



# Linear Algebra

East China University of Science and Technology

# 目录

<b>第一章</b>	<b>行列式</b>	<b>3</b>
1.1	基础知识 . . . . .	3
1.1.1	行列式 . . . . .	3
1.2	习题 . . . . .	4
1.2.1	行列式的计算 . . . . .	4
1.2.2	余子式和代数余子式的线性组合的计算 . . . . .	5
<b>第二章</b>	<b>矩阵</b>	<b>6</b>
2.1	基础知识 . . . . .	6
2.1.1	矩阵 . . . . .	6
2.1.2	矩阵的逆 . . . . .	9
2.1.3	伴随矩阵 . . . . .	9
2.1.4	初等矩阵 . . . . .	10
2.1.5	等价矩阵 . . . . .	11
2.1.6	矩阵的秩 . . . . .	11
2.1.7	常见运算汇总 . . . . .	11
2.2	习题 . . . . .	12
<b>第三章</b>	<b>向量组</b>	<b>13</b>
3.1	基础知识 . . . . .	13
3.2	习题 . . . . .	13
3.2.1	向量 . . . . .	13
3.2.2	线性组合和线性相关 . . . . .	13
<b>第四章</b>	<b>线性方程组</b>	<b>15</b>

目 录	2
<b>第五章 特征值和特征向量</b>	<b>16</b>
5.1 基础知识	16
5.1.1 特征值和特征向量	16
5.1.2 矩阵的相似	17
5.1.3 矩阵的相似对角化	17
5.1.4 实对称矩阵	18
5.2 习题	18
5.2.1 特征值和特征向量	18
5.2.2 实对称矩阵	19
<b>第六章 二次型</b>	<b>20</b>
6.1 基础知识	20
6.1.1 二次型	20
6.1.2 线性变换	20
6.1.3 矩阵合同	21
6.1.4 标准形/规范形	21
6.1.5 惯性定理	23
6.1.6 正定二次型及其判别	23
6.2 习题	24
6.2.1 标准形/规范形	24

# 第一章 行列式

## 1.1 基础知识

### 1.1.1 行列式

定义

#### 1. 几何定义

$n$  阶行列式为  $n$  个  $n$  维向量组成的  $n$  维图形的体积.

#### 2. 逆序数法定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

#### 3. 展开定义

代数余子式:  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

按第  $i$  行展开:  $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$

注意, 行列式的某行 (列) 元素分别乘另一行 (列) 的元素的代数余子式后再求和为 0

性质

1.  $|A^T| = |A|$

2. 若行列式中某行 (列) 全部元素为 0, 行列式为 0

3. 若行列式中某行 (列) 元素有公因子  $k(k \neq 0)$ ,  $k$  可以提到行列式外面
4. 行列式某行 (列) 元素均是两个元素之和, 可以拆成两个行列式之和
5. 两行 (列) 互换, 值取反
6. 两行 (列) 元素对应成比例, 行列式为 0
7. 行列式中某行 (列)  $k$  倍加到另一行 (列), 值不变

### 重要行列式

1. 主对角线行列式 (上/下三角形行列式):  $|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
2. 副对角线行列式:  $|\mathbf{A}| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \dots a_{n1}$
3. 拉普拉斯展开式

$\mathbf{A}$  为  $m$  阶矩阵,  $\mathbf{B}$  为  $n$  阶矩阵

$$\text{主对角线: } \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

$$\text{副对角线: } \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$$

4. 范特蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

## 1.2 习题

### 1.2.1 行列式的计算

#### 具体型行列式

1. 化基本形法

(a) 直接展开: 适用于含 0 较多的行 (列)

(b) 爪型: 斜爪消平爪

(c) 异爪型: 将平爪含 0 较多行 (列) 展开

(d) 行 (列) 和相等: 三种方法

i. 提取公因子: 将其余行全都加到第一行上去, 提取公因子

ii. 加边法: 例如矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{bmatrix}$$

加边后矩阵的值不变, 可以将第 1 行的  $-1$  倍加到其他行, 再用其他行的  $(-1/b)$  倍加到第一列.

iii. 化爪形行列式

(e) 消零化基本形:

(f) 拉普拉斯行列式: 一般为 “X 字形”

(g) 范特蒙德行列式: 化为范式行列式, 看第二行写结果

2. 递推法

3. 行列式表示的函数和方程

## 抽象型行列式

### 1.2.2 余子式和代数余子式的线性组合的计算

## 第二章 矩阵

### 2.1 基础知识

#### 2.1.1 矩阵

##### 本质

矩阵的本质是表达系统信息.

