



# Advanced Mathematics

East China University of Science and Technology

# 目录

第一章 预备知识	2
1.1 基础知识 . . . . .	2
1.1.1 函数概念 . . . . .	2
1.1.2 函数图像 . . . . .	3
1.2 解题技巧 . . . . .	4
1.2.1 函数概念 . . . . .	4

# 第一章 预备知识

## 1.1 基础知识

### 1.1.1 函数概念

函数

反函数

- 严格单调的函数必有反函数, 有反函数的函数不一定是单调函数
- $x = f^{-1}(y)$  和  $y = f(x)$  是同一个函数

复合函数

四种特性

设  $D$  为定义域

- 单调性:  $\forall x_1, x_2 \in I \in D, x_1 < x_2, f(x_1) > f(x_2)$ , 单调递减
- 有界性:  $\forall x \in I \in D, \exists M > 0, |f(x)| \leq M$
- 奇偶性:  $D$  关于原点对称,  $\forall x \in D, f(x) = f(-x)$ , 偶函数
- 周期性:  $x \in D, x \pm T \in D, \exists T > 0, f(x + T) = f(x)$

函数和导函数:

- $f(x)$  为可导偶函数  $\Rightarrow f'(x)$  为奇函数  
 $f(x)$  为可导奇函数  $\Rightarrow f'(x)$  为偶函数
- $f(x)$  为可导周期为  $T$  函数  $\Rightarrow f'(x)$  为周期为  $T$  函数

- $f(x)$  在  $(a, b)$  可导且  $f'(x)$  有界  $\Rightarrow f(x)$  在  $(a, b)$  有界

原函数和积分:

- 连续的奇函数的一切原函数为偶函数  
连续的偶函数中仅有一个原函数为奇函数
- 连续函数周期为  $T$  且  $\int_0^T f(x)dx = 0 \Rightarrow$  原函数周期为  $T$

### 1.1.2 函数图像

直角坐标系

常见图像:

- 三角函数
  - 正弦函数和余弦函数
  - 正切函数和余切函数
  - 正割函数和余割函数
- 反三角函数
  - 反正弦函数和反余弦函数
  - 反正切函数和反余切函数
- 取整函数

图像变换:

- 平移变换
  - 水平平移
  - 垂直平移
- 对称变换
  - $x$  轴对称变换
  - $y$  轴对称变换
  - 原点对称变换

- $y = x$  对称变换
- 伸缩变换
  - 水平伸缩变换
  - 垂直伸缩变换

## 极坐标系

用描点法画常见图像:

- 心形线:  $r = a(1 - \cos \theta)$  ( $a > 0$ )
- 玫瑰线:  $r = a \sin 3\theta$  ( $a > 0$ )
- 阿基米德螺旋线:  $r = a\theta$  ( $a > 0, \theta \geq 0$ )
- 伯努利双纽线:  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  ( $a > 0$ )

## 1.2 解题技巧

### 1.2.1 函数概念

#### 四种特性

判断单调性主要有两种方法:

1. 求导
2. 定义法: 单调递减  $\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$