Linear Algebra

East China University of Science and Technology

目录

第一章　行列式

1.1　基础知识

1.1.1　行列式

定义

1. 几何定义

   n 阶行列式为 n 个 n 维向量组成的 n 维图形的体积.

2. 逆序数法定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1, j_2 \dots j_n} (-1)^{r(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

3. 展开定义

   代数余子式: $\boldsymbol{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \boldsymbol{M}_{ij}$

   按第 i 行展开: $a_{i1}\boldsymbol{A}_{i1} + a_{i2}\boldsymbol{A}_{i2} + ... + a_{in}\boldsymbol{A}_{in}$

   注意, 行列式的某行 (列) 元素分别乘另一行 (列) 的元素的代数余子式后再求和为 0

性质

1. $|\boldsymbol{A}^T| = \boldsymbol{A}$

2. 若行列式中某行 (列) 全部元素为 0, 行列式为 0

3. 若行列式中某行 (列) 元素有公因子 $k(k \neq 0)$, k 可以提到行列式外面
4. 行列式某行 (列) 元素均是两个元素只和, 可以拆成两个行列式只和
5. 两行 (列) 互换, 值取反
6. 两行 (列) 元素对应成比例, 行列式为 0
7. 行列式中某行 (列)k 倍加到另一行 (列), 值不变

重要行列式

1. 主对角线行列式 (上/下三角形行列式): $|\boldsymbol{A}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
2. 副对角线行列式: $|\boldsymbol{A}| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \ldots a_{n1}$
3. 拉普拉斯展开式

   $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵

   主对角线: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

   副对角线: $\begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
4. 范特蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

1.2　习题

1.2.1　行列式的计算

具体型行列式

1. 化基本形法

   (a) 直接展开: 适用于含 0 较多的行 (列)

(b) 爪型: 斜爪消平爪

(c) 异爪型: 将平爪含 0 较多行 (列) 展开

(d) 行 (列) 和相等: 三种方法

i. 提取公因子: 将其余行全都加到第一行上去, 提取公因子

ii. 加边法: 例如矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1-b & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_1-b & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2-b & \dots & a_n \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n-b \end{bmatrix}$$

加边后矩阵的值不变, 可以将第 1 行的 -1 倍加到其他行, 再用其他行的 $(-1/b)$ 倍加到第一列.

iii. 化爪形行列式

(e) 消零化基本形:

(f) 拉普拉斯行列式: 一般为 "X 字形"

(g) 范特蒙德行列式: 化为范式行列式, 看第二行写结果

2. 递推法

3. 行列式表示的函数和方程

抽象型行列式

1.2.2　余子式和代数余子式的线性组合的计算

第二章　矩阵

2.1　基础知识

2.1.1　矩阵

本质

矩阵的本质是表达系统信息.

定义

由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的矩形表格. 当 $m = n$ 的时候称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵.

有两个矩阵, 如果 m, n 相同, 称为同型矩阵.

运算

1. 相等: 同型矩阵且对应元素相等
2. 加法: 同型矩阵对应元素相加
3. 数乘矩阵 (重要, 与行列式不同)

$$k\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}k = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

加法运算和数乘运算统称为矩阵的线性运算, 满足以下运算规律:

(a) 交换律: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

(b) 结合律: $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

(c) 分配律: $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B},(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{B}$

(d) 数和矩阵相乘的结合律: $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}=l(k\boldsymbol{A})$

4. 乘法: $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times s$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为 $s\times n$ 矩阵, 设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{is}b_{sj}(i=1,2,...,m;j=1,2,...,n)$$

乘法满足下列运算规律:

(a) 结合律: $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

(b) 分配律: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$

(c) 数乘与矩阵乘积的结合律: $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$

5. 转置矩阵: 行列互换

6. 向量的内积和正交

(a) 内积: $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_1,...,\alpha_n]^T,\boldsymbol{\beta}=[\beta_1,...,\beta_n]^T$, 内积为

$$\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+...+a_nb_n$$

记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$

(b) 正交: 内积为 0

(c) 模: 向量的长度, 记作 $||\boldsymbol{\alpha}||$

7. 标准正交向量组: 所有成员两两正交且模都为 1, 即:

$$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j=0\ (i\neq j)$$
$$\boldsymbol{\alpha}_i^T\boldsymbol{\alpha}_j=1\ (i=j)$$

称 $\boldsymbol{\alpha_1},...,\boldsymbol{\alpha_n}$ 为单位正交向量组.

