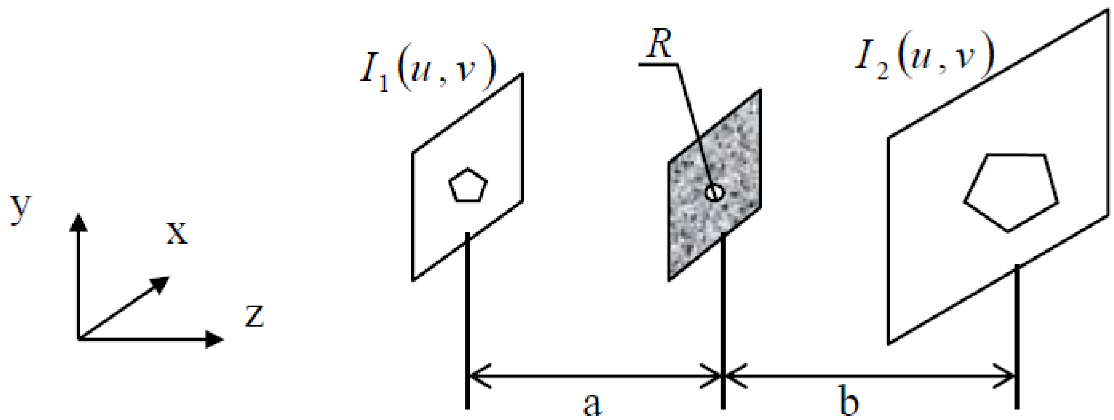
《医学成像系统》作业（一）参考解答

本参考解答根据全体同学提供的作业汇总，特别感谢徐子茗同学提供的模板和规范解答

由于作业无标准答案，参考解答难免存在疏漏之处，如有错误，欢迎在网络学堂讨论区留言

1. 用一个半径为 R 的圆孔构成一个小孔成象系统，如下图所示。已知输入函数的频谱函数为 *Iᵢ(u v)*，假定收集效率为常数。根据所示的几何关系，求输出函数的频谱函数 *Iₒ(u, v)*.



放大倍数$m=-\frac{b}{a}$，设收集效率常数为η，则小孔透过率函数（考虑冲激响应）为：

$$h(r)=circ(r)=\begin{cases}\eta, & 0\le r\le \dfrac{a+b}{a}R\\ 0, & r>\dfrac{a+b}{a}R\end{cases}$$

令$R'=\frac{a+b}{a}R$, 由零阶汉克尔变换可得：

$$H(\rho)=2\pi\int_0^\infty f(r)J_0(2\pi r\rho)rdr$$

$$=2\pi\int_0^\infty circ(r)J_0(2\pi r\rho)rdr=2\pi\int_0^\infty circ(r)J_0(2\pi r\rho)rdr$$

$$=2\pi\int_0^{R'}\eta J_0(2\pi r\rho)rdr$$

令$r'=2\pi r\rho$, $dr'=2\pi\rho dr$,

$$H(\rho)=\frac{1}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi\rho R'}\eta\, r' J_0(r')dr'=\frac{\eta}{2\pi\rho^2}\int_0^{2\pi\rho R'} r' J_0(r')dr'$$

$$=\frac{\eta}{2\pi\rho^2}2\pi\rho R' J_1(2\pi\rho R')=\frac{\eta R'}{\rho}J_1(2\pi\rho R')$$

$$\therefore I_o(u,v)=I_i(mu,mv)\frac{\eta R'}{\rho}J_1(2\pi\rho R')$$

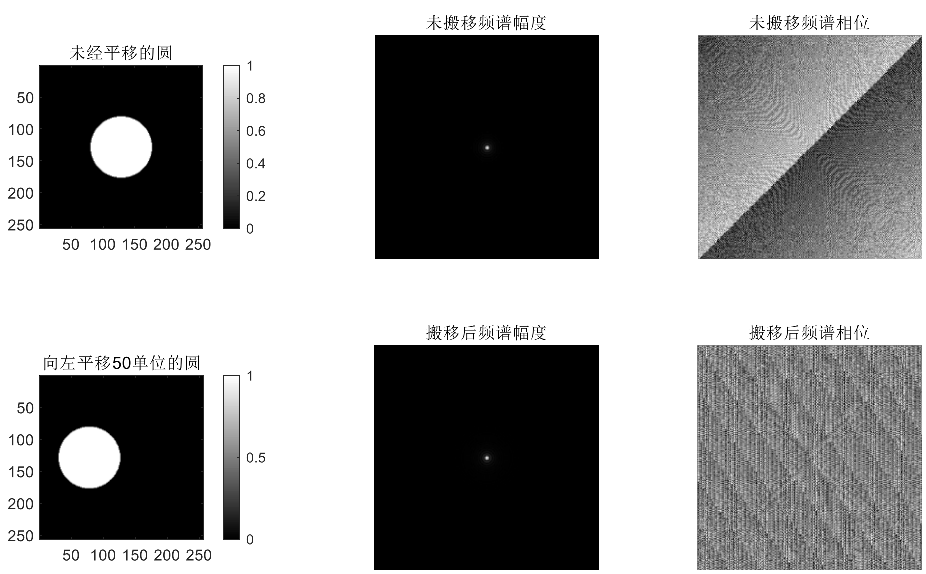
其中$m=-\frac{b}{a}$,η为收集效率常数，$R'=\frac{a+b}{a}R$, $\rho=\sqrt{u^2+v^2}$.

