Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Львівська політехніка»

Інститут комп’ютерних наук та інформаційних технологій

Кафедра програмного забезпечення

ЗВІТ

Про виконання лабораторної роботи № 1

«Розв’язування нелінійних рівнянь методом дихотомії та методом хорд»
з дисципліни «Чисельні методи ПЗ»

Лектор:

доцент кафедри ПЗ

Мельник Н.Б.

Виконав:

студ. групи ПЗ-15

Марущак А. С.

Прийняв:

асистент кафедри ПЗ

Гарматій Г.Ю

«___» ______ 2022 р.

∑ = ____ ___________

Львів – 2022

Тема роботи: Розв’язування нелінійних рівнянь методом дихотомії та методом хорд.

Мета роботи: Ознайомлення на практиці з методами відокремлення дійсних ізольованих коренів нелінійних рівнянь. Вивчення методу дихотомії та методу хорд уточнення коренів.

Теоретичні відомості

Наступні методи розв’язування нелінійних рівнянь дозволяють знайти розв’язок для наступної задачі: Розглянемо рівняння $f(x)=0$, у якому $f(x)$ є неперервною нелінійною функцією. На відрізку $[a,b]$ дана функція є монотонною та диференційованою, на ньому міститься єдиний корінь x_* заданого рівняння, тобто $f(a)f(b)<0$. Потрібно знайти значення кореня x_* з заданою похибкою ε.

Процедура знаходження наближеного розв’язку нелінійного рівняння складається з двох етапів:

- локалізації коренів – визначення інтервалів, що містять єдиний корінь;
- уточнення коренів.

Локалізувати корені можна 2 способами: графічним (використовуючи графік функції) та аналітичним (провівши розрахунки).

Далі нам необхідно уточнити значення кореня одним із наведених нижче методів.

Метод поділу відрізка навпіл

Покладемо $a_0=a$, $b_0=b$ і обчислимо $x_0=(a_0+b_0)/2$. Якщо $f(x_0)=0$, то $x_*=x_0$, у протилежному випадку, якщо $f(x_0)\neq 0$, то чинимо так:

$$a_{n+1}=\begin{cases}x_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(a_n)=\operatorname{sign} f(x_n),\\ a_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(a_n)\neq\operatorname{sign} f(x_n),\end{cases}\quad (1)\qquad b_{n+1}=\begin{cases}x_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(b_n)=\operatorname{sign} f(x_n),\\ b_n, & \text{якщо } \operatorname{sign} f(b_n)\neq\operatorname{sign} f(x_n),\end{cases}\quad (2)$$

$$x_{n+1}=\frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2},\quad n=0,1,2,\ldots\ (3)$$

і обчислюємо $f(x_{n+1})$. Якщо $f(x_{n+1})=0$, то ітераційний процес завершуємо і вважаємо, що $x_*\approx x_{n+1}$, а коли $f(x_{n+1})\neq 0$, то продовжуємо ітераційний процес (1)-(3).

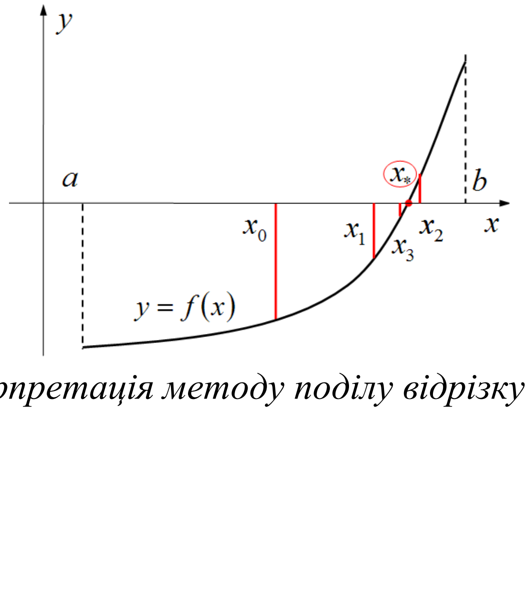

Рис 1.1. Графічна інтерпретація методу поділу відрізку навпіл

Серед переваг даного методу потрібно відзначити простоту реалізації та надійність. Недоліком наведеного методу є невелика швидкість його збіжності.

