Universidad Nacional de Colombia

Facultad de ciencias

Departamento de matemáticas

Contingencias de vida 2025-I

Trabajo de seguros de vida

Estudiantes:
Jose Miguel Acuña Hernandez
Andrés Steven Puertas
Santiago Hernandez Bernal
Yefferson Fabian Rubio
Anna Gabriela Salazar Castro
Guillermo Eduardo Murillo

Docente:
Jaime Abel Huertas Campos

Contenido

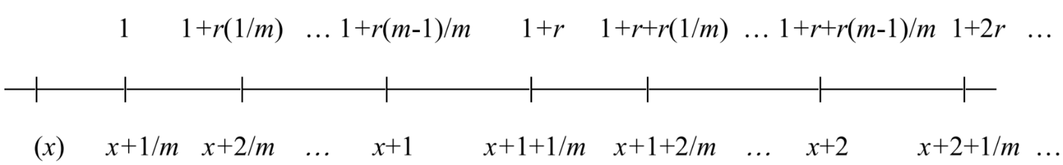
HOLA

1. Crecimiento aritmético fraccionado

2. Crecimiento aritmético dentro del año fraccionado

3. Demostración

Teorema 3.1. *Consideremos un seguro de vida entero para una persona de edad x, donde el valor asegurado sigue el siguiente patron temporal:*



Bajo la hipótesis UDD la prima simple neta de este seguro es:

$$P.S.N. = \frac{i}{i^{(m)}}[A_x + r((IA)_x - A_x)] + r\left[\frac{i - i^{(m)}}{\left(i^{(m)}\right)^2}\right] \tag{1}$$

Demostración. La definición de la prima neta de un seguro es la esperanza del valor presente del pago. Como el año esta fraccionado en m partes, la probabilidad de realizar el pago al final de la j-esima parte del año k es simplemente la probabilidad de que la persona de edad (x) haya sobrevivido $k + \frac{j}{m}$ años y muera pasados $\frac{1}{m}$, es decir ${}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x$. Simplemente traemos a valor presente con la tasa de descuento v elevado al tiempo transcurrido hasta el pago que es $k + \frac{j+1}{m}$ el pago que es $(1 + r(k + \frac{j}{m}))$. Asi, la prima de este seguro es:

$$P.S.N. = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} \left(1 + r\left(k + \frac{j}{m}\right)\right) v^{k+\frac{j+1}{m}} {}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \tag{2}$$

Observemos que el valor asegurado se puede reescribir como:

$$1 + r\left(k + \frac{j}{m}\right) = (1 + rk) + r\frac{j}{m}$$

Por lo tanto, la prima neta única se puede expresar como:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\left[(1 + rk) + r\frac{j}{m}\right] v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x$$

Así, aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} P.S.N. &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}(1 + rk)v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} r\frac{j}{m}v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \\ &= \text{Parte I} + \text{Parte II} \end{aligned}$$

Para la Parte I:

$$\begin{aligned} \text{Parte I} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}(1 + kr)v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(1 + kr)\sum_{j=0}^{m-1}v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \end{aligned}$$

Pero observe que $\sum_{j=0}^{m-1} v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x$ es la prima de un seguro temporal de un año (m posibles pagos de un año fraccionado en m partes) con valor asegurado de 1 pagadero al final del la fracción del año de muerte pero diferido k años. Es decir

$$\begin{aligned} \text{Parte I} &= \sum_{k=0}^{\infty}(1 + kr)\sum_{j=0}^{m-1}v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(1 + kr)\,{}_{k|}A^{(m)}_{\overset{1}{x}:\overline{1}|} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la parte I es un seguro con incremento aritmético anual de r pero es pagadero al final de la fracción del año de muerte. Sabemos que bajo UDD la prima de este seguro es:

$$\text{Parte I} = \frac{i}{i^{(m)}}[A_x + r((IA)_x - A_x)] \tag{3}$$

Para la Parte II:

$$
\begin{aligned}
\text{Parte II} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} r\frac{j}{m}v^{k+\frac{j+1}{m}}\,{}_{k+\frac{j}{m}}p_x\cdot{}_{\frac{1}{m}}q_{x+k+\frac{j}{m}}\\
&= r\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m}v^{k+\frac{j+1}{m}+1-1}\,{}_{k+\frac{j}{m}}p_x\cdot{}_{\frac{1}{m}}q_{x+k+\frac{j}{m}}\\
&= r\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m}v^{k+\frac{j+1}{m}+1-1}\,{}_{k}p_x\cdot{}_{\frac{j}{m}}p_{x+k}\cdot{}_{\frac{1}{m}}q_{x+k+\frac{j}{m}}\\
&= r\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\,{}_{k}p_x\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m}v^{\frac{j+1}{m}-1}\,{}_{\frac{j}{m}}p_{x+k}\cdot{}_{\frac{1}{m}}q_{x+k+\frac{j}{m}}\\
&= r\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\,{}_{k}p_x\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m}v^{\frac{j+1}{m}-1}\,{}_{\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_{x+k}\\
&= r\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\,{}_{k}p_x\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m}v^{\frac{j+1}{m}-1}\frac{1}{m}q_{x+k}\ \text{(Utilizando DUM)}\\
&= r\sum_{k=0}^{\infty}v^{k+1}\,{}_{k}p_x\cdot q_{x+k}\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m^2}v^{\frac{j+1}{m}-1}\\
&= rA_x\sum_{j=0}^{m-1} \frac{j}{m^2}v^{\frac{j+1}{m}-1}\text{(Reorganizamos la suma, def. } A_x\text{)}\\
&= rA_xv^{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{m^2}\sum_{j=0}^{m-1} jv^{\frac{j}{m}}
\end{aligned}
$$

