Formation DCNS – Oct 2007

PRINCIPIA

DN&T
Design Naval & Transports

LBR-5 : ANALYSE STRUCTURELLE

ANAST Architecture Navale et Analyse des Systèmes de Transport
UNIVERSITE DE LIEGE

Comment l'analyse structurelle s'effectue-t-elle dans LBR5?

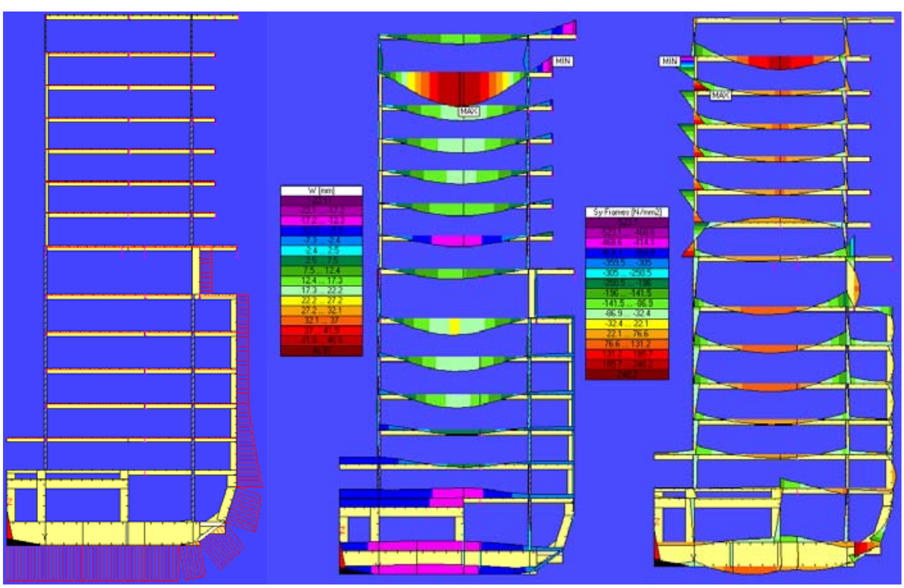
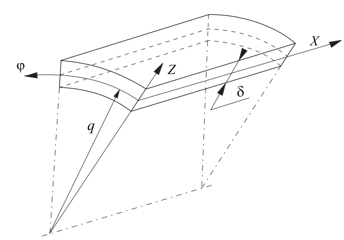


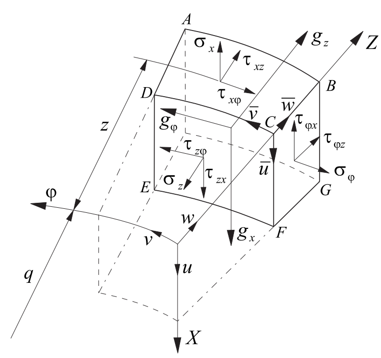
Table des matières

- **Equations différentielles** des coques cylindriques raidies
- Eléments de coques cylindriques (plaques) raidies
- **Solution analytique** pour les équations des panneaux raidis
  - Solution homogène (ou solution complémentaire)
  - **Développement en série de Fourier**
  - **Développement en série de Fourier des charges**
  - Solution homogène des équations differentielles
  - Lignes de charges unitaires de base
  - Panneaux proprement dits
- Conclusions

Généralités

- z = 0 à mi-épaisseur de plaque
- y = q φ
  avec φ utilisé pour les coques et y pour les plaques
- Eléments de volumes infinitésimaux
  [dx, (q+z)dφ, dz]
- Déplacements u, v, w et contraintes σ, τ
- **Hypothèses de Love-Kirchoff**, i.e.
  - Théorie des coques minces (δ/q <<< 1)
  - Petites déformations et analyse linéaire
  - Conservation des sections planes
    ($\gamma_{xz} = \gamma_{\varphi z} = 0 \Rightarrow \tau_{xz} = \tau_{\varphi z} = 0$)
  - σ_z et les effets associés sont négligeables
  - Pas de déformation selon oz ($\varepsilon_z = 0$)