Опис алгоритму:

1. Приймаємо значення start, end, precision.
2. Перевіряємо, чи значення функції в точках start та end мають різні знаки. Якщо так, то повідомляємо, що корені не можна знайти.
3. Шукаємо середнє значення між start та end
4. Якщо фукнція в цій точці має той самий знак, що і у точці start , тоді start = сер. знач., в противному випадку - функція має такий самий знак, що і у точці end, і тому end = сер.знач.
5. Повторюємо кроки 3,4 допоки |end –start| > precision і f(end) $\neq$ 0;
6. Повертаємо із функції значення end, а також к-ть ітерацій.

Метод хорд (інтерполювання, або пропорційних частин)

Суть методу хорд полягає в тому, що на відрізку $[a,b]$ малої довжини дугу функції $f(x)$ замінюють хордою ab, яка її стягує. За наближене значення кореня приймають абсцису точки перетину хорди з віссю Ox.

Для довільного $(i+1)$-го наближення точного значення кореня x_* для заданого рівняння використовують формулу

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(b - x_i)}{f(b) - f(x_i)}, \quad i = 0,1,2,..., \text{ де } x_0 = a$$

Дугу кривої стягують хордою доти, поки шуканий наближений корінь не досягне точності ε, тобто

$$|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon,$$

де x_i, x_{i+1} – наближені значення кореня рівняння $f(x) = 0$, відповідно на i-му та ($i+1$)-му ітераційному кроці

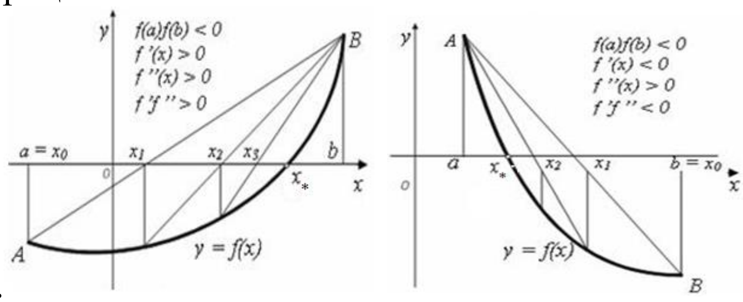

Рис 1.2. Графічна інтерпретація методу хорд

Для автоматизованого вибору рухомого кінця хорди і відповідно визначення співвідношення для обчислення наближеного значення кореня існує певне правило: нерухомим кінцем відрізка є той, для якого знак функції $f(x)$ співпадає зі знаком її другої похідної $f''(x)$. Якщо $f(b)f''(b) > 0$, то нерухомим є кінець b ($x_0 = a$), інакше, якщо $f(a)f''(a) > 0$, то нерухомим є кінець a ($x_0 = b$).

<u>Опис алгоритму:</u>

1. Отримуємо значення start, end, precision.
2. Перевіряємо, чи значення функції в точках start та end мають різні знаки. Якщо так, то повідомляємо, що корені не можна знайти.
3. Якщо f(start)*f’’(start) > 0, продовжуємо, інкаше ідемо до кроку 6
4. Рухаємо точку end у точку перетину лінії, проведену через точки (start, f(start)), (end, f(end)) з віссю абсцис, а попереднє значення end зберігаємо, як end_prev.
5. Повторюємо крок 4, допоки |end–end_previous| > precision, інакше повертаємо результат і кількість ітерацій.
6. Рухаємо точку start у точку перетину лінії, проведену через точки (start, f(start)), (end, f(end)) з віссю абсцис, а попереднє значення start зберігаємо, як start_prev.
7. Повторюємо крок 6, допоки |start–start_previous| > precision, інакше повертаємо результат і кількість ітерацій.

Примітка: для збільшення наочності в алгоритмі було прописано 2 варіанти: коли рухомим є початок відрізку або його кінець. Проте в скороченому вигляді, можна просто поміняти їх значення місцями і отримати бажаний результат.

Індивідуальне завдання

1. Ознайомитися з теоретичним матеріалом.

2. Відокремити дійсні корені рівняння графічним та аналітичним способами і скласти програму його розв’язування методом дихотомії та методом хорд.
 6) $x^3 + 3x^2 + 12x - 3 = 0$.