Analicemos unicamente $v^{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{m^2}\sum_{j=0}^{m-1} jv^{\frac{j}{m}}$:

$$\begin{aligned}
v^{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{m^2}\sum_{j=0}^{m-1} jv^{\frac{j}{m}} &= \frac{v^{\frac{1}{m}}(1+i)}{m^2}\left(\sum_{j=0}^{m-1} jv^{\frac{j}{m}} + mv^{\frac{m}{m}} - mv^{\frac{m}{m}}\right)\\
&= \frac{v^{\frac{1}{m}}(1+i)}{m^2}\left(\sum_{j=0}^{m} jv^{\frac{j}{m}} - mv\right)\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{m^2}\sum_{j=0}^{m} jv^{\frac{j}{m}} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)(I^{(m)}\ddot{a})^{(m)}_{\overline{1}|} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)\left(\frac{\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{1}|} - v}{i^{(m)}}\right) - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)\left[\frac{1-v}{d^{(m)}} - \frac{v}{i^{(m)}}\right] - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)\left(\frac{1-v-vd^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}}\right) - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= v^{\frac{1}{m}}(1+i)\left(\frac{1-v-vd^{(m)}}{i^{(m)}i^{(m)}v^{\frac{1}{m}}}\right) - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= \frac{(1+i)-1-d^{(m)}}{(i^{(m)})^2}v^{\frac{1}{m}} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= \frac{i-d^{(m)}}{(i^{(m)})^2}v^{\frac{1}{m}} - \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m}\\
&= \frac{m\left(i-d^{(m)}\right) - (i^{(m)})^2 v^{\frac{1}{m}}}{(i^{(m)})^2 m}
\end{aligned}$$

Como $v^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{1+(i^{(m)})/m} = \frac{m}{m+i^{(m)}}$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{m\left(i-d^{(m)}\right)-(i^{(m)})^2v^{\frac{1}{m}}}{(i^{(m)})^2m} &= \frac{m\left(i-d^{(m)}\right)-(i^{(m)})^2\left(\frac{m}{m+i^{(m)}}\right)}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{m\left(i-\frac{i^{(m)}m}{m+i^{(m)}}\right)-(i^{(m)})^2\frac{m}{m+i^{(m)}}}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{mi-\frac{i^{(m)}m^2}{m+i^{(m)}}-\frac{(i^{(m)})^2m}{m+i^{(m)}}}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{mi-\frac{i^{(m)}m^2+(i^{(m)})^2m}{m+i^{(m)}}}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{m^2i+imi^{(m)}-i^{(m)}m^2-(i^{(m)})^2m}{m+i^{(m)}}\frac{1}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{m\left(mi+ii^{(m)}-i^{(m)}m-(i^{(m)})^2\right)}{m+i^{(m)}}\frac{1}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{m(m(i-i^{(m)})+i^{(m)}(i-i^{(m)}))}{m+i^{(m)}}\frac{1}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{m((i-i^{(m)})(m+i^{(m)}))}{m+i^{(m)}}\frac{1}{(i^{(m)})^2m}\\
&= \frac{\cancel{m}\left(i-i^{(m)}\right)\cancel{\left(m+i^{(m)}\right)}}{\cancel{\left(m+i^{(m)}\right)}}\frac{1}{(i^{(m)})^2\cancel{m}}\\
&= \frac{\left(i-i^{(m)}\right)}{(i^{(m)})^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$rA_xv^{\frac{1}{m}}(1+i)\frac{1}{m^2}\sum_{j=0}^{m-1}jv^{\frac{j}{m}}=rA_x\frac{\left(i-i^{(m)}\right)}{(i^{(m)})^2}$$

así, sumando las dos partes tenemos que:

$$P.S.N.=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m-1}\left(1+r\left(k+\frac{j}{m}\right)\right)v^{k+\frac{j+1}{m}}{}_{k+\frac{j}{m}|\frac{1}{m}}q_x=\frac{i}{i^{(m)}}[A_x+r[(IA)_x-A_x]]+r\frac{\left(i-i^{(m)}\right)}{(i^{(m)})^2}A_x \tag{4}$$

Que es lo que se quería demostrar. ■

4. Crecimiento geométrico

5. Tabla y gráfica de comparación