##### 定义

由  $m \times n$  个数排成的  $m$  行  $n$  列的矩形表格. 当  $m = n$  的时候称  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶方阵.

有两个矩阵, 如果  $m, n$  相同, 称为同型矩阵.

##### 运算

1. 相等: 同型矩阵且对应元素相等
2. 加法: 同型矩阵对应元素相加
3. 数乘矩阵 (重要, 与行列式不同)

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

加法运算和数乘运算统称为矩阵的线性运算, 满足以下运算规律:

(a) 交换律:  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

(b) 结合律:  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

(c) 分配律:  $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}, (k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{B}$

(d) 数和矩阵相乘的结合律:  $k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A} = l(k\mathbf{A})$

4. 乘法:  $\mathbf{A}$  为  $m \times s$  矩阵,  $\mathbf{B}$  为  $s \times n$  矩阵, 设  $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = (c_{ij})_{m \times n}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{is}b_{sj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

乘法满足下列运算规律:

(a) 结合律:  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

(b) 分配律:  $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

(c) 数乘与矩阵乘积的结合律:  $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$

5. 转置矩阵: 行列互换

6. 向量的内积和正交

(a) 内积:  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T, \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_n]^T$ , 内积为

$$\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

记为  $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$

(b) 正交: 内积为 0

(c) 模: 向量的长度, 记作  $\|\boldsymbol{\alpha}\|$

7. 标准正交向量组: 所有成员两两正交且模都为 1, 即:

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T \boldsymbol{\alpha}_j = 1 \quad (i = j)$$

称  $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n$  为单位正交向量组.

8. 施密特正交化 (正交规范化)



$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)} \beta_1$$

上式得到的是正交向量组, 再进行单位化:

$$\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \eta_2 = \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$$

得到标准正交向量组.

9. 幂:  $A$  为一个  $n$  阶方阵, 则  $A^n = AA \dots AA$  (共  $n$  个  $A$ )

10. 方阵乘积的行列式

$$|AB| = |A||B|$$

### 重要矩阵

1. 零矩阵
  2. 单位矩阵
  3. 数量矩阵: 数  $k$  和单位矩阵的乘积
  4. 对角矩阵: 非主对角线元素均为 0 的矩阵
  5. 上 (下) 三角矩阵
  6. 对称矩阵:  $A^T = A$
  7. 反对称矩阵:  $A^T = -A$
  8. 正交矩阵:  $A^T A = E$ , 即行 (列) 向量的组合是标准正交向量组
  9. 分块矩阵
- 分块矩阵的加法和数乘与行列式不同:

(a) 加法

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{bmatrix}$$

(b) 数乘

$$k \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\mathbf{A} & k\mathbf{B} \\ k\mathbf{C} & k\mathbf{D} \end{bmatrix}$$

(c) 乘法: 与矩阵乘法相同

### 2.1.2 矩阵的逆

定义

若  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$ , 则矩阵  $\mathbf{A}$  可逆,  $\mathbf{B}$  为  $\mathbf{A}$  的逆矩阵.

性质

设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为同阶可逆矩阵

1.  $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2.  $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1} \ (k \neq 0)$
3.  $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \ (\mathbf{AB} \text{ 也可逆})$
4.  $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \ (\mathbf{A}^T \text{ 也可逆})$
5.  $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$
6.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$

### 2.1.3 伴随矩阵

定义

矩阵  $\mathbf{A}$  的伴随矩阵为:

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

其中  $\mathbf{A}$  为对应元素的代数余子式.

性质

1.  $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}$
2.  $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$
3.  $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$
4.  $(\mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$

### 2.1.4 初等矩阵

定义

单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵, 有三种:

1. 倍乘初等矩阵

$$\mathbf{E}_2(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 互换初等矩阵

$$\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 倍加初等矩阵

$$\mathbf{E}_{31}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意是第一行的  $k$  倍加到第三行或者是第三列的  $k$  倍加到第一列 (别搞错顺序).

性质

1.  $[\mathbf{E}_{ij}]^T = \mathbf{E}_{ij}, [\mathbf{E}_i(k)]^T = \mathbf{E}_i(k), [\mathbf{E}_{ij}(k)]^T = \mathbf{E}_{ji}(k)$
2.  $[\mathbf{E}_{ij}]^{-1} = \mathbf{E}_{ij}, [\mathbf{E}_i(k)]^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{k}), [\mathbf{E}_{ij}(k)]^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-k)$
3. 左行右列定理
4. 若  $\mathbf{A}$  为可逆矩阵, 则可以表示为有限个可逆矩阵的乘积

### 2.1.5 等价矩阵

若  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为  $m \times n$  矩阵, 且  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$ , 则  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为等价矩阵, 记作  $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ .

