对角化	7
2.1.4	实对称矩阵	8
2.2	习题	8
2.2.1	特征值和特征向量	8
2.2.2	实对称矩阵	9
第三章	二次型	10
3.1	基础知识	10
3.1.1	二次型	10
3.1.2	线性变换	10
3.1.3	矩阵合同	11
3.1.4	标准形/规范形	11
3.1.5	惯性定理	13
3.1.6	正定二次型及其判别	13

目录	2
3.2 习题	14
3.2.1 标准形/规范形	14

第一章 行列式

1.1 基础知识

1.1.1 行列式

定义

1. 几何定义

n 阶行列式为 n 个 n 维向量组成的 n 维图形的体积.

2. 逆序数法定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

3. 展开定义

代数余子式: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

按第 i 行展开: $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$

注意, 行列式的某行 (列) 元素分别乘另一行 (列) 的元素的代数余子式后再求和为 0

性质

1. $|A^T| = |A|$

2. 若行列式中某行 (列) 全部元素为 0, 行列式为 0

3. 若行列式中某行 (列) 元素有公因子 $k(k \neq 0)$, k 可以提到行列式外面
4. 行列式某行 (列) 元素均是两个元素之和, 可以拆成两个行列式之和
5. 两行 (列) 互换, 值取反
6. 两行 (列) 元素对应成比例, 行列式为 0
7. 行列式中某行 (列) k 倍加到另一行 (列), 值不变

重要行列式

1. 主对角线行列式 (上/下三角形行列式): $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
2. 副对角线行列式: $|\mathbf{A}| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$
3. 拉普拉斯展开式

$$\text{主对角线: } \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

$$\text{副对角线: } \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

4. 范特蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

1.2 习题

1.2.1 行列式的计算

具体型行列式

1. 化基本形法
 - (a) 直接展开: 适用于含 0 较多的行 (列)
 - (b) 爪型: 斜爪消平爪

- (c) 异爪型: 将平爪含 0 较多行 (列) 展开
- (d) 行 (列) 和相等: 将行 (列) 全部加到第一行 (列) 提取公因子, 再化成三角形行列式
- (e) 消零化基本形:
- (f) 拉普拉斯行列式: 一般为 “X 字形”
- (g) 范特蒙德行列式: 化为范式行列式, 看第二行写结果

2. 递推法

3. 行列式表示的函数和方程

抽象型行列式

1.2.2 余子式和代数余子式的线性组合的计算

第二章 特征值和特征向量

2.1 基础知识

2.1.1 特征值和特征向量

定义

设 \mathbf{A} 为 n 阶矩阵, λ 是一个数, 若存在一个非零的 n 维向量 $\boldsymbol{\xi}$, 使得 $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 则称 $\boldsymbol{\xi}$ 为 \mathbf{A} 的特征向量, λ 为 \mathbf{A} 的特征值.

上式可以化简成 $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ 被称为特征多项式, $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ 称为特征矩阵.

性质

1. 特征值的性质

$$(a) \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = tr(\mathbf{A})$$

$$(b) \prod_{i=1}^n \lambda_i = |\mathbf{A}|$$

2. 特征向量的性质

(a) k 重特征值 λ 至多只有 k 个线性无关的向量

(b) 若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是 \mathbf{A} 的属于不同特征值的特征的特征向量, 则 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关

(c) 若 $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ 是 \mathbf{A} 的属于同一特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$ 仍然是 \mathbf{A} 的属于特征值 λ 的特征向量

2.1.2 矩阵的相似

定义

设 A 和 B 为两个 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$ 成立, 则称 A 相似于 B , 记成 $A \sim B$.

性质

1.
 - 反身性: $A \sim A$
 - 对称性: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
 - 传递性: $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$
2. 若 $A \sim B$, 则有
 - $r(A) = r(B)$
 - $|A| = |B|$
 - A, B 具有相同的特征值
 - A, B 特征多项式的值相同
3. 若 $A \sim B$, 则有
 - $f(A) \sim f(B)$
 - $A^T \sim B^T$
 - A 可逆, $A^* \sim B^*$
 - A 可逆, $A^{-1} \sim B^{-1}$

2.1.3 矩阵的相似对角化

定义

设 n 阶矩阵 A , 存在 n 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \Lambda$, 则 $A \sim \Lambda$, Λ 是 A 的相似标准形.

$$P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

条件

1. n 阶矩阵 \mathbf{A} 可以相似对角化 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 ($|\mathbf{P}| \neq 0$)
2. n 阶矩阵 \mathbf{A} 可以相似对角化 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$ 对应于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量 (n 重特征值对应的解空间是 n 维)
3. n 阶矩阵 \mathbf{A} 有 n 个不同特征值 $\Rightarrow \mathbf{A}$ 可以相似对角化 (由特征向量的性质 3 可以推出)
4. n 阶矩阵 \mathbf{A} 为实对称矩阵 $\Rightarrow \mathbf{A}$ 可以相似对角化

上述总共两个充要条件, 两个充分条件.

2.1.4 实对称矩阵

定义

若 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 则 \mathbf{A} 为是对称矩阵, 如果在此基础上 \mathbf{A} 的元素都是实数, 则 \mathbf{A} 是实对称矩阵.

