



# Linear Algebra

East China University of Science and Technology

# 目录

<b>第一章</b>	<b>行列式</b>	<b>3</b>
1.1	基础知识	3
1.1.1	行列式	3
1.2	习题	4
1.2.1	行列式的计算	4
1.2.2	余子式和代数余子式的线性组合的计算	6
1.3	总结	6
1.3.1	重点	6
<b>第二章</b>	<b>矩阵</b>	<b>7</b>
2.1	基础知识	7
2.1.1	矩阵	7
2.1.2	矩阵的逆	10
2.1.3	伴随矩阵	10
2.1.4	初等矩阵	11
2.1.5	等价矩阵	11
2.1.6	矩阵的秩	11
2.1.7	常见运算汇总	12
2.2	习题	13
<b>第三章</b>	<b>向量组</b>	<b>14</b>
3.1	基础知识	14
3.1.1	向量	14
3.1.2	线性组合和线性相关	14
3.1.3	极大线性无关组和等价向量组	16

目 录	2
3.1.4 等价向量组	16
3.1.5 向量组的秩	17
3.2 习题	17
<b>第四章 线性方程组</b>	<b>18</b>
4.1 基础知识	18
4.1.1 齐次线性方程组	18
4.1.2 非齐次线性方程组	20
<b>第五章 特征值和特征向量</b>	<b>22</b>
5.1 基础知识	22
5.1.1 特征值和特征向量	22
5.1.2 矩阵的相似	23
5.1.3 矩阵的相似对角化	23
5.1.4 实对称矩阵	24
5.2 习题	25
5.2.1 特征值和特征向量	25
5.2.2 实对称矩阵	25
<b>第六章 二次型</b>	<b>27</b>
6.1 基础知识	27
6.1.1 二次型	27
6.1.2 线性变换	27
6.1.3 矩阵合同	28
6.1.4 标准形/规范形	28
6.1.5 惯性定理	29
6.1.6 正定二次型及其判别	30
6.2 习题	30
6.2.1 标准形/规范形	30

# 第一章 行列式

## 1.1 基础知识

### 1.1.1 行列式

定义

1. 几何定义

$n$  阶行列式为  $n$  个  $n$  维向量组成的  $n$  维图形的体积.

2. 逆序数法定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

总共有  $n!$  个项.

3. 展开定义

代数余子式:  $\mathbf{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \mathbf{M}_{ij}$

按第  $i$  行展开:  $a_{i1} \mathbf{A}_{i1} + a_{i2} \mathbf{A}_{i2} + \dots + a_{in} \mathbf{A}_{in}$

注意, 行列式的某行 (列) 元素分别乘另一行 (列) 的元素的代数余子式后再求和为 0

性质

1.  $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$ , 若  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ , 则矩阵  $\mathbf{A}$  为对称矩阵, 若  $\mathbf{A} \times \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ , 则矩阵  $\mathbf{A}$  为正交矩阵
2. 若行列式中某行 (列) 全部元素为 0, 行列式为 0

3. 若行列式中某行 (列) 元素有公因子  $k(k \neq 0)$ ,  $k$  可以提到行列式外面
4. 行列式某行 (列) 元素均是两个元素之和, 可以拆成两个行列式之和
5. 两行 (列) 互换, 值取反
6. 两行 (列) 元素对应成比例, 行列式为 0
7. 行列式中某行 (列)  $k$  倍加到另一行 (列), 值不变

### 重要行列式

1. 主对角线行列式 (上/下三角形行列式):  $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
2. 副对角线行列式:  $|\mathbf{A}| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$
3. 拉普拉斯展开式

$\mathbf{A}$  为  $m$  阶矩阵,  $\mathbf{B}$  为  $n$  阶矩阵

$$\text{主对角线: } \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

$$\text{副对角线: } \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

4. 范特蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

注意, 范氏行列式中全 1 行一定在上方.