Relations 'déformation-déplacement' pour les coques

$$\varepsilon_x = u' - zw''$$

$$\varepsilon_\varphi = v^\circ + \frac{w}{q} - zw^{\circ\circ} \qquad \text{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f' \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{q}\frac{\partial f}{\partial \varphi} = f^\circ$$

$$\gamma_{x\varphi} = u^\circ + v' - 2zw^{\circ\prime}$$

Relations 'contrainte-déplacement' pour les coques

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left[u' + \upsilon(v^\circ + \frac{w}{q}) - z\,(w'' + \upsilon w^{\circ\circ})\right]$$

$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\upsilon^2}\left[(v^\circ + \frac{w}{q}) + \upsilon u' - z\,(w^{\circ\circ} + \upsilon w'')\right]$$

$$\tau_{x\varphi} = G\left(u^\circ + v' - 2zw^{\circ\prime}\right)$$

avec E = module de Young = 2.1 10^5 MPa pour l' acier

υ = coefficient de Poisson= 0.3 pour l'acier

G = module de cisaillement = 8.1 10^4 MPa pour l'acier

Relations 'résultante-contrainte' pour les coques

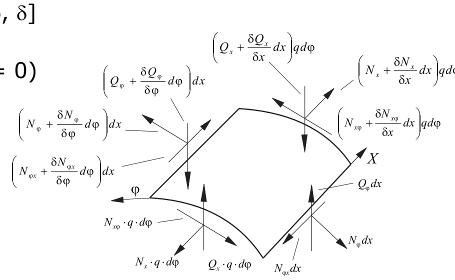
- Elément de volume infinitésimal [dx, qdφ, δ]
- Référence = axe neutre de la plaque (z = 0)

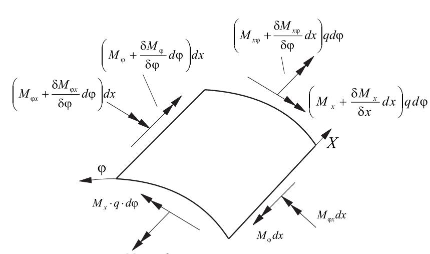
$$N_\varphi = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi\, dz \qquad N_x = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_x\,(1 + \frac{z}{q})\,dz$$

$$M_\varphi = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi\, z\,dz \qquad M_x = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_x\,(1 + \frac{z}{q})\,z\,dz$$

$$N_{\varphi x} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau_{\varphi x}\, dz \qquad N_{x\varphi} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau_{x\varphi}\,(1 + \frac{z}{q})\,dz$$

$$M_{\varphi x} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau_{\varphi x}\, z\,dz \qquad M_{x\varphi} = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \tau_{x\varphi}\,(1 + \frac{z}{q})\,z\,dz$$





Relations 'résultante-déplacement' pour les coques

- Relations 'contrainte-déplacement' + relations 'résultante-contrainte'

$$N_\varphi = D\left(v^\circ + \frac{w}{q} + \upsilon u'\right)$$

$$N_x = D\left(u' + \upsilon v^\circ + \upsilon \frac{w}{q}\right)$$

$$N_{\varphi x} = N_{x\varphi} = D\,\frac{1-\nu}{2}\,(v' + u^{o})$$

$$M_\varphi = K\,(w^{\circ\circ} + \upsilon w'')$$

$$M_x = K\,(w'' + \upsilon w^{\circ\circ})$$

$$M_{\varphi x} = M_{x\varphi} = K\,(1-\upsilon)\,w^{\circ\prime}$$

avec $D = \dfrac{E\delta}{1-\upsilon^2}$

$K = \dfrac{E\delta^3}{12\left(1-\upsilon^2\right)}$

LBR5 – Equations Différentielles des Coques Raidies Cylindriques

Relations 'résultante-contrainte' pour les coques raidies

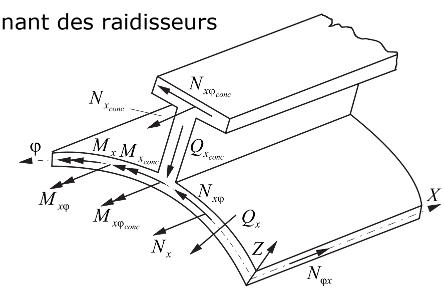
- Forces résultantes additionnelles provenant des raidisseurs

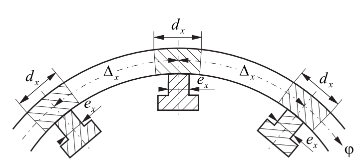
$$N_\varphi = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi\, dz + f(x) \int_{\omega_\varphi} \sigma_\varphi \frac{e_\varphi}{d_\varphi}\, dz$$

