

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

Н.С. Коннова, М.А. Басараб, А.В. Колесников

Программно - математическая реализация методов оптимизации

Учебно-методическое пособие



Москва
ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана
2021

УДК 519.2
ББК 22.18
К64

Издание доступно в электронном виде по адресу
<https://bmstu.press/catalog/item/7234/>

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Информационная безопасность»

*Рекомендовано Научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве учебно-методического пособия*

Коннова, Н. С.

К64 Программно-математическая реализация методов оптимизации : учебно-методическое пособие / Н. С. Коннова, М. А. Басараб, А. В. Колесников. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2021. — 101, [3] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-5689-5

Представлены лабораторные работы по дисциплине «Методы оптимизации», посвященные практическим вопросам реализации различных методов оптимизации в виде программно-математического обеспечения.

Для студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана, изучающих дисциплину «Методы оптимизации».

УДК 519.2
ББК 22.18



Уважаемые читатели! Пожелания, предложения, а также сообщения о замеченных опечатках и неточностях Издательство просит направлять по электронной почте: info@baumanpress.ru

ISBN 978-5-7038-5689-5

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021

Предисловие

При решении производственных, управленческих, организационно-технических и других задач, в том числе в области информационной безопасности, часто приходится иметь дело с проблемой выбора одного варианта (оптимального или квазиоптимального) среди множества альтернативных решений.

В силу значительного многообразия условий практических задач обеспечения информационной безопасности в данном пособии предлагается ознакомиться с различными методами и алгоритмами их решения на примерах простых математических задач.

Лабораторный практикум включает в себя лабораторные работы № 1–8 по поиску экстремумов унимодальных и мультимодальных функций одной переменной (пассивный поиск, последовательный поиск, случайный поиск, метод прямого отжига и др.), оптимизации функций нескольких переменных (генетические и эволюционные алгоритмы), многокритериальной оптимизации (методы главного критерия, линейной свертки, сужения множества Парето, анализа иерархий и др.), оптимизации при управлении проектами (метод критического пути).

При выполнении лабораторных работ разрешается использовать готовые программные пакеты математического моделирования (MATLAB, Mathcad и др.), электронные таблицы (MS Excel), но наиболее целесообразной является разработка учащимися собственных программ, написанных на языке программирования высокого уровня (C++, C#, Python и др.). В последнем случае программа может реализовать не полное решение задачи, а какие-либо вспомогательные и наиболее рутинные шаги всей процедуры.

При подготовке отчета о каждой лабораторной работе необходимо последовательно и полно представить все основные шаги метода (алгоритма) с выводом промежуточных результатов и необходимыми комментариями, демонстрирующими понимание сути процедуры. Студент должен быть знаком с такими понятиями, как вычислительная сложность и погрешность метода, уметь провести качественный и количественный анализ получаемых результатов, быть способным лаконично ответить на предложенные ему контрольные вопросы.

Пособие включает в себя достаточный теоретический материал для выполнения каждой лабораторной работы. Вместе с тем для более глубокого понимания методов и алгоритмов следует использовать дополнительные источники, в том числе указанные в списке литературы [1–7].

Представленные лабораторные работы являются частью учебной программы дисциплины «Методы оптимизации», посвященной изучению методов и алгоритмов поиска и оптимизации. Они были разработаны на основе практических и лабораторных занятий, которые проводились с 2015 г. на кафедрах «Информационная безопасность» и «Теоретическая информатика и компьютерные технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана. Пособие предназначено для студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана, обучающихся по специальностям «Информационная безопасность» (100401 — магистратура, 1-й курс), «Информационная безопасность автоматизированных систем» (090303 — специалитет, 2-й курс), «Компьютерная безопасность» (0903010065 — специалитет, 2-й курс), изучающих дисциплину «Методы оптимизации».

В результате изучения дисциплины студенты будут знать:

- основные понятия и концепции теории оптимизации;
- классификацию и условия применения различных методов оптимизации;
- методы поиска экстремумов функций одного и многих переменных;
- инженерные методы решения задач многокритериальной оптимизации и детали их применения на практике;
- особенности и преимущества вычислительных систем, основанных на оптимизационных технологиях.

Лабораторная работа № 1

Исследование методов прямого поиска экстремума унимодальной функции одного переменного

Цель работы — исследовать функционирование и провести сравнительный анализ различных алгоритмов прямого поиска экстремума (пассивный поиск, метод дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи) на примере унимодальной функции одного переменного.

Постановка задачи

На интервале $[a, b]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x)$. Используя методы *последовательного поиска* [1, разд. 2.3–2.5] (дихотомии, золотого сечения и Фибоначчи), отыскать интервал нахождения минимума $f(x)$ при заданной наибольшей допустимой длине интервала неопределенности $\varepsilon = 0,1$. Провести сравнение с методом *оптимального пассивного поиска* [1, разд. 2.2]. Результат в зависимости от числа точек разбиения N представить в виде таблицы.

Варианты заданий приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Варианты заданий

Номер варианта	Функция $f(x)$	a	b	Методы поиска	
				Оптимальный пассивный	Дихотомия
1	$-0,5 \cos 0,5x - 0,5$	-5	2	Оптимальный пассивный	Дихотомия
2	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-4	3	То же	Золотое сечение
3	$-\sqrt{x} \cdot \sin x$	0	3	»	Фибоначчи
4	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	-2	0	»	Дихотомия
5	$-\cos 0,5x - 1$	-2	4	»	Золотое сечение
6	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-5	2	»	Фибоначчи
7	$-\sqrt{x} \cdot \sin x - 1,5$	1	4	»	Дихотомия
8	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	1,5	4	»	Золотое сечение

Окончание табл. 1.1

Номер варианта	Функция $f(x)$	a	b	Методы поиска	
				Оптимальный пассивный	Фибоначчи
9	$-0,5 \cos 0,5x + 1$	$-2,5$	$1,5$		
10	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-2	4	То же	Дихотомия
11	$-2\sqrt{x} \cdot \sin 0,5x$	2	6	»	Золотое сечение
12	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	7	11	»	Фибоначчи
13	$2 \cos(x) + \lg(x)$	$1,5$	5	»	Дихотомия
14	$\exp(-0,2x) \sin(x)$	2	6	»	Золотое сечение
15	$x^2 \sin(x)$	9	12	»	Фибоначчи
16	$x^2 \exp[\sin(x)]$	9	14	»	Дихотомия
17	$\cos(x) + \lg(x)$	7	10	»	Золотое сечение
18	$\exp(-0,2x) \sin(x) + 1$	9	12	»	Фибоначчи
19	$x^2 \sin(x) - 2$	4	7	»	Дихотомия
20	$x^2 \exp[\sin(x)]$	16	20	»	Золотое сечение
21	$5 \cos(x) + x + \sqrt{x}$	2	6	»	Фибоначчи
22	$\exp(-0,1x) \sin(x) - 2$	-3	0	»	Дихотомия
23	$x^2 \sin(x)$	15	18	»	Золотое сечение
24	$x \exp[\cos(x)] - x$	8	12	»	Фибоначчи

Основные теоретические сведения

Методы пассивного поиска

Пусть требуется путем *пассивного поиска* найти точку $x^* \in [0, 1]$, в которой *унимодальная* на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения $f^* = f(x^*)$. *Минимаксный метод поиска*, в котором информация о значениях функции, вычисленных в предшествующих точках, не может быть использована, называют *оптимальным пассивным поиском*.

Рассмотрим алгоритм такого поиска при различном числе N точек, выбираемых на отрезке $[0, 1]$. Сразу заметим, что рассуждения аппроксимируются на любой интервал $[a, b]$ путем сдвига на a и растяжения в $(b-a)$ раз: $[0, 1](b-a) + a \rightarrow [a, b]$.

Если $N = 1$, то единственную точку целесообразно выбрать в середине отрезка, т. е. принять $x_1 = 1/2$ (рис. 1.1). В этом случае вследствие унимодальности функции $f(x)$ имеем $f^* \leq f(1/2)$. Поэтому наименьшая возможная длина *интервала неопределенности* $l_1^* = 1$ и можно гарантировать, что выбор в качестве точки $x^* \in [0, 1]$ точки $x_1 = 1/2$ приведет к погрешности не

более $\Delta_1^* = l_1^* / 2 = 1/2$. При любом ином положении точки x_1 погрешность при выборе $x^* = x_1$ будет $\Delta_1 > \Delta_1^*$, так как в действительности точка x^* может лежать на большей части отрезка $[0, 1]$.

Если при $N = 2$ (рис. 1.2) две точки расположить на отрезке $[0, 1]$ так, чтобы они делили его на равные части, т. е. выбрать $x_1 = 1/3$ и $x_2 = 2/3$, то

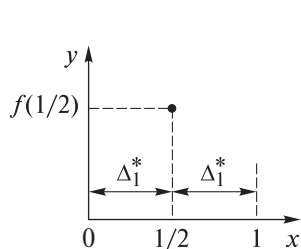


Рис. 1.1. Случай $N = 1$

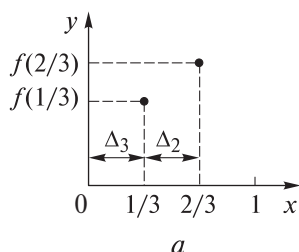


Рис. 1.2. Случай $N = 2$

точка $x^* \in [0, 1]$ будет найдена с точностью $\Delta_2^* = 1/3$, а наименьшая длина интервала неопределенности составит $l_2^* = 2\Delta_2^* = 2/3$. В самом деле, если $f(1/3) < f(2/3)$ (рис. 1.2, а), то в силу унимодальности функции $f(x)$ отрезок $[2/3, 1]$ можно исключить и считать, что $x^* \in [0, 2/3]$. Тогда при выборе $x^* = 1/3$ наибольшая погрешность $\Delta_2 = 1/3$ и $f^* \approx f(1/3)$. Если же окажется, что $f(1/3) > f(2/3)$ (рис. 1.2, б), то можно исключить отрезок $[0, 1/3]$ и считать, что $x^* \in [1/3, 1]$. И в этом случае выбор $x^* = 2/3$ приведет к погрешности не более $\Delta_2 = 1/3$, а $f^* \approx f(2/3)$. Заметим, что при $f(1/3) = f(2/3)$ можно исключить любой из указанных отрезков, гарантируя ту же точность нахождения точки $x^* \in [0, 1]$. При ином делении отрезка $[0, 1]$ на части двумя точками длина какой-то из его частей будет больше $1/3$ и в действительности точка x^* может принадлежать именно этой части, так что получим погрешность $\Delta_2 > \Delta_2^* = 1/3$.

Рассуждая аналогично, можно заключить, что при $N = 3$ нужно будет также выбирать точки равномерно на отрезке $[0, 1]$: $x_1 = 1/4$, $x_2 = 2/4$, $x_3 = 3/4$, обеспечив точность $\Delta_3^* = 1/4$ нахождения точки $x^* \in [0, 1]$ и наименьшую длину $l_3^* = 1/2$ интервала неопределенности. В случае произвольного $N \in \mathbb{N}$ по тем же соображениям надо выбирать точки

$$x_k = \frac{k}{N+1} \in [0, 1], \quad k = \overline{1, N}, \quad (1.1)$$

обеспечивая точность $\Delta_N^* = 1/(N+1)$ нахождения точки x^* и наименьшую возможную длину интервала неопределенности

$$l_N^* = \frac{2}{N+1}. \quad (1.2)$$

Таким образом, оптимальный пассивный поиск состоит в выборе точек, равномерно расположенных на отрезке. При этом (1.2) дает оценку скорости сходимости пассивного поиска с ростом числа N точек, так как скорость сходимости любого метода прямого поиска можно характеризовать скоростью уменьшения интервала неопределенности с возрастанием N .

