Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут комп'ютерних наук та інформаційних технологій

ЗВІТ
Про виконання лабораторної роботи № 9
«Наближення функцій методом найменших квадратів»
з дисципліни «Чисельні методи»

Лектор:
доцент кафедри ПЗ
Мельник Н.Б.

Виконав:
студ. групи ПЗ-15
Марущак А. С.

Прийняв:
асистент кафедри ПЗ
Гарматій Г.Ю
«___» ______ 2022 р.
∑ = ____ ___________

Львів – 2022

Тема роботи: Наближення функцій методом найменших квадратів.

Мета роботи: ознайомлення на практиці з методом найменших квадратів апроксимації (наближення) функцій.

Теоретичні відомості

На практиці часто виникає необхідність описати у вигляді функціональної залежності зв'язок між величинами, заданими таблично або у вигляді набору точок з координатами $(x_i, y_i), (i = \overline{0,n})$, де n – загальна к-ть точок. Як правило, ці табличні дані отримані експериментально і мають похибки.

У результаті апроксимації бажано отримати досить просту функціональну залежність, яка дасть змогу «згладити» експериментальні похибки та обчислити значення функції в проміжних точках, що не містяться у вихідній таблиці.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблицею своїх значень $y_i = f(x_i), i = \overline{0,n}$. Потрібно знайти поліном фіксованого m-го степеня $(m = \overline{0,n})$

$$P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$

для якого похибкою апроксимації є середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - y_i)^2}\,.$$

Оскільки поліном містить невизначені коефіцієнти a_i $(i = \overline{0,m})$, то необхідно їх підібрати таким чином, щоб мінімізувати функцію

$$\Phi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - y_i\right)^2.$$

У цьому і полягає суть використання методу найменших квадратів для апроксимації функцій.

Використовуючи необхідну умову екстремуму $\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = 0$ $(k = \overline{0,m})$ функції від багатьох змінних $\Phi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$, отримуємо так звану нормальну систему методу найменших квадратів для визначення коефіцієнтів a_i $(i = \overline{0,m})$ апроксимаційного полінома.

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k}\right)a_j\right) = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k\,, k = \overline{0,m}.$$

Отримана система - це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$. Можна показати, що визначник цієї системи відмінний від нуля, тобто її розв'язок існує і єдиний. Однак для високих степенів m система є погано обумовленою. Тому метод найменших квадратів застосовують для знаходження поліномів невисоких степенів $m \leq 5$. Розв'язок нормальної системи шукають, використовуючи прямі або наближені методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Індивідуальне завдання

1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом.
2. Методом найменших квадратів побудувати лінійний, квадратичний і кубічний апроксимаційні поліноми для таблично заданої функції.

Варіант завдання

Варіант 6	x	8,03	8,08	8,16	8,23	8,26	8,33
	y	4,48	5,47	6,05	7,39	8,11	9,93

Хід роботи

Проведемо деякі обчислення вручну для подальшого використання у програмі.
Наші поліноми будуть мати наступний вигляд:

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$
$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$
$$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Використовуючи формулу

$$\sum_{j=0}^{m}\left(\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{j+k}\right) a_j\right) = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k, k = \overline{0,m},$$

запишемо СЛАР відносно невідомих коефіцієнтів кожного полінома.
Маємо, що $n = 5$. Спочатку обчислимо певні додаткові суми:

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^0 = \sum_{i=0}^{5} 1 = 6$$
$$\sum_{i=0}^{5} x_i = 49.09$$

$$\sum_{i=0}^{5} x_i^2 = 401.7023$$
$$\sum_{i=0}^{5} x_i^3 = 3287.6455$$
$$\sum_{i=0}^{5} x_i^4 = 26911.3132$$
$$\sum_{i=0}^{5} x_i^5 = 220319.9804$$
$$\sum_{i=0}^{5} x_i^6 = 1804021.8679$$

$$\sum_{i=0}^{5} y_i = 41.430$$
$$\sum_{i=0}^{5} y_i\, x_i = 340.065$$
$$\sum_{i=0}^{5} y_i\, x_i^2 = 2791.7378$$
$$\sum_{i=0}^{5} y_i\, x_i^3 = 22921.9625$$

