Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Departamento de matemáticas

Contingencias de vida 2025-I

Trabajo de seguros de vida

Estudiantes:
Jose Miguel Acuña Hernandez
Andrés Steven Puertas
Santiago Hernandez Bernal
Yefferson Fabian Rubio
Anna Gabriela Salazar Castro
Guillermo Eduardo Murillo

Docente:
Jaime Abel Huertas Campos

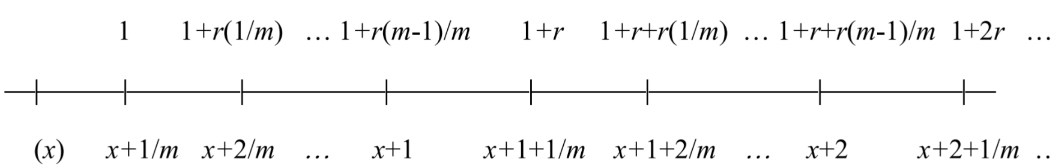
Contenido

1. Crecimiento aritmético fraccionado

2. Crecimiento aritmético dentro del año fraccionado

3. Demostración

Teorema 3.1. *Consideremos un seguro de vida entero para una persona de edad x, donde el valor asegurado sigue el siguiente patron temporal:*



Bajo la hipótesis UDD la prima simple neta de este seguro es:

$$P.S.N. = \frac{i}{i^{(m)}}\left[A_x + r((IA)_x - A_x)\right] + rA_x\left[\frac{i - i^{(m)}}{\left(i^{(m)}\right)^2}\right] \tag{1}$$

Demostración. La definición de la prima neta de un seguro es la esperanza del valor presente del pago. Como el año esta fraccionado en m partes, la probabilidad de realizar el pago al final de la j-esima parte del año k es simplemente la probabilidad de que la persona de edad (x) haya sobrevivido $k + \frac{j}{m}$ años y muera pasados $\frac{1}{m}$, es decir ${}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x$. Simplemente traemos a valor presente con la tasa de descuento v elevado al tiempo transcurrido hasta el pago que es $k + \frac{j+1}{m}$ el pago que es $(1 + r(k + \frac{j}{m}))$. Asi, la prima de este seguro es:

$$P.S.N. = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\left(1 + r\left(k + \frac{j}{m}\right)\right)v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \tag{2}$$

Observemos que el valor asegurado se puede reescribir como:

$$1 + r\left(k + \frac{j}{m}\right) = (1 + rk) + r\frac{j}{m}$$

Por lo tanto, la prima neta única se puede expresar como:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\left[(1 + rk) + r\frac{j}{m}\right] v^{k+\frac{j+1}{m}} {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x$$

Así, aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} P.S.N. &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}(1 + rk)v^{k+\frac{j+1}{m}} {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} r\frac{j}{m}v^{k+\frac{j+1}{m}} {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \\ &= \text{Parte I} + \text{Parte II} \end{aligned}$$

Para la Parte I:

$$\begin{aligned} \text{Parte I} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}(1 + kr)v^{k+\frac{j+1}{m}} {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(1 + kr)\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \end{aligned}$$

Pero observe que $\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x$ es la prima de un seguro temporal de un año (m posibles pagos de un año fraccionado en m partes) con valor asegurado de 1 pagadero al final del la fracción del año de muerte pero diferido k años. Es decir

$$\begin{aligned} \text{Parte I} &= \sum_{k=0}^{\infty}(1 + kr)\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}} {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(1 + kr)_{k|}A^{(m)}_{\overset{1}{x}:\overline{1}|} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la parte I es un seguro con incremento aritmético anual de r pero es pagadero al final de la fracción del año de muerte. Sabemos que bajo UDD la prima de este seguro es:

$$\text{Parte I} = \frac{i}{i^{(m)}}[A_x + r((IA)_x - A_x)] \tag{3}$$

Para la Parte II:

$$
\begin{aligned}
\text{Parte II} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} r\frac{j}{m}v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+k+\frac{j}{m}} \\
&= r\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m}v^{k+\frac{j+1}{m}+1-1}\,{}_{k+\frac{j}{m}}p_x \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+k+\frac{j}{m}} \\
&= r\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m}v^{k+\frac{j+1}{m}+1-1}\,{}_{k}p_x \cdot {}_{\frac{j}{m}}p_{x+k} \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+k+\frac{j}{m}} \\
&= r\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_{k}p_x \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m}v^{\frac{j+1}{m}-1}\,{}_{\frac{j}{m}}p_{x+k} \cdot {}_{\frac{1}{m}}q_{x+k+\frac{j}{m}} \\
&= r\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_{k}p_x \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m}v^{\frac{j+1}{m}-1}\,{}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k} \\
&= r\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_{k}p_x \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m}v^{\frac{j+1}{m}-1}\frac{1}{m}q_{x+k} \text{ (Utilizando DUM)} \\
&= r\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\,{}_{k}p_x \cdot q_{x+k} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m^2}v^{\frac{j+1}{m}-1} \\
&= rA_x \sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m^2}v^{\frac{j+1}{m}-1}\text{(Reorganizamos la suma, def. } A_x\text{)} \\
&= rA_x v^{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{m^2}\sum_{j=0}^{m-1} jv^{\frac{j}{m}}
\end{aligned}
$$