## 1.2 习题

### 1.2.1 行列式的计算

#### 具体型行列式

1. 化基本形法

(a) 直接展开: 适用于含 0 较多的行 (列)

(b) 爪型: 斜爪消平爪

(c) 异爪型

i. 阶数不高, 直接展开

ii. 阶数高, 用递推 (尤其适用于一横形行列式)

**例题** 一横形行列式 
$$\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 \\ -1 & 1-x & x \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = ( \quad )$$

**解** 将其按第行展开, 得到一个相似的行列式, 可以得到一个递推公式.

(d) 行 (列) 和相等: 三种方法

i. 提取公因子: 将其余行全都加到第一行上去, 提取公因子

ii. 加边法: 例如矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ll 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix}$$

加边后矩阵的值不变, 可以将第 1 行的  $-1$  倍加到其他行, 再用其他行的  $(-1/b)$  倍加到第一列.

iii. 化爪形行列式

(e) 消零化基本形:

(f) 拉普拉斯行列式: 一般为 “X 字形”

(g) 范特蒙德行列式: 化为范式行列式, 看第二行写结果

2. 递推法

3. 行列式表示的函数和方程

## 抽象型行列式

1. 目标行列式和矩阵的相互转换:  $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

**例题** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $n$  维向量,  $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ ,  $B = [\alpha_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}]$ .  
若  $|A| = 1$ , 则  $|A - B| = ( \quad )$

2. 与特征方程相结合

**例题** 设  $A$  是 3 阶方阵, 满足  $|3A+2E| = 0$ ,  $|A-E| = 0$ ,  $|3E-2A| = 0$ , 则  $|A| = ( \quad )$

**解** 特征方程  $|\lambda E - A| = 0$ , 可以根据上面的几个等式求出矩阵  $A$  的特征值, 根据特征值的性质可以知道矩阵的迹和矩阵对应行列式的值

### 1.2.2 余子式和代数余子式的线性组合的计算

根据行列式的展开定义, 有:

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \begin{bmatrix} & & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & & \dots & & \end{bmatrix}$$

则有:

$$k_1A_{i1} + k_2A_{i2} + \dots + k_{in}A_{in} = \begin{bmatrix} & & \dots & & \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & \dots & k_{in} \\ & & \dots & & \end{bmatrix}$$

**例题** 设  $|A| = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 则  $A_{31} + A_{32} + A_{33} + M_{34} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

## 1.3 总结

### 1.3.1 重点

1. 一行形行列式的计算
2. 行 (列) 和相等行列式的计算
3. 余子式和代数余子式的计算
4. 结合特征方程

## 第二章 矩阵

### 2.1 基础知识

#### 2.1.1 矩阵

##### 本质

矩阵的本质是表达系统信息.

##### 定义

由  $m \times n$  个数排成的  $m$  行  $n$  列的矩形表格. 当  $m = n$  的时候称  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶方阵.  
有两个矩阵, 如果  $m, n$  相同, 称为同型矩阵.

##### 运算

1. 相等: 同型矩阵且对应元素相等
2. 加法: 同型矩阵对应元素相加
3. 数乘矩阵 (重要, 与行列式不同)

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

加法运算和数乘运算统称为矩阵的线性运算, 满足以下运算规律:

- (a) 交换律:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- (b) 结合律:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$



(c) 分配律:  $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}, (k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{B}$

(d) 数和矩阵相乘的结合律:  $k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A} = l(k\mathbf{A})$

4. 乘法:  $\mathbf{A}$  为  $m \times s$  矩阵,  $\mathbf{B}$  为  $s \times n$  矩阵, 设  $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})_{m \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

乘法满足下列运算规律:

(a) 结合律:  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

(b) 分配律:  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

(c) 数乘与矩阵乘积的结合律:  $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$

5. 转置矩阵: 行列互换

6. 向量的内积和正交

(a) 内积:  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T, \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_n]^T$ , 内积为

$$\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

记为  $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(b) 正交: 内积为 0

(c) 模: 向量的长度, 记作  $\|\boldsymbol{\alpha}\|$

7. 标准正交向量组: 所有成员两两正交且模都为 1, 即:

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j = 1 \quad (i = j)$$

称  $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$  为单位正交向量组.