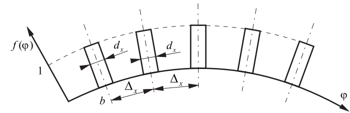
$$N_x = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{q}\right) dz + f(\varphi) \int_{\omega_x} \sigma_x \frac{e_x}{d_x}\, dz$$

$$M_\varphi = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_\varphi\, z\, dz + f(x) \int_{\omega_\varphi} \sigma_\varphi\, z\, \frac{e_\varphi}{d_\varphi}\, dz$$

$$M_x = \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} \sigma_x\, z \left(1 + \frac{z}{q}\right) dz + f(\varphi) \int_{\omega_x} \sigma_x\, z\, \frac{e_x}{d_x}\, dz$$







avec ω_x = section transversale du raidisseur

ω_φ = section transversale du cadre

Relations 'résultante-déplacement' pour les coques raidies

$$N_\varphi = D\,(v^\circ + \frac{w}{q} + \upsilon u') + f(x)\,\frac{E}{d_\varphi}\left[(v^\circ + \frac{w}{q})\,\omega_\varphi - w^{\circ\circ}\,h_\varphi\right]$$

$$M_\varphi = K\,(w^{\circ\circ} + \upsilon w'') + f(x)\,\frac{E}{d_\varphi}\left[(v^\circ + \frac{w}{q})h_\varphi - w^{\circ\circ}\,I_\varphi\right]$$

$$M_{\varphi x} = K\,(1-\upsilon)\,w^{\circ\prime} + f(x)\,\frac{G}{d_\varphi}\left[K_\varphi\,w^{\circ\prime} + \lambda_\varphi \Omega'_\varphi (v' + u^\circ)\right]$$

$$N_x = D\,(u' + \upsilon v^\circ + \upsilon\frac{w}{q}) + f(\varphi)\,\frac{E}{d_x}\,(u'\,\omega_x - w''\,h_x)$$

$$M_x = K\,(w'' + \upsilon w^{\circ\circ}) + f(\varphi)\,\frac{E}{d_x}\,(u' h_x - w''\,I_x)$$

$$M_{x\varphi} = K\,(1-\upsilon)\,w^{\circ\prime} + f(\varphi)\,\frac{G}{d_x}\left[K_x\,w^{\circ\prime} + \lambda_x \Omega'_x (v' + u^\circ)\right]$$

$$N_{\varphi x} = N_{x\varphi} = D(\frac{1-\upsilon}{2})\,(v' + u^{o}) + f(x)\,\frac{G}{d_\varphi}\,\Omega'_\varphi (v' + u^\circ) + f(\varphi)\,\frac{G}{d_x}\,\Omega'_x (v' + u^\circ)$$

Relations 'résultante-déplacement' pour les coques raidies

avec ω_x, ω_φ = ection transversale d'un raidisseur (cadre) sans bordé

h_x, h_φ = moment statique de ω_x (ω_φ) par rapport à l'axe neutre

I_x, I_φ = moment d'inertie de ω_x (ω_φ) par rapport à l'axe neutre

K_x, K_φ = rigidité torsionnelle d'un raidisseur (cadre)

Ω_x', Ω_φ' = section réduite des semelles (pour la contribution des semelles au cisaillement dans le plan)

λ_x, λ_φ = excentricité de la semelle par rapport au plan moyen du bordé

d_x, d_φ = largeur des bandes effectives pour les raidisseurs (cadres)

Note: Dans LBR5, pas de contribution des semelles au cisaillement hors-plan $\Rightarrow$ $\Omega_x' = \Omega_\varphi' = 0$

Equations d'équilibre

$$N'_x + N^o_{\varphi x} + X = 0$$

$$N^o_\varphi + N'_{x\varphi} - \frac{Q_\varphi}{q} + Y = 0$$

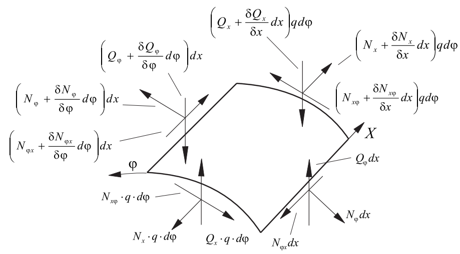
$$\frac{N_\varphi}{q} + Q^o_\varphi + Q'_x - Z = 0$$