Рассуждения, приведенные выше, попутно обосновывают *процедуру исключения отрезка*, которую используют во всех методах прямого поиска точки минимума унимодальной функции одного переменного. Эта процедура состоит в следующем. Пусть на отрезке $[a, b]$ числовой прямой расположены две точки c и d , $a < c < d < b$, и известны (или вычислены) значения $f(c)$ и $f(d)$ унимодальной на $[a, b]$ функции $f(x)$. Если $f(c) < f(d)$ (рис. 1.3, а), то в силу унимодальности функции $f(x)$ имеем $x^* \in [a, d]$, а отрезок $[a, b]$ можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Наоборот, если $f(c) \geq f(d)$ (рис. 1.3, б), то $x^* \in [c, b]$, а отрезок $[a, c]$ далее можно не рассматривать.

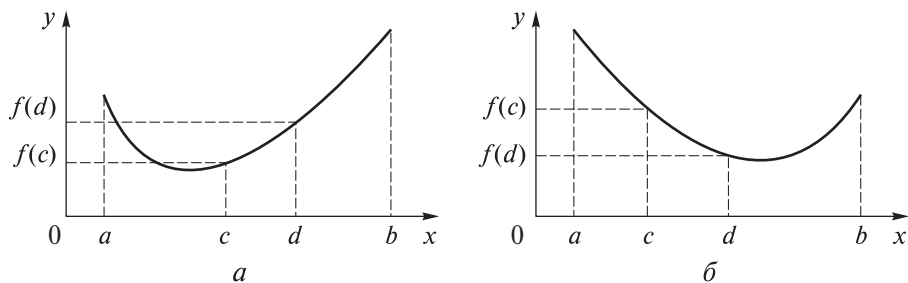


Рис. 1.3. Исключение отрезка

Таким образом, в результате применения процедуры исключения отрезка получаем новый отрезок, вложенный в рассматриваемый и заведомо содержащий точку x^* . В методах пассивного поиска применение этой процедуры позволяет оценить наибольшую возможную погрешность нахождения точки x^* .

Все рассмотренные далее методы последовательного поиска используют процедуру исключения отрезка для выбора нового отрезка на каждом очередном шаге такого поиска.

Методы последовательного поиска

Метод дихотомии. Рассмотрим *последовательный поиск* точки $x_* \in [0, 1]$, в которой унимодальная на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ достигает наименьшего значения $f_* = f(x_*)$. Метод прямого поиска, основанный на делении пополам отрезка, на котором находится точка x_* , называют *методом дихотомии*.

Пусть известно, что на k -м шаге последовательного поиска $x_* \in [a_k, b_k] \subset [0, 1]$ (на первом шаге при $k = 1$ имеем $a_1 = 0$ и $b_1 = 1$). На отрезке $[a_k, b_k]$ длиной l_k выберем две точки $x_{k1} = \frac{(a_k + b_k)}{2} - \delta$ и $x_{k2} = \frac{(a_k + b_k)}{2} + \delta$ (рис. 1.4), где $\delta > 0$ — некоторое достаточно малое число. Вычислим значения $f(x_{k1})$ и $f(x_{k2})$ функции $f(x)$ в этих точках и выполним *процедуру исключения отрезка*. В результате получим новый отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$. Если длина l_{k+1} нового отрезка больше заданной наибольшей допустимой длины ε_* *интервала неопределенности*, то алгоритм метода дихотомии переходит к $(k + 1)$ -му шагу, повторяя все описанные для k -го шага действия. Если же $l_{k+1} \leq \varepsilon_*$, то вычисления прекращают и полагают $x_* = \frac{(a_{k+1} + b_{k+1})}{2}$.

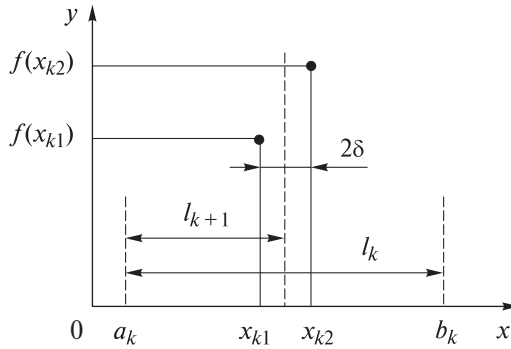


Рис. 1.4. Итерация метода дихотомии

Поскольку $l_{k+1} = l_k / 2 + \delta$, или $l_{k+1} - 2\delta = (l_k - 2\delta) / 2$, то $l_k - 2\delta = \frac{l_1 - 2\delta}{2^{k-1}}$.

Из этого равенства выводим следующую формулу длины l_k отрезка $[a_k, b_k]$, получаемого на k -м шаге метода дихотомии:

$$l_k = \frac{l_1 - 2\delta}{2^{k-1}} + 2\delta. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что $l_k \rightarrow 2\delta$ при $k \rightarrow \infty$, но при этом $l_k \rightarrow 2\delta$. Поэтому выполнение неравенства $l_{k+1} < \varepsilon_*$, означающее достижение заданной точности нахождения точки x_* , возможно лишь при условии выбора $2\delta < \varepsilon_*$. Кроме того, нужно учитывать неизбежную погрешность, возникающую при вычислении приближенных значений $\tilde{f}(x)$ функции $f(x)$. Это приводит к дополнительной погрешности Δ_* при нахождении точки x_* . Поэтому выбор значения δ ограничен и снизу, т. е. $\Delta_* < 2\delta < \varepsilon_*$. Если эти неравенства нару-

шаются, то знак разности $\tilde{f}(x_{k1}) - \tilde{f}(x_{k2})$ может не совпадать со знаком разности $f(x_{k1}) - f(x_{k2})$, что приводит к ошибочному выполнению процедуры исключения отрезка.

Итак, метод дихотомии — это последовательное построение на каждом k -м шаге поиска точек $x_{k1} = \frac{(a_k + b_k)}{2} - \delta$ и $x_{k2} = \frac{(a_k + b_k)}{2} + \delta$, симметричных

относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$ длины l_k . После выполнения k -го шага будет выделен отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ длины l_{k+1} и вычислено $N = 2k$ значений функции. Используя формулу (1.3) для длины отрезка (*интервала неопределенности*) и полагая $l_1 = 1$, получаем

$$l_N^d = l_{k+1} = \frac{1 - 2\delta}{2^{k+1}} + 2\delta = \frac{1 - 2\delta}{2^{N/2}} + 2\delta. \quad (1.4)$$

Сравнивая (1.4) с $l_N^* = \frac{2}{N+1}$, видим, что скорость сходимости метода дихотомии значительно выше скорости сходимости *оптимального пассивного поиска*.

Отметим, что после исключения отрезка на k -м шаге описанного алгоритма точки x_{k1} и x_{k2} принадлежат новому отрезку $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, причем одна из них является внутренней для этого отрезка. Но вычисленное в этой точке значение функции $f(x)$ в методе дихотомии не используют для исключения отрезка на следующем шаге, а проводят вычисления в двух новых точках. Существуют методы последовательного поиска, в которых на каждом k -м шаге начиная с $k = 2$ вычисляют лишь одно новое значение функции в точке, принадлежащей отрезку $[a_{k+1}, b_{k+1}]$. Это значение вместе с уже вычисленным на предыдущем шаге значением функции во внутренней точке отрезка $[a_k, b_k]$ используют при выполнении процедуры исключения отрезка на следующем шаге последовательного поиска.

Метод золотого сечения. Как известно, *золотым сечением отрезка* называют такое его деление на две неравные части, при котором отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей.

Рассмотрим k -й шаг последовательного поиска. Чтобы выполнить процедуру исключения отрезка на этом шаге, отрезок $[a_k, b_k]$ необходимо двумя внутренними точками x_{k1} и x_{k2} , $x_{k1} < x_{k2}$, разделить на три части. Эти точки выберем симметрично относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$ (рис. 1.5) и так, чтобы каждая из них выполняла золотое сечение отрезка $[a_k, b_k]$. В этом случае отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ внутри будет содержать одну из точек x_{k1} , x_{k2} (другая будет одним из концов отрезка), причем эта точка будет осуществлять золотое сечение отрезка $[a_{k+1}, b_{k+1}]$. Это вытекает из равенства длин отрезков $[a_k, x_{k1}]$ и $[x_{k2}, b_k]$. Таким образом, на $(k + 1)$ -м шаге в одной из то-

чек $x_{k+1,1}$, $x_{k+1,2}$ значение функции вычислять не нужно. При этом отношение l_k / l_{k+1} длин отрезков сохраняется от шага к шагу, т. е.

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \frac{l_{k+1}}{l_{k+2}} = \tau = \text{const.} \quad (1.5)$$

Число τ называют *отношением золотого сечения*. Последовательный поиск, в котором на k -м шаге каждая из симметрично выбранных на отрезке $[a_k, b_k]$ точек x_{k1} , x_{k2} осуществляет золотое сечение этого отрезка, называют *методом золотого сечения*. В этом методе каждое исключение отрезка уменьшает отрезок в τ раз.

Выясним, чему равно отношение золотого сечения. Поскольку точки x_{k1} и x_{k2} , $x_{k1} < x_{k2}$, выбраны симметрично относительно середины отрезка $[a_k, b_k]$, то

$$b_k - x_{k2} = x_{k1} - a_k = l_k - l_{k+1}.$$

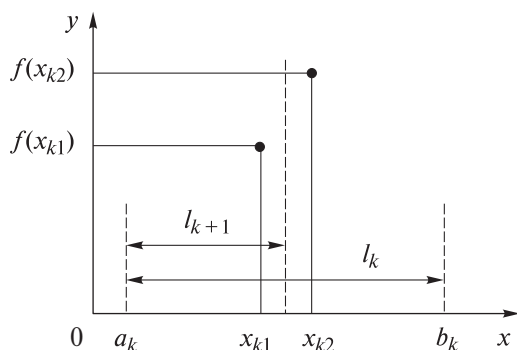


Рис. 1.5. Выбор точек в методе золотого сечения

Для определенности будем считать, что на k -м шаге выбран отрезок $[a_k, x_{k2}]$. Тогда на $(k + 1)$ -м шаге одной из точек деления (а именно, правой) будет точка x_{k1} . Значит, длина l_{k+2} отрезка, выбираемого на $(k + 1)$ -м шаге, совпадает с длиной отрезка $[a_k, x_{k1}]$ и верно равенство $l_{k+2} = l_k - l_{k+1}$. Подставляя найденное выражение для l_{k+2} в (1.5), получаем

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = \frac{l_{k+1}}{l_k - l_{k+1}}, \quad (1.6)$$

или

$$\tau = \frac{1}{(\tau - 1)}.$$

Преобразуя соотношение (1.6), приходим к квадратному уравнению

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0,$$

имеющему единственное положительное решение

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618034.$$

Предположим, что отрезком минимизации унимодальной функции $f(x)$ является $[0, 1]$, т. е. $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ и $l_1 = 1$.

На первом шаге последовательного поиска ($k = 1$) на отрезке $[0, 1]$ выбираем две точки

$$x_{11} = a_1 + (1 - 1/\tau)b_1 = 1 - 1/\tau,$$

и

$$x_{12} = a_1 + b_1 / \tau = 1 / \tau,$$

осуществляющие золотое сечение отрезка $[0, 1]$.

Вычисляем значения минимизируемой функции в этих точках и выполняем процедуру исключения отрезка.

Если $f(x_{11}) < f(x_{12})$, то выбираем отрезок $[a_k, x_{12}]$, т. е. полагаем $a_2 = a_1 = 0$, $b_2 = x_{12}$; в противном случае выбираем отрезок $[x_{11}, b_1]$, т. е. полагаем $a_2 = x_{11}$, $b_2 = 1$. Кроме того, в первом случае принимаем $\tilde{x}_2 = x_{11}$, а во втором случае — $\tilde{x}_2 = x_{12}$. Точка \tilde{x}_2 — одна из точек, осуществляющих золотое сечение отрезка $[a_2, b_2]$, меньшая в первом случае и большая во втором.

Если длина вновь полученного отрезка больше заданной допустимой длины ϵ_* интервала неопределенности, то следует перейти ко второму шагу алгоритма, на котором одна из точек x_{21} , x_{22} есть точка \tilde{x}_2 , а вторую можно найти, например, по формуле $a_2 + b_2 - \tilde{x}_2$. На втором шаге алгоритма вычисляем лишь одно значение функции в точке, симметричной \tilde{x}_2 относительно середины отрезка $[a_2, b_2]$.