8. 标准正交矩阵: 由标准正交向量组组成的矩阵

9. 施密特正交化 (正交规范化)

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)} \boldsymbol{\beta}_1$$

上式得到的是正交向量组, 再进行单位化:

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$$

得到标准正交向量组.

10. 幂:  $A$  为一个  $n$  阶方阵, 则  $A^n = AA \dots AA$  (共  $n$  个  $A$ )

11. 方阵乘积的行列式

$$|AB| = |A||B|$$

### 重要矩阵

1. 零矩阵
2. 单位矩阵
3. 数量矩阵: 数  $k$  和单位矩阵的乘积
4. 对角矩阵: 非主对角线元素均为 0 的矩阵
5. 上 (下) 三角矩阵
6. 对称矩阵:  $A^T = A$
7. 反对称矩阵:  $A^T = -A$
8. 标准正交矩阵:  $A^T A = E$ , 即行 (列) 向量的组合是标准正交向量组
9. 分块矩阵

分块矩阵的加法和数乘与行列式不同:

(a) 加法

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

(b) 数乘

$$k \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kA & kB \\ kC & kD \end{bmatrix}$$

(c) 乘法: 与矩阵乘法相同

## 2.1.2 矩阵的逆

## 定义

若  $AB = BA = E$ , 则矩阵  $A$  可逆,  $B$  为  $A$  的逆矩阵.

## 性质

设  $A, B$  为同阶可逆矩阵

1.  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$  ( $k \neq 0$ )
2.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  ( $AB$ 也可逆)
3.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$  ( $A^T$ 也可逆)
4.  $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$
5.  $(A^{-1})^{-1} = A$
6.  $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

推导:  $|A^{-1}A| = |A^{-1}||A| = 1$

## 2.1.3 伴随矩阵

## 定义

矩阵  $A$  的伴随矩阵为:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

其中  $A$  为对应元素的代数余子式.

## 性质

1.  $AA^* = A^*A = |A|E$
2.  $|A^*| = |A|^{n-1}$
3.  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$
4.  $(A)^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$

### 2.1.4 初等矩阵

#### 定义

单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵, 有三种:

1. 倍乘初等矩阵

$$\mathbf{E}_2(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 互换初等矩阵

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 倍加初等矩阵

$$\mathbf{E}_{31}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意是第一行的  $k$  倍加到第三行或者是第三列的  $k$  倍加到第一列 (别搞错顺序).

#### 性质

1.  $[\mathbf{E}_{ij}]^T = \mathbf{E}_{ij}, [\mathbf{E}_i(k)]^T = \mathbf{E}_i(k), [\mathbf{E}_{ij}(k)]^T = \mathbf{E}_{ji}(k)$
2.  $[\mathbf{E}_{ij}]^{-1} = \mathbf{E}_{ij}, [\mathbf{E}_i(k)]^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k}), [\mathbf{E}_{ij}(k)]^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$
3. 左行右列定理
4. 若  $\mathbf{A}$  为可逆矩阵, 则可以表示为有限个可逆矩阵的乘积

### 2.1.5 等价矩阵

若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为  $m \times n$  矩阵, 且  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$ , 则  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为等价矩阵, 记作  $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ .

### 2.1.6 矩阵的秩

#### 定义

设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{A}$  中最高阶非零子式的阶数为矩阵  $\mathbf{A}$  的秩. 如果  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  矩阵, 则  $r(\mathbf{A}) = n$  (满秩)  $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$  可逆.

