HW 2.1

Tarea 2.1

Encuentra los mejores parámetros de ML para PDF de Bernoulli o Poisson.

ML para Bernoulli

1. Seleccionar PDF

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X(\omega)$ una variable aleatoria, con distribución de Bernoulli, es decir

X una función $\mathcal{F}$-medible de Bernoulli con

$$X : \Omega \to \{0, 1\}$$

tal que existe un $p \in [0, 1]$, donde

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \qquad \text{y} \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Es decir

$$X \sim \mathrm{Bern}(p).$$

Equivalente a

$$\mathbb{P}(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x} \qquad \text{con} \qquad x \in \{0, 1\}.$$

Por tanto, se busca maximizar p.

2. Aplicar ML a la PDF

$$L(X_i, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}.$$

3. Reescribir L

$$G = \ln[L(X_i, \mu, \sigma^2)] = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}\right).$$

(1)

$$= \sum_{i=1}^{n} \ln[p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}].$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\ln(p^{x_i}) + \ln((1-p)^{1-x_i})\right].$$

(2)

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(p) \ + \ \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\ln(1-p).$$

4. Derivamos con respecto al parámetro

$$\frac{dG}{dp} = \frac{d}{dp}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(p) + \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\ln(1-p)\right].$$

$$= \frac{d}{dp}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \ln(p)\right] + \frac{d}{dp}\left[\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\ln(1-p)\right].$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{d}{dp}\ln(p) + \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\frac{d}{dp}\ln(1-p).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{p} + \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\left(\frac{-1}{1-p}\right).$$

5. Igualamos a cero

$$\frac{dG}{dp} = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{p} + \sum_{i=1}^{n} (1 - x_i)\left(\frac{-1}{1-p}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{p} + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right] = 0.$$

$$\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{p} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{1-p} - \frac{x_i}{1-p}\right].$$

$$\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-p} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-p}.$$

$$\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{p} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-p}.$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{1-p}.$$

$$\Rightarrow\; \frac{1-p}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} x_i = n.$$

$$\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1-p}{p} + 1\right) = n.$$

$$\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1-p+p}{p}\right) = n.$$

$$\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{1}{p}\right) = n.$$

$$\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} x_i = pn.$$

$$\Rightarrow\; p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Este punto es importante porque $x \in \{0, 1\}$ y por tanto, solo tiene 2 estados para p.

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{1}(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{p} = 0.$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{1}(1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \hat{p} = 1.$$

6. Derivamos una segunda vez para evaluar concavidad o convexidad

$$\frac{d^2G}{dp^2} = \frac{d}{dp}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{p} + \sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)\left(\frac{-1}{1-p}\right)\right].$$

$$= -\frac{d}{dp}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{p}\right] + \frac{d}{dp}\left[\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)\left(\frac{-1}{1-p}\right)\right].$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}\right] + \sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)(-1)\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{1-p}\right].$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i(-1)\frac{1}{p^2} + \sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)(-1)\left(\frac{-1}{(1-p)^2}\right).$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\frac{-1}{p^2}\right) + \sum_{i=1}^{n}(1 - x_i)\left(\frac{1}{(1-p)^2}\right).$$

Derivadas auxiliares (tal cual):

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{d}{dp}\left(p^{-1}\right) = (-1)p^{-2}.$$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-p}\right) = \frac{d}{dp}\left((1-p)^{-1}\right) = -1(1-p)^{-2}(-1) = (1-p)^{-2}(-1).$$

Ahora con la expresión actual no podemos determinar si es max o min, por lo que haremos un cambio de variable.

Decimos que

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Tomamos la expresión de la primera derivada. Sustituimos

$$\frac{dG}{dp} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{p} + \sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\left(\frac{-1}{1-p}\right).$$

Realizamos el cambio de variable

$$\frac{dG}{dp} = \frac{S}{p} + (n-S)\left(\frac{-1}{1-p}\right).$$

$$= \frac{S}{p} + \frac{S}{1-p} - \frac{n}{1-p}.$$

$$= S\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) - \frac{n}{1-p}.$$

$$\Rightarrow\ S\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right) = \frac{n}{1-p}.$$

$$\Rightarrow\ S = \frac{n}{1-p}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right)}\right].$$

$$\Rightarrow\ S = \frac{n}{1-p}\left[\frac{1}{\frac{(1-p)+p}{p(1-p)}}\right].$$

$$S = \frac{n}{1-p}[p(1-p)].$$

$$S = np.$$

Sustituimos el valor de S en la segunda derivada

$$\frac{d^2G}{dp^2} = -\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{p^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-x_i)}{(1-p)^2}.$$

$$= -\frac{S}{p^2} - \frac{(n-S)}{(1-p)^2}.$$

$$= -\frac{np}{p^2} - \frac{n-np}{(1-p)^2}.$$

$$= -\frac{n}{p} - \frac{n(1-p)}{(1-p)^2}.$$

$$= -\frac{n}{p} - \frac{n}{1-p}.$$

$$= -n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right).$$

$$= -n\left(\frac{(1-p)+p}{p(1-p)}\right).$$

$$= -n\left[\frac{1}{p(1-p)}\right].$$

Ahora, al ser $n > 0$ y $p \in (0, 1)$, tenemos que por el signo $-n$

$$\frac{d^2G}{dp^2} < 0.$$

Por tanto, $\frac{dG}{dp} = 0$, es un máximo.