

# Rapport de Modélisation : Analyse Dynamique de l'Employabilité

Dunias Hugo

7 Janvier 2026

## 1 Introduction

Ce document présente l'analyse d'un système dynamique non-linéaire modélisant le marché de l'emploi. L'étude se concentre sur l'étude des points d'équilibre du système et de leur stabilité.

## 2 Description du Modèle Mathématique

Le modèle repose sur un système de quatre équations différentielles ordinaires non-linéaires décrivant les interactions entre les populations de Chômeurs ( $U$ ), Employés ( $E$ ), Postes vacants ( $V$ ) et Auto-entrepreneurs ( $S$ ).

### 2.1 Équations d'État

Le champ de vecteurs  $f(x)$  régissant la dynamique  $\dot{x} = f(x)$  est défini par le système suivant [1] :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = \Lambda - (d + \alpha_1)U - \beta_1UV - \gamma_1US + \delta E \\ \frac{dE}{dt} = \alpha_1U + \beta_1UV + \gamma_1US - (d + \delta)E \\ \frac{dV}{dt} = \Lambda_v + \eta E + \theta S - \mu V - \beta_1UV \\ \frac{dS}{dt} = \alpha_2U - (d + \sigma)S \end{cases} \quad (1)$$

### 2.2 Définition des Paramètres

Les paramètres utilisés pour la simulation et l'analyse sont répertoriés dans le Tableau 1.

TABLE 1 – Nomenclature et valeurs des paramètres

Symbol	Signification physique	Valeur
$\Lambda$	Taux constant de recrutement (nouveaux chômeurs)	20
$d$	Taux de mortalité / Départ à la retraite	0.05
$\alpha_1$	Taux de mouvement des chômeurs vers l'emploi	0.1
$\beta_1$	Coefficient d'interaction Chômeurs-Postes Vacants	0.001
$\gamma_1$	Coefficient d'impact des auto-entrepreneurs sur l'embauche	0.01
$\delta$	Taux de perte d'emploi (vers chômage)	0.05
$\Lambda_v$	Taux constant de création de postes vacants	10
$\eta$	Taux de création de postes par les employés	0.02
$\theta$	Taux de création de postes par les auto-entrepreneurs	0.03
$\mu$	Taux de disparition des postes vacants	0.1
$\alpha_2$	Taux de mouvement des chômeurs vers l'auto-emploi	0.05
$\sigma$	Taux de sortie de l'auto-emploi	0.05

### 3 Recherche du Point d'Équilibre : Deux Approches

Le point d'équilibre  $x^* = [U^*, E^*, V^*, S^*]^T$  est défini par la condition de stationnarité  $\dot{x} = f(x^*) = 0$ . Nous avons déterminé ce point par deux méthodes complémentaires : une résolution numérique itérative s'appuyant sur les méthodes du cours [2] et une résolution analytique exacte s'inspirant de la résolution présentée dans [1].

#### 3.1 Approche Numérique : Méthode de Newton-Raphson

Pour résoudre le système d'équations non-linéaires  $f(x) = 0$ , nous avons utilisé l'algorithme de Newton-Raphson. Cette méthode itérative repose sur la linéarisation locale de la fonction  $f$  via sa série de Taylor au premier ordre.

##### 3.1.1 Méthode numérique

**Principe de l'algorithme :** Partant d'une estimation initiale  $x_0$ , on cherche une correction  $\delta x$  telle que  $f(x_k + \delta x) \approx 0$ . Le développement de Taylor au voisinage de l'itération  $k$  donne :

$$f(x_k + \delta x) \approx f(x_k) + J_f(x_k) \cdot \delta x = 0$$

où  $J_f(x_k)$  est la matrice Jacobienne du système évaluée en  $x_k$ .

La suite des itérés  $(x_k)_{k \geq 0}$  est alors construite par la relation de récurrence :

$$x_{k+1} = x_k - [J_f(x_k)]^{-1} \cdot f(x_k) \quad (2)$$

**Application :** Dans notre script MATLAB (via la fonction `fsolve`), nous avons initialisé l'algorithme avec  $x_0 = [100, 50, 20, 10]$ . La convergence est atteinte lorsque la norme du résidu  $\|f(x_k)\|$  est inférieure à une tolérance fixée ( $10^{-9}$ ), ce qui a nécessité moins de 10 itérations.