初等变换不改变矩阵的秩

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PA}) = r(\mathbf{AQ}) = r(\mathbf{PAQ})$$

重要式子

设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{B}$  为满足有关矩阵运算要求的矩阵, 则

$$1. 0 \leq r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$$

$$2. \text{数乘: } r(k\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$$

$$3. r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$$

$$4. r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$$

$$5. r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n & r(\mathbf{A}) = n \\ 1 & r(\mathbf{A}) = n - 1 \\ 0 & r(\mathbf{A}) < n - 1 \end{cases} \text{ 其中 } \mathbf{A} \text{ 为 } n \text{ 阶方阵}$$

### 2.1.7 常见运算汇总

$$1. |\mathbf{kA}| = k^n |\mathbf{A}|$$

$$(\mathbf{kA})^T = k\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{kA})^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{kA})^* = k^{n-1} \mathbf{A}^*$$

$$2. |\mathbf{A} + \mathbf{B}| \neq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^* \neq \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$$

$$3. |\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^* \mathbf{A}^*$$

$$\begin{aligned} 4. \quad & (\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1} \\ & (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} \\ & (\mathbf{A}^T)^* = (\mathbf{A}^*)^T \end{aligned}$$

## 2.2 习题

## 第三章 向量组

### 3.1 基础知识

#### 3.1.1 向量

定义

$n$  个数构成的一个有序数组  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  称为一个  $n$  维向量, 记为  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ , 并称  $\alpha$  为  $n$  维行向量,  $\alpha^T$  为  $n$  维列向量. 其中  $a_i$  称为向量  $\alpha$  或者  $\alpha^T$  的第  $i$  个分量.

#### 3.1.2 线性组合和线性相关

定义

1. 线性组合: 设有  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  和  $m$  个数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ . 则向量  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$  为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合
2. 线性表出: 若向量  $\beta$  能表示成向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合, 即  $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ , 则称  $\beta$  能够被向量组线性表出
3. 线性相关: 存在一组不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 使得下式成立:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

上式可以进一步写为  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ , 这个式子有四种形式:

$$Ax = \mathbf{0}$$

或者矩阵形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者向量形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者线性方程组形式:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_m a_{1m} = 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_m a_{2m} = 0 \\ \cdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_m a_{nm} = 0 \end{cases}$$

4. 线性无关: 只有当  $k_1, k_2, \dots, k_m$  全为 0 的时候, 才能使上式成立

### 判别相关性定理

1. 相关充要条件: 向量组中至少有一个向量能被其余的  $n-1$  的向量线性表出
2. 相关充要条件: 方程  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有非  $\mathbf{0}$  解
3. 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 而向量组  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出, 且表示方法唯一
4. 如果向量  $\beta$  能够由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出, 则  $r([\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]) = r([\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m])$
5. 以少表多, 多的相关: 如果向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  能够由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表示, 且  $t > s$ , 则  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$  线性相关
6. 向量组的部分与整体:

如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中有一部分向量线性相关, 则整体也线性相关;

如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则其任一部分线性无关



## 7. 向量的部分与整体:

如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 则将所有向量扩展到  $s$  维得到的向量组  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*$  也是线性无关的;

如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则将所有向量缩减到  $k$  维得到的向量组  $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_m^*$  也是线性相关的

## 3.1.3 极大线性无关组和等价向量组

## 定义

在向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中, 存在向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$ , 满足以下条件:

1.  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  线性无关
2. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  中的任一向量能够由向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  线性表示

则称向量组  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_s}$  为原向量组的极大线性无关组.

## 3.1.4 等价向量组

## 定义

若有两个向量组 (1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和 (2)  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ , 这两个向量组中的任一元素都可以由另一向量组线性表出, 则称这两个向量组为等价向量组.

## 性质

1. 反身性:  $(1) \simeq (1)$
2. 对称性:  $(1) \simeq (2) \Leftrightarrow (2) \simeq (1)$
3. 传递性:  $(1) \simeq (2), (2) \simeq (3) \Rightarrow (1) \simeq (3)$
4. 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组
5. 等价向量组有相等的秩

### 3.1.5 向量组的秩

#### 定义

向量组的秩是极大线性无关组成员的个数, 是线性无关向量的个数, 是向量空间的维数, 是最简化的向量数.