### 2.1.6 矩阵的秩

定义

设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{A}$  中最高阶非零子式的阶数为矩阵  $\mathbf{A}$  的秩. 如果  $\mathbf{A}$  为  $n \times n$  矩阵, 则  $r(\mathbf{A}) = n$  (满秩)  $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$  可逆.

初等变换不改变矩阵的秩

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{PA}) = r(\mathbf{AQ}) = r(\mathbf{PAQ})$$

重要式子

设  $\mathbf{A}$  为  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{B}$  为满足有关矩阵运算要求的矩阵, 则

$$1. 0 \leq r(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\}$$

$$2. r(k\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$$

$$3. r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$$

$$4. r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$$

$$5. r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n & r(\mathbf{A}) = n \\ 1 & r(\mathbf{A}) = n - 1 \text{ 其中 } \mathbf{A} \text{ 为 } n \text{ 阶方阵} \\ 0 & r(\mathbf{A}) < n - 1 \end{cases}$$

### 2.1.7 常见运算汇总

$$1. |k\mathbf{A}| = k^n |\mathbf{A}|$$

$$(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$$

$$(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{A}^{-1}$$

$$(k\mathbf{A})^* = k^{n-1} \mathbf{A}^*$$

2.  $|A + B| \neq |A| + |B|$   
 $(A + B)^T = A^T + B^T$   
 $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$   
 $(A + B)^* \neq A^* + B^*$
3.  $|AB| = |A||B|$   
 $(AB)^T = B^T A^T$   
 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$   
 $(AB)^* = B^* A^*$
4.  $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$   
 $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$   
 $(A^T)^* = (A^*)^T$

## 2.2 习题

## 第三章 向量组

### 3.1 基础知识

### 3.2 习题

#### 3.2.1 向量

定义

$n$  个数构成的一个有序数组  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  称为一个  $n$  维向量, 记为  $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ , 并称  $\alpha$  为  $n$  维行向量,  $\alpha^T$  为  $n$  维列向量. 其中  $a_i$  称为向量  $\alpha$  或者  $\alpha^T$  的第  $i$  个分量.

#### 3.2.2 线性组合和线性相关

定义

1. 线性组合: 设有  $m$  个  $n$  维向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  和  $m$  个数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ . 则向量  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$  为向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合
2. 线性表出: 若向量  $\beta$  能表示成向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  的线性组合, 即  $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m$ , 则称  $\beta$  能够被向量组线性表出
3. 线性相关: 存在一组不全为 0 的数  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , 使得下式成立:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

上式可以进一步写为  $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \mathbf{0}$ , 这个式子有三种

形式:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者

$$\mathbf{A} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_m a_{1m} = 0 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_m a_{2m} = 0 \\ \cdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_m a_{nm} = 0 \end{cases}$$

4. 线性无关: 只有当  $k_1, k_2, \dots, k_m$  全为 0 的时候, 才能使上式成立

### 判别相关性定理

1. 充要条件: 向量组中至少有一个向量能被其余的  $n-1$  的向量线性表出
2. 若向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性无关, 而向量组  $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性相关, 则  $\beta$  可由向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  线性表出, 且表示方法唯一
- 3.

## 第四章 线性方程组



# 第五章 特征值和特征向量

## 5.1 基础知识

### 5.1.1 特征值和特征向量

#### 定义

设  $\mathbf{A}$  为  $n$  阶矩阵,  $\lambda$  是一个数, 若存在一个非零的  $n$  维向量  $\boldsymbol{\xi}$ , 使得  $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$ , 则称  $\boldsymbol{\xi}$  为  $\mathbf{A}$  的特征向量,  $\lambda$  为  $\mathbf{A}$  的特征值.

上式可以化简成  $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ ,  $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$  被称为特征多项式,  $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$  称为特征矩阵.

#### 性质

##### 1. 特征值的性质

(a)  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr}(\mathbf{A})$

(b)  $\prod_{i=1}^n \lambda_i = |\mathbf{A}|$

##### 2. 特征向量的性质

(a)  $k$  重特征值  $\lambda$  至多只有  $k$  个线性无关的向量

(b) 若  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  是  $\mathbf{A}$  的属于不同特征值的特征的特征向量, 则  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  线性无关

(c) 若  $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$  是  $\mathbf{A}$  的属于同一特征值  $\lambda$  的特征向量, 则  $k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2$  仍然是  $\mathbf{A}$  的属于特征值  $\lambda$  的特征向量

## 5.1.2 矩阵的相似

## 定义

设  $A$  和  $B$  为两个  $n$  阶方阵, 若存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$  成立, 则称  $A$  相似于  $B$ , 记成  $A \sim B$ .