8. 施密特正交化 (正交规范化)

$$\boldsymbol{\beta_1} = \boldsymbol{\alpha_1}$$
$$\boldsymbol{\beta_2} = \boldsymbol{\alpha_2} - \frac{(\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\beta_1})}{(\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_1})}\boldsymbol{\beta_1}$$

上式得到的是正交向量组, 再进行单位化:

$$\boldsymbol{\eta_1} = \frac{\boldsymbol{\beta_1}}{||\boldsymbol{\beta_1}||}, \boldsymbol{\eta_2} = \frac{\boldsymbol{\beta_2}}{||\boldsymbol{\beta_2}||}$$

得到标准正交向量组.

9. 幂: $\boldsymbol{A}$ 为一个 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}...\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}$(共$n$个$\boldsymbol{A}$)
10. 方阵乘积的行列式
$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

重要矩阵

1. 零矩阵
2. 单位矩阵
3. 数量矩阵: 数 k 和单位矩阵的乘积
4. 对角矩阵: 非主对角线元素均为 0 的矩阵
5. 上 (下) 三角矩阵
6. 对称矩阵: $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$
7. 反对称矩阵: $\boldsymbol{A}^T = -\boldsymbol{A}$
8. 正交矩阵: $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, 即行 (列) 向量的组合是标准正交向量组
9. 分块矩阵

   分块矩阵的加法和数乘与行列式不同:

   (a) 加法

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{A_2} \\ \boldsymbol{A_3} & \boldsymbol{A_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{B_2} \\ \boldsymbol{B_3} & \boldsymbol{B_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1}+\boldsymbol{B_1} & \boldsymbol{A_2}+\boldsymbol{B_2} \\ \boldsymbol{A_3}+\boldsymbol{B_3} & \boldsymbol{A_4}+\boldsymbol{B_4} \end{bmatrix}$$

(b) 数乘

$$k\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\boldsymbol{A} & k\boldsymbol{B} \\ k\boldsymbol{C} & k\boldsymbol{D} \end{bmatrix}$$

(c) 乘法: 与矩阵乘法相同

2.1.2 矩阵的逆

定义

若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

性质

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵

1. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$
2. $(k\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$ $(k \neq 0)$
3. $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ ($\boldsymbol{AB}$也可逆)
4. $(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$ ($\boldsymbol{A}^T$也可逆)
5. $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$
6. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}^{-1}$

2.1.3 伴随矩阵

定义

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为:

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为对应元素的代数余子式.

性质

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$
2. $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$
3. $(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$
4. $(\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$

2.1.4 初等矩阵

定义

单位矩阵经过一次初等变换后得到的矩阵称为初等矩阵, 有三种:

1. 倍乘初等矩阵
$$\boldsymbol{E}_2(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
2. 互换初等矩阵
$$\boldsymbol{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
3. 倍加初等矩阵
$$\boldsymbol{E}_{31}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
注意是第一行的 k 倍加到第三行或者是第三列的 k 倍加到第一列 (别搞错顺序).

性质

1. $[\boldsymbol{E}_{ij}]^T = \boldsymbol{E}_{ij}, [\boldsymbol{E}_i(k)]^T = \boldsymbol{E}_i(k), [\boldsymbol{E}_{ij}(k)]^T = \boldsymbol{E}_{ji}(k)$
2. $[\boldsymbol{E}_{ij}]^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}, [\boldsymbol{E}_i(k)]^{-1} = \boldsymbol{E}_i(\frac{1}{k}), [\boldsymbol{E}_{ij}(k)]^{-1} = \boldsymbol{E}_{ij}(-k)$
3. 左行右列定理
4. 若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵, 则可以表示为有限个可逆矩阵的乘积

2.1.5　等价矩阵

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, 且 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为等价矩阵, 记作 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

2.1.6　矩阵的秩

定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{A}$ 中最高阶非零子式的阶数为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩. 如果 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵, 则 $r(\boldsymbol{A})=n$ (满秩) $\Leftrightarrow |\boldsymbol{A}|\neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$可逆.