#### 性质

1. 三秩相等:  $r(\mathbf{A})$  矩阵的秩  $= \mathbf{A}$  的行秩  $= \mathbf{A}$  的列秩
2. 若  $\mathbf{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \mathbf{B}$ , 则
  - (a)  $\mathbf{A}$  的行向量组和  $\mathbf{B}$  的行向量组是等价向量组
  - (b)  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的任何相应部分列向量具有相同的线性相关性
3. 设向量组 (1)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  和 (2)  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ , 若  $\beta_i$  均可由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  线性表出, 则  $r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t) \leq r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$

可以这么理解: 秩其实就是一种多样性, 多样的数据的集合肯定能够表示单一的数据的集合, 即如果秩越大, 则这些数据的多样性就越大. 所以  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的秩一定大.

## 3.2 习题

## 第四章 线性方程组

### 4.1 基础知识

#### 4.1.1 齐次线性方程组

设有一齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} = 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{2m} = 0 \\ \dots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} = 0 \end{cases}$$

其矩阵形式为:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

#### 有解的条件

由上矩阵可以得到, 未知数的个数为  $m$ , 方程的个数为  $n$ .

1. 若  $m > n$ , 则必有非零解

2. 若  $m = n$ , 用秩判断:

(a) 若  $r(\mathbf{A}) = m$  (向量组线性无关,  $|\mathbf{A}| \neq 0$ ), 则仅有零解

说明: 由于行秩 = 列秩, 所以列秩为  $m$ , 说明独立方程组个数为  $m$ .

(b) 若  $r(\mathbf{A}) = r < m$  (向量组线性相关,  $|\mathbf{A}| = 0$ ), 则必有非零解, 且有  $m - r$  个线性无关解

说明: 由于行秩 = 列秩, 所以列秩为  $r$ , 说明独立方程组个数为  $r$ .

3. 若  $m < n$ ,

### 解的性质

若  $A\xi_1 = 0, A\xi_2 = 0$ , 则  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 = 0$ , 其中  $k_1, k_2$  为任意常数.

### 基础解系和解的结构

#### 1. 基础解系

设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$  满足:

- (a) 是方程组  $Ax = 0$  的解
- (b) 线性无关
- (c) 方程组  $Ax = 0$  的任一解均可由  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$  线性表出, 则称  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$  是方程组  $Ax = 0$  的基础解系

#### 2. 通解

设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$  是方程  $Ax = 0$  的基础解系, 则  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r}$  是其通解.

### 求解方法

1.  $A \xrightarrow{\text{初等行变换}} B$ , 其中  $B$  为行阶梯形矩阵,  $r(A) = r$

高斯消元法:

- ① 保证最靠左的非全 0 列的最上方为非 0 元素, 如果不是, 通过“互换”初等行变换使最靠左非全 0 列的最上方为非 0 元素
  - ② 通过“倍加”初等行变换使这个非 0 元素所在列的下方元素全为 0
  - ③ 遮住矩阵的最上面一行不看, 将其余行看作一个新矩阵, 重复①②, 直至矩阵化为阶梯形
- 高斯-若当消元法:

- ① 由高斯消元法得到阶梯形矩阵
- ② 对于每一个非全 0 行, 通过“倍乘”初等行变换使得这一行的非 0 首位为 1
- ③ 对于每一个非全 0 行, 通过“倍加”初等行变换使得这一行的非 0 首项所在列的上方元素全为 0, 直至得到简化行阶梯型矩阵

- 按列找出一个秩为  $r$  的子矩阵, 剩余列位置对应的未知数设为自由变量
- 算出共有  $m - r$  个线性无关解, 求出  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-r}$ , 写出通解

### 4.1.2 非齐次线性方程组

设有一非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_m a_{1m} = b_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \dots + x_m a_{2m} = b_2 \\ \dots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_m a_{nm} = b_n \end{cases}$$

其矩阵形式为:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

特殊的有矩阵  $\mathbf{A}$  的增广矩阵:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