Если же длина l_2 отрезка $[a_2, b_2]$, полученного после первого шага алгоритма, оказалась меньше ϵ_* , то поиск прекращают и полагают $x_* \approx (a_k + b_k) / 2$.

Пусть на k -м шаге, $k \geq 2$, последовательного поиска по методу золотого сечения выбраны отрезок $[a_k, b_k]$ и в нем точка \tilde{x}_k , осуществляющая золотое сечение этого отрезка. Значение $f(\tilde{x}_k)$ функции в этой точке уже вычислено на предыдущем шаге. Находим вторую точку \hat{x}_k золотого сечения по формуле

$$\hat{x}_k = a_k + b_k - \tilde{x}_k$$

и вычисляем в ней значение функции. Если $\hat{x}_k < \tilde{x}_k$, то $x_{k1} = \hat{x}_k$ и $x_{k2} = \tilde{x}_k$, иначе $x_{k1} = \tilde{x}_k$, и $x_{k2} = \hat{x}_k$. Пусть для определенности $\hat{x}_k < \tilde{x}_k$ (см. рис. 1.5) и $x_{k1} = \hat{x}_k$, $x_{k2} = \tilde{x}_k$. Если $f(x_{k1}) < f(x_{k2})$, то выбираем отрезок $[a_k, x_{k2}]$, т. е.

полагаем $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = x_{k2}$, $\tilde{x}_{k+1} = x_{k1}$, иначе выбираем отрезок $[x_{k1}, b_k]$, т. е. полагаем $a_{k+1} = x_{k1}$, $b_{k+1} = b_k$, $\tilde{x}_{k+1} = x_{k2}$. Длину l_{k+1} нового отрезка $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ сравниваем с ε_* и принимаем решение, продолжать поиск (при $l_{k+1} \geq \varepsilon_*$) или нет (при $l_{k+1} < \varepsilon_*$). В случае прекращения поиска полагаем $x_* \approx (a_k + b_k) / 2$.

Согласно описанию алгоритма, на первом шаге значение функции вычисляют в двух точках, а на каждом из последующих шагов вычисляют лишь одно значение функции. Поэтому после k шагов алгоритма значение функции будет вычислено в $N = k + 1$ точках. Поскольку после каждого шага интервал неопределенности уменьшается в τ раз, то для длины l_{k+1} отрезка $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ получаем $l_{k+1} = l_1 / \tau_k = 1 / \tau_k$, а зависимость l_N^z длины интервала неопределенности от количества N вычисленных значений функции $f(x)$ выражается формулой

$$l_N^z = l_{k+1} = \frac{1}{\tau^k} = \frac{1}{\tau^{N-1}}. \quad (1.7)$$

Алгоритмы методов золотого сечения и дихотомии аналогичны. Различие состоит лишь в том, что в методе дихотомии расстояние 2δ между точками x_{k1} , x_{k2} отрезка $[a_k, b_k]$ на каждом k -м шаге остается неизменным, а в методе золотого сечения оно зависит от номера шага поиска и уменьшается с уменьшением длины l_k отрезка по мере возрастания номера шага. Действительно, в методе золотого сечения на k -м шаге поиска внутренними точками отрезка $[a_k, b_k]$ будут $x_{k1} = a_k + (1 - 1/\tau)l_k$ и $x_{k2} = a_k + l_k / \tau$, а расстояние между ними составит $x_{k2} - x_{k1} = (2/\tau - 1)l_k = (\sqrt{5} - 2)l_k \approx 0,236068l_k$.

Метод Фибоначчи. Пусть при поиске точки $x_* \in [0, 1]$, в которой унимодальная на отрезке $[0, 1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее на этом отрезке значение, можно вычислить ее значения только в двух точках. Тогда предпочтение следует отдать методу дихотомии при $\delta \ll 1$, так как он позволит уменьшить интервал неопределенности почти вдвое, а метод золотого сечения — лишь в $\tau \approx 1,618$ раз. Сравнение (1.7) и (1.4) показывает, что при количестве вычисляемых значений $N \geq 4$ функции $f(x)$ эффективность метода золотого сечения становится выше, чем метода дихотомии.

Однако при любом заданном общем числе $N > 2$ вычисляемых значений функции можно построить еще более эффективный метод, состоящий из $(N - 1)$ -шагов. Он сочетает преимущество симметричного расположения внутренних точек x_{k1} , x_{k2} на отрезке $[a_k, b_k]$ относительно его середины, реализованное в методах дихотомии и золотого сечения, с возможностью на каждом шаге изменять отношение l_k / l_{k+1} длин сокращаемого и нового отрезков. Как показано при обсуждении метода золотого сечения, в случае выбора симметричного расположения внутренних точек относительно середины отрезка для трех последовательных шагов этого метода выполняется соотношение

$$l_{k-i} = l_k + l_{k+i}, \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

Построение алгоритма такого метода удобнее начать с последнего шага, но предварительно уточним задачу. Располагая возможностью вычислить в N точках $x_k \in [0, 1]$, $k = \overline{1, N}$, значения унимодальной на отрезке функции $f(x)$, необходимо как можно точнее, т. е. с наименее возможной длиной интервала неопределенности, отыскать точку x^* наименьшего значения этой функции на отрезке $[0, 1]$.

При выполнении процедуры исключения отрезка на последнем, $N - 1$ -м, шаге имеем отрезок $[a_{N-1}, b_{N-1}]$ длины l_{N-1} с двумя внутренними точками x_{N-1} и x_N , симметрично расположенными относительно середины отрезка на достаточно малом расстоянии 2δ друг от друга (рис. 1.6). В этих точках вычислены значения $f(x_{N-1})$ и $f(x_N)$ функции $f(x)$. Пусть для определенности $f(x_N) < f(x_{N-1})$, тогда для нового отрезка $[a_N, b_N]$ длины $l_N = l_{N-1} / 2 + \delta$ внутренней будет точка x_N , а точка x_{N-1} совпадет с одним из его концов.

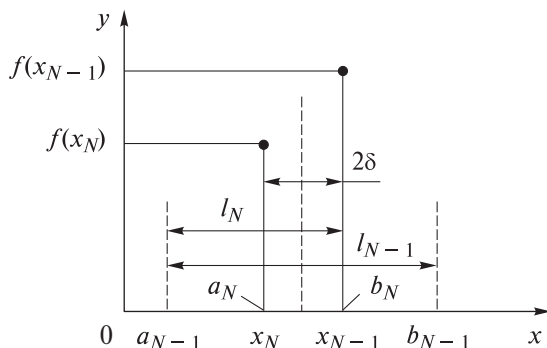


Рис. 1.6. Последний шаг метода Фибоначчи

В такой ситуации при выборе $x^* = x_N$ длина интервала неопределенности равна пока не известной длине l_N отрезка $[a_N, b_N]$. Через l_N можно выразить длину $l_{N-1} = 2l_N - 2\delta$ отрезка $[a_{N-1}, b_{N-1}]$. Далее в соответствии с (1.8) получаем

$$\begin{aligned} l_{N-2} &= l_{N-1} + l_N = 3l_N - 2\delta; & l_{N-3} &= l_{N-2} + l_{N-1} = 5l_N - 4\delta; \\ l_{N-4} &= l_{N-3} + l_{N-2} = 8l_N - 6\delta; & l_{N-5} &= l_{N-4} + l_{N-3} = 13l_N - 10\delta \end{aligned}$$

и в общем виде имеем

$$l_{N-K} = F_{K+2}l_N - 2F_K\delta, \quad K = \overline{0, N-1}. \quad (1.9)$$

Коэффициенты F_m определены рекуррентным соотношением

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}, \quad m = \overline{3, N-1}, \quad F_1 = F_2 = 1. \quad (1.10)$$

Так как при $K=N-1$ длина $l_{N-K}=l_1=1$ отрезка $[0, 1]$ известна, то из (1.9) можно найти длину интервала неопределенности:

$$l_N^f = \frac{l_1}{F_{N+1}} + 2\delta \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}}. \quad (1.11)$$

Существует алгоритм метода прямого поиска, удовлетворяющий соотношению (1.11).

Все коэффициенты F_m принадлежат множеству N натуральных чисел, их называют *числами Фибоначчи* (табл. 1.2). Метод, использующий числа Фибоначчи для выбора длин отрезков l_k , а значит, и точек $x_k \in [0, 1]$, $k = \overline{1, N}$, в которых вычисляют значения минимизируемой функции, называют *методом Фибоначчи* (иногда — оптимальным последовательным поиском). Если на первом шаге поиска ($k=1$, $K=N-1$) интервал неопределенности имеет длину l_1 , то в соответствии с (1.9) и (1.11) длина l_2 нового отрезка $[a_2, b_2]$ составляет

$$l_2 = F_N l_1 - 2\delta F_{N-2} = \frac{F_N}{F_{N+1}} l_1 + 2\delta \frac{F_N F_{N-1} - F_N F_{N-2}}{F_{N+1}} = \frac{F_N}{F_{N+1}} l_1 + (-1)^{N+1} \frac{2\delta}{F_{N+1}}.$$

Таблица 1.2

Первые 25 чисел Фибоначчи

m	F_m	m	F_m	m	F_m	m	F_m	m	F_m
1	1	6	8	11	89	16	987	21	10 946
2	1	7	13	12	144	17	1597	22	17 711
3	2	8	21	13	233	18	2584	23	28 657
4	3	9	34	14	377	19	4181	24	46 368
5	5	10	55	15	610	20	6765	25	75 025

Опишем алгоритм метода, пренебрегая малой величиной δ , т. е. принимая $\frac{l_1}{l_2} = \frac{F_{N+1}}{F_N}$. Несложно проверить, что в этом случае выполнение процедуры исключения отрезка на последнем, $(N-1)$ -м, шаге поиска приводит к совпадению внутренних точек x_{N-1} и x_N (см. рис. 1.6).

Отметим, что уже при $N=11$ имеем $F_{12}/F_{11} = 144/89 \approx 1,617978$, а при $N=21$ получаем $F_{22}/F_{21} = 17711/10946 \approx 1,618034$, что совпадает с отношением τ золотого сечения с точностью, 10^{-6} . Таким образом, на первом шаге длина исходного отрезка уменьшается практически так же, как и в методе золотого сечения.

При $l_1=1$ находим $l_2 = F_N / F_{N+1}$. Таким образом, учитывая (1.10), заключаем, что на первом шаге выбора точки, симметричные относительно середины отрезка $[0, 1]$, можно определить по формулам

$$x_1 = l_2 = \frac{F_N}{F_{N+1}}, \quad x_2 = 1 - l_2 = 1 - \frac{F_N}{F_{N+1}} = \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}}, \quad x_2 < x_1,$$

причем расстояние между ними будет

$$d_1 = x_1 - x_2 = \frac{F_N}{F_{N+1}} - \frac{F_{N-1}}{F_{N+1}} = \frac{F_{N-2}}{F_{N+1}}.$$

После выполнения на этом шаге процедуры исключения отрезка одна из точек x_1, x_2 будет граничной точкой нового отрезка $[a_2, a_1]$, а другая — его внутренней точкой, которую обозначим x'_2 . Вторая внутренняя точка на этом отрезке должна быть выбрана симметрично точке x'_2 относительно его середины. Аналогично происходит выбор второй внутренней точки нового отрезка на всех последующих шагах поиска.

