重点整理

East China University of Science and Technology

目录

第一章 行列式

1. $k \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 与矩阵不同, 牢记!

第二章　矩阵

1. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$

2. $\boldsymbol{E}_{31}(k)$ 的含义是第 1 行的 k 倍加到第 3 行, 或者是第 3 列的 k 倍加到第 1 列

3. $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$

4. $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-2}\boldsymbol{A}^*$

5. $|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow$ 满秩 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 可逆

第三章　向量

1. 判别线性相关性的七大定理:
   (a) 充分必要条件 (两个):
      i. $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}$ 有非零解
      ii. 向量组中至少有一个向量能够被其他的向量线性表出
   (b) 与解线性方程组有关的定理 (两个):
      i. $\Rightarrow$: 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性无关, 而向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表示
      ii. $\Leftarrow$: 如果 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 线性表示, 则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解, 且 $r([\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n}])=r([\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...,\boldsymbol{\alpha_n},\boldsymbol{\beta}])$
   (c) 整体性和局部性 (两个):
      i. 向量
         如果低维是无关的, 则增加维数必无关
         如果高维是相关的, 则减少维数必相关
      ii. 向量组
         如果整体是无关的, 则部分必无关
         如果部分是相关的, 则整体必相关
   (d) 以少表多, 多的相关
      如果向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...\boldsymbol{\alpha_s}$ 能被向量组 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...\boldsymbol{\beta_t}$ 线性表示, 且 $t<s$, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...\boldsymbol{\alpha_s}$ 线性相关
2. 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...\boldsymbol{\alpha_s}$ 和向量组 $\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...\boldsymbol{\beta_t}$, 若后者的所有元素都能被前者线性表出, 则:
   $$r([\boldsymbol{\beta_1},\boldsymbol{\beta_2},...\boldsymbol{\beta_t}])\leq r([\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2},...\boldsymbol{\alpha_s}])$$
3. $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换得到了 $\boldsymbol{B}$, 则:
   (a) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的相应部分的列向量具有相同的线性相关性 (这条性质为后面解线性方程打下基础)
   (b) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组是等价向量组 (可以互相线性表示)

第四章　线性方程组

1. 齐次线性方程组:
   (a) $m > n \Rightarrow$ 有非零解
   (b) $m = n$:
      i. $r(\boldsymbol{A}) = m \Rightarrow$ 满秩 $\Rightarrow |\boldsymbol{A}| \neq 0 \Rightarrow$ 线性无关 $\Rightarrow$ 唯一零解
      ii. $r(\boldsymbol{A}) = r < m \Rightarrow$ 不满秩 $\Rightarrow |\boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow$ 线性相关 $\Rightarrow$ 有非零解, 且有 $m - r$ 个线性无关解 (也可以换一种解释: 由于 $r(\boldsymbol{A}) = r < m \Rightarrow$ 独立方程组的个数为 r, 由于 $r < m$, 所以有非零解
2. 非齐次线性方程组:
   (a) $r(\boldsymbol{A}) \neq r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) \Rightarrow$ 无解
   (b) $r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) = m \Rightarrow$ 唯一解
   (c) $r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) = r < m \Rightarrow$ 无穷解