#### 有解的条件

- 若  $r(\mathbf{A}) \neq r([\mathbf{A}, \mathbf{b}])$  ( $\mathbf{b}$  不能由  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出), 方程组无解  
实际上,  $r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r(\mathbf{A}) + 1$ .
- 若  $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = m$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \mathbf{b}$  线性相关), 方程组有唯一解<sup>3</sup>
- 若  $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}, \mathbf{b}]) = r < m$ , 方程组有无穷多解

### 解的性质

设  $\eta_1, \eta_2, \eta$  是非齐次线性方程组  $Ax = b$  的解,  $\xi$  是对应齐次线性方程组  $Ax = 0$  的解, 则:

1.  $\eta_1 - \eta_2$  是  $Ax = 0$  的解
2.  $k\xi + \eta$  是  $Ax = b$  的解

### 求解方法

1. 写出  $Ax = b$  的导出方程组  $Ax = 0$ , 并求出其通解  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r}$
2. 求出  $Ax = b$  的一个特解  $\eta$
3.  $Ax = b$  的通解为  $k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{m-r}\xi_{m-r} + \eta$

# 第五章 特征值和特征向量

## 5.1 基础知识

### 5.1.1 特征值和特征向量

#### 定义

设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶矩阵,  $\lambda$  是一个数, 若存在一个非零的  $n$  维向量  $\boldsymbol{\xi}$ , 使得  $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$ , 则称  $\boldsymbol{\xi}$  为  $\mathbf{A}$  的特征向量,  $\lambda$  为  $\mathbf{A}$  的特征值.

上式可以化简成  $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ ,  $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$  被称为特征多项式,  $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$  称为特征矩阵.

推导: 由于  $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ , 且  $\boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}$ , 说明方程  $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  有非零解 (构成特征矩阵的向量线性相关), 即  $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ .

#### 性质

##### 1. 特征值的性质

- (a) 特征值的个数固定为  $n$  (包括重根)
- (b)  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(\mathbf{A})$
- (c)  $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\mathbf{A}|$

##### 2. 特征向量的性质

- (a) 特征向量的数量  $\leq n$
- (b)  $k$  重特征值  $\lambda$  至多只有  $k$  个线性无关的特征向量
- (c) 若  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  是  $\mathbf{A}$  的属于不同特征值的特征的特征向量, 则  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  线性无关
- (d) 若  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  是  $\mathbf{A}$  的属于同一特征值  $\lambda$  的特征向量, 则  $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$  仍然是  $\mathbf{A}$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量

### 5.1.2 矩阵的相似

#### 定义

设  $A$  和  $B$  为两个  $n$  阶方阵, 若存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$  成立, 则称  $A$  相似于  $B$ , 记成  $A \sim B$ .

#### 性质

1.
  - 反身性:  $A \sim A$
  - 对称性:  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
  - 传递性:  $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$
2. 若  $A \sim B$ , 则有
  - $r(A) = r(B)$
  - $|A| = |B|$
  - $A, B$  具有相同的特征值
  - $A, B$  特征多项式的值相同
3. 若  $A \sim B$ , 则有
  - $f(A) \sim f(B)$
  - $A^T \sim B^T$
  - $A$  可逆,  $A^* \sim B^*$
  - $A$  可逆,  $A^{-1} \sim B^{-1}$

### 5.1.3 矩阵的相似对角化

#### 定义

设  $n$  阶矩阵  $A$ , 存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 则  $A \sim \Lambda$ ,  $\Lambda$  是  $A$  的相似标准形.

$$P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$



## 条件

如果说  $\mathbf{A}$  可以相似对角化, 即  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ , 其中  $\mathbf{P}$  可逆, 我们可以将等式两边左乘  $\mathbf{P}$ , 得到:

$$\mathbf{A}_{n \times n} [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n]_{n \times n} = [\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n]_{n \times n} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}_{n \times n}$$

即:

$$[\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2, \dots, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_n] = [\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1, \lambda_2\boldsymbol{\xi}_2, \dots, \lambda_n\boldsymbol{\xi}_n]$$