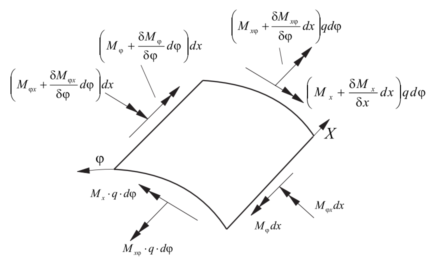
$$M^o_\varphi + M'_{x\varphi} - Q_\varphi = 0$$

$$M'_x + M^o_{\varphi x} - Q_x = 0$$

$$N_{x\varphi} - N_{\varphi x} + \frac{M_{\varphi x}}{q} = 0$$

avec X, Y, Z = pressions externes





Equations différentielles des coques raidies cylindriques

<u>13 inconnues</u>

- u, v, w
- N_x, M_x, Q_x, $N_{x\varphi}$, $M_{x\varphi}$
- Nφ, Mφ, Q_x, $N_{\varphi x}$, $M_{\varphi x}$

<u>13 équations</u>

- Equations d'équilibre (6-1=5)
- Relations 'résultante-déplacement' pour les coques raidies (8)

⇒ 3 équations différentielles des coques raidies exprimées en termes de u, v, w

Equations différentielles des coques raidies cylindriques

$$D\left(u'' + \upsilon v^{\circ\prime} + \frac{\upsilon w'}{q}\right) + D\left(\frac{1-\upsilon}{2}\right)\left(u^{\circ\circ} + v^{\circ\prime}\right) + f(\varphi)\left[\Omega_x u'' - H_x w'''\right] + X = 0$$

$$D\left(v^{\circ\circ} + \frac{w^{\circ}}{q} + \upsilon u^{\circ\prime}\right) + D\left(\frac{1-\upsilon}{2}\right)\left(u^{\circ\prime} + v''\right) + f(x)\left[\Omega_\varphi\left(v^{\circ\circ} + w^{\circ}\right) - H_\varphi w^{\circ\circ\circ}\right] + Y = 0$$

$$\frac{D}{q}\left(v^{\circ} + \frac{w}{q} + \upsilon u'\right) + K\,w^{\circ\circ\circ\circ} + 2K\,w^{\circ\circ\prime\prime} + K\,w'''' + f(x)\begin{bmatrix} \dfrac{\Omega_\varphi}{q}\left(v^{\circ} + \dfrac{w}{q}\right) - H_\varphi\left(\dfrac{2w^{\circ\circ}}{q} + v^{\circ\circ\circ}\right) \\ + R_\varphi\, w^{\circ\circ\circ\circ} + T_\varphi\, w^{\circ\circ\prime\prime} \end{bmatrix}$$
$$+ f(\varphi)\left[-H_x u''' + R_x\, w'''' + T_x\, w^{\circ\circ\prime\prime}\right] + f'(x)\left[T_\varphi\, w^{\circ\circ\prime}\right] + f^{\circ}(\varphi)\left[T_x\, w^{\circ\prime\prime}\right] - Z = 0$$

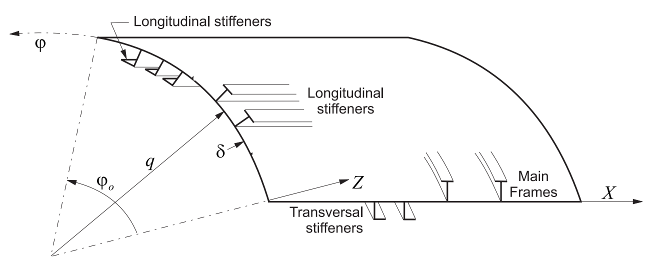
avec $\Omega_\varphi = \dfrac{E\omega_\varphi}{d_\varphi};\ \Omega_x = \dfrac{E\omega_x}{d_x};\ H_\varphi = \dfrac{Eh_\varphi}{d_\varphi};\ H_x = \dfrac{Eh_x}{d_x}$

$R_\varphi = \dfrac{EI_\varphi}{d_\varphi};\ R_x = \dfrac{EI_x}{d_x};\ T_\varphi = \dfrac{GK_\varphi}{d_\varphi};\ T_x = \dfrac{GK_x}{d_x}$