На k -м шаге в соответствии с равенством (1.9), в котором следует положить $K = N - k$, и равенством (1.11) длина отрезка $[a_k, b_k]$ составляет $l_k = F_{N+2-k} / F_{N+1}$ и происходит ее уменьшение в $l_k / l_{k+1} = F_{N+2-k} / F_{N+1-k}$ раз. Если внутренние точки на этом отрезке обозначить α_k и β_k , то получим

$$\alpha_k = \alpha_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N+1}}; \quad \beta_k = \alpha_k + \frac{F_{N+1-k}}{F_{N+1}}; \quad \alpha_k < \beta_k; \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Подчеркнем, что реализация метода Фибоначчи предполагает априорное задание требуемого количества N вычисляемых значений функции $f(x)$ (или количества шагов поиска). Этот параметр необходим для реализации первого шага алгоритма при выборе точек x_{11} и x_{12} деления отрезка $[a_1, b_1]$. Общий алгоритм определения количества итераций: зная допустимую длину конечного интервала неопределенности $l = \varepsilon$, а также начальный отрезок $l_0 = [a_0, b_0]$, находим N как наименьшее целое число, для которого будет выполняться условие

$$F_N \geq \frac{|l_0|}{l}.$$

Если параметр N по каким-либо причинам не может быть задан заранее, следует использовать другие методы, например, дихотомии или золотого сечения.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Рассчитайте стартовое значение интервала неопределенности для вашего варианта.

2. Исходя из заданного значения конечного интервала неопределенности и рассчитанного стартового значения, определите количество точек, необходимое по методу пассивного поиска для достижения заданной точности.

3. Создайте равномерную сетку на отрезке поиска, учитывая количество точек.
4. Рассчитайте значение функции в этих точках, найдите оптимум.
5. Выведите на экран сетку точек со значениями функции в них и найденный оптимум.
6. Создайте итерационный цикл по алгоритму последовательного поиска из вашего варианта, на каждой итерации рассчитайте необходимые по алгоритму точки, значения функции в них, текущее значение интервала неопределенности, выведите эту информацию на экран, выполните процедуру исключения (усечения) отрезка, повторяйте до достижения заданной точности.
7. Исходя из рассчитанных точек и значений функции в них для последней итерации рассчитайте оптимум, выведите его на экран.

Пример выполнения лабораторной работы

На интервале $[1, 4]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x) = -\sqrt{x} \sin x + 2$ (рис. 1.7). Найдем минимум $f(x)$ на заданном интервале и при заданной наибольшей допустимой длине интервала неопределенности $\varepsilon = 0,1$. Сравним полученные с помощью различных методов результаты.

Рассмотрим оптимальный пассивный поиск. Здесь заданный отрезок поиска делится на $N + 1$ частей точками с координатами $x_k = \frac{b-a}{N+1}k + a$, $k = 1, \dots, N$ и вычисляется значение функции в каждой из этих точек, среди которых ищется экстремум. Точность поиска составляет $\Delta_N^* = \frac{b-a}{N+1}$, наименьшая длина неопределенности $l_N^* = \frac{2(b-a)}{N-1}$. Следовательно, нужное для достижения поставленной длины неопределенности интервала количество точек $N = \frac{2(b-a)}{\varepsilon} - 1$, где ε — длина интервала неопределенности. Для интервала неопределенности 0,1 (погрешность равна 0,05) и заданной функции количество точек равно 59.

Распечатка результатов поиска представлена в табл. 1.3 таким образом, что минимум функции находится в точке $1,85 \pm 0,05$, значение функции в этой точке составляет 0,6925.

Рассмотрим последовательный поиск методом дихотомии. Здесь на отрезке $[a_k, b_k]$ длиной l_k выбираем две точки: $x_{k1} = \frac{b_k + a_k}{2} - \delta$ и $x_{k2} = \frac{b_k + a_k}{2} + \delta$, где $\delta > 0$ — некоторое достаточно малое число, причем $2\delta < \varepsilon$.

Вычисляем значения функции $f(x_{k1})$ и $f(x_{k2})$ в этих точках и выполняем процедуру исключения отрезка. В результате получаем новый отрезок $[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k]$. Если длина нового отрезка $l_{k+1} > \varepsilon$, то алгоритм метода

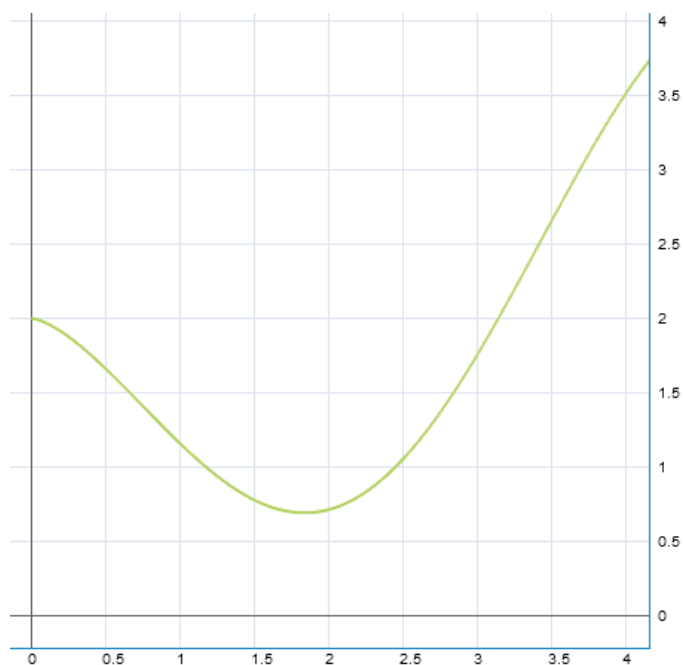
Рис. 1.7. График функции $f(x)$ (скриншот)

Таблица 1.3

Оптимальный пассивный поиск

N	x	$f(x)$
1	+1.0500	+1.1112
2	+1.1000	+1.0653
3	+1.1500	+1.0212
4	+1.2000	+0.9790
5	+1.2500	+0.9390
6	+1.3000	+0.9014
7	+1.3500	+0.8663
8	+1.4000	+0.8340
9	+1.4500	+0.8046
10	+1.5000	+0.7783
11	+1.5500	+0.7553
12	+1.6000	+0.7356
13	+1.6500	+0.7195
14	+1.7000	+0.7070
15	+1.7500	+0.6983
16	+1.8000	+0.6934
17	+1.8500	+0.6925
18	+1.9000	+0.6956

Окончание табл. 1.3

19	+1.9500	+0.7028	
20	+2.0000	+0.7141	
21	+2.0500	+0.7295	
22	+2.1000	+0.7491	
23	+2.1500	+0.7729	
24	+2.2000	+0.8008	
25	+2.2500	+0.8329	
26	+2.3000	+0.8691	
27	+2.3500	+0.9093	
28	+2.4000	+0.9536	
29	+2.4500	+1.0017	
30	+2.5000	+1.0537	
31	+2.5500	+1.1095	
32	+2.6000	+1.1688	
33	+2.6500	+1.2316	
34	+2.7000	+1.2977	
35	+2.7500	+1.3671	
36	+2.8000	+1.4395	
37	+2.8500	+1.5147	
38	+2.9000	+1.5926	
39	+2.9500	+1.6729	
40	+3.0000	+1.7556	
41	+3.0500	+1.8403	
42	+3.1000	+1.9268	
43	+3.1500	+2.0149	
44	+3.2000	+2.1044	
45	+3.2500	+2.1951	
46	+3.3000	+2.2866	
47	+3.3500	+2.3787	
48	+3.4000	+2.4712	
49	+3.4500	+2.5638	
50	+3.5000	+2.6563	
51	+3.5500	+2.7483	
52	+3.6000	+2.8396	
53	+3.6500	+2.9300	
54	+3.7000	+3.0192	
55	+3.7500	+3.1068	
56	+3.8000	+3.1927	
57	+3.8500	+3.2766	
58	+3.9000	+3.3582	
59	+3.9500	+3.4373	

дихотомии переходит к следующему шагу. Если $l_{k+1} < \epsilon$, то вычисления прекращаются и полагают $x^* = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$. Для заданной функции распечатка полученного результата представлена в табл. 1.4 (δ взята равной 0,01).

Таблица 1.4

Последовательный поиск (дихотомия)

N	Search part			Generated part			
	start	end	length	left	right	f(left)	f(right)
1	+1.0000	+4.0000	+3.0000	+2.4900	+2.5100	+1.0430	+1.0646
2	+1.0000	+2.5000	+1.5000	+1.7400	+1.7600	+0.6997	+0.6970
3	+1.7500	+2.5000	+0.7500	+2.1150	+2.1350	+0.7558	+0.7653
4	+1.7500	+2.1250	+0.3750	+1.9275	+1.9475	+0.6990	+0.7023
5	+1.7500	+1.9375	+0.1875	+1.8337	+1.8538	+0.6924	+0.6926
6	+1.7500	+1.8438	+0.0938	----	----	----	----

Из таблицы видно, что уже после 5-го шага алгоритма достигается значение допустимого интервала неопределенности $\epsilon < 0,1$. Минимум функции находится в точке $\frac{1,7500 + 1,8438}{2} \pm \frac{0,0938}{2} = 1,7969 \pm 0,0469$, а значение функции в этой точке составляет 0,6936.

Рассмотрим последовательный поиск методом Фибоначчи. Возможно также автоматически определить параметр N . На первой итерации необходимо определить положение левой и правой точки:

$$x_1 = a + \frac{F(N-2)}{F(N)}(b-a); \quad x_2 = a + \frac{F(N-1)}{F(N)}(b-a).$$

На следующих итерациях происходит исключение отрезка. Оставшаяся точка внутри нового отрезка поиска уже будет расположена в правильном отношении. Следовательно, необходимо найти только одну координату для новой точки.

После выполнения итераций (т. е. когда все точки будут расставлены) происходит вычисление интервала неопределенности. Если длина интервала неопределенности удовлетворяет заданному условию, то вычисления прекращаются. Иначе осуществляется переход к первой итерации с параметром N , большим, чем предыдущий, на единицу.

В табл. 1.5 представлена распечатка полученного результата (минимум в точке $x \pm \text{precision}$, а значение функции равно $f(x)$) и итоговый отрезок неопределенности. Итерирование заканчивается, когда $\text{precision} \leq 0,05$ (т. е. отрезок неопределенности не больше 0,1). Минимум функции находится в точке $1,8427 \pm 0,0337$, значение функции в этой точке составляет 0,6924.

Таблица 1.5

Последовательный поиск (Фибоначчи)

ITERS		Result			Partition				
		x	f(x)	precision		left	right	f(left)	f(right)
	----	-----	-----	-----		-----	-----	-----	-----
	1	+2.0000	+0.7141	1.0000		+1.0000	+3.0000	+1.1585	+1.7556
	2	+1.6000	+0.7356	0.6000		+1.0000	+2.2000	+1.1585	+0.8008
	3	+1.7500	+0.6983	0.3750		+1.3750	+2.1250	+0.8498	+0.7605
	4	+1.9231	+0.6984	0.2308		+1.6923	+2.1538	+0.7087	+0.7749
	5	+1.8571	+0.6927	0.1429		+1.7143	+2.0000	+0.7041	+0.7141
	6	+1.7941	+0.6938	0.0882		+1.7059	+1.8824	+0.7058	+0.6941
	7	+1.8182	+0.6927	0.0545		+1.7636	+1.8727	+0.6966	+0.6934
	8	+1.8427	+0.6924	0.0337		+1.8090	+1.8764	+0.6930	+0.6937

Распечатка результата выполнения метода Фибоначчи для фиксированного количества итераций приведена в табл. 1.6. Search part — отрезок поиска на начало итерации, Generated part — точки, установленные на отрезок поиска (и значения функции в них).

Таблица 1.6

Последовательный поиск (Фибоначчи, значение N фиксировано)

N	Search part			Generated part			
	start	end	length	left	right	f(left)	f(right)
1	+1.0000	+4.0000	+3.0000	+2.1461	+2.8539	+0.7708	+1.5207
2	+1.0000	+2.8539	+1.8539	+1.7079	+2.1461	+0.7054	+0.7708
3	+1.0000	+2.1461	+1.1461	+1.4382	+1.7079	+0.8113	+0.7054
4	+1.4382	+2.1461	+0.7079	+1.7079	+1.8764	+0.7054	+0.6937
5	+1.7079	+2.1461	+0.4382	+1.8764	+1.9775	+0.6937	+0.7085
6	+1.7079	+1.9775	+0.2697	+1.8090	+1.8764	+0.6930	+0.6937
7	+1.7079	+1.8764	+0.1685	+1.7753	+1.8090	+0.6954	+0.6930
8	+1.7753	+1.8764	+0.1011	+1.8090	+1.8427	+0.6930	+0.6924
9	+1.8090	+1.8764	+0.0674	----	----	----	----

На рис. 1.8 приведен график зависимостей погрешности от количества итераций.