初等变换不改变矩阵的秩

$$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{PA})=r(\boldsymbol{AQ})=r(\boldsymbol{PAQ})$$

重要式子

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为满足有关矩阵运算要求的矩阵, 则

1. $0\leq r(\boldsymbol{A})\leq \min\{m,n\}$
2. $r(k\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$
3. $r(\boldsymbol{AB})\leq \min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$
4. $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leq r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$
5. $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n & r(\boldsymbol{A})=n \\ 1 & r(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0 & r(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵

2.1.7　常见运算汇总

1. $$\begin{aligned} &|k\boldsymbol{A}|=k^n\boldsymbol{A} \\ &(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^T \\ &(k\boldsymbol{A})^{-1}=\tfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1} \\ &(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^* \end{aligned}$$

2. $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| \neq |\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^* \neq \boldsymbol{A}^*+\boldsymbol{B}^*$

3. $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$

$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

4. $(\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}$

$(\boldsymbol{A}^{-1})^T = (\boldsymbol{A}^T)^{-1}$

$(\boldsymbol{A}^T)^* = (\boldsymbol{A}^*)^T$

2.2　习题

第三章　向量组

3.1　基础知识

3.1.1　向量

定义

n 个数构成的一个有序数组 $[a_1, a_2, ..., a_n]$ 称为一个 n 维向量, 记为 $\boldsymbol{\alpha} = [a_1, a_2, ..., a_n]$, 并称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维行向量, $\boldsymbol{\alpha}^T$ 为 n 维列向量. 其中 a_i 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 或者 $\boldsymbol{\alpha}^T$ 的第 i 个分量.

3.1.2　线性组合和线性相关

定义

1. 线性组合: 设有 m 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 和 m 个数 $k_1, k_2, ..., k_m$. 则向量 $k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + ... + k_m\boldsymbol{\alpha_m}$ 为向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 的线性组合

2. 线性表出: 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能表示成向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 的线性组合, 即 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + ... + k_m\boldsymbol{\alpha_m}$, 则称 $\boldsymbol{\beta}$ 能够被向量组线性表出

3. 线性相关: 存在一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, ..., k_m$, 使得下式成立:

$$k_1\boldsymbol{\alpha_1} + k_2\boldsymbol{\alpha_2} + ... + k_m\boldsymbol{\alpha_m} = \boldsymbol{0}$$

上式可以进一步写为 $x_1\boldsymbol{\alpha_1} + x_2\boldsymbol{\alpha_2} + ... + x_m\boldsymbol{\alpha_m} = \boldsymbol{0}$, 这个式子有四种形式:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$$

或者矩阵形式:

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者向量形式:

$$\boldsymbol{Ax} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + ... + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

或者线性方程组形式:

$$\begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{12} + ... + x_ma_{1m} = 0 \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + ... + x_ma_{2m} = 0 \\ \dots \\ x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + ... + x_ma_{nm} = 0 \end{cases}$$

4. 线性无关: 只有当 $k_1, k_2, ..., k_m$ 全为 0 的时候, 才能使上式成立

判别相关性定理

1. 相关充要条件: 向量组中至少有一个向量能被其余的 $n-1$ 的向量线性表出
2. 相关充要条件: 方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非 $\boldsymbol{0}$ 解
3. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性无关, 而向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性表出, 且表示方法唯一
4. 如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能够由向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性表出, 则 $r([\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}]) = r([\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}])$
5. 以少表多, 多的相关: 如果向量组 $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, ..., \boldsymbol{\beta_t}$ 能够由向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_s}$ 线性表示, 且 $t > s$, 则 $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, ..., \boldsymbol{\beta_t}$ 线性相关

6. 向量组的部分与整体: 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 中有一部分向量线性相关, 则整体也线性相关;

   如果向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性无关, 则其任一部分线性无关

7. 向量的部分与整体: 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性无关, 则将所有向量扩展到 s 维得到的向量组 $\boldsymbol{\alpha_1^*}, \boldsymbol{\alpha_2^*}, ..., \boldsymbol{\alpha_m^*}$ 也是线性无关的;

