DEPARTMENT MATHEMATIK
UND INFORMATIK
DER UNIVERSITÄT ZU KÖLN

Sommersemester 2022

Prof. Dr. Axel Klawonn

Lea Saßmannshausen, M. Sc.
Dr. Janine Weber

07. April 2022

1. Projekt zum Wissenschaftlichen Rechnen II

Hinweise zu den Abgabemodalitäten: Beachten Sie die Abgabemodalitäten, welche im ILIAS-Übungskurs beschrieben werden:

`https://www.ilias.uni-koeln.de/ilias/goto_uk_frm_4577805.html`

Aufgabe 0: (Aufbereitung FETI-DP Code – Vorbereitung für Projekt 2)

Hinweis: Achtung: Dieser Code muss nicht am 05. Mai abgegeben werden!

Überarbeiten Sie Ihren FETI-DP Code aus dem letzten Semester, sodass Sie über einen **vollständig lauffähigen** Code verfügen. Beachten Sie dabei insbesondere die folgenden Punkte:

- Ihr Code sollte möglichst wenig *hard coding* enthalten, d. h. Sie sollten z. B. die Diskretisierung, die Gittererzeugung und die Assemblierungsroutinen möglichst flexibel halten und/oder in separate Funktionen auslagern.
- Ihr Code sollte prinzipiell auch für Elemente höherer Ordnung als P_1-Dreieckselemente erweiterbar sein, indem z. B. einfach die Diskretisierungsroutine in Ihrem Programm ausgetauscht werden kann.
- Ebenso sollte Ihr Programm mit recht geringem Aufwand auf andere Modellprobleme als die Diffusionsgleichung erweiterbar sein, insbesondere auch auf **nicht-skalare** Probleme, indem z. B. die Assemblierungsroutinen entsprechend ausgetauscht werden können.
- Vermeiden Sie generell - soweit möglich - das Aufstellen und Anwenden von expliziten Restriktionsmatrizen (*Hinweis*: Effizienz und Laufzeit!). Nutzen Sie stattdessen, wie im letzten Semester vorgeschlagen, Mappings zwischen globalen und lokalen Knotennummerierungen.

Aufgabe 1: (FEM - Lineare Elastizität):
Erweitern Sie Ihr **Finite Elemente Programm** aus den letzten Semestern um ein zweites Modellproblem, zusätzlich zur bisher betrachteten Diffusionsgleichung.

Teil 1
Implementieren Sie dazu in Ihrem FEM Programm eine zweite, separate Assemblierungsroutine für ein lineares Elastizitätsproblem in zwei Raumdimensionen. Nutzen Sie für die Diskretisierung des Problems wie im letzten Semester stückweise lineare P_1-Dreieckselemente.

Beachten Sie, dass nun - anders als zuvor im skalaren Fall - zu jedem Knoten 2 Freiheitsgrade gehören.

Testen Sie Ihre Implementierung anhand des Einheitsquadrats $\Omega = (0,1)^2$ und einer linearen Diskretisierung definiert durch $H/h = 16$ für die Materialparameter $E = 210$ und $\nu = 0.3$ und die gegebene rechte Seite $f = [1; 1]$ (*Volumenkraft*). Wählen Sie die Dirichletrandbedingung $u|_{\Gamma_1} = 0$ mit $\Gamma_1 := \{(0, y) : y \in (0, 1)\}$. Für diese Diskretisierung mit den angegebenen Randbedingungen und Materialparametern wird Ihnen eine Kontrolllösung für die global assemblierte Steifigkeitsmatrix K auf Ilias bereitgestellt.

Eine zur Vorlesung ergänzende Beschreibung der linearen Elastizitätstheorie sowie entsprechende Implementierungshinweise finden Sie z. B. in kompakter Form in:

- Mats G. Larson, Fredrik Bengzon, *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*, 2013, Springer.

Lesen Sie Kapitel 11 aus der angegebenen Literatur. Arbeiten Sie die entsprechenden Erläuterungen zu den Implementierungshinweisen nach und erläutern Sie Ihre eigene, individuelle MATLAB-Implementierung des linearen Elastizitätsmodells in Ihrem Projektbericht.

Teil 2

Erweitern Sie Ihre FEM-Implementierung aus Teil 1, sodass auch allgemeinere Diskretisierungen als die bisher betrachteten stückweise linearen Dreieckselemente für rechteckige Gebiete verwendet werden können. Lesen Sie dazu das Paper

- Per-Olof Persson, Gilbert Strang, *A simple mesh generator in MATLAB*, SIAM Review 46.2, 2004, Seiten 329-345, online verfügbar unter `https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S0036144503429121`.