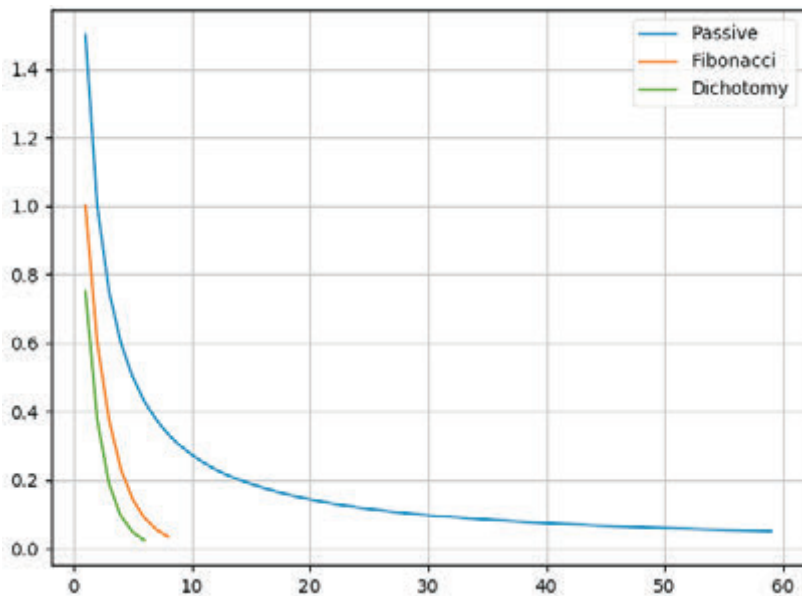


Рис. 1.8. График зависимости погрешности от количества итераций (скриншот)

Как следует из рис. 1.8 и приведенных расчетов, методы последовательного поиска обладают различной скоростью сходимости.

Содержание отчета о лабораторной работе

Отчет должен включать в себя:

- 1) титульный лист;
- 2) цель работы;
- 3) постановку задачи по варианту;
- 4) график заданной функции;
- 5) таблицы с результатами работы пассивного и последовательного алгоритмов;
- 6) график зависимостей погрешности от числа точек N ;
- 7) выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит сущность метода оптимального пассивного поиска?
2. Поясните принцип разбиения интервала при последовательном поиске методами дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи.

3. Что такое интервал неопределенности? Приведите выражения для оценки интервала неопределенности для методов оптимального пассивного и последовательного поиска.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

- 1) программную реализацию алгоритмов поиска по своему варианту;
- 2) результаты работы алгоритмов для заданной в варианте функции;
- 3) отчет о лабораторной работе;
- 4) ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной в лабораторной работе задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа № 2

Исследование метода случайного поиска экстремума функции одного переменного

Цель работы — изучить метод случайного поиска экстремума на примере унимодальной и мультимодальной функций одного переменного.

Постановка задачи

На интервале $[a, b]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x)$. Используя метод случайного поиска, осуществить поиск минимума $f(x)$ с заданной вероятностью попадания в окрестность экстремума P при допустимой длине интервала неопределенности ε . Определить необходимое число испытаний N . Численный эксперимент выполнить для значений $P = 0,90, 0,91, \dots, 0,99$ и значений $\varepsilon = (b - a)q$, где $q = 0,005, 0,010, \dots, 0,100$. При аналогичных исходных условиях осуществить поиск минимума $f(x)$, модулированной сигналом $\sin 5x$, т. е. *мультимодальной* функции $f(x)\sin 5x$.

Варианты заданий приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Варианты заданий

Номер варианта	Функция $f(x)$	a	b
1	$-0,5 \cos 0,5x - 0,5$	-5	2
2	$(1 - x)^2 + \exp(x)$	-4	3
3	$-\sqrt{x} \cdot \sin x$	0	3
4	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	-2	0
5	$-\cos 0,5x - 1$	-2	4
6	$(1 - x)^2 + \exp(x)$	$-3,5$	$3,5$
7	$-\sqrt{x} \cdot \sin x + 2$	1	4
8	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	$1,5$	4
9	$-0,5 \cos 0,5x + 1$	$-2,5$	$1,5$

Номер варианта	Функция $f(x)$	a	b
10	$(1-x)^2 + \exp(x)$	-2	4
11	$-2\sqrt{x} \cdot \sin 0,5x$	2	6
12	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	7	11
13	$2 \cos(x) + \lg(x)$	1,5	5
14	$\exp(-0,2x) \sin(x)$	2	6
15	$x^2 \sin(x)$	9	12
16	$x^2 \exp[\sin(x)]$	9	14
17	$\cos(x) + \lg(x)$	7	10
18	$\exp(-0,2x) \sin(x) + 1$	9	12
19	$x^2 \sin(x) - 2$	4	7
20	$x^2 \exp[\sin(x)]$	16	20
21	$5 \cos(x) + x + \sqrt{x}$	2	6
22	$\exp(-0,1x) \sin(x) - 2$	-3	0
23	$x^2 \sin(x)$	15	18
24	$x \exp[\cos(x)] - x$	8	12

Основные теоретические сведения

Пусть необходимо решить задачу минимизации функции $f(x)$ при условии, что $\bar{x} \in [\bar{A}, \bar{B}]$. В данной области по равномерному закону выберем случайную точку \bar{x}_1 и вычислим в ней значение функции $y_1 = f(\bar{x}_1)$. Затем выберем таким же образом случайную точку \bar{x}_2 и вычислим $y_2 = f(\bar{x}_2)$ (рис. 2.1). Запомним минимальное из этих значений и точку, в которой значение функции минимально. Далее генерируем новую точку.

Выполним N экспериментов, после чего лучшую точку возьмем в качестве решения задачи (точку, в которой функция имеет минимальное значение среди всех «случайно» сгенерированных).

Оценим число экспериментов, необходимое для определения решения (точки минимума) с заданной точностью. Пусть n — размерность вектора переменных. Объем n -мерного прямоугольника, в котором ведется поиск минимума,

$$v = \prod_{i=1}^n (B_i - A_i).$$

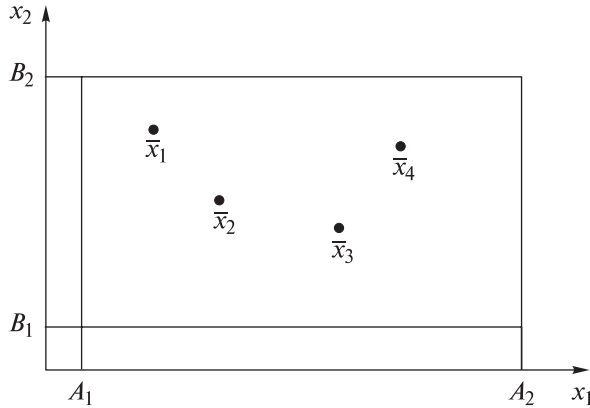


Рис. 2.1. Простой случайный поиск

Если требуется найти решение с точностью ε_i , $i = \overline{1, n}$, по каждой из переменных, то необходимо попасть в окрестность оптимальной точки с объемом

$$v_\varepsilon = \prod_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

Вероятность попадания в эту окрестность при одном испытании составляет

$$P_\varepsilon = \frac{v_\varepsilon}{v}.$$

Вероятность непадания равна $1 - P_\varepsilon$. Испытания независимы, поэтому вероятность непадания за N экспериментов равна $(1 - P_\varepsilon)^N$.

Вероятность того, что найдем решение за N испытаний,

$$P_N = 1 - (1 - P_\varepsilon)^N. \quad (2.1)$$

Отсюда нетрудно получить оценку необходимого числа испытаний N для определения минимума с требуемой точностью:

$$N \geq \frac{\ln(1 - P)}{\ln(1 - P_\varepsilon)}.$$

Опираясь на заданную точность ε_i , $i = \overline{1, n}$, и величину v , можно определить P_ε и, задаваясь вероятностью P , рассчитать требуемое число экспериментов N в зависимости от P_ε и P .

При решении экстремальных задач на областях со сложной геометрией обычно вписывают эту область в n -мерный параллелепипед. Далее генерируют в этом n -мерном параллелепипеде случайные точки по равномерному закону, оставляя только те, которые попадают в допустимую область.

Различают направленный и ненаправленный случайные поиски.

При *ненаправленном случайном поиске* все последующие испытания проводятся совершенно независимо от результатов предыдущих. Сходимость такого поиска очень мала, но имеется важное преимущество, связанное с возможностью решения многоэкстремальных задач (искать глобальный экстремум). Примером ненаправленного поиска является рассмотренный выше простой случайный поиск.

При *направленном случайном поиске* отдельные испытания связаны между собой. Результаты проведенных испытаний используются для формирования последующих. Как правило, случайность используется при формировании направления спуска. Сходимость таких методов, как правило, выше, но сами методы обычно приводят только к локальным экстремумам.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Постройте графики функций $f(x)$ и $f(x)\sin 5x$.
2. Определите вероятность P_1 непопадания в ε -окрестность экстремума за одно испытание.
3. Запишите выражение для вероятности P_N непопадания в ε -окрестность экстремума за N испытаний.
4. Из выражения (2.1) для P_N определите необходимое число испытаний N в зависимости от заданных $P_N = P$ и ε .
5. Используя метод *случайного поиска*, осуществите поиск минимума $f(x)$ с заданной вероятностью попадания в окрестность экстремума P при допустимой длине интервала неопределенности ε .
6. Повторите численный эксперимент для остальных значений $P = 0,90, 0,91, \dots, 0,99$ и значений $\varepsilon = (b-a)q$, где $q = 0,005, 0,010, \dots, 0,100$.
7. Используя метод *случайного поиска*, осуществите поиск минимума $f(x)\sin 5x$ с заданной вероятностью попадания в окрестность экстремума P при допустимой длине интервала неопределенности ε .
8. Повторите численный эксперимент для остальных значений $P = 0,90, 0,91, \dots, 0,99$ и значений $\varepsilon = (b-a)q$, где $q = 0,005, 0,010, \dots, 0,100$.

Пример выполнения лабораторной работы

Задана функция $f(x) = (1-x)^2 + \exp(x)$ на интервале $[-4, 3]$ (рис. 2.2).

В методе случайного поиска P — это вероятность того, что найденная точка минимума находится в интервале неопределенности, а q — это вероятность попадания в интервал неопределенности для отдельно взятой точки. Тогда вероятность непопадания в интервал неопределенности за одно испытание будет равна $1 - q$. Вероятность непопадания в интервал неопределен-

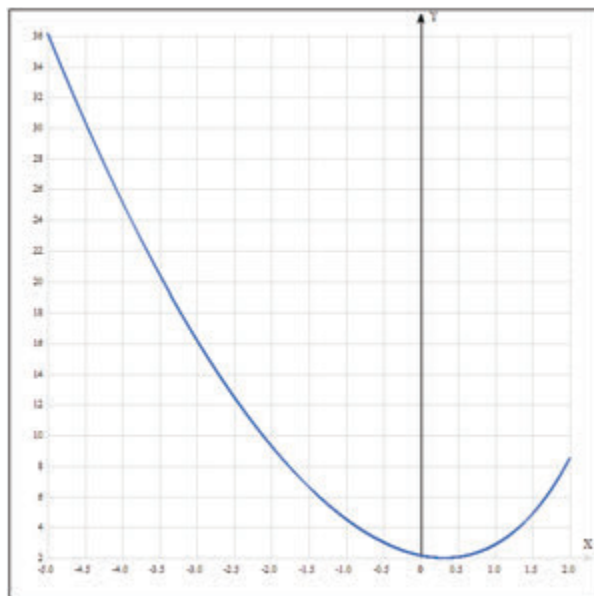


Рис. 2.2. График функции $f(x)$ (скриншот)

ности за N испытаний будет равна $(1-q)^N$. Тогда вероятность $P = 1 - (1-q)^N$.