2. 在 MATLAB 中，生成一幅黑色背景，中心内嵌一个直径为 96 像素点的白色圆盘的 256X256 的图像。请同时提交 Matlab 程序。

a）使用“*imagesc*” or “*imshow*”显示图像，采用灰色的 colormap，使用 axis image 或 truesize 调整窗口的比例，使用 colorbar 标示窗口的。对该图做 2D Fourier Transform。 然后将结果显示出来。

b）生成一幅和上面要求一样的图，但是中心的圆盘沿着一个方向偏移一定的距离，如十个像素点。也做 2D Fourier Transform 并显示结果。 比较两个图 FT 变换后的不同。

c）使用 subplot 将所有的图显示在一个大图中。



matlab代码见附录，如上图所示，对两幅图像的傅里叶频谱图来说，幅值分布几乎一致，而相角分布的条纹走向与密度都发生了较大改变。

3. 一个医学成像系统的点扩散函数为 h(x, y) = exp[-(|x| + |y|)]。 试问：该体系对线冲击函数 line impulse f(x, y) = delta(x)的反应是什么？

$$g(x,y) = h(x,y) ** f(x,y)$$

$$= \iint h(u,v) f(x-u,y-v) du dv$$

$$= \iint e^{-(|u|+|v|)} \delta(x-u) du dv$$

$$= \int e^{-(|x|+|v|)} dv$$

$$= e^{-|x|} \int e^{-|v|} dv$$

$$= 2e^{-|x|}$$

4. 假设 F(u)是一维实函数 f(x)的傅立叶变换， F(u)=FT[f(x)]。请证明如下式子：如果 f(x) = f(-x)，那么 F*(u) = F(u). 其中*代表复数共轭(complex conjugate)。

证明：

$$F(u) = FT[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$$F^*(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{j2\pi ux} dx$$

$$= -\int_{+\infty}^{-\infty} f\big(-(-x)\big) e^{-j2\pi u(-x)} d(-x)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f\big(-(-x)\big) e^{-j2\pi u(-x)} d(-x)$$

令 $v = -x, \qquad F^*(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-v) e^{-j2\pi uv} dv$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) e^{-j2\pi uv} dv = F(u)$$

附录：第2题matlab代码

```
clear;
close all;
clc;

%%定义参数：图像长宽、圆的半径（平方），绘制坐标映射
N = 256;
rs = 48*48;
xmap = -N/2+0.5:1:N/2-0.5;
ymap = -N/2+0.5:1:N/2-0.5;%加 0.5 让圆更加靠近中心，这里微小的差别在 imshow 显示相位变化的时候非常明显
[x,y] = meshgrid(xmap,ymap);
square = x.^2+y.^2;%平方坐标映射
img = zeros(N,N);
img(find(square<rs)) = 1;

%%绘制原图像
figure;
subplot(231);
colormap('gray');
imagesc(img);
title('未经平移的圆');
axis image;
colorbar;

%%频域变换
fimg = fftshift(fft2(img));%注意将低频信号搬到原点附近
subplot(232);
imshow(abs(fimg),[]);
title('未搬移频谱幅度');
subplot(233);
imshow(angle(fimg),[]);%这里只是为了和下面的相位作对比，实际上使用 imshow 来直接展示相位是非常糟糕的做法
title('未搬移频谱相位');

%%圆的搬移，其他同上
xmap = xmap+50;
[x,y] = meshgrid(xmap,ymap);
square = x.^2+y.^2;%平方坐标映射
img2 = zeros(N,N);
img2(find(square<rs)) = 1;

%%绘制原图像
subplot(234);
colormap('gray');
imagesc(img2);
axis image;
colorbar;
title('向左平移 50 单位的圆');
```

```

%%频域变换
fimg2 = fftshift(fft2(img2));
subplot(235);
imshow(abs(fimg2),[]);
title('搬移后频谱幅度');
subplot(236);
imshow(angle(fimg2),[]);
title('搬移后频谱相位');
```