##### 3.1.2 Résultats Numériques

Listing 1 – Point d'équilibre de la méthode numérique

```

U* = 63.8012 (Chômeurs)
E* = 336.1988 (Employés)
V* = 107.9418 (Postes Vacants)
S* = 31.9006 (Auto-ent)
    
```

## 3.2 Approche Analytique : Réduction du Système

Afin de valider la solution numérique et de prouver l'unicité de ce point d'équilibre nous avons résolu le système algébrique  $f(x^*) = 0$  analytiquement. La méthode consiste à exprimer toutes les variables en fonction de  $U^*$  pour réduire le problème à la résolution d'une équation polynomiale.

### 3.2.1 Calcul du point d'équilibre

**Étape 1 : Expression de  $S^*$**  De l'équation d'état  $\dot{S} = 0$ , on tire immédiatement une relation linéaire entre les auto-entrepreneurs et les chômeurs :

$$\alpha_2 U^* - (d + \sigma) S^* = 0 \implies S^* = \frac{\alpha_2}{d + \sigma} U^* = k_s U^* \quad (3)$$

En additionnant les deux premières équations du système ( $\dot{U} = 0$  et  $\dot{E} = 0$ ), les termes d'interaction s'annulent :

$$\Lambda - dU^* - dE^* = 0 \implies E^* = \frac{\Lambda}{d} - U^*$$

**2. Expression de  $V^*$**  En injectant ces relations dans l'équation  $\dot{E} = 0$ , nous isolons  $V^*$ . L'équation s'écrit :  $\alpha_1 U^* + \beta_1 U^* V^* + \gamma_1 U^* (k_s U^*) - (d + \delta)(K - U^*) = 0$ . En multipliant par  $\beta_1 U^*$  on obtient :

$$V^* = \frac{A_n(U^*)^2 + B_n U^* + C_n}{\beta_1 U^*}$$

avec les coefficients intermédiaires :

$$\begin{aligned} A_n &= -\gamma_1 k_s \\ B_n &= -(d + \delta + \alpha_1) \\ C_n &= (d + \delta)K \end{aligned}$$

**3. Polynôme Final** L'équation  $\dot{V} = 0$  s'écrit :  $\Lambda_v + \eta E^* + \theta S^* - \mu V^* - \beta_1 U^* V^* = 0$ . En substituant  $V^*$ , on obtient :

$$(\mu + \beta_1 U^*) \frac{A_n(U^*)^2 + B_n U^* + C_n}{\beta_1 U^*} = \Lambda_v + \eta(K - U^*) + \theta k_s U^*$$

En développant et en regroupant les termes par puissance de  $U^*$ , on aboutit au polynôme  $P(U^*) = c_3 U^{*3} + c_2 U^{*2} + c_1 U^* + c_0 = 0$  dont les coefficients sont :

- $c_3 = -\beta_1 A_n = \beta_1 \gamma_1 k_s$
- $c_2 = \beta_1 (\theta k_s - \eta) - \mu A_n - \beta_1 B_n$
- $c_1 = \beta_1 (\Lambda_v + \eta K) - \mu B_n - \beta_1 C_n$
- $c_0 = -\mu C_n = -\mu(d + \delta)K$

La résolution de ce polynôme nous fournit donc l'information du nombre de points d'équilibres du système.

### 3.2.2 Résultats Numériques

On obtient en calculant les racines de ce polynôme sur Matlab :

Listing 2 – Racines du polynôme en U

```
Les racines sont :
1.0e+02 *
```

```
-1.0140 + 0.4751i
-1.0140 - 0.4751i
0.6380 + 0.0000i
```

Soit deux racines complexes conjuguées et une racine réelle positive. On a donc l'existence et l'unicité d'un point d'équilibre physiquement acceptable pour l'étude.

On peut maintenant calculer les variables détats au point d'équilibre correspondant à cette racine :

Listing 3 – Point d'équilibre de la méthode analytique

```
U* = 63.8012 (Chômeurs)
E* = 336.1988 (Employés)
V* = 107.9418 (Postes Vacants)
S* = 31.9006 (Auto-ent)
```

Ces résultats sont similaires aux résultats de l'analyse numérique ce qui nous conforte dans l'idées que les deux méthodes ont été bien implémentées.

## 4 Analyse de Stabilité

### 4.1 Critère de Stabilité Locale

La stabilité locale est déterminée par les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice Jacobienne  $J$  évaluée en  $x^*$  :

$$J(x^*) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*}$$

Le système est **asymptotiquement stable** si  $\forall i, \text{Re}(\lambda_i) < 0$ .