Отсюда можем найти $N = \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-q)}$.

Представим данные о зависимости N от P и q (табл. 2.2). В верхней строке таблицы, являющейся результатом работы программы, записаны P , а в первом столбце — q , на пересечении — соответствующее значение N .

Случайно выберем N точек в заданном отрезке $[a, b]$, определим значение унимодальной функции в этих точках и среди них найдем наименьшее значение. Распечатка результатов численного эксперимента для $f(x)$ представлена в табл. 2.3 в зависимости от P и q .

Аналогичные вычисления требуется проделать для мультимодальной функции, график которой приведен на рис. 2.3. Распечатка результатов поиска представлена в табл. 2.4.

Из полученных результатов следует, что применимость метода случайного поиска не зависит от того, является ли функция унимодальной или мультимодальной. Для увеличения вероятности попадания в заданный интервал или уменьшения интервала неопределенности необходимо увеличивать число случайных точек.

Таблица 2.2

Зависимость N от P и q

$q \backslash P$	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.005	460	481	504	531	562	598	643	700	781	919
0.01	230	240	252	265	280	299	321	349	390	459
0.015	153	160	168	176	187	199	213	233	259	305
0.02	114	120	126	132	140	149	160	174	194	228
0.025	91	96	100	106	112	119	128	139	155	182
0.03	76	80	83	88	93	99	106	116	129	152
0.035	65	68	71	75	79	85	91	99	110	130
0.04	57	59	62	66	69	74	79	86	96	113
0.045	51	53	55	58	62	66	70	77	85	101
0.05	45	47	50	52	55	59	63	69	77	90
0.055	41	43	45	48	50	53	57	62	70	82
0.06	38	39	41	43	46	49	53	57	64	75
0.065	35	36	38	40	42	45	48	53	59	69
0.07	32	34	35	37	39	42	45	49	54	64
0.075	30	31	33	35	37	39	42	45	51	60
0.08	28	29	31	32	34	36	39	43	47	56
0.085	26	28	29	30	32	34	37	40	45	52
0.09	25	26	27	29	30	32	35	38	42	49
0.095	24	25	26	27	29	31	33	36	40	47
0.1	22	23	24	26	27	29	31	34	38	44

Таблица 2.3

Результаты поиска экстремума $f(x)$ в зависимости от P и q

$q \backslash P$	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.005	1.8395	1.8397	1.8406	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395	1.8395
0.01	1.8397	1.8395	1.8405	1.8395	1.8395	1.8395	1.8397	1.8397	1.8402	1.8395
0.015	1.8396	1.8396	1.8398	1.8395	1.8396	1.8395	1.8396	1.8395	1.8398	1.8395
0.02	1.8398	1.8395	1.8395	1.8417	1.8395	1.8398	1.8395	1.845	1.8396	1.8401
0.025	1.841	1.8395	1.8403	1.8398	1.8411	1.8395	1.8395	1.8415	1.8395	1.8395
0.03	1.8395	1.8395	1.8513	1.8425	1.8404	1.8408	1.8399	1.8409	1.8396	1.8415
0.035	1.8395	1.8419	1.8395	1.8408	1.8401	1.8477	1.8409	1.8568	1.8396	1.8396
0.04	1.84	1.8395	1.8395	1.8416	1.8437	1.8413	1.8499	1.8434	1.8401	1.8397
0.045	1.8747	1.8479	1.8395	1.8397	1.8475	1.8399	1.8395	1.84	1.8395	1.8605
0.05	1.8492	1.8714	1.841	1.8542	1.8395	1.8443	1.8396	1.8395	1.8395	1.8395
0.055	1.8399	1.8405	1.8422	1.847	1.8506	1.8405	1.8396	1.8417	1.8514	1.842
0.06	1.884	1.8401	1.916	1.8424	1.8803	1.8434	1.8994	1.8911	1.8406	1.8493
0.065	1.8396	1.8412	1.8404	1.8983	1.8562	2.0562	1.8424	1.8424	1.8435	1.8398
0.07	1.8512	1.9151	1.9281	1.8644	1.8398	1.8427	1.8429	1.8396	1.8396	1.8643
0.075	1.8539	1.9089	1.8605	1.8486	1.8562	1.8396	2.1243	1.8397	1.9459	1.8606
0.08	1.8402	1.8458	1.8455	1.8398	1.8405	1.8399	1.8395	1.8481	1.8397	1.8463
0.085	1.8432	1.8785	1.841	1.8441	1.8405	1.8437	1.8409	1.842	1.8773	1.8458
0.09	1.8396	1.8518	1.8396	1.847	1.8442	1.8467	1.8401	1.8922	1.8781	1.8549
0.095	1.8831	1.854	1.8771	1.8395	1.84	1.8414	1.8998	1.8399	1.9239	1.8466
0.1	1.8879	1.8403	1.8674	1.8404	1.8445	1.9425	1.8992	2.1525	1.8997	1.8399

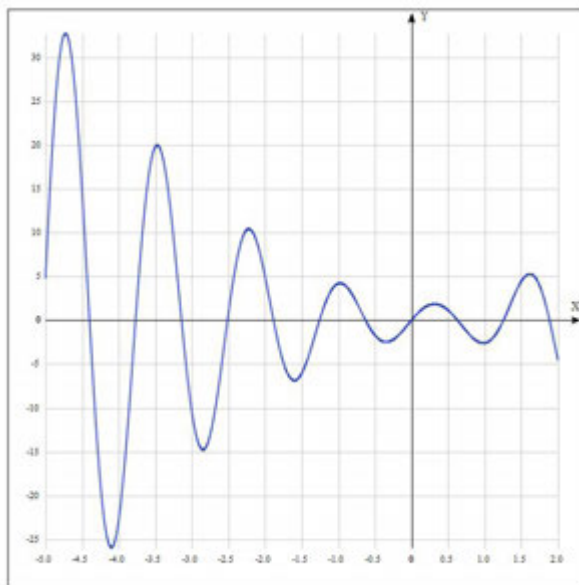
Рис. 2.3. График функции $f(x) \cdot \sin 5x$ (скриншот)

Таблица 2.4

Результаты поиска экстремума $f(x) \cdot \sin(5x)$ в зависимости от P и q

$q \backslash P$	0.9	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.005	-25.8699	-25.8936	-25.9435	-25.9179	-25.9277	-25.9267	-25.9351	-25.9428	-25.9308	-25.9319
0.01	-25.8258	-25.6362	-25.9265	-25.9433	-25.9099	-25.7317	-25.9429	-25.9395	-25.9405	-25.9074
0.015	-25.6701	-25.4789	-25.7474	-25.9427	-25.8591	-25.9235	-25.8886	-25.9368	-25.922	-25.89
0.02	-25.9318	-25.8272	-25.9425	-25.9441	-25.8277	-25.9438	-25.4661	-25.9425	-25.9089	-25.944
0.025	-25.4242	-25.7551	-25.5895	-25.7903	-25.3961	-25.9205	-25.7614	-24.9657	-24.1226	-24.4174
0.03	-22.5735	-25.8211	-24.8563	-21.7011	-25.7235	-25.6297	-25.7626	-25.2883	-24.44	-25.9421
0.035	-17.3733	-25.9296	-25.8761	-25.4818	-25.8134	-25.8056	-23.4375	-22.2337	-25.8993	-25.9405
0.04	-20.8763	-25.9303	-21.6365	-25.1439	-25.7133	-25.3327	-25.4947	-25.5244	-25.8113	-25.8388
0.045	-25.9404	-25.9441	-14.776	-24.1936	-24.4998	-18.4416	-25.9123	-25.9438	-25.8551	-25.9325
0.05	-22.1929	-25.9357	-25.4707	-25.031	-22.3551	-25.9424	-25.94	-25.8784	-25.6868	-25.8219
0.055	-25.4743	-22.8004	-25.8115	-24.9401	-25.8819	-25.621	-25.9125	-21.8811	-25.9348	-25.752
0.06	-16.0773	-23.2919	-25.944	-25.6623	-25.7506	-25.4119	-25.8751	-12.0173	-24.3568	-25.9107
0.065	-25.8816	-25.7177	-24.0046	-24.4502	-23.6948	-18.2723	-17.3193	-24.4777	-25.9399	-25.9041
0.07	-25.1709	-25.9194	-25.7966	-24.7145	-23.3231	-20.8782	-25.8758	-25.1432	-25.6259	-24.2508
0.075	-14.7843	-25.6757	-25.9441	-23.6924	-13.7648	-25.9417	-25.9064	-22.2499	-25.867	-25.7107
0.08	-20.011	-15.7513	-20.6872	-24.5536	-23.5958	-25.8282	-25.5775	-25.1634	-25.8783	-25.7966
0.085	-23.737	-9.0817	-25.7201	-25.7261	-25.937	-25.772	-25.7633	-25.1223	-25.7869	-25.9329
0.09	-6.0877	-24.4021	-15.9203	-25.9404	-25.8428	-23.8404	-23.655	-25.5172	-25.7463	-25.9426
0.095	-22.2785	-23.0565	-25.9383	-25.7853	-24.3834	-23.7355	-25.7562	-14.4845	-22.1085	-24.2696
0.1	-23.1944	-25.9396	-24.7222	-14.3922	-22.0041	-25.5749	-8.1873	-24.9599	-25.879	-23.4859

Содержание отчета о лабораторной работе

Отчет должен включать в себя:

- 1) титульный лист;
- 2) цель работы;
- 3) постановку задачи;
- 4) графики исходных унимодальной и мультимодальной функций;
- 5) результаты эксперимента (таблицы для обеих исходных функций $f(x)$ и $f(x) \cdot \sin 5x$);
- 6) график зависимостей погрешности от числа точек N ;
- 7) выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит сущность метода случайного поиска? Какова область применимости данного метода?
2. Поясните принцип разбиения интервала при случайном поиске.
3. Что такое интервал неопределенности? Приведите выражения для оценки интервала неопределенности для метода случайного поиска.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

- 1) графики исходных унимодальной и мультимодальной функций;
- 2) программную реализацию метода случайного поиска;
- 3) результаты работы метода для каждой из исходных функций;
- 4) отчет о лабораторной работе;
- 5) ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной в лабораторной работе задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа № 3

Исследование алгоритма имитации отжига

Цель работы — изучить метод имитации отжига для поиска экстремума на примере унимодальной и мультимодальной функций одного переменного.

Постановка задачи

На интервале $[a, b]$ задана унимодальная функция одного переменного $f(x)$. Используя метод имитации отжига, осуществить поиск минимума $f(x)$. При аналогичных исходных условиях осуществить поиск минимума $f(x)$, модулированной сигналом $\sin 5x$, т. е. мультимодальной функции $f(x) \cdot \sin 5x$. Варианты заданий приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Варианты заданий

Номер варианта	Функция $f(x)$	a	b
1	$-0,5 \cos 0,5x - 0,5$	-5	2
2	$(1 - x)^2 + \exp(x)$	-4	3
3	$-\sqrt{x} \cdot \sin x - 2$	0	4
4	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	-2	0
5	$-\cos 0,5x - 1$	-2	4
6	$(1 - x)^2 + \exp(x)$	-5	2
7	$-\sqrt{x} \cdot \sin x + 2$	1	4
8	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	1,5	4
9	$-0,5 \cos 0,5x + 1$	-2,5	1,5
10	$(1 - x)^2 + \exp(x)$	-2	4
11	$-2\sqrt{x} \cdot \sin 0,5x$	2	6
12	$\cos(x) \operatorname{th}(x)$	7	11
13	$2 \cos(x) + \lg(x)$	1,5	5

Окончание табл. 3.1

Номер варианта	Функция $f(x)$	a	b
14	$\exp(-0,2x)\sin(x)$	2	6
15	$x^2 \sin(x)$	9	12
16	$x^2 \exp[\sin(x)]$	9	14
17	$\cos(x) + \lg(x)$	7	10
18	$\exp(-0,2x)\sin(x) + 1$	9	12
19	$x^2 \sin(x) - 2$	4	7
20	$x^2 \exp[\sin(x)]$	16	20
21	$5\cos(x) + x + \sqrt{x}$	2	6
22	$\exp(-0,1x)\sin(x) - 2$	-3	0
23	$x^2 \sin(x)$	15	18
24	$x \exp[\cos(x)] - x$	8	12

Основные теоретические сведения

Алгоритм имитации отжига (Simulated Annealing, SA) предложен в 1953 г. Метрополисом (N.C. Metropolis, США). Алгоритм SA можно считать одним из немногих универсальных алгоритмов решения задач глобальной оптимизации. Идея алгоритма связана с механизмом исправления дефектов в кристаллической решетке металла и некоторых других веществ. Дефекты в кристаллической решетке обусловлены тем, что некоторые атомы занимают в решетке «неправильные» места. В силу нехватки кинетической энергии при нормальной температуре эти атомы не могут преодолеть потенциальный барьер и занять «правильные» положения в решетке. При этом в целом вся система атомов находится в состоянии локального энергетического минимума. Для вывода системы из этого минимума и перевода в состояние глобального энергетического минимума, соответствующего бездефектной кристаллической решетке, металл нагревают до высокой температуры, а затем медленно охлаждают. При этом «неправильные» атомы могут приобрести энергию, достаточную для преодоления потенциального барьера и занятия «правильных» положений в решетке. Вероятность преодоления потенциального барьера пропорциональна температуре металла, так что по мере его охлаждения вероятность такого перехода стремится к нулю и кристаллическая решетка стабилизируется в окрестности нового (меньшего) локального или глобального минимума.