Analicemos unicamente $v^{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{m^2}\sum_{j=0}^{m-1} jv^{\frac{j}{m}}$:

$$\begin{aligned}
v^{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{m^2}\sum_{j=0}^{m-1} jv^{\frac{j}{m}} &= \frac{v^{\frac{1}{m}}(1+i)}{m^2}\left(\sum_{j=0}^{m-1} jv^{\frac{j}{m}} + mv^{\frac{m}{m}} - mv^{\frac{m}{m}}\right)\\
&= \frac{v^{\frac{1}{m}}(1+i)}{m^2}\left(\sum_{j=0}^{m} jv^{\frac{j}{m}} - mv\right)\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{m^2}\sum_{j=0}^{m} jv^{\frac{j}{m}} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)(I^{(m)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{1}|} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)\left(\frac{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{1}|} - v}{i^{(m)}}\right) - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)\left[\frac{1-v}{d^{(m)}} - \frac{v}{i^{(m)}}\right] - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)\left(\frac{1-v-vd^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}\right) - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)\left(\frac{1-v-vd^{(m)}}{i^{(m)}i^{(m)}v^{\frac{1}{m}}}\right) - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= \frac{(1+i)-1-d^{(m)}}{(i^{(m)})^2}v^{\frac{1}{m}} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= \frac{i-d^{(m)}}{(i^{(m)})^2}v^{\frac{1}{m}} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= \frac{m\left(i-d^{(m)}\right) - (i^{(m)})^2 v^{\frac{1}{m}}}{(i^{(m)})^2 m}
\end{aligned}$$

Como $v^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{1+(i^{(m)})/m} = \frac{m}{m+i^{(m)}}$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{m\left(i-d^{(m)}\right)-(i^{(m)})^2v^{\frac{1}{m}}}{(i^{(m)})^2m} &= \frac{m\left(i-d^{(m)}\right)-(i^{(m)})^2\left(\frac{m}{m+i^{(m)}}\right)}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{m\left(i-\frac{i^{(m)}m}{m+i^{(m)}}\right)-(i^{(m)})^2\frac{m}{m+i^{(m)}}}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{mi-\frac{i^{(m)}m^2}{m+i^{(m)}}-\frac{(i^{(m)})^2m}{m+i^{(m)}}}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{mi-\frac{i^{(m)}m^2+(i^{(m)})^2m}{m+i^{(m)}}}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{m^2i+imi^{(m)}-i^{(m)}m^2-(i^{(m)})^2m}{m+i^{(m)}}\frac{1}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{m\left(mi+ii^{(m)}-i^{(m)}m-(i^{(m)})^2\right)}{m+i^{(m)}}\frac{1}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{m(m(i-i^{(m)})+i^{(m)}(i-i^{(m)}))}{m+i^{(m)}}\frac{1}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{m((i-i^{(m)})(m+i^{(m)}))}{m+i^{(m)}}\frac{1}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{\cancel{m}\left(i-i^{(m)}\right)\cancel{\left(m+i^{(m)}\right)}}{\cancel{\left(m+i^{(m)}\right)}}\frac{1}{(i^{(m)})^2\cancel{m}}\\
&= \frac{\left(i-i^{(m)}\right)}{(i^{(m)})^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$rA_xv^{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{m^2}\sum_{j=0}^{m-1}jv^{\frac{j}{m}}=rA_x\frac{\left(i-i^{(m)}\right)}{(i^{(m)})^2}$$

así, sumando las dos partes tenemos que:

$$P.S.N.=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\left(1+r\left(k+\frac{j}{m}\right)\right)v^{k+\frac{j+1}{m}}{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x=\frac{i}{i^{(m)}}[A_x+r[(IA)_x-A_x]]+r\frac{\left(i-i^{(m)}\right)}{(i^{(m)})^2}A_x \qquad (4)$$