   如果向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性相关, 则将所有向量缩减到 k 维得到的向量组 $\boldsymbol{\alpha_1^*}, \boldsymbol{\alpha_2^*}, ..., \boldsymbol{\alpha_m^*}$ 也是线性相关的

3.1.3　极大线性无关组和等价向量组

定义

在向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 中, 存在向量组 $\boldsymbol{\alpha_{i_1}}, \boldsymbol{\alpha_{i_2}}, ..., \boldsymbol{\alpha_{i_s}}$, 满足以下条件:

1. $\boldsymbol{\alpha_{i_1}}, \boldsymbol{\alpha_{i_2}}, ..., \boldsymbol{\alpha_{i_s}}$ 线性无关
2. 向量组 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 中的任一向量能够由向量组 $\boldsymbol{\alpha_{i_1}}, \boldsymbol{\alpha_{i_2}}, ..., \boldsymbol{\alpha_{i_s}}$ 线性表示

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha_{i_1}}, \boldsymbol{\alpha_{i_2}}, ..., \boldsymbol{\alpha_{i_s}}$ 为原向量组的极大线性无关组.

3.1.4　等价向量组

定义

若有两个向量组 (1) $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_s}$ 和 (2) $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, ..., \boldsymbol{\beta_t}$, 这两个向量组中的任一元素都可以由另一向量组线性表出, 则称这两个向量组为等价向量组.

性质

1. 反身性: $(1) \simeq (1)$
2. 对称性: $(1) \simeq (2) \Leftrightarrow (2) \simeq (1)$
3. 传递性: $(1) \simeq (2), (2) \simeq (3) \Rightarrow (1) \simeq (3)$
4. 向量组和它的极大线性无关组是等价向量组

5. 等价向量组有相等的秩

3.1.5　向量组的秩

定义

向量组的秩是极大线性无关组成员的个数, 是线性无关向量的个数, 是向量空间的维数, 是最简化的向量数.

性质

1. 三秩相等: $r(\boldsymbol{A})$ 矩阵的秩 $=\boldsymbol{A}$ 的行秩 $=\boldsymbol{A}$ 的列秩
2. 若 $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \boldsymbol{B}$, 则
   (a) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组是等价向量组
   (b) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的任何相应部分列向量具有相同的线性相关性
3. 设向量组 (1) $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_s}$ 和 (2) $\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, ..., \boldsymbol{\beta_t}$, 若 $\boldsymbol{\beta}_i$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_s}$ 线性表出, 则 $r(\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2}, ..., \boldsymbol{\beta_t}) \le r(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_s})$

3.2　习题

第四章　线性方程组

4.1　基础知识

4.1.1　齐次线性方程组

设有一齐次线性方程组:

$$
\begin{cases}
x_1a_{11} + x_2a_{12} + ... + x_ma_{1m} = 0 \\
x_1a_{21} + x_2a_{22} + ... + x_ma_{2m} = 0 \\
\cdots \\
x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + ... + x_ma_{nm} = 0
\end{cases}
$$

其矩阵形式为:

$$
\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

有解的条件

由上矩阵可以得到, 未知数的个数为 m, 方程的个数为 n.

1. 若 $m > n$, 则必有非零解
2. 若 $m = n$, 用秩判断:
   (a) 若 $r(\boldsymbol{A}) = m$(向量组线性无关), 则仅有零解
   (b) 若 $r(\boldsymbol{A}) = r < m$(向量组线性相关), 则必有非零解, 且有 $m - r$ 个线性无关解

上述判定基于三秩相等给出, 矩阵的秩等于列向量 (向量组) 的秩.