Тоді, запишемо СЛАР для знаходження невідомих коефіцієнтів для кожного полінома.
Для лінійного полінома СЛАР має наступний вигляд:

$$\begin{cases} 6a_0 + 49.08a_1 = 41.430 \\ 49.09a_0 + 401.7023a_1 = 340.065 \end{cases}$$

Для квадратного - наступний вигляд:

$$\begin{cases} 6a_0 + 49.08a_1 + 401.7023a_2 = 41.430 \\ 49.09a_0 + 401.7023a_1 + 3287.6455a_2 = 340.065 \\ 401.7023a_0 + 3287.6455a_1 + 26911.3132a_2 = 2791.7378 \end{cases}$$

Для кубічного - наступний вигляд:

$$\begin{cases} 6a_0 + 49.08a_1 + 401.7023a_2 + 3278.6455a_3 = 41.430 \\ 49.09a_0 + 401.7023a_1 + 3287.6455a_2 + 26911.3132a_3 = 340.065 \\ 401.7023a_0 + 3287.6455a_1 + 26911.3132a_2 + 220319.9804a_3 = 2791.7378 \\ 3287.6455a_0 + 26911.3132a_1 + 220319.9804a_2 + 1804021.8679a_3 = 22921.9625 \end{cases}$$

Все, що лишається – розв'язати подані системи відносно невідомих. Наприклад, для лінійного поліному це $(a_0, a_1) = (-132.94, 17.09)$. Тоді його можна записати у вигляді $P_1(x) = -132.94 + 17.09x$. Решту поліномів знайдемо програмно.

Наступна мета – реалізувати подані кроки у вигляді програми, використовуючи отримані знання, для того щоб завершити розрахунки.

Для легшої роботи будемо використовувати структури даних Polynom і Matrix з попередніх лабораторних робіт. Тоді функцію знаходження апроксимаційного поліному запишемо наступним чином:

```
        //Метод для розв'язання СЛАР методом оберненої матриці
        private static Matrix SolveInversedMatrix(Matrix A, Matrix B) => A.Inversed() * B;

        //Метод для пошуку апроксимаційного поліному фіксованого степеня
        public static Polynom GetAproximated(IEnumerable<KeyValuePair<decimal, decimal>> 
xypairs, int polynomPower)
        {
            //Масив сум x-ів певного степеня
            decimal[] powerSums = new decimal[polynomPower * 2 + 1];
            for (int i = 0; i < polynomPower * 2 + 1; i++)
            {
                //Шукаємо ці суми
                powerSums[i] = xypairs.Select(pair => pair.Key).Sum(x => 
Convert.ToDecimal(Math.Pow(Convert.ToDouble(x), i)));
            }

            Matrix A = new(polynomPower + 1, polynomPower + 1), B = new(polynomPower + 1, 
1);
            for (int i = 0; i < polynomPower + 1; i++)
            {
                for (int j = 0; j < polynomPower + 1; j++)
                {
                    //a_ij = sum (x_i^(i+j))
                    A[i, j] = powerSums[i + j];
                }
                //b_i = sum(y_i * x_i^m)
                B[i, 0] = xypairs.Select(pair => pair.Value * 
Convert.ToDecimal(Math.Pow(Convert.ToDouble(pair.Key), i))).Sum();
            }

            return new Polynom(SolveInversedMatrix(A, B).ToArray());
        }
```

Подамо точки з варіанту завдання на вхід програми і подивимось на результат.