## 性质

1.
  - 反身性:  $A \sim A$
  - 对称性:  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
  - 传递性:  $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$
2. 若  $A \sim B$ , 则有
  - $r(A) = r(B)$
  - $|A| = |B|$
  - $A, B$  具有相同的特征值
  - $A, B$  特征多项式的值相同
3. 若  $A \sim B$ , 则有
  - $f(A) \sim f(B)$
  - $A^T \sim B^T$
  - $A$  可逆,  $A^* \sim B^*$
  - $A$  可逆,  $A^{-1} \sim B^{-1}$

## 5.1.3 矩阵的相似对角化

## 定义

设  $n$  阶矩阵  $A$ , 存在  $n$  阶可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = \Lambda$ , 则  $A \sim \Lambda$ ,  $\Lambda$  是  $A$  的相似标准形.

$$P = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n], \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

## 条件

1.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  可以相似对角化  $\Leftrightarrow \mathbf{A}$  有  $n$  个线性无关的特征向量 ( $|\mathbf{P}| \neq 0$ )
2.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  可以相似对角化  $\Leftrightarrow \mathbf{A}$  对应于每个  $k_i$  重特征值都有  $k_i$  个线性无关的特征向量 ( $n$  重特征值对应的解空间是  $n$  维)
3.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  有  $n$  个不同特征值  $\Rightarrow \mathbf{A}$  可以相似对角化 (由特征向量的性质 3 可以推出)
4.  $n$  阶矩阵  $\mathbf{A}$  为实对称矩阵  $\Rightarrow \mathbf{A}$  可以相似对角化

上述总共两个充要条件, 两个充分条件.

## 5.1.4 实对称矩阵

## 定义

若  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ , 则  $\mathbf{A}$  为是对称矩阵, 如果在此基础上  $\mathbf{A}$  的元素都是实数, 则  $\mathbf{A}$  是实对称矩阵.

## 性质

1. 实对称矩阵  $\mathbf{A}$  的属于不同特征值的特征向量相互正交
2. 实对称矩阵  $\mathbf{A}$  必相似于对角矩阵, 必有可逆矩阵  $\mathbf{P} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ , 使得  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}$ . 且存在正交矩阵  $\mathbf{Q}$ , 使得  $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ ,

## 5.2 习题

## 5.2.1 特征值和特征向量

## 求具体型矩阵的特征值和特征向量

1. 用特征方程  $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$  求出  $\lambda$ , 可以使用试根法对  $\lambda$  的高次方程进行求解
2. 用求得的  $\lambda$  解齐次线性方程组  $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})\xi = \mathbf{0}$ , 求出特征向量

## 求解抽象型矩阵的特征值和特征向量

矩阵	$A$	$kA$	$A^k$	$f(A)$	$A^{-1}$	$A^*$	$P^{-1}AP$
特征值	$\lambda$	$k\lambda$	$\lambda^k$	$f(\lambda)$	$\lambda^{-1}$	$\frac{ A }{\lambda}$	$\lambda$
特征向量	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$\xi$	$P^{-1}\xi$

$f(x)$  为多项式, 若矩阵  $A$  满足  $f(A) = 0 \Rightarrow f(\lambda) = 0$ .

## 5.2.2 实对称矩阵

求正交矩阵  $Q$ 

1. 求  $A$  的  $\lambda$  与  $\xi$
2.  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  施密特正交化, 单位化至  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$
3. 令  $Q = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$

不同的特征值  $\lambda_i$  对应的特征矩阵  $\xi_i$  之间是正交的.

施密特正交化:  $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$ .

单位化:  $\eta_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$ .

## 总结

1. 普通矩阵  $A$ 
  - (a)  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$  无关
  - (b)  $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$ 
    - i.  $\xi_1, \xi_2$  无关
    - ii.  $\xi_1, \xi_2$  相关
2. 实对称矩阵  $A$ 
  - (a)  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1 \perp \xi_2$   $\xi_1, \xi_2$  无关
  - (b)  $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ 
    - i.  $\xi_1 \perp \xi_2$   $\xi_1, \xi_2$  无关
    - ii.  $\xi_1$  不垂直于  $\xi_2$   $\xi_1, \xi_2$  无关

# 第六章 二次型

## 6.1 基础知识

### 6.1.1 二次型

定义

$n$  元变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的二次齐次多项式称为  $n$  元二次型, 简称二次型.