3. 若 $m < n$,

解的性质

若 $\boldsymbol{A\xi_1} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A\xi_2} = \boldsymbol{0}$, 则 $k_1\boldsymbol{\xi_1} + k_2\boldsymbol{\xi_2} = 0$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

基础解系和解的结构

1. 基础解系

   设 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ..., \boldsymbol{\xi_{m-r}}$ 满足:

   (a) 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解

   (b) 线性无关

   (c) 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的任一解均可由 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ..., \boldsymbol{\xi_{m-r}}$ 线性表出, 则称 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ..., \boldsymbol{\xi_{m-r}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系

2. 通解

   设 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ..., \boldsymbol{\xi_{m-r}}$ 是方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系, 则 $k_1\boldsymbol{\xi_1} + k_2\boldsymbol{\xi_2} + ... + k_{m-r}\boldsymbol{\xi_{m-r}}$ 是其通解.

求解方法

1. $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{B}$ 为行阶梯形矩阵, $r(\boldsymbol{A}) = r$

   高斯消元法:

   ① 保证最靠左的非全 0 列的最上方为非 0 元素, 如果不是, 通过 “互换” 初等行变换使最靠左非全 0 列的最上方为非 0 元素

   ② 通过 “倍加” 初等行变换使这个非 0 元素所在列的下方元素全为 0

   ③ 遮住矩阵的最上面一行不看, 将其余行看作一个新矩阵, 重复①②, 直至矩阵化为阶梯形

   高斯-若当消元法:

   ① 由高斯消元法得到阶梯形矩阵

   ② 对于每一个非全 0 行, 通过 “倍乘” 初等行变换使得这一行的非 0 首位为 1

③ 对于每一个非全 0 行, 通过 "倍加" 初等行变换使得这一行的非 0 首项所在列的上方元素全为 0, 直至得到简化行阶梯型矩阵

2. 按列找出一个秩为 r 的子矩阵, 剩余列位置对应的未知数设为自由变量

3. 算出共有 $m-r$ 个线性无关解, 求出 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ..., \boldsymbol{\xi_{m-r}}$, 写出通解

4.1.2　非齐次线性方程组

设有一非齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{12} + ... + x_ma_{1m} = b_1 \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + ... + x_ma_{2m} = b_2 \\ \cdots \\ x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + ... + x_ma_{nm} = b_n \end{cases}$$

其矩阵形式为:

$$\boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

特殊的有矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的增广矩阵:

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}$$

有解的条件

1. 若 $r(\boldsymbol{A}) \neq r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}])$($\boldsymbol{b}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性表出), 方程组无解

2. 若 $r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) = n$($\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}$ 线性无关, $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, ..., \boldsymbol{\alpha_m}, \boldsymbol{b}$ 线性相关), 方程组有唯一解3

3. 若 $r(\boldsymbol{A}) = r([\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}]) = r < m$, 方程组有无穷多解

解的性质

设 $\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}, \boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解, $\boldsymbol{\xi}$ 是对应齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解, 则:

1. $\boldsymbol{\eta_1}, \boldsymbol{\eta_2}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解
2. $k\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解

求解方法

1. 写出 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的导出方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, 并求出其通解 $k_1\boldsymbol{\xi_1} + k_2\boldsymbol{\xi_2} + ... + k_{m-r}\boldsymbol{\xi_{m-r}}$
2. 求出 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一个特解 $\boldsymbol{\eta}$
3. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的通解为 $k_1\boldsymbol{\xi_1} + k_2\boldsymbol{\xi_2} + ... + k_{m-r}\boldsymbol{\xi_{m-r}} + \boldsymbol{\eta}$

第五章　特征值和特征向量

5.1　基础知识

5.1.1　特征值和特征向量

定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵, λ 是一个数, 若存在一个非零的 n 维向量 $\boldsymbol{\xi}$, 使得 $\boldsymbol{A\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, 则称 $\boldsymbol{\xi}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

上式可以化简成 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|\,\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$, $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}|$ 被称为特征多项式, $\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 称为特征矩阵.