Que es lo que se quería demostrar. ■

4. Crecimiento geométrico

5. Tabla y gráfica de comparación

5.1. Tabla

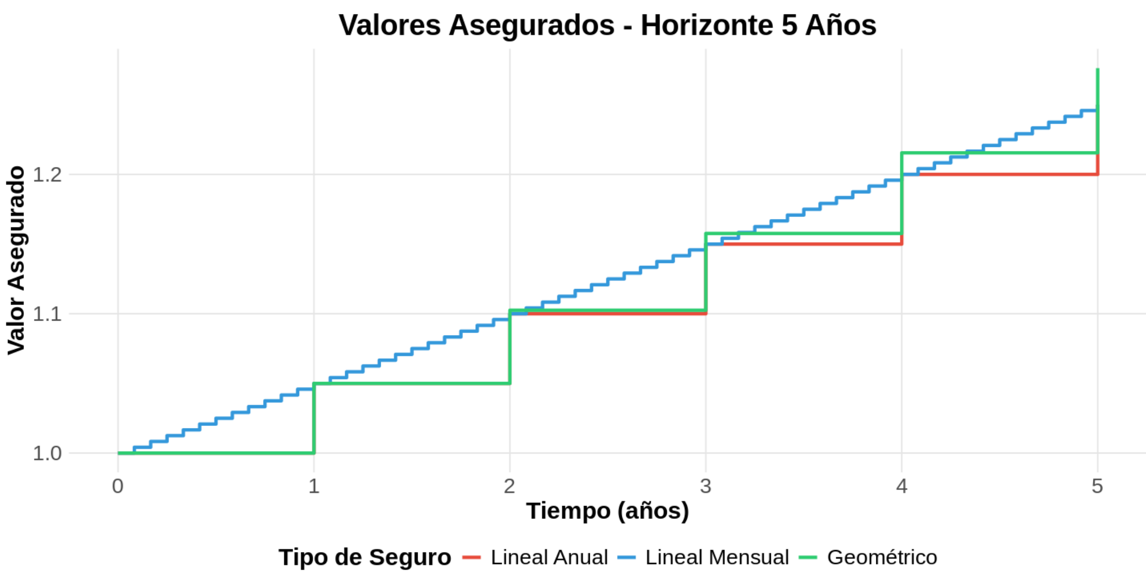
Como ejemplo del calculo de estas primas seleccionamos la tabla *"Rentistas Hombres"* fijando $r=0.05, i=0.1$ y $m=12$.