Хід роботи

Етап локалізації коренів

Графічний метод:

Представимо рівняння у вигляді $x^3 + 3x^2 = 3 - 12x$.
Побудуємо графіки функцій $f(x) = x^3 + 3x^2$ та $h(x) = 3 - 12x$:

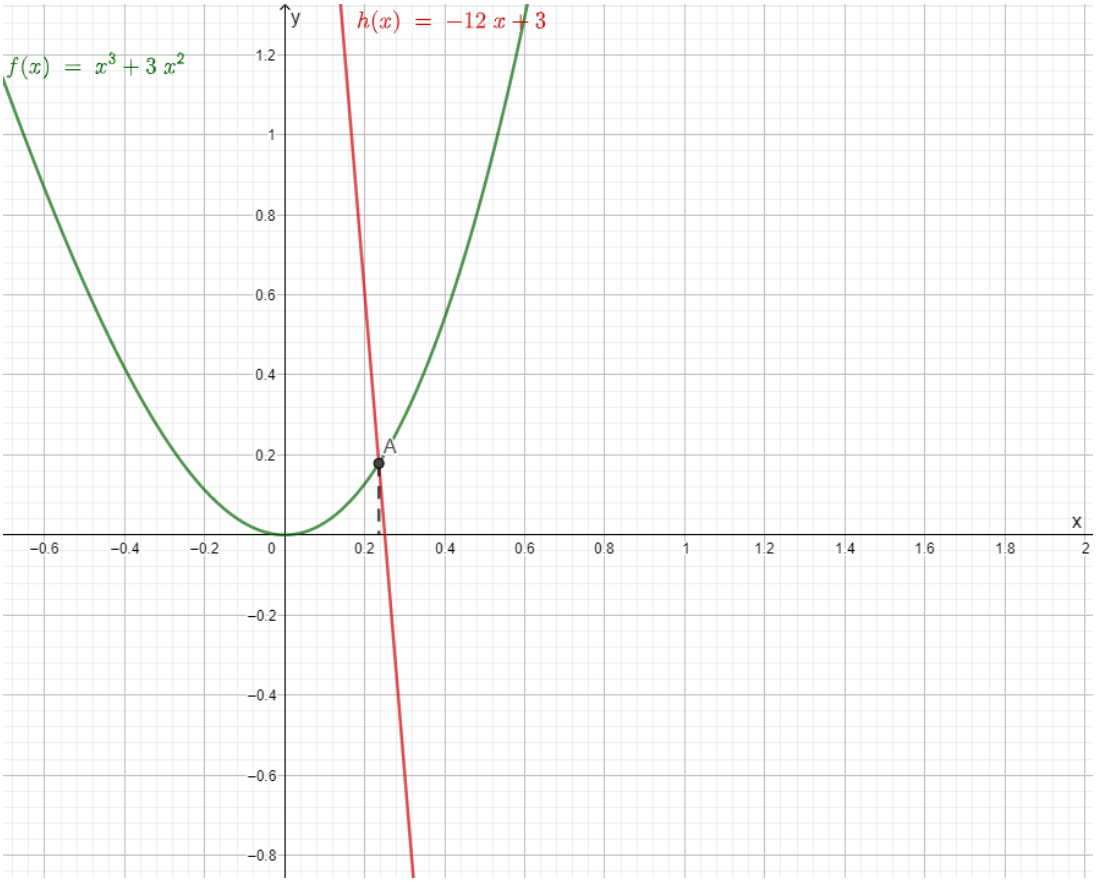

Рис 1.3. Графічний метод

З рисунка 1.3 можна точно встановити, що корінь локалізований на відрізку від 0 до 1.

Аналітичний метод:

Для аналітичного розв’язку визначимо монотонність функції f(x), для цього розв’яжемо рівняння f’(x) = 0 та знайдемо інтервали монотонності, враховуючи, що функція визначена на всій множині дійсних чисел:

$3x^2 + 6x + 12 = 0$

Це рівняння не має розв'язків в дійсних числах. f’(x) > 0 на всій множині дійсних чисел, тому можемо зробити висновок, що функція має лише один корінь. Більшу інформацію отримати аналітичним методом у цьому випадку неможливо. Тоді протабулюємо значення функції $g(x) = sign(f(x))$ на відрізку [-5; 5]:

x	g(x)
-5	-1
-4	-1
-3	-1
-2	-1
-1	-1
0	-1
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1

Рис 1.4 Результати табуляції

Як бачимо з рис. 1.4, функція змінює знак на відрізку [0; 1], що співпадає з результатом графічного методу, тому корінь шукатимемо там.