性质

1. 特征值的性质
   (a) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = tr(\boldsymbol{A})$
   (b) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = |\boldsymbol{A}|$
2. 特征向量的性质
   (a) k 重特征值 Λ 至多只有 k 个线性无关的向量
   (b) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征的特征向量, 则 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 线性无关
   (c) 若 $\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于同一特征值 λ 的特征向量, 则 $k_1\boldsymbol{\xi_1} + k_1\boldsymbol{\xi_2}$ 仍然是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量

5.1.2　矩阵的相似

定义

设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵, 若存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$ 成立, 则称 $\boldsymbol{A}$ 相似于 $\boldsymbol{B}$, 记成 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

性质

1. - 反身性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$
   - 对称性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$
   - 传递性: $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$
2. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则有
   - $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$
   - $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$
   - $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 具有相同的特征值
   - $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 特征多项式的值相同
3. 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则有
   - $f(\boldsymbol{A})\sim f(\boldsymbol{B})$
   - $\boldsymbol{A}^T\sim\boldsymbol{B}^T$
   - $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^*\sim\boldsymbol{B}^*$
   - $\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{A}^{-1}\sim\boldsymbol{B}^{-1}$

5.1.3　矩阵的相似对角化

定义

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$, 则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Lambda}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的相似标准形.

$$\boldsymbol{P}=\left[\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},...\boldsymbol{\xi_n}\right],\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$$

条件

1. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 ($|\boldsymbol{P}| = 0$)
2. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 $\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 对应于每个 k_i 重特征值都有 k_i 个线性无关的特征向量 (n 重特征值对应的解空间是 n 维)
3. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同特征值 $\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化 (由特征向量的性质 3 可以推出)
4. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵 $\Rightarrow\boldsymbol{A}$ 可以相似对角化

上述总共两个充要条件, 两个充分条件.

5.1.4　实对称矩阵

定义

若 $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 为是对称矩阵, 如果在此基础上 $\boldsymbol{A}$ 的元素都是实数, 则 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵.

性质

1. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量相互正交
2. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必相似于对角矩阵, 必有可逆矩阵 $\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{\xi_1}, \boldsymbol{\xi_2}, ..., \boldsymbol{\xi_n}]$, 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$. 且存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda}$,

5.2　习题

5.2.1　特征值和特征向量

求具体型矩阵的特征值和特征向量

1. 用特征方程 $|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = 0$ 求出 λ, 可以使用试根法对 λ 的高次方程进行求解
2. 用求得的 λ 解齐次线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{0}$, 求出特征向量

求解抽象型矩阵的特征值和特征向量

矩阵	$\boldsymbol{A}$	$k\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A}^k$	$f(\boldsymbol{A})$	$\boldsymbol{A}^{-1}$	$\boldsymbol{A}^*$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$
特征值	λ	$k\lambda$	λ^k	$f(\lambda)$	λ^{-1}	$\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}$	λ
特征向量	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\xi}$

$f(x)$ 为多项式, 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}\Rightarrow f(\lambda)=0$.

5.2.2　实对称矩阵

求正交矩阵 Q

1. 求 $\boldsymbol{A}$ 的 λ 与 $\boldsymbol{\xi}$
2. $\boldsymbol{\xi_1},\boldsymbol{\xi_2},...,\boldsymbol{\xi_n}$ 施密特正交化, 单位化至 $\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},...,\boldsymbol{\eta_n}$
3. 令 $Q=(\boldsymbol{\eta_1},\boldsymbol{\eta_2},...,\boldsymbol{\eta_n})$

不同的特征值 λ_i 对应的特征矩阵 $\boldsymbol{\xi_i}$ 之间是正交的.
施密特正交化:$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$.
单位化: $\eta_1=\frac{\beta_1}{||\beta_1||}$.

总结

1. 普通矩阵 $\boldsymbol{A}$
   (a) $\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\xi_1,\xi_2$ 无关
   (b) $\lambda_1=\lambda_2\Rightarrow\xi_1,\xi_2$
      i. ξ_1,ξ_2 无关
      ii. ξ_1,ξ_2 相关
2. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$
   (a) $\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\xi_1\perp\xi_2$　ξ_1,ξ_2 无关
   (b) $\lambda_1=\lambda_2\Rightarrow$
      i. $\xi_1\perp\xi_2$　ξ_1,ξ_2 无关
      ii. ξ_1 不垂直于 ξ_2　ξ_1,ξ_2 无关

第六章　二次型

6.1　基础知识

6.1.1　二次型

定义

n 元变量 $x_1, x_2, ..., x_n$ 的二次齐次多项式称为 n 元二次型, 简称二次型.

二次型可以表示为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, 由此可以得出二次型的矩阵表达式, 令:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

则二次型可以表示为:

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

必须强调的是, 这里的 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称矩阵.