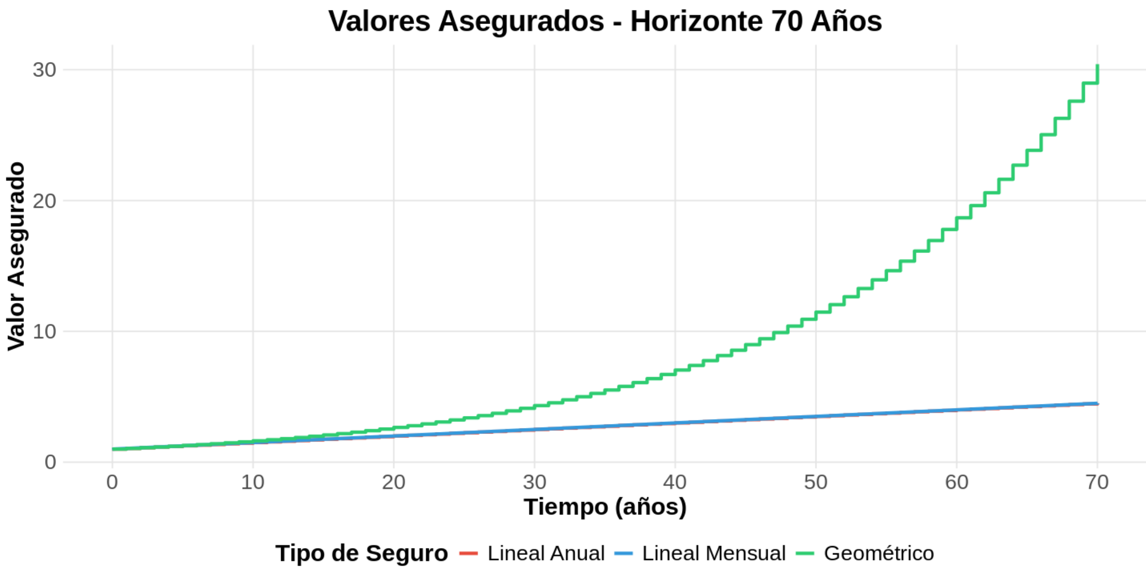
x	q_x	$(I_rA^{(m)})_x$	$(I_r^{(m)}A^{(m)})_x$	$(G_rA^{(m)})_x$
0	0.000485	0.012349	0.012492	0.036816
1	0.000485	0.012759	0.012905	0.038105
2	0.000485	0.013203	0.013352	0.039456
3	0.000485	0.013683	0.013836	0.040872
4	0.000485	0.014203	0.014360	0.042356
5	0.000485	0.014766	0.014927	0.043911
6	0.000485	0.015374	0.015540	0.045542
7	0.000485	0.016032	0.016203	0.047251
8	0.000485	0.016743	0.016920	0.049042
9	0.000485	0.017512	0.017695	0.050919
10	0.000485	0.018342	0.018532	0.052887
11	0.000485	0.019238	0.019437	0.054949
12	0.000485	0.020206	0.020413	0.057111
13	0.000485	0.021250	0.021466	0.059376
14	0.000485	0.022376	0.022602	0.061751
15	0.000485	0.023590	0.023828	0.064240
16	0.000496	0.024898	0.025148	0.066849
17	0.000509	0.026296	0.026560	0.069573
18	0.000523	0.027789	0.028068	0.072416
19	0.000538	0.029384	0.029679	0.075383
20	0.000554	0.031086	0.031398	0.078479
21	0.000573	0.032903	0.033232	0.081710
22	0.000593	0.034840	0.035189	0.085080
23	0.000615	0.036904	0.037274	0.088593
24	0.000639	0.039104	0.039497	0.092257
25	0.000666	0.041446	0.041864	0.096075
26	0.000694	0.043939	0.044383	0.100054
27	0.000726	0.046591	0.047064	0.104200
28	0.000761	0.049411	0.049914	0.108518
29	0.000799	0.052409	0.052945	0.113015
30	0.000840	0.055592	0.056164	0.117695
31	0.000886	0.058973	0.059582	0.122567
32	0.000936	0.062559	0.063209	0.127635
33	0.000991	0.066362	0.067055	0.132906
34	0.001051	0.070391	0.071131	0.138386
35	0.001117	0.074658	0.075448	0.144081
36	0.001190	0.079174	0.080018	0.149997
37	0.001269	0.083950	0.084851	0.156141
38	0.001356	0.088997	0.089960	0.162520
39	0.001451	0.094328	0.095356	0.169138
40	0.001556	0.099954	0.101053	0.176003
41	0.001671	0.105887	0.107061	0.183121
42	0.001797	0.112139	0.113392	0.190496
43	0.001934	0.118721	0.120060	0.198135
44	0.002086	0.125645	0.127076	0.206043
45	0.002251	0.132924	0.134451	0.214225
46	0.002434	0.140568	0.142199	0.222687
47	0.002632	0.148588	0.150329	0.231433
48	0.002851	0.156996	0.158853	0.240466
49	0.003091	0.165801	0.167783	0.249792
50	0.003353	0.175013	0.177127	0.259413
51	0.003641	0.184642	0.186896	0.269332
52	0.003956	0.194696	0.197099	0.279551
53	0.004301	0.205182	0.207742	0.290073
54	0.004681	0.216108	0.218834	0.300899
55	0.005050	0.227478	0.230381	0.312030
56	0.005463	0.239333	0.242422	0.323495
57	0.005925	0.251672	0.254960	0.335294
58	0.006442	0.264496	0.267994	0.347422
59	0.007019	0.277798	0.281518	0.359873
60	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

5.2. Gráficas

Vamos a ver graficamente los valores asegurados a lo largo del tiempo para una persona de 20 años en dos horizontes temporales distintos. Al igual que antes, mantuvimos constante $i = 0.1$ y $r = 0.05$ (aunque en estos calculos solo r importa)

Tiempo	$(\mathbf{I_r A^{(m)}})_\mathbf{x}$	$(\mathbf{I_r^{(m)} A^{(m)}})_\mathbf{x}$	$(\mathbf{G_r A^{(m)}})_\mathbf{x}$
0 años	1.0000	1.0000	1.0000
1 años	1.0500	1.0500	1.0500
5 años	1.2500	1.2500	1.2763
10 años	1.5000	1.5000	1.6289
20 años	2.0000	2.0000	2.6533
50 años	3.5000	3.5000	11.4674
70 años	4.5000	4.5000	30.4264





Ahora es facil apreciar la razon de la diferencia de precios en los distintos productos. Sin embargo, si pensamos en un horizonte temporal de 20 años, el precio del seguro con incremento aritmetico ($0.031086\$$) es mucho mas atractivo que el del seguro con crecimiento geometrico ($0.078479\$$) para el comprador de 20 años.