### 4.2 Résultats obtenus

L'exécution du script de simulation a permis d'identifier l'unique point d'équilibre positif et de calculer le spectre de la matrice Jacobienne associée.

Listing 4 – Valeurs Propres trouvées

```
lambda_1 = -0.2185
lambda_2 = -0.1000
lambda_3 = -0.1000 + 0.0542i
lambda_4 = -0.1000 - 0.0542i
```

On observe que toutes les parties réelles sont strictement négatives. Le système est localement asymptotiquement stable.

### 4.3 Visualisation de la Convergence

La figure ci-dessous illustre la dynamique temporelle du système. On observe que, quelles que soient les conditions initiales proches, les trajectoires convergent vers le point d'équilibre  $x^*$  calculé ci-dessus, validant l'analyse théorique.

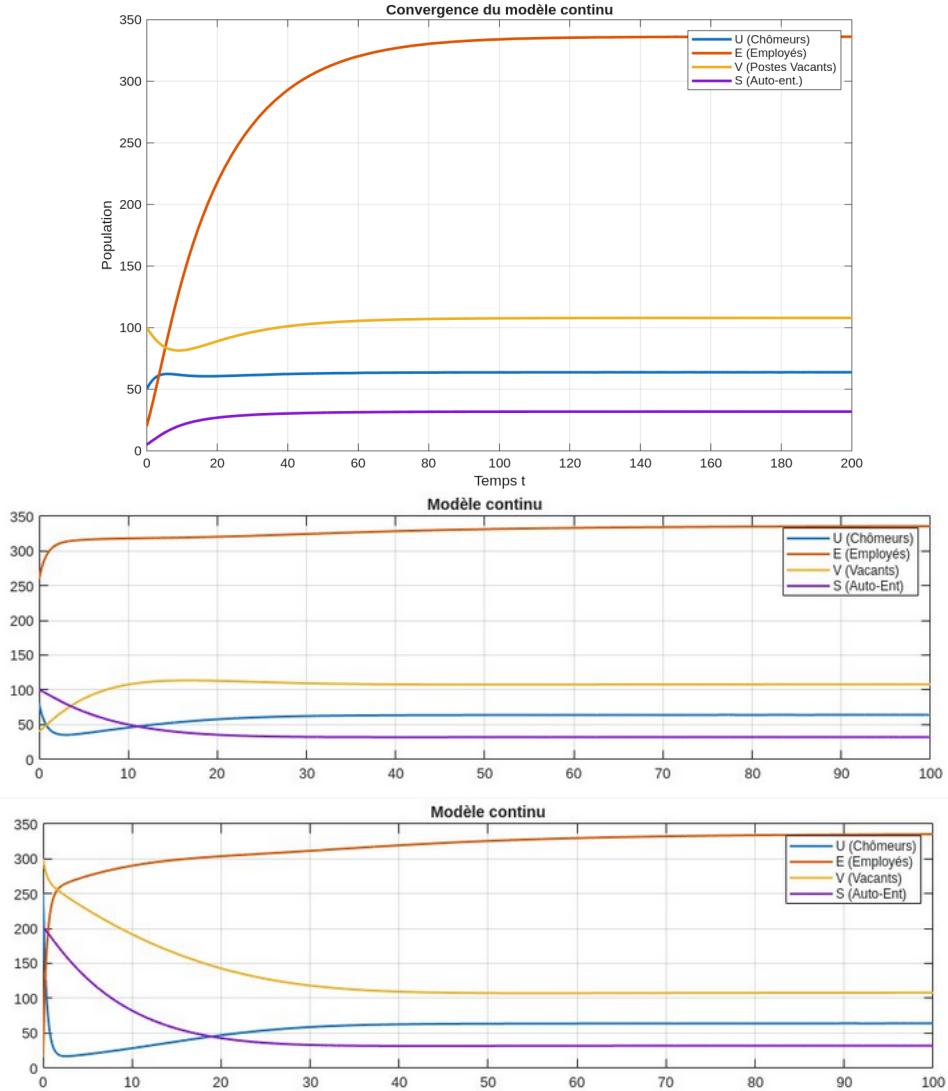


FIGURE 1 – Évolution temporelle des populations  $U(t)$ ,  $E(t)$ ,  $V(t)$ ,  $S(t)$  convergeant vers l'état stationnaire.

