第一章　特征值和特征向量

1.1　基础知识

1.1.1　特征值和特征向量

性质

1. 特征值的性质
2. 特征向量的性质
   (a) k 重特征值 Λ 至多只有 k 个线性无关的向量
   (b) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征的特征向量, 则 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 线性无关
   (c) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于同一特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{\xi_1} + k_1\boldsymbol{\xi_2}$ 仍然是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量

1.1.2　矩阵的相似对角化

定义

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{\Lambda}$, 则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

$$\boldsymbol{P} = \left[\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ...\boldsymbol{\xi_n}\right], \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

条件

1. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 ($|\boldsymbol{P}| = 0$)
2. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 对应于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量 (n 重特征值对应的解空间是 n 维)
3. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值 $\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 (由特征向量的性质 3 可以推出)
4. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵 $\Rightarrow \boldsymbol{A}$ 可以相似对角化

上述总共两个充要条件, 两个充分条件.

1.1.3　实对称矩阵

定义

若 $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为是对称矩阵, 如果在此基础上 $\boldsymbol{A}$ 的元素都是实数, 则 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

性质

1. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交
2. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵, 且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$,

1.2　习题

1.2.1　实对称矩阵

求正交矩阵 Q

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的 λ 与 $\boldsymbol{\xi}$
2. $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ..., \boldsymbol{\xi_n}$ 施密特正交化, 单位化至 $\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, ..., \boldsymbol{\eta_n}$
3. 令 $Q = (\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, ..., \boldsymbol{\eta_n})$

不同的特征值 λ_i 对应的特征矩阵 $\boldsymbol{\xi_i}$ 之间是正交的.
施密特正交化:$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$.
单位化: $\eta_1 = \frac{\beta_1}{||\beta_1||}$.

总结

1. 普通矩阵 $\boldsymbol{A}$
   (a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$ 无关
   (b) $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \xi_1, \xi_2$
      i. ξ_1, ξ_2 无关
      ii. ξ_1, ξ_2 相关
2. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$
   (a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \xi_1 \perp \xi_2$, ξ_1, ξ_2 无关
   (b) $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$
      i. $\xi_1 \perp \xi_2$, ξ_1, ξ_2 无关
      ii. ξ_1 不垂直于 ξ_2, ξ_1, ξ_2 无关