也即:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_i = \lambda_i\boldsymbol{\xi}_i, i = 1, 2, \dots, n$$

1.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  可以相似对角化  $\Leftrightarrow \mathbf{A}$  有  $n$  个线性无关的特征向量 ( $|\mathbf{P}| \neq 0$ )

解释: 由于  $\mathbf{P}$  可逆, 故  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$  线性无关, 且上述过程可逆

2.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  可以相似对角化  $\Leftrightarrow n$  重特征值对应的解空间是  $n$  维 ( $\mathbf{A}$  对应于每个  $k_i$  重特征值都有  $k_i$  个线性无关的特征向量)

解释:  $k_i$  重特征值至多有  $k_i$  个线性无关的特征向量

3.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  有  $n$  个不同特征值  $\Rightarrow \mathbf{A}$  可以相似对角化

解释: 每个特征值至少有一个特征向量

4.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  为实对称矩阵  $\Rightarrow \mathbf{A}$  可以相似对角化

上述总共两个充要条件, 两个充分条件.

总结: 一个萝卜一个坑, 八重萝卜八个坑. 一个特征值一个特征向量, 八重特征值八个特征向量.

## 5.1.4 实对称矩阵

## 定义

若  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ , 则  $\mathbf{A}$  为是对称矩阵, 如果在此基础上  $\mathbf{A}$  的元素都是实数, 则  $\mathbf{A}$  是实对称矩阵.

## 性质

1. 实对称矩阵  $A$  的属于不同特征值的特征向量相互正交
2. 实对称矩阵  $A$  必相似于对角矩阵, 必有可逆矩阵  $P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ . 且存在正交矩阵  $Q$ , 使得  $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$ ,

## 5.2 习题

## 5.2.1 特征值和特征向量

## 求具体型矩阵的特征值和特征向量

1. 用特征方程  $|\lambda E - A| = 0$  求出  $\lambda$ , 可以使用试根法对  $\lambda$  的高次方程进行求解
2. 用求得的  $\lambda$  解齐次线性方程组  $(\lambda E - A)\xi = 0$ , 求出特征向量

## 求解抽象型矩阵的特征值和特征向量

矩阵	$A$	$kA$	$A^k$	$f(A)$	$A^{-1}$	$A^*$	$P^{-1}AP$
特征值	$\lambda$	$k\lambda$	$\lambda^k$	$f(\lambda)$	$\lambda^{-1}$	$\frac{ A }{\lambda}$	$\lambda$
特征向量	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$P^{-1}\xi$

$f(x)$  为多项式, 若矩阵  $A$  满足  $f(A) = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0$ .

## 5.2.2 实对称矩阵

求正交矩阵  $Q$ 

1. 求  $A$  的  $\lambda$  与  $\xi$
2.  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  施密特正交化, 单位化至  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$
3. 令  $Q = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

不同的特征值  $\lambda_i$  对应的特征矩阵  $\xi_i$  之间是正交的.

施密特正交化:  $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$ .

单位化:  $\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$ .

## 总结

1. 普通矩阵  $\mathbf{A}$ 

(a)  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$  无关

(b)  $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$

i.  $\xi_1, \xi_2$  无关

ii.  $\xi_1, \xi_2$  相关

2. 实对称矩阵  $\mathbf{A}$ 

(a)  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1 \perp \xi_2$   $\xi_1, \xi_2$  无关

(b)  $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$

i.  $\xi_1 \perp \xi_2$   $\xi_1, \xi_2$  无关

ii.  $\xi_1$  不垂直于  $\xi_2$   $\xi_1, \xi_2$  无关

## 第六章 二次型

### 6.1 基础知识

#### 6.1.1 二次型

定义

$n$  元变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次多项式称为  $n$  元二次型, 简称二次型.

二次型可以表示为  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ , 由此可以得出二次型的矩阵表达式, 令:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则二次型可以表示为:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

必须强调的是, 这里的  $\mathbf{A}$  是一个对称矩阵.