性质

1. 实对称矩阵 \mathbf{A} 的属于不同特征值的特征向量相互正交
2. 实对称矩阵 \mathbf{A} 必相似于对角矩阵, 必有可逆矩阵 $\mathbf{P} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$, 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$. 且存在正交矩阵 \mathbf{Q} , 使得 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$,

2.2 习题

2.2.1 特征值和特征向量

求具体型矩阵的特征值和特征向量

1. 用特征方程 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ 求出 λ , 可以使用试根法对 λ 的高次方程进行求解
2. 用求得的 λ 解齐次线性方程组 $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\xi = \mathbf{0}$, 求出特征向量

求解抽象型矩阵的特征值和特征向量

矩阵	A	kA	A^k	$f(A)$	A^{-1}	A^*	$P^{-1}AP$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\frac{ A }{\lambda}$	λ
特征向量	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	ξ	$P^{-1}\xi$

$f(x)$ 为多项式, 若矩阵 A 满足 $f(A) = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0$.

2.2.2 实对称矩阵

求正交矩阵 Q

1. 求 A 的 λ 与 ξ
2. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 施密特正交化, 单位化至 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$
3. 令 $Q = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

不同的特征值 λ_i 对应的特征矩阵 ξ_i 之间是正交的.

施密特正交化: $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$.

单位化: $\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$.

总结

1. 普通矩阵 A
 - (a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$ 无关
 - (b) $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$
 - i. ξ_1, ξ_2 无关
 - ii. ξ_1, ξ_2 相关
2. 实对称矩阵 A
 - (a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1 \perp \xi_2$ ξ_1, ξ_2 无关
 - (b) $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$
 - i. $\xi_1 \perp \xi_2$ ξ_1, ξ_2 无关
 - ii. ξ_1 不垂直于 ξ_2 ξ_1, ξ_2 无关

第三章 二次型

3.1 基础知识

3.1.1 二次型

定义

n 元变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的二次齐次多项式称为 n 元二次型, 简称二次型.

二次型可以表示为 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, 由此可以得出二次型的矩阵表达式, 令:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则二次型可以表示为:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

必须强调的是, 这里的 \mathbf{A} 是一个对称矩阵.

3.1.2 线性变换

对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 若令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

$$\text{记 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

则上式可以写为 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$. 上式成为从 y_1, y_2, \dots, y_n 到 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性变换. 如果 \mathbf{C} 可逆, 则称为可逆线性变换.

如果 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 令 $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$, 则有 $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{C}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y}$.

记 $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$, 则有 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = g(\mathbf{y})$. 至此我们通过线性变换得到了一个新的二次型.

3.1.3 矩阵合同

定义

设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 \mathbf{C} , 使得:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$$

则称 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 合同, 记作 $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$. 此时称 $f(\mathbf{x})$ 与 $g(\mathbf{x})$ 为合同二次型.

所谓合同, 就是指同一个二次型在可逆线性变换下的两个不同状态的联系.

性质

1. 反身性: $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}$
2. 对称性: $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$
3. 传递性: $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}, \mathbf{B} \simeq \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{C}$

3.1.4 标准形/规范形

定义

若二次型中只含有平方项, 没有交叉项, 形如

$$d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

的二次型称为标准形.

若标准形中, 系数 d_i 仅为 $1, -1, 0$ 的二次型称为规范形.

求法

我们的目标是使得 \mathbf{B} 矩阵是一个对角矩阵, 即只有主对角线有元素, 才可以得到标准型. 有两种方法:

1. 任何二次型可以通过配方法 (作可逆线性变换) 化为标准形和规范形, 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (不一定是特征值 λ):

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

此外, 它还可以转化成规范形:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

2. 任何二次型可以通过正交变换化成标准形 (见 3.2.1), 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (特征值不一定是 $0, 1, -1$):

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

3.1.5 惯性定理

定义

无论选取什么样的线性变换 (配方还是正交合同变换), 将二次型化为标准形或者规范形, 其正项系数个数 p , 负项个数 q 都是不变的, p 称为正惯性指数, q 称为负惯性指数.

性质

1. 若二次型的秩为 r , 则 $r = p + q$, 可逆线性变换不改变正/负惯性指数
2. 两个二次型 (或者实对称矩阵) 合同的条件是有相同的正/负惯性指数

3.1.6 正定二次型及其判别

定义

n 元二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 若对于任意的 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \neq \mathbf{0}$ 均有二次型大于 0, 即 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, 则称 f 为正定二次型, \mathbf{A} 为正定矩阵.

条件

1. 充要条件:

$$\begin{aligned}
 n \text{元二次型正定} &\Leftrightarrow \text{对于任意 } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ 有 } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \\
 &\Leftrightarrow f \text{ 的正惯性指数 } p = n \text{ (所有的系数全正)} \\
 &\Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } \mathbf{D}, \text{ 使 } \mathbf{A} = \mathbf{D}^T \mathbf{D} \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{E} \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ 的特征值 } \lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n) \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ 的全部顺序主子式均大于 0 (左上角行列式)}
 \end{aligned}$$

2. 必要条件:

$$\begin{aligned}
 n \text{元二次型正定} &\Leftarrow a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n) \\
 &\Leftarrow |\mathbf{A}| > 0
 \end{aligned}$$

3.2 习题

3.2.1 标准形/规范形

用正交变换法化二次型为标准形

1. 写出二次型矩阵 A
2. 求 A 的特征值 λ 和特征向量 ξ
3. 将 ξ_1, \dots, ξ_n 通过正交化/单位化成正交矩阵 $Q = (\eta_1, \dots, \eta_n)$
4. 令 $x = Qy \Rightarrow f(x) = x^T A x = (Qy)^T A Q y = y^T Q^{-1} A Q y = y^T \lambda y \Rightarrow f(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

注意 正交变换只能化二次型为标准形, 不能化为规范形 (除非特征值都是 $0, 1, -1$)