$\boxed{\text{coque} \rightarrow \text{plaque si } q \rightarrow \infty}$

Généralités

- Tôle (δ) + 2 couches de raidisseurs
- Raidisseurs selon ox = raidisseurs longitudinaux
- Raidisseurs selon oφ = cadres transversaux
- **Hypothèse : les raidisseurs et cadres d'un même panneau sont identiques et possèdent le même espacement**



Forces et moments résultants de panneaux raidis à 2 couches

$$N_\varphi = (D+\Omega_\varphi)\left(v^\circ + \frac{w}{q}\right) + D\upsilon u' - H_\varphi w^{\circ\circ}$$

$$N_x = (D+\Omega_x)u' + D\upsilon\left(v^\circ + \frac{w}{q}\right) - H_x w''$$

$$M_\varphi = (K+R_\varphi)w^{\circ\circ} + K\upsilon w'' - H_\varphi\left(\frac{w}{q} + v^\circ\right)$$

$$M_x = (K+R_x)w'' + K\upsilon w^{\circ\circ} - H_x u'$$

$$M_{\varphi x} = \left[K(1-\upsilon) + T_\varphi\right]w^{\circ\prime}$$

$$M_{x\varphi} = \left[K(1-\upsilon) + T_x\right]w^{\circ\prime}$$

$$N_{\varphi x} = D\left(\frac{1-\upsilon}{2}\right)\left(v' + u^\circ\right)$$

$$N_{x\varphi} = N_{\varphi x}$$

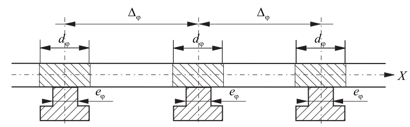
$$Q_\varphi = (K+T_x)w^{\circ\prime\prime} + (K+R_\varphi)w^{\circ\circ\circ} - H_\varphi\left(\frac{w^\circ}{q} + v^{\circ\circ}\right)$$

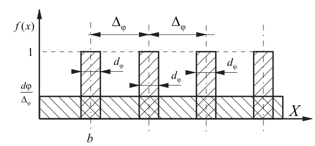
$$Q_x = (K+T_\varphi)w^{\circ\circ\prime} + (K+R_x)w''' - H_x u''$$

avec

$$\Omega_\varphi = \frac{E\omega_\varphi}{\Delta_\varphi};\ \Omega_x = \frac{E\omega_x}{\Delta_x};\ H_\varphi = \frac{Eh_\varphi}{\Delta_\varphi};\ H_x = \frac{Eh_x}{\Delta_x}$$

$$R_\varphi = \frac{EI_\varphi}{\Delta_\varphi};\ R_x = \frac{EI_x}{\Delta_x};\ T_\varphi = \frac{GK_\varphi}{\Delta_\varphi};\ T_x = \frac{GK_x}{\Delta_x}$$





Description précise du comportement global du panneau

Equations de panneaux raidis à 2 couches (raid et cadres)

$$(D+\Omega_x)u'' + D\left(\frac{1-\upsilon}{2}\right)u^{\circ\circ} + D\left(\frac{1+\upsilon}{2}\right)v^{\circ\prime} - H_x w''' + \frac{D\upsilon}{q}w' + X = 0$$

$$(D+\Omega_\varphi)v^{\circ\circ} + D\left(\frac{1+\upsilon}{2}\right)u^{\circ\prime} + D\left(\frac{1-\upsilon}{2}\right)v'' - H_\varphi w^{\circ\circ\circ} + \frac{1}{q}(D+\Omega_\varphi)w^\circ + Y = 0$$

$$-H_x u''' + \frac{D\upsilon}{q}u' + \frac{1}{q}(D+\Omega_\varphi)v^\circ - H_\varphi\ v^{\circ\circ\circ} + \frac{1}{q^2}(D+\Omega_\varphi)w + (K+R_\varphi)w^{\circ\circ\circ\circ}$$
$$+ (2K+T_\varphi+T_x)w^{\circ\circ\prime\prime} + (K+R_x)w'''' - \frac{2H_\varphi}{q}w^{\circ\circ} - Z = 0$$

coque $\rightarrow$ plaque si $q \rightarrow \infty$

Généralités

- 3 équations différentielles couplées à résoudre simultanément
- Système équivalent d'équations :