Результат виконання програми:

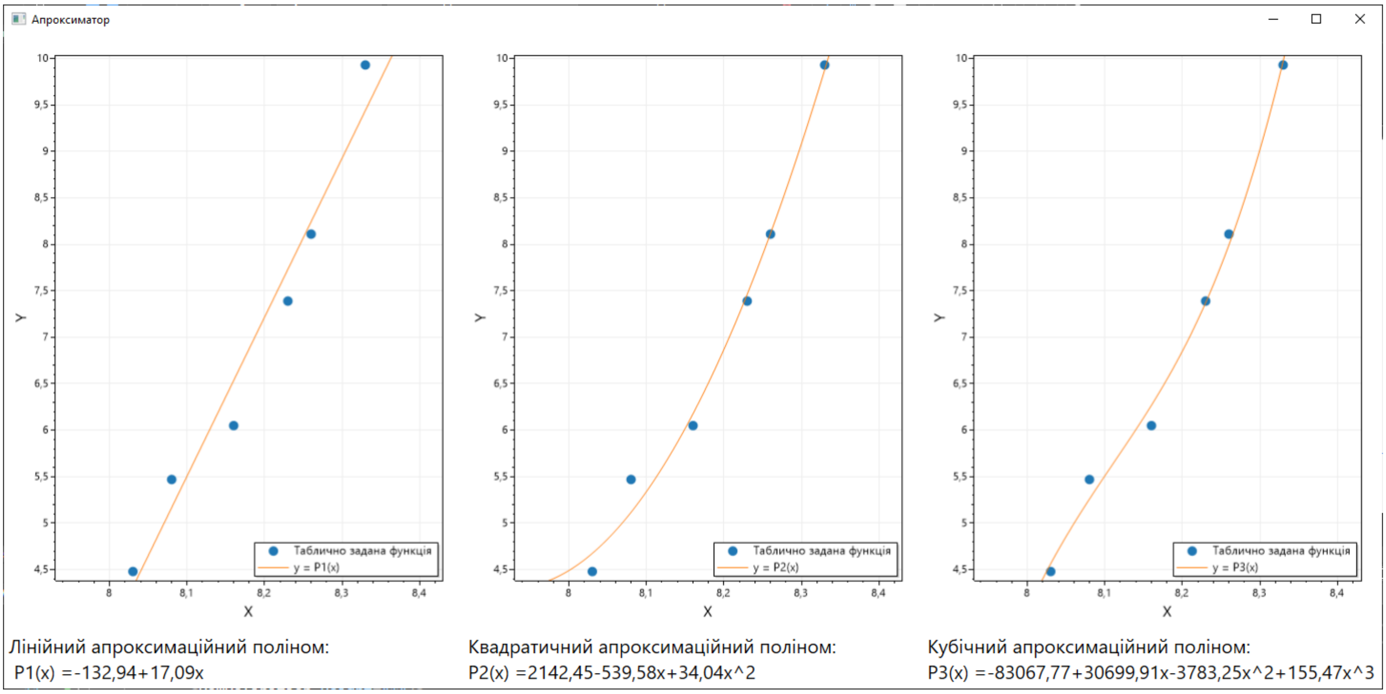

Рис 1.1 Результат виконання програми.

<u>Аналіз результатів</u>:

Як бачимо, усі 3 поліноми досить чітко проходять через задану множину точок. Це означає, що завдання з високою ймовірністю було виконано правильно.

<u>Висновок</u>:

Виконуючи цю лабораторну роботу, ми ознайомилися з методом найменших квадратів апроксимації (наближення) функцій.

За допомогою цих знань ми реалізували програму, що змогли наблизити таблично задану функцію

Варіант 6	*x*	8,03	8,08	8,16	8,23	8,26	8,33
	y	4,48	5,47	6,05	7,39	8,11	9,93

використовуючи лінійний, квадратичний та кубічний поліноми.

Ми отримали наступні поліноми:

$$P_1(x) = -132.94 + 17.09x$$

$$P_2(x) = 2142.45 - 539.58x + 34.04x^2$$

$$P_3(x) = -83067.77 + 30699.91x - 3783.25x^2 + 155.47x^3$$

та побудували їх графіки, використовуючи які, пересвідчились, що ці поліноми досить точно наближають задану множину точок.