On remarque comme prédict par le critère de stabilité asymptotique que la convergence vers le point d'équilibre ne dépend pas des conditions initiales.

## 5 Analyse de Sensibilité Paramétrique

Au-delà de la stabilité, il est crucial d'identifier quels paramètres du modèle influencent le plus l'état du système c'est à dire analyser la sensibilité de celui-ci.

### 5.1 Méthodologie

Nous étudions la variation du taux de chômeurs à l'équilibre ( $T^*$ ) en réponse à une perturbation locale des paramètres nominaux. L'indice de sensibilité (ou élasticité)  $S$  est calculé numériquement par :

$$S_p^{T^*} = \frac{\% \Delta T^*}{\% \Delta p} = \frac{(T_{perturbe}^* - T_{nominal}^*) / U_{nominal}^*}{\Delta p / p} \quad (4)$$

Une valeur absolue élevée de  $S$  indique que le paramètre  $p$  est critique pour le système.

## 5.2 Résultats

En appliquant une perturbation de  $+10\%$  sur les paramètres clés, nous obtenons les résultats suivants sur le taux de chômage  $T^* = \frac{U^*}{U^*+E^*+S^*}$  :

TABLE 2 – Classement des sensibilités par module décroissant

Paramètre ( $p$ )	Valeur Init.	Variation $T^*$ (%)	Indice $S$
$d$ (Mortalité/Départ à la retraite)	0.0500	+8.03%	<b>+0.80</b>
$\delta$ (Perte d'emploi)	0.0500	+2.66%	<b>+0.27</b>
$\sigma$ (Sortie Auto-ent.)	0.0500	+2.00%	+0.20
$\mu$ (Destruction postes)	0.1000	+0.64%	+0.06
$\alpha_2$ (Transition vers Auto-ent.)	0.0500	-3.84%	<b>-0.38</b>
$\Lambda$ (Flux d'entrée)	20.0000	-3.16%	<b>-0.32</b>
$\gamma_1$ (Aide des Auto-ent.)	0.0100	-3.10%	<b>-0.31</b>
$\alpha_1$ (Embauche directe)	0.1000	-1.02%	-0.10
$\beta_1$ (Interaction U-V)	0.0010	-0.65%	-0.07
$\Lambda_v$ (Création postes)	10.0000	-0.63%	-0.06
$\eta$ (Création par employés)	0.0200	-0.42%	-0.04
$\theta$ (Création par Auto-ent.)	0.0300	-0.06%	-0.01

Note : Les paramètres sont classés par l'amplitude de leur impact (module de  $S$ ).

On constate que la mortalité et le départ à la retraite ont un impact important sur le chômage ( $d$ ), on a alors du mal à remplacer ceux qui sortent du marché du travail. D'un autre côté, le chômage peut être réduit en favorisant l'auto-entrepreneuriat ( $\alpha_2$ ) ou tout simplement une entrée plus grande c'est à dire une plus grande croissance démographique via les naissances ou l'immigration.

## 6 Discréétisation du modèle

Afin de valider notre étude du système continu nous pouvons aussi mener une étude discrète.

### 6.1 Modèle Linéarisé Discret

Nous considérons le système linéarisé autour de l'équilibre  $\dot{z} = Az + Bu$ , où  $z = x - x^*$  représente l'écart à l'équilibre et  $u$  la valeur de nos paramètres d'entrée. La discréétisation conduit au système récurrent :

$$z_{k+1} = Fz_k + Gu_k \quad (5)$$

Les matrices  $F$  (matrice de transition) et  $G$  (matrice d'entrée) sont calculées via l'exponentielle de matrice :

$$F = e^{AT_s} \quad \text{et} \quad G = A^{-1}(F - I)B$$

**Condition de stabilité asymptotique :** Le système discret est stable si et seulement si le module de toutes les valeurs propres  $\lambda_i(F)$  est strictement inférieur à 1 :

$$\forall i \in \{1, \dots, 4\}, \quad |\lambda_i(F)| < 1 \quad (6)$$

### 6.2 Calcul Numérique

L'application numérique sous MATLAB fournit les matrices suivantes :

Listing 5 – Calcul des matrices du système récurrent linéaire

Matrice F :

$$\begin{array}{cccc} 0.5621 & 0.0355 & -0.0432 & -0.4477 \\ 0.3892 & 0.9157 & 0.0432 & 0.4477 \\ -0.0704 & 0.0156 & 0.8519 & 0.0567 \\ 0.0360 & 0.0010 & -0.0012 & 0.8926 \end{array}$$