Таким образом, положительная роль повышения температуры отжигаемого металла заключается в том, что температурные флуктуации позволяют

системе покидать локальные минимумы энергии и смещаться в сторону более глубоких энергетических минимумов.

Применение данной схемы к оптимизации основано на том, что локальное (субоптимальное) решение, найденное в процессе решения задачи оптимизации, также можно рассматривать как дефектное решение. Улучшить это решение (приблизиться к глобальному оптимуму) можно путем его случайных флуктуаций, амплитуда которых уменьшается с ростом номера итераций.

Принципиальным в алгоритме SA является то, что в отличие от большинства других стохастических алгоритмов поисковой оптимизации он допускает шаги, приводящие к увеличению значений фитнес-функции (оптимизируемой функции).

Алгоритм SA относится к классу так называемых пороговых стохастических алгоритмов безусловной оптимизации. На текущей итерации порогового алгоритма в окрестности $d(X)$ текущего приближения к решению X выбираем случайное решение X' . Если разность $\varphi(X') - \varphi(X) < \varepsilon$, то в качестве нового текущего приближения к решению принимаем X' . В противном случае в окрестности $d(X)$ выбираем новое решение. Здесь ε — заданный положительный порог, величина которого по тому или иному закону убывает с ростом числа итераций t , так что имеет место предельное соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

Пороговый алгоритм в процессе поиска допускает ухудшение значений фитнес-функции до заданного порога ε , и этот порог в процессе итераций последовательно снижается до нуля.

В алгоритме SA величина ε представляет собой случайную величину с математическим ожиданием, равным $\bar{\varepsilon}$, которому придается смысл «температуры» отжигаемого металла. Таким образом, в алгоритме SA переход от решения $(X, \varphi = \varphi(X))$ к решению $(X', \varphi' = \varphi(X'))$ допускается с вероятностью

$$\xi(X \rightarrow X') = \begin{cases} 1, & \varphi' \leq \varphi, \\ \exp\left(-\frac{\varphi' - \varphi}{\bar{\varepsilon}}\right), & \varphi' > \varphi. \end{cases}$$

Последняя формула означает, что если переход от точки X к точке X' приводит к уменьшению значения фитнес-функции $\varphi(X)$, то этот переход осуществляется безусловно. В противном случае переход выполняем с вероятностью, которая убывает с ростом разности $(\varphi' - \varphi)$ и уменьшением «температуры» $\bar{\varepsilon}$ в соответствии с известным распределением Гиббса.

Скорость сходимости алгоритма SA в значительной мере определяет вид функции $\varphi(t)$. Поэтому известно большое число различных рекомендаций по выбору этой функции. Чаще всего вслед за основоположниками алгоритма используют функцию вида $\bar{\varepsilon}(t) = \alpha \bar{\varepsilon}(t-1)$, где α — положительный коэффициент понижения «температуры», достаточно близкий к единице, на-

пример, $\alpha \in [0,8; 0,99]$, так что последовательность $\bar{\epsilon}(t), \bar{\epsilon}(t+1), \bar{\epsilon}(t+2), \dots$ представляет собой убывающую геометрическую прогрессию. Часто функцию $\bar{\epsilon}(t)$ определяют формулой

$$\bar{\epsilon}(t) = \frac{\bar{\epsilon}_0}{\ln(t+1)},$$

где $\bar{\epsilon}_0$ — начальная «температура».

Широко известен вариант так называемого сверхбыстрого отжига (Very Fast Annealing), когда функцию $\bar{\epsilon}(t)$ задает формула

$$\bar{\epsilon}(t) = \bar{\epsilon}_0 \exp\left(-\beta t^{\frac{1}{|X|}}\right),$$

где β — положительная вещественная константа, имеющая смысл декрементов затухания.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Постройте графики функций $f(x)$ и $f(x) \cdot \sin 5x$.
2. Задайте начальную и конечную температуры.
3. Используя метод *имитации отжига*, осуществите поиск минимума $f(x)$ с заданным законом изменения температуры, при этом на каждой итерации выведите на экран: номер итерации, текущую температуру, текущие значения x и $f(x)$, вероятность принятия точки, результат принятия или отклонения точки.
4. Аналогично и с таким же выводом работы программы осуществите поиск минимума $f(x) \cdot \sin 5x$.

Пример выполнения лабораторной работы

Пусть задана функция $f(x) = -\sqrt{x} \cdot \sin(x)$. Графики этой функции и функции, модулированной сигналом $\sin 5x$, т. е. мультимодальной функции $f_2(x) = -\sqrt{x} \cdot \sin(x) \cdot \sin 5x$, представлены на рис. 3.1 и 3.2 соответственно. Интервал поиска — $[0, 3]$.

Реализуется алгоритм имитации отжига следующим образом.

1. Изначально задаются начальная температура (T_{\max}) и конечная температура (T_{\min}).
2. Случайно выбирается точка x_1 на отрезке. Вычисляется значение функции в этой точке $f(x_1)$.

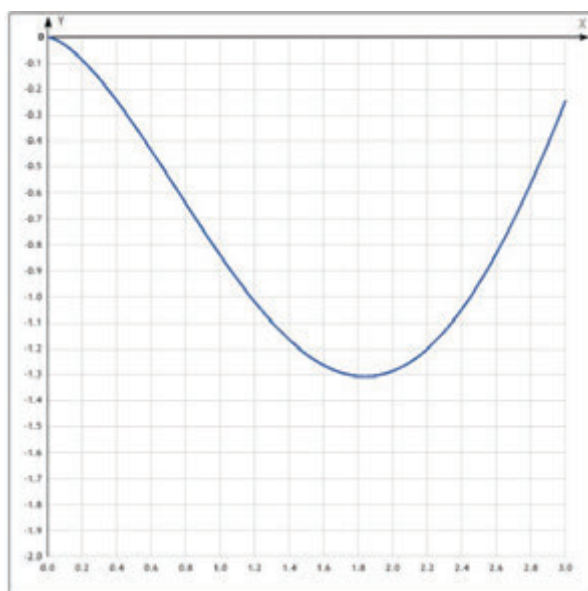


Рис. 3.1. График функции $f(x)$ (скриншот)

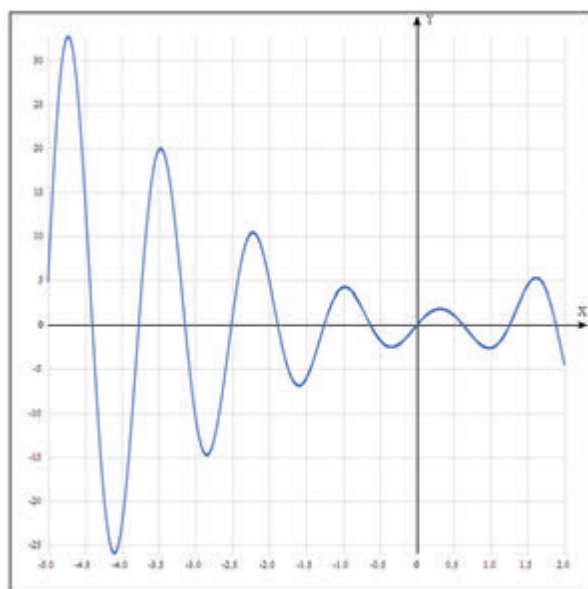


Рис. 3.2. График функции $f(x) \cdot \sin 5x$ (скриншот)

3. Пока выполняется условие $T_i > T_{\min}$:

а) случайно выбирается точка x_i на отрезке. Вычисляется значение функции в этой точке $f(x_i)$;

б) определяется $\Delta f = f(x_i) - f(x_{i-1})$;

в) если $\Delta f \leq 0$, то осуществляется переход в точку x_i ;

г) если $\Delta f > 0$, то переход осуществляется с вероятностью $P(\Delta f) = e^{\frac{-\Delta f}{T_i}}$;

д) понижается температура: $T_{i+1} = T_i \cdot 0,95$.

В качестве начальной температуры возьмем $T_{\max} = 10\,000$, конечной — $T_{\min} = 0,1$.

Распечатка результатов численного эксперимента для $f(x)$ представлена в табл. 3.2, а для мультимодальной функции $f(x) \cdot \sin 5x$ — в табл. 3.3, где N — номер итерации; T — текущая температура на итерации; x и $f(x)$ — сгенерированная точка и значение функции в ней соответственно; P — вероятность перехода в новую точку; accept — перешли ли в эту точку; x_{best} , $f(x)_{\text{best}}$ — наилучшее значение переменной на начало итерации.

Для сравнения в табл. 3.4 и 3.5 представлены распечатки результатов применения алгоритма сверхбыстрого отжига.

Таблица 3.2

Результаты поиска экстремума $f(x)$

N	T	x	f(x)	P	accept?	x best	f(x) best
1	10000.000	+2.364	-1.079	1.00000	Y	+2.364	-1.079
2	9500.000	+0.070	-0.019	0.99989	Y	+0.070	-0.019
3	9025.000	+0.880	-0.723	1.00000	Y	+0.880	-0.723
4	8573.750	+2.020	-1.280	1.00000	Y	+2.020	-1.280
5	8145.062	+0.218	-0.101	0.99986	Y	+0.218	-0.101
6	7737.809	+1.347	-1.132	1.00000	Y	+1.347	-1.132
7	7350.919	+0.360	-0.211	0.99987	Y	+0.360	-0.211
8	6983.373	+2.838	-0.503	1.00000	Y	+2.838	-0.503
9	6634.204	+0.614	-0.451	0.99999	Y	+0.614	-0.451
10	6302.494	+2.038	-1.275	1.00000	Y	+2.038	-1.275
11	5987.369	+0.700	-0.539	0.99988	Y	+0.700	-0.539
12	5688.001	+2.545	-0.896	1.00000	Y	+2.545	-0.896
13	5403.601	+0.274	-0.142	0.99986	Y	+0.274	-0.142
14	5133.421	+2.815	-0.538	1.00000	Y	+2.815	-0.538
15	4876.750	+2.293	-1.137	1.00000	Y	+2.293	-1.137
16	4632.912	+0.920	-0.763	0.99992	Y	+0.920	-0.763
17	4401.267	+2.521	-0.923	1.00000	Y	+2.521	-0.923
18	4181.203	+2.991	-0.260	0.99984	Y	+2.991	-0.260
19	3972.143	+1.611	-1.268	1.00000	Y	+1.611	-1.268
20	3773.536	+1.676	-1.287	1.00000	Y	+1.676	-1.287
21	3584.859	+1.953	-1.297	1.00000	Y	+1.953	-1.297
22	3405.616	+0.991	-0.833	0.99986	Y	+0.991	-0.833
23	3235.335	+0.977	-0.819	1.00000	Y	+0.977	-0.819
24	3073.569	+0.052	-0.012	0.99974	Y	+0.052	-0.012
25	2919.890	+0.983	-0.825	1.00000	Y	+0.983	-0.825
26	2773.896	+1.313	-1.108	1.00000	Y	+1.313	-1.108
27	2635.201	+0.782	-0.623	0.99982	Y	+0.782	-0.623
28	2503.441	+0.954	-0.797	1.00000	Y	+0.954	-0.797
29	2378.269	+2.847	-0.489	0.99987	Y	+2.847	-0.489
30	2259.355	+1.479	-1.211	1.00000	Y	+1.479	-1.211
31	2146.388	+1.715	-1.296	1.00000	Y	+1.715	-1.296
32	2039.068	+1.850	-1.307	1.00000	Y	+1.850	-1.307