$a_1u + b_1v + c_1w = +X(x,\varphi)$

$a_2u + b_2v + c_2w = +Y(x,\varphi)$

$a_3u + b_3v + c_3w = -Z(x,\varphi)$

avec $u(x,\varphi)$, $v(x,\varphi)$, $w(x,\varphi)$ = déplacements

x, φ = coordonnées d'un point à mi-épaisseur de la coque cylindrique

$X(x,\varphi)$, $Y(x,\varphi)$, $Z(x,\varphi)$ = charges de surface

a_1, b_1, …, c_3 = opérateurs de dérivée

Solution homogène (ou solution complémentaire)

- La solution homogène des équations differentielles donne:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow a_1 (b_2c_3 + b_3c_2) + a_2 (b_3c_1 - b_1c_3) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1) = 0$

- Application de cet operateur au déplacement $w(x,\varphi)$

$$Aw_{80} + Bw_{60} + Cw_{62} + Dw_{40} + Ew_{42} + \ldots + Jw_{26} + Kw_{08} = 0$$

Equations différentielles du 8^{th} ordre avec 2 variables couplées x, φ

w_{ij} = dérivée du $i^{ème}$ ordre de w selon x et du $j^{ème}$ ordre selon y

Développement en série de Fourier

- Hypothèse sur la forme des déplacements u, v, w

$u(x,\varphi) = u(\varphi) \sum \cos(\lambda x)$

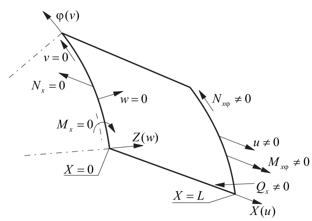
$v(x,\varphi) = u(\varphi) \sum \sin(\lambda x)$

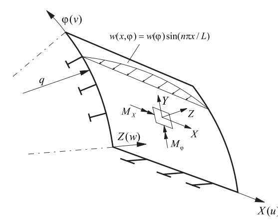
$w(x,\varphi) = w(\varphi) \sum \sin(\lambda x)$

avec $\lambda = n\pi / L$

n = nombre de termes du développement en série de Fourier

L = envergure de la structure selon ox (même L pour chaque panneau)





Développement en série de Fourier

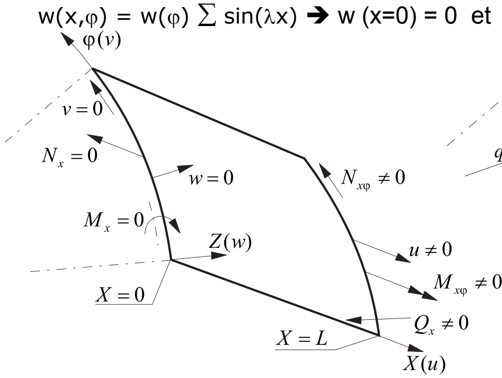
- Limitations concernant les conditions aux limites :

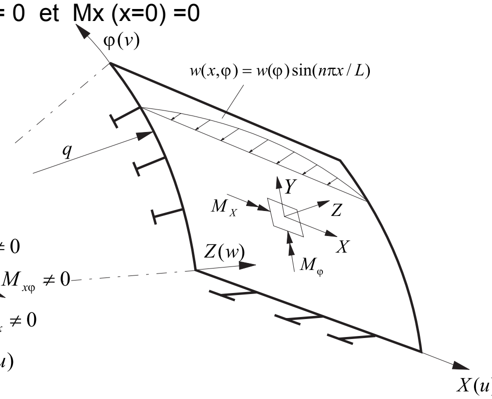
Extrémités (x = 0, x = L) $\equiv$ appuis simples

$u(x,\varphi) = u(\varphi) \sum \cos(\lambda x)$ ➔ u (x=L/2) = 0 mais Nx (x=0) = 0

$v(x,\varphi) = u(\varphi) \sum \sin(\lambda x)$ ➔ v (x=0) = 0

$w(x,\varphi) = w(\varphi) \sum \sin(\lambda x)$ ➔ w (x=0) = 0 et Mx (x=0) =0





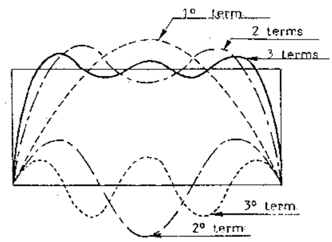
Développement en série de Fourier des charges