#### 6.1.2 线性变换

对于  $n$  元二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 若令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

$$\text{记 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

则上式可以写为  $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ . 上式成为从  $y_1, y_2, \dots, y_n$  到  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的线性变换. 如果  $\mathbf{C}$  可逆, 则称为可逆线性变换.

如果  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 令  $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ , 则有  $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{C}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y}$ .

记  $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ , 则有  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = g(\mathbf{y})$ . 至此我们通过线性变换得到了一个新的二次型.

### 6.1.3 矩阵合同

定义

设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为  $n$  阶矩阵, 若存在可逆矩阵  $\mathbf{C}$ , 使得:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$$

则称  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  合同, 记作  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$ . 此时称  $f(\mathbf{x})$  与  $g(\mathbf{x})$  为合同二次型.

所谓合同, 就是指同一个二次型在可逆线性变换下的两个不同状态的联系.

性质

1. 反身性:  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}$
2. 对称性:  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$
3. 传递性:  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}, \mathbf{B} \simeq \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{C}$

### 6.1.4 标准形/规范形

定义

若二次型中只含有平方项, 没有交叉项, 形如

$$d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

的二次型称为标准形.

若标准形中, 系数  $d_i$  仅为  $1, -1, 0$  的二次型称为规范形.

## 求法

我们的目标是使得  $\mathbf{B}$  矩阵是一个对角矩阵, 即只有主对角线有元素, 才可以得到标准型. 有两种方法:

1. 任何二次型可以通过配方法 (作可逆线性变换) 化为标准型和规范形, 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (不一定是特征值  $\lambda$ ):

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

此外, 它还可以转化成规范形:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

2. 任何二次型可以通过正交变换化成标准形 (见6.2.1), 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (特征值不一定是  $0, 1, -1$ ):

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

## 6.1.5 惯性定理

## 定义

无论选取什么样的线性变换 (配方还是正交合同变换), 将二次型化为标准形或者规范形, 其正项系数个数  $p$ , 负项个数  $q$  都是不变的,  $p$  称为正惯性指数,  $q$  称为负惯性指数.

## 性质

1. 若二次型的秩为  $r$ , 则  $r = p + q$ , 可逆线性变换不改变正/负惯性指数
2. 两个二次型 (或者实对称矩阵) 合同的条件是有相同的正/负惯性指数

## 6.1.6 正定二次型及其判别

## 定义

$n$  元二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 若对于任意的  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \neq \mathbf{0}$  均有二次型大于 0, 即  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , 则称  $f$  为正定二次型,  $\mathbf{A}$  为正定矩阵.

## 条件

1. 充要条件:

$n$  元二次型正定  $\Leftrightarrow$  对于任意  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , 有  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$   
 $\Leftrightarrow f$  的正惯性指数  $p = n$  (所有的系数全正)  
 $\Leftrightarrow$  存在可逆矩阵  $\mathbf{D}$ , 使  $\mathbf{A} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$   
 $\Leftrightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{E}$   
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$  的特征值  $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$   
 $\Leftrightarrow \mathbf{A}$  的全部顺序主子式均大于 0 (左上角行列式)

2. 必要条件:

$n$  元二次型正定  $\Leftarrow a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$   
 $\Leftarrow |\mathbf{A}| > 0$

## 6.2 习题

## 6.2.1 标准形/规范形

用正交变换法化二次型为标准形

1. 写出二次型矩阵  $\mathbf{A}$
2. 求  $\mathbf{A}$  的特征值  $\lambda$  和特征向量  $\xi$
3. 将  $\xi_1, \dots, \xi_n$  通过正交化/单位化成正交矩阵  $\mathbf{Q} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$

4. 令  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y} \Rightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \boldsymbol{\lambda} \mathbf{y} \Rightarrow f(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

**注意** 正交变换只能化二次型为标准形, 不能化为规范形 (除非特征值都是  $0, 1, -1$ )