第一章　特征值和特征向量

1.1　基础知识

1.1.1　特征值和特征向量

定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, λ 是一个数, 若存在一个非零的 n 维向量 $\boldsymbol{\xi}$, 使得 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 则称 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

上式可以化简成 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}$, $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 被称为特征多项式, $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 称为特征矩阵.

性质

1. 特征值的性质
   (a) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(\boldsymbol{A})$
   (b) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = |\boldsymbol{A}|$
2. 特征向量的性质
   (a) k 重特征值 Λ 至多只有 k 个线性无关的向量
   (b) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征的特征向量, 则 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 线性无关
   (c) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于同一特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{\xi_1}+k_1\boldsymbol{\xi_2}$ 仍然是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量

1.1.2　矩阵的相似

定义

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 成立, 则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 记成 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

性质

1. - 反身性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$
   - 对称性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$
   - 传递性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$
2. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则有
   - $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$
   - $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$
   - $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值
   - $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 特征多项式的值相同
3. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则有
   - $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$
   - $\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T$
   - $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$
   - $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$

1.1.3　矩阵的相似对角化

定义

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

$$\boldsymbol{P}=\left[\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},...\boldsymbol{\xi_n}\right],\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

条件

1. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 ($|\boldsymbol{P}| = 0$)
2. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 对应于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量 (n 重特征值对应的解空间是 n 维)
3. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值 $\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 (由特征向量的性质 3 可以推出)
4. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵 $\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 可以相似对角化

上述总共两个充要条件, 两个充分条件.

1.1.4　实对称矩阵

定义

若 $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为是对称矩阵, 如果在此基础上 $\boldsymbol{A}$ 的元素都是实数, 则 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

性质

1. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交
2. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵, 必有可逆矩阵 $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ..., \boldsymbol{\xi_n}]$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$. 且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$,

1.2　习题

1.2.1　特征值和特征向量

求具体型矩阵的特征值和特征向量

1. 用特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 求出 λ, 可以使用试根法对 λ 的高次方程进行求解
2. 用求得的 λ 解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$, 求出特征向量

求解抽象型矩阵的特征值和特征向量

矩阵	$\boldsymbol{A}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k$	$f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}$	λ
特征向量	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$

$f(x)$ 为多项式, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0} \Rightarrow f(\lambda) = 0$.

1.2.2　实对称矩阵

求正交矩阵 Q

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的 λ 与 $\boldsymbol{\xi}$
2. $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ..., \boldsymbol{\xi_n}$ 施密特正交化, 单位化至 $\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, ..., \boldsymbol{\eta_n}$
3. 令 $Q = (\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, ..., \boldsymbol{\eta_n})$

不同的特征值 λ_i 对应的特征矩阵 $\boldsymbol{\xi_i}$ 之间是正交的.
施密特正交化:$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$.
单位化: $\eta_1 = \frac{\beta_1}{||\beta_1||}$.

总结

1. 普通矩阵 $\boldsymbol{A}$
   (a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$ 无关
   (b) $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$
      i. ξ_1, ξ_2 无关
      ii. ξ_1, ξ_2 相关
2. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$
   (a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1 \perp \xi_2$　ξ_1, ξ_2 无关
   (b) $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$
      i. $\xi_1 \perp \xi_2$　ξ_1, ξ_2 无关
      ii. ξ_1 不垂直于 ξ_2　ξ_1, ξ_2 无关

第二章　二次型

2.1　基础知识

2.1.1　二次型

定义

n 元变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的二次齐次多项式称为 n 元二次型, 简称二次型.

二次型可以表示为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, 由此可以得出二次型的矩阵表达式, 令:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则二次型可以表示为:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

必须强调的是, 这里的 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称矩阵.

2.1.2　线性变换

对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, 若令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\dots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\dots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\dots&c_{nn}\end{bmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$

则上式可以写为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$. 上式成为从 $y_1,y_2,...,y_n$ 到 $x_1,x_2,...,x_n$ 的线性变换. 如果 $\boldsymbol{C}$ 可逆, 则称为可逆线性变换.

如果 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 则有 $f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$.

记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则有 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})=g(\boldsymbol{y})$. 至此我们通过线性变换得到了一个新的二次型.

2.1.3　矩阵合同

定义

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得:

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合同, 记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$. 此时称 $f(\boldsymbol{x})$ 与 $g(\boldsymbol{x})$ 为合同二次型.

所谓合同, 就是指同一个二次型在可逆线性变换下的两个不同状态的联系.

性质

1. 反身性: $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{A}$
2. 对称性: $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{A}$
3. 传递性: $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{C}$

2.1.4　标准形/规范形

定义

若二次型中只含有平方项, 没有交叉项, 形如

$$d_1x_1^2+d_2x_2^2+...+d_nx_n^2$$

的二次型称为标准形.

若标准形中, 系数 d_i 仅为 $1, -1, 0$ 的二次型称为规范形.

求法

我们的目标是使得 $\boldsymbol{B}$ 矩阵是一个对角矩阵, 即只有主对角线有元素, 才可以得到标准型. 有两种方法:

1. 任何二次型可以通过配方法 (作可逆线性变换) 化为标准形和规范形, 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (不一定是特征值 λ):

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

   此外, 它还可以转化成规范形:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

2. 任何二次型可以通过正交变换化成标准形 (见 2.2.1), 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (特征值不一定是 $0, 1, -1$):

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

2.1.5 惯性定理

定义

无论选取什么样的线性变换 (配方还是正交合同变换), 将二次型化为标准形或者规范形, 其正项系数个数 p, 负项个数 q 都是不变的, p 称为正惯性指数, q 称为负惯性指数.

性质

1. 若二次型的秩为 r, 则 $r = p + q$, 可逆线性变换不改变正/负惯性指数
2. 两个二次型 (或者实对称矩阵) 合同的条件是有相同的正/负惯性指数

2.2 习题

2.2.1 标准形/规范形

用正交变换法化二次型为标准形

1. 写出二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$
2. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 和特征向量 $\boldsymbol{\xi}$
3. 将 $\boldsymbol{\xi_1}, ..., \boldsymbol{\xi_n}$ 通过正交化/单位化成正交矩阵 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta_1}, ..., \boldsymbol{\eta_n})$
4. 令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{y} \Rightarrow f(y_1, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$

注意　正交变换只能化二次型为标准形, 不能化为规范形 (除非特征值都是 $0, 1, -1$)