Betrachten Sie hierbei insbesondere die in dem Paper vorgestellte MATLAB-Funktion `distmesh2d` und machen Sie sich mit Ihrer Funktionsweise vertraut. Erläutern Sie die Funktionsweise der Funktion sowie die Eigenschaften der zu übergebenden Input-Parameter in Ihrem Projektbericht. Laden Sie dazu den Gittergenerator auf der offiziellen Website der Autoren (`http://persson.berkeley.edu/distmesh/`) herunter und testen Sie die Gittergenerierung (mindestens) für die folgenden Gebiete:

a) Polygon 1 mit den Eckpunkten (siehe Abbildung 1, links):

$$\begin{aligned} v_1 := \{&(-0.4, -0.5), (0.4, -0.2), (0.4, -0.7), (1.5, -0.4), (0.9, 0.1), \\ &(1.6, 0.8), (0.5, 0.5), (0.2, 1), (0.1, 0.4), (-0.4, 0.7)\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Die berechnete Triangulierung soll möglichst uniforme Dreiecke mit der Kantenlänge $h_0 = 0.1$ enthalten.

b) Polygon 2 mit den Eckpunkten (siehe Abbildung 1, rechts):

$$v_2 := \{(0, 0), (0, 22), (24, 30), (24, 22)\}. \tag{2}$$

Die berechnete Triangulierung soll möglichst uniforme Dreiecke mit der Kantenlänge $h_0 = 6$ enthalten.

Plotten Sie in beiden Fällen die erhaltene finale Triangulierung sowie jeweils die Triangulierungen nach 50, 100 und 200 Iterationen. Welche Schwierigkeit tritt bei der Anwendung der Funktion distmesh2d bei Polygon 2 auf? Warum?

Integrieren Sie die allgemeinere Gittergenerierung in Ihr FEM-Programm aus Teil 1. Testen Sie Ihre Implementierung anhand von Polygon 1 und der mittels der Funktion distmesh2d berechneten Triangulierung für die Materialparameter $E = 210$ und $\nu = 0.3$ und die gegebene rechte Seite $f = [1; 1]$ (*Volumenkraft*). Wählen Sie die Dirichletrandbedingung $u|_{\Gamma_2} = 0$ mit $\Gamma_2 := \{(-0.4, y) : y \in \text{Polygon } 1\}$.

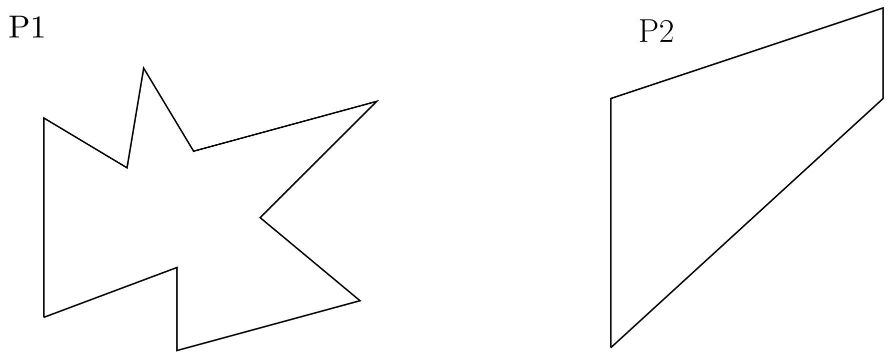

Abbildung 1: Links: Polygon 1 mit den Eckpunkten v_1. Rechts: Polygon 2 mit den Eckpunkten v_2.

Teil 3

Erweitern Sie Ihre FEM-Implementierung aus Teil 1 und Teil 2, sodass auch Elemente höherer Ordnung für die Diskretisierung verwendet werden können. Implementieren Sie dazu eine separate Assemblierungsroutine für quadratische Lagrange Dreieckselemente. Eine theoretische Erklärung zu P_2-Dreieckselementen sowie eine Herleitung der entsprechenden Formfunktionen finden Sie z. B. in Kapitel 8.1.3 in

- Mats G. Larson, Fredrik Bengzon, *The Finite Element Method: Theory, Implementation, and Applications*, 2013, Springer.

Beschreiben Sie die Herleitung der Formfunktionen in eigenen Worten in Ihrem Projektbericht. Erläutern Sie außerdem, wie sich die Routine zur Assemblierung der Steifigkeitsmatrizen im quadratischen Fall zum vorher betrachteten linearen Fall unterscheidet (*Hinweis*: Verwenden Sie geeignete Quadraturformeln).

Testen Sie Ihre Implementierung anhand desselben linearen Elastizitätsmodells wie in Teil 1 (gleiches Gebiet, gleiche Materialparameter und gleiche Volumenkraft) und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Testen Sie anschließend Ihr lineares Elastizitätsmodell sowohl für lineare als auch für quadratische Elemente für verschiedene Werte für die Querkontraktionszahl $\nu \in (0, 1/2)$ und verschiedene Gitterfeinheiten H/h. Betrachten Sie in beiden Fällen insbesondere auch Werte für $\nu \to 1/2$. Welche Beobachtungen können Sie für die getesteten Fälle und die beiden verwendeten Elementtypen machen? Was könnte eine mögliche Erklärung für die gemachten Beobachtungen sein?

Zwischenpräsentation Projekt 1: Dienstag, 26. April, 10:00 Uhr bzw. 12:00 Uhr.

Abgabe Code Projekt 1: Bis Donnerstag, 05. Mai 2022, 12:00 Uhr.

Abgabe ALLER Projektberichte: Bis Montag, 01. August, 12:00 Uhr.

Abschlusspräsentation: Dienstag, 13. September, 10:00 Uhr.