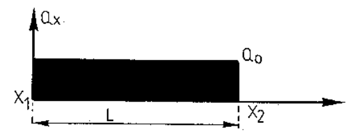
- Les charges $Z(x,\varphi)$ doivent pouvoir se décomposer en modes de Fourier

$$Z(x,\varphi) = Z^*(\varphi)\ Q(x) = Z^*(\varphi) \sum [a \sin(\lambda x)]$$

- Pression hydrostatique = uniformément distribuée selon ox et linéaire selon oφ

Développement selon ox : $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4Q}{(2n-1)\pi} \cdot \sin \frac{(2n-1)\pi\ x}{L}$





Solution homogène des équations différentielles

$$w(x,\varphi) = \begin{bmatrix} e^{\alpha_i q\varphi}(A_i \cos\beta_i q\varphi + B_i \sin\beta_i q\varphi) \\ + e^{\alpha_i q(\varphi_0-\varphi)}.(C_i \cos\beta_i q(2\pi-\varphi) \\ \qquad + D_i \sin\beta_i q(2\pi-\varphi)) \\ + \ldots \end{bmatrix} \cdot \sin\lambda x$$

avec A_i, B_i, C_i, D_i = constantes d'integration

A_i, B_i, C_i, D_i déterminés par les conditions aux limites et de symétrie

Note: équations similaires pour $u(\varphi)$, $v(\varphi)$ dépendant de A_i, B_i, C_i, D_i

$w(\varphi) \rightarrow u(\varphi)$, $v(\varphi) \rightarrow N, M, Q$

Lignes de charge unitaires de base (cylindre complet)

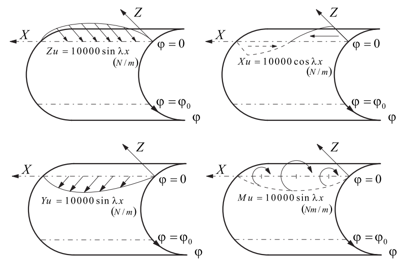
- 4 lignes de charge unitaires de base appliquées en $\varphi = 0$

  $X_u = 10000 \cos(\lambda x)$ (N/m)

  $Y_u = 10000 \sin(\lambda x)$ (N/m)

  $Z_u = 10000 \sin(\lambda x)$ (N/m)

  $M_u = 10000 \sin(\lambda x)$ (Nm/m)



- Pour chaque ligne de charge unitaire, les constantes d'intégration A_i, B_i, C_i, D_i sont obtenues par les conditions aux limites en $\varphi = 0$ and $\varphi = 360°$, et les conditions de symétrie

- Pression latérale $\rightarrow$ intégration des solutions associées aux cas de charge

Panneaux véritables (véritable angle d'ouverture φ_0)

- 4 lignes de charge unitaires de base appliquées en $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$ (X_u, Y_u, Z_u, M_u)

- Pour chaque panneau, 8 inconnues = facteurs d'amplification des lignes de charge aux extrémités

- Conditions aux limites en $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_0$
  - Pour une extrémité libre : $M_\varphi = N_\varphi = N_{x\varphi} = R_\varphi = 0$
  - Pour une extrémité encastrée : $w = v = u = w° = 0$
  - Pour une extrémité simplement appuyée : $w = u = M_\varphi = N_\varphi = 0$
  - Pour une jonction entre 2 panneaux : 4 équations de compatibilité et 4 équations d'équilibre
  - Pour une jonction entre 3 panneaux : 8 équations de compatibilité et 4 équations d'équilibre

- Système 8N x 8N avec un nombre de N panneaux

Conclusions

- Analyse structurelle de LBR5= méthode analytique
- Résolution d'équations differentielles de panneaux raidis
- Utilisation des développements en série de Fourier
- Analyse élastique linéaire rapide et précise
  ⇒ adéquat pour de l'optimisation structurelle
- **Limitations**
  - **Analyse de structures prismatiques (cylindriques)**
  - **Analyse globale et pas locale**
  - **Développement en série de Fourier pour les déplacements**
    ⇒ Comportement d'une poutre caisson sur deux appuis (indéformable dans leur plan (v,w) mais pas hors de leur plan (u))