二次型可以表示为  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ , 由此可以得出二次型的矩阵表达式, 令:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则二次型可以表示为:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$$

必须强调的是, 这里的  $\mathbf{A}$  是一个对称矩阵.

### 6.1.2 线性变换

对于  $n$  元二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 若令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \dots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

$$\text{记 } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

则上式可以写为  $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ . 上式成为从  $y_1, y_2, \dots, y_n$  到  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的线性变换. 如果  $\mathbf{C}$  可逆, 则称为可逆线性变换.

如果  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 令  $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y}$ , 则有  $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{C}\mathbf{y})^T \mathbf{A} (\mathbf{C}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}) \mathbf{y}$ .

记  $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C}$ , 则有  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{B} \mathbf{y} = g(\mathbf{y})$ . 至此我们通过线性变换得到了一个新的二次型.

### 6.1.3 矩阵合同

定义

设  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  为  $n$  阶矩阵, 若存在可逆矩阵  $\mathbf{C}$ , 使得:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{B}$$

则称  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  合同, 记作  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$ . 此时称  $f(\mathbf{x})$  与  $g(\mathbf{x})$  为合同二次型.

所谓合同, 就是指同一个二次型在可逆线性变换下的两个不同状态的联系.

性质

1. 反身性:  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}$
2. 对称性:  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \simeq \mathbf{A}$
3. 传递性:  $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}, \mathbf{B} \simeq \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{C}$

### 6.1.4 标准形/规范形

定义

若二次型中只含有平方项, 没有交叉项, 形如

$$d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \dots + d_n x_n^2$$

的二次型称为标准形.

若标准形中, 系数  $d_i$  仅为  $1, -1, 0$  的二次型称为规范形.

### 求法

我们的目标是使得  $\mathbf{B}$  矩阵是一个对角矩阵, 即只有主对角线有元素, 才可以得到标准型. 有两种方法:

1. 任何二次型可以通过配方法 (作可逆线性变换) 化为标准形和规范形, 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (不一定是特征值  $\lambda$ ):

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

此外, 它还可以转化成规范形:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

2. 任何二次型可以通过正交变换化成标准形 (见 6.2.1), 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (特征值不一定是  $0, 1, -1$ ):

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

## 6.1.5 惯性定理

## 定义

无论选取什么样的线性变换 (配方还是正交合同变换), 将二次型化为标准形或者规范形, 其正项系数个数  $p$ , 负项个数  $q$  都是不变的,  $p$  称为正惯性指数,  $q$  称为负惯性指数.

## 性质

1. 若二次型的秩为  $r$ , 则  $r = p + q$ , 可逆线性变换不改变正/负惯性指数
2. 两个二次型 (或者实对称矩阵) 合同的条件是有相同的正/负惯性指数

## 6.1.6 正定二次型及其判别

## 定义

$n$  元二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ , 若对于任意的  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \neq \mathbf{0}$  均有二次型大于 0, 即  $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ , 则称  $f$  为正定二次型,  $\mathbf{A}$  为正定矩阵.

## 条件

1. 充要条件:

$$\begin{aligned}
 n \text{元二次型正定} &\Leftrightarrow \text{对于任意 } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ 有 } \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \\
 &\Leftrightarrow f \text{ 的正惯性指数 } p = n \text{ (所有的系数全正)} \\
 &\Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵 } \mathbf{D}, \text{ 使 } \mathbf{A} = \mathbf{D}^T \mathbf{D} \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{A} \simeq \mathbf{E} \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ 的特征值 } \lambda_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n) \\
 &\Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ 的全部顺序主子式均大于 0 (左上角行列式)}
 \end{aligned}$$

2. 必要条件:

$$\begin{aligned}
 n \text{元二次型正定} &\Leftarrow a_{ii} > 0 (i = 1, 2, \dots, n) \\
 &\Leftarrow |\mathbf{A}| > 0
 \end{aligned}$$



## 6.2 习题

### 6.2.1 标准形/规范形

用正交变换法化二次型为标准形

1. 写出二次型矩阵  $A$
2. 求  $A$  的特征值  $\lambda$  和特征向量  $\xi$
3. 将  $\xi_1, \dots, \xi_n$  通过正交化/单位化成正交矩阵  $Q = (\eta_1, \dots, \eta_n)$
4. 令  $x = Qy \Rightarrow f(x) = x^T A x = (Qy)^T A Q y = y^T Q^{-1} A Q y = y^T \lambda y \Rightarrow f(y_1, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$

**注意** 正交变换只能化二次型为标准形, 不能化为规范形 (除非特征值都是  $0, 1, -1$ )