6.1.2　线性变换

对于 n 元二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, 若令

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \dots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\dots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\dots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{n1}&c_{n2}&\dots&c_{nn}\end{bmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}$

则上式可以写为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$. 上式成为从 $y_1,y_2,...,y_n$ 到 $x_1,x_2,...,x_n$ 的线性变换. 如果 $\boldsymbol{C}$ 可逆, 则称为可逆线性变换.

如果 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$, 则有 $f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}$.

记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则有 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{y})=g(\boldsymbol{y})$. 至此我们通过线性变换得到了一个新的二次型.

6.1.3 矩阵合同

定义

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, 若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得:

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 合同, 记作 $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}$. 此时称 $f(\boldsymbol{x})$ 与 $g(\boldsymbol{x})$ 为合同二次型.

所谓合同, 就是指同一个二次型在可逆线性变换下的两个不同状态的联系.

性质

1. 反身性: $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{A}$
2. 对称性: $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B}\Rightarrow\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{A}$
3. 传递性: $\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{C}\Rightarrow\boldsymbol{A}\simeq\boldsymbol{C}$

6.1.4 标准形/规范形

定义

若二次型中只含有平方项, 没有交叉项, 形如

$$d_1x_1^2+d_2x_2^2+...+d_nx_n^2$$

的二次型称为标准形.

若标准形中, 系数 d_i 仅为 $1, -1, 0$ 的二次型称为规范形.

求法

我们的目标是使得 $\boldsymbol{B}$ 矩阵是一个对角矩阵, 即只有主对角线有元素, 才可以得到标准型. 有两种方法:

1. 任何二次型可以通过配方法 (作可逆线性变换) 化为标准形和规范形, 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (不一定是特征值 λ):

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

   此外, 它还可以转化成规范形:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

2. 任何二次型可以通过正交变换化成标准形 (见6.2.1), 它求得的对角矩阵 (标准形) 形式如下 (特征值不一定是 $0, 1, -1$):

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

6.1.5 惯性定理

定义

无论选取什么样的线性变换 (配方还是正交合同变换), 将二次型化为标准形或者规范形, 其正项系数个数 p, 负项个数 q 都是不变的, p 称为正惯性指数, q 称为负惯性指数.

性质

1. 若二次型的秩为 r, 则 $r = p + q$, 可逆线性变换不改变正/负惯性指数
2. 两个二次型 (或者实对称矩阵) 合同的条件是有相同的正/负惯性指数

6.1.6 正定二次型及其判别

定义

n 元二次型 $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 若对于任意的 $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T \neq \boldsymbol{0}$ 均有二次型大于 0, 即 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$, 则称 f 为正定二次型, $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

条件

1. 充要条件:

$$\begin{aligned}
n\text{元二次型正定} &\Leftrightarrow \text{对于任意}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \text{有}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0 \\
&\Leftrightarrow f\text{的正惯性指数}p = n(\text{所有的系数全正}) \\
&\Leftrightarrow \text{存在可逆矩阵}\boldsymbol{D}, \text{使}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D} \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{E} \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{的特征值}\lambda_i > 0(i = 1, 2, ..., n) \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{的全部顺序主子式均大于 } 0(\text{左上角行列式})
\end{aligned}$$

2. 必要条件:

$$\begin{aligned}
n\text{元二次型正定} &\Leftarrow a_{ii} > 0(i = 1, 2, ..., n) \\
&\Leftarrow |\boldsymbol{A}| > 0
\end{aligned}$$

6.2 习题

6.2.1 标准形/规范形

用正交变换法化二次型为标准形

1. 写出二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$
2. 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 和特征向量 $\boldsymbol{\xi}$
3. 将 $\boldsymbol{\xi_1}, ..., \boldsymbol{\xi_n}$ 通过正交化/单位化成正交矩阵 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\eta_1}, ..., \boldsymbol{\eta_n})$
4. 令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{y} \Rightarrow f(y_1, ..., y_n) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_n y_n^2$

注意　正交变换只能化二次型为标准形, 不能化为规范形 (除非特征值都是 $0, 1, -1$)