Vecteur G :

$$\begin{array}{c} -0.0247 \\ 0.0247 \\ 0.9235 \\ -0.0004 \end{array}$$

Le calcul du spectre de la matrice  $F$  obtenue donne les résultats suivants :

Listing 6 – Analyse spectrale

Valeurs propres de F :

$$\begin{array}{l} 0.5595 + 0.0000i \\ 0.9512 + 0.0000i \\ 0.8558 + 0.0321i \\ 0.8558 - 0.0321i \end{array}$$

Modules des valeurs propres :

$$\begin{array}{l} 0.5595 \\ 0.9512 \\ 0.8564 \\ 0.8564 \end{array}$$

On constate que toutes les valeurs propres sont situées à l'intérieur du cercle unité. Le modèle discrétilisé est donc asymptotiquement stable. Cela est en accord avec les résultats du modèle continu.

### 6.3 visualisation

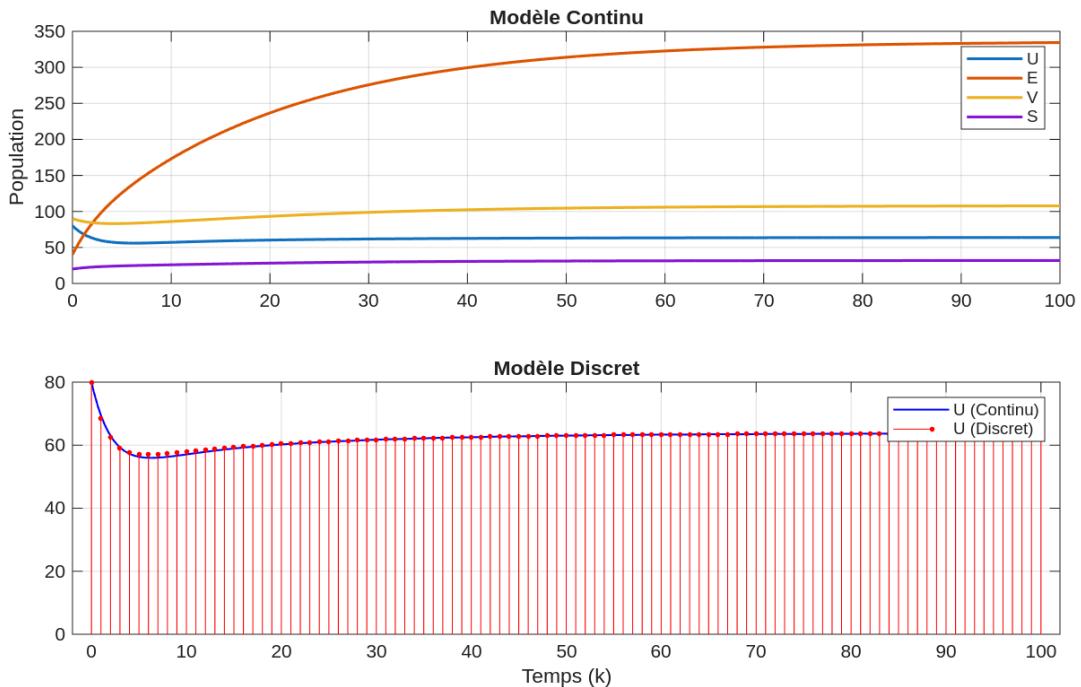


FIGURE 2 – Comparaison de la convergence du modèle discret et continu.

La simulation comparative confirme que ce modèle discret reproduit fidèlement la dynamique locale du système continu, validant ainsi l'approximation pour des variations faibles autour de l'équilibre.

## 7 Conclusion

L'étude numérique confirme les prédictions théoriques du modèle. Le marché de l'emploi modélisé possède un point d'équilibre structurellement stable pour les paramètres choisis. Le système est robuste aux petites perturbations, revenant naturellement à son niveau d'emploi et de chômage structurel défini par  $x^*$ .

## Références

- [1] E. R. Njike-Tchaptchet et C. Tadmon, *Mathematical modeling of the unemployment problem in a context of financial crisis*, Mathematics and Computers in Simulation, vol. 211, pp. 241-262, Elsevier, 2023.
- [2] Cristina Stoica Maniu, *Modélisation*, Polycopié de cours, CentraleSupélec, 2025-2026.