Етап уточнення коренів

Для подальшої роботи я використовуватиму функції f та d2f , які відповідають функції із завдання та її другій похідній. Їх код має наступний вигляд:

```
double f(double x)
{
    return x*x*x + 3*x*x + 12*x - 3;
}
```

```
double d2f(double x)
{
    return 6*x+6;
}
```

Метод дихотомії(бісекції):

Код функції:

```
double findDyhotomea(double start, double end, double precision, int& iterations)
{
    // Визначаємо, чи корені наявні.
    if(f(start)*f(end) >= 0) throw "No roots!";
    else
    {
        iterations = 0;
        // допоки ми не досягнемо потрібної точності, або, що не варто виключати, випадково потрапимо в корінь...
        while(fabs(start-end) > precision && f(end) != 0)
        {
            double midpoint = (end+start)/2; // Вираховуємо середню точку.

            // Визначаємо, з яким кінцем у неї співпадає знак функції і робимо відповідне присвоєння.
            if(f(start)*f(midpoint) > 0) start = midpoint;
            else end = midpoint;

            iterations++;
        }
        // Повертаємо відповідь
        return end;
    }
}
```

Метод хорд:

Код функції:

```
double findHordes(double start, double end, double precision, int& iterations)
{
    // Перевіряємо наявність коренів
    if(f(start)*f(end) >= 0) throw "No roots!";

    // Обираємо рухомий кінець
    else if(f(start)*d2f(start) > 0) // Рухаємо кінець відрізку
    {
        iterations = 0;
        double end_prev = 0;
        // Допоки різниця попереднього і насупного члену не стане меншою за задану...
        do
        {
            // Зберігаємо попереднє значення кінця відрізку
            end_prev = end;

            // Пересуваємо кінець у точку перетину хорди з віссю абсцис
            end -= f(end)*(end-start)/(f(end)-f(start));
```

```
            iterations++;
        } while(fabs(end-end_prev) > precision);
        // Повертаємо відповідь.
        return end;
    }
    else // Рухаємо початок відрізку
    {
        iterations = 0;
        double start_prev = 0;
        // Допоки різниця попереднього і насупного члену не стане меншою за задану...
        do
        {
            // Зберігаємо попереднє значення початку відрізку
            start_prev = start;

            // Пересуваємо початок у точку перетину хорди з віссю абсцис
            start -= f(start) * (end-start)/(f(end) - f(start));

            iterations++;
        } while (fabs(start-start_prev) > precision);
        // Повертаємо відповідь.
        return start;
    }
}
```

<u>Результат</u> виконання цих функцій(точність $\varepsilon = 1 * 10^{-16}$):

```
Enter start value: 0
Enter end value: 1
Enter precision value: 1e-16
===================================================================

    Dyhotomea: 0.2350992281060639288 4          Iterations: 54
       Hordes: 0.23509922810606387333           Iterations: 24
```

Рис 1.5. Результати виконання програми.

<u>Аналіз результатів</u>:

Як бачимо з рисунку 1.4, ми отримали однакові значення кореня рівняння обома методами аж до 15 значущої цифри включно. Це свідчить про те, що результат з високою вірогідністю є вірним. Перевіримо його за допомогою сервісу WolframAlpha:

$$x \approx 0.235099228106064$$

Отже, пошук коренів заданого рівняння було виконано правильно та ефективно. Також, можна помітити, що для заданого випадку метод хорд відпрацював швидше, ніж метод дихотомії.

<u>Висновок</u>:

Я ознайомився на практиці з методами знаходження коренів нелінійних рівнянь та розробив функції для уточнення коренів на заданих проміжках на основі отриманих знань. Використовуючи графічний та аналітичний метод, а також табулювання функції, я встановив, що корінь рівняння 6) $x^3 + 3x^2 + 12x - 3 = 0$ знаходиться на відрізку [0; 1]. Потім, використавши метод хорд та бісекції я уточнив локацію кореня і вирахував його наближене значення: $x \approx 0.235099228106064$.