Продолжение табл. 3.2

33	1937.115	+0.957	-0.799	0.99974	Y	+0.957	-0.799
34	1840.259	+2.479	-0.968	1.00000	Y	+2.479	-0.968
35	1748.246	+2.661	-0.754	0.99988	Y	+2.661	-0.754
36	1660.834	+1.247	-1.059	1.00000	Y	+1.247	-1.059
37	1577.792	+1.914	-1.303	1.00000	Y	+1.914	-1.303
38	1498.903	+1.267	-1.074	0.99985	Y	+1.267	-1.074
39	1423.957	+2.551	-0.889	0.99987	Y	+2.551	-0.889
40	1352.760	+0.171	-0.070	0.99939	Y	+0.171	-0.070
41	1285.122	+2.451	-0.997	1.00000	Y	+2.451	-0.997
42	1220.865	+0.548	-0.386	0.99950	Y	+0.548	-0.386
43	1159.822	+1.305	-1.102	1.00000	Y	+1.305	-1.102
44	1101.831	+2.109	-1.247	1.00000	Y	+2.109	-1.247
45	1046.740	+2.617	-0.810	0.99958	Y	+2.617	-0.810
46	994.403	+1.888	-1.305	1.00000	Y	+1.888	-1.305
47	944.682	+0.434	-0.277	0.99891	Y	+0.434	-0.277
48	897.448	+0.322	-0.180	0.99989	Y	+0.322	-0.180
49	852.576	+0.695	-0.534	1.00000	Y	+0.695	-0.534
50	809.947	+1.938	-1.299	1.00000	Y	+1.938	-1.299
51	769.450	+0.927	-0.770	0.99931	Y	+0.927	-0.770
52	730.977	+2.085	-1.257	1.00000	Y	+2.085	-1.257
53	694.428	+1.040	-0.880	0.99946	Y	+1.040	-0.880
54	659.707	+2.827	-0.520	0.99945	Y	+2.827	-0.520
55	626.722	+1.423	-1.180	1.00000	Y	+1.423	-1.180
56	595.386	+0.372	-0.222	0.99839	Y	+0.372	-0.222
57	565.616	+2.800	-0.560	1.00000	Y	+2.800	-0.560
58	537.335	+0.222	-0.104	0.99915	Y	+0.222	-0.104
59	510.469	+1.577	-1.256	1.00000	Y	+1.577	-1.256
60	484.945	+1.258	-1.067	0.99961	Y	+1.258	-1.067
61	460.698	+1.784	-1.305	1.00000	Y	+1.784	-1.305
62	437.663	+1.273	-1.078	0.99948	Y	+1.273	-1.078
63	415.780	+1.833	-1.308	1.00000	Y	+1.833	-1.308
64	394.991	+0.057	-0.013	0.99673	Y	+0.057	-0.013
65	375.241	+0.736	-0.576	1.00000	Y	+0.736	-0.576
66	356.479	+1.383	-1.155	1.00000	Y	+1.383	-1.155
67	338.655	+2.479	-0.968	0.99945	Y	+2.479	-0.968
68	321.723	+1.598	-1.264	1.00000	Y	+1.598	-1.264
69	305.636	+1.401	-1.166	0.99968	Y	+1.401	-1.166
70	290.355	+1.687	-1.290	1.00000	Y	+1.687	-1.290
71	275.837	+2.984	-0.271	0.99631	Y	+2.984	-0.271
72	262.045	+0.823	-0.665	1.00000	Y	+0.823	-0.665
73	248.943	+0.343	-0.197	0.99812	Y	+0.343	-0.197
74	236.496	+0.137	-0.051	0.99938	Y	+0.137	-0.051
75	224.671	+1.020	-0.861	1.00000	Y	+1.020	-0.861
76	213.437	+1.968	-1.294	1.00000	Y	+1.968	-1.294
77	202.765	+0.729	-0.568	0.99643	Y	+0.729	-0.568
78	192.627	+2.907	-0.396	0.99910	Y	+2.907	-0.396
79	182.996	+0.789	-0.630	1.00000	Y	+0.789	-0.630
80	173.846	+0.434	-0.277	0.99797	Y	+0.434	-0.277
81	165.154	+0.904	-0.748	1.00000	Y	+0.904	-0.748
82	156.896	+2.849	-0.487	0.99834	Y	+2.849	-0.487
83	149.051	+1.220	-1.037	1.00000	Y	+1.220	-1.037
84	141.599	+1.600	-1.264	1.00000	Y	+1.600	-1.264
85	134.519	+1.562	-1.250	0.99989	Y	+1.562	-1.250
86	127.793	+0.754	-0.594	0.99488	Y	+0.754	-0.594
87	121.403	+2.828	-0.519	0.99938	Y	+2.828	-0.519
88	115.333	+0.367	-0.218	0.99739	Y	+0.367	-0.218
89	109.566	+1.771	-1.304	1.00000	Y	+1.771	-1.304
90	104.088	+0.942	-0.785	0.99502	Y	+0.942	-0.785
91	98.884	+2.165	-1.219	1.00000	Y	+2.165	-1.219
92	93.939	+2.944	-0.338	0.99066	Y	+2.944	-0.338
93	89.242	+0.884	-0.727	1.00000	Y	+0.884	-0.727
94	84.780	+1.942	-1.299	1.00000	Y	+1.942	-1.299
95	80.541	+1.229	-1.044	0.99685	Y	+1.229	-1.044
96	76.514	+2.455	-0.993	0.99933	Y	+2.455	-0.993
97	72.689	+1.778	-1.305	1.00000	Y	+1.778	-1.305
98	69.054	+1.197	-1.019	0.99586	Y	+1.197	-1.019
99	65.601	+2.985	-0.270	0.98864	Y	+2.985	-0.270

Продолжение табл. 3.2

100	62.321	+0.820	-0.662	1.00000	Y		+0.820	-0.662
101	59.205	+0.799	-0.641	0.99964	Y		+0.799	-0.641
102	56.245	+2.803	-0.556	0.99849	Y		+2.803	-0.556
103	53.433	+1.922	-1.302	1.00000	Y		+1.922	-1.302
104	50.761	+0.949	-0.792	0.99000	Y		+0.949	-0.792
105	48.223	+0.560	-0.397	0.99186	Y		+0.560	-0.397
106	45.812	+2.000	-1.286	1.00000	Y		+2.000	-1.286
107	43.521	+1.946	-1.298	1.00000	Y		+1.946	-1.298
108	41.345	+0.567	-0.404	0.97861	Y		+0.567	-0.404
109	39.278	+1.551	-1.245	1.00000	Y		+1.551	-1.245
110	37.314	+2.982	-0.274	0.97432	-		+1.551	-1.245
111	35.448	+2.258	-1.162	0.99765	Y		+2.258	-1.162
112	33.676	+1.382	-1.155	0.99980	Y		+1.382	-1.155
113	31.992	+0.865	-0.708	0.98612	Y		+0.865	-0.708
114	30.393	+2.560	-0.878	1.00000	Y		+2.560	-0.878
115	28.873	+1.322	-1.115	1.00000	Y		+1.322	-1.115
116	27.429	+0.552	-0.390	0.97392	Y		+0.552	-0.390
117	26.058	+0.808	-0.650	1.00000	Y		+0.808	-0.650
118	24.755	+1.004	-0.846	1.00000	Y		+1.004	-0.846
119	23.517	+2.081	-1.259	1.00000	Y		+2.081	-1.259
120	22.341	+0.234	-0.112	0.94997	Y		+0.234	-0.112
121	21.224	+2.245	-1.171	1.00000	Y		+2.245	-1.171
122	20.163	+0.230	-0.110	0.94874	Y		+0.230	-0.110
123	19.155	+1.143	-0.973	1.00000	Y		+1.143	-0.973
124	18.197	+0.538	-0.376	0.96771	Y		+0.538	-0.376
125	17.287	+1.597	-1.263	1.00000	Y		+1.597	-1.263
126	16.423	+0.306	-0.166	0.93539	Y		+0.306	-0.166
127	15.602	+1.940	-1.299	1.00000	Y		+1.940	-1.299
128	14.822	+0.146	-0.056	0.91953	Y		+0.146	-0.056
129	14.081	+2.236	-1.177	1.00000	Y		+2.236	-1.177
130	13.377	+1.627	-1.273	1.00000	Y		+1.627	-1.273
131	12.708	+1.930	-1.301	1.00000	Y		+1.930	-1.301
132	12.072	+1.108	-0.941	0.97069	Y		+1.108	-0.941
133	11.469	+0.761	-0.601	0.97078	Y		+0.761	-0.601
134	10.895	+1.767	-1.304	1.00000	Y		+1.767	-1.304
135	10.351	+2.388	-1.057	0.97644	Y		+2.388	-1.057
136	9.833	+0.787	-0.628	0.95731	Y		+0.787	-0.628
137	9.341	+0.400	-0.246	0.95996	Y		+0.400	-0.246
138	8.874	+1.269	-1.076	1.00000	Y		+1.269	-1.076
139	8.431	+2.559	-0.881	0.97712	Y		+2.559	-0.881
140	8.009	+2.584	-0.851	0.99629	Y		+2.584	-0.851
141	7.609	+1.743	-1.301	1.00000	Y		+1.743	-1.301
142	7.228	+2.668	-0.745	0.92601	Y		+2.668	-0.745
143	6.867	+0.617	-0.455	0.95860	Y		+0.617	-0.455
144	6.523	+2.757	-0.623	1.00000	Y		+2.757	-0.623
145	6.197	+1.696	-1.292	1.00000	Y		+1.696	-1.292
146	5.887	+2.961	-0.309	0.84621	Y		+2.961	-0.309
147	5.593	+0.546	-0.384	1.00000	Y		+0.546	-0.384
148	5.313	+2.884	-0.433	1.00000	Y		+2.884	-0.433
149	5.048	+1.399	-1.165	1.00000	Y		+1.399	-1.165
150	4.795	+0.077	-0.021	0.78774	Y		+0.077	-0.021
151	4.556	+0.083	-0.024	1.00000	Y		+0.083	-0.024
152	4.328	+0.788	-0.630	1.00000	Y		+0.788	-0.630
153	4.111	+2.433	-1.015	1.00000	Y		+2.433	-1.015
154	3.906	+1.133	-0.964	0.98685	Y		+1.133	-0.964
155	3.711	+2.999	-0.246	0.82404	Y		+2.999	-0.246
156	3.525	+0.036	-0.007	0.93449	Y		+0.036	-0.007
157	3.349	+0.572	-0.409	1.00000	Y		+0.572	-0.409
158	3.181	+0.790	-0.631	1.00000	Y		+0.790	-0.631
159	3.022	+1.597	-1.263	1.00000	Y		+1.597	-1.263
160	2.871	+0.706	-0.545	0.77874	Y		+0.706	-0.545
161	2.728	+1.334	-1.123	1.00000	Y		+1.334	-1.123
162	2.591	+1.702	-1.293	1.00000	Y		+1.702	-1.293
163	2.462	+0.703	-0.542	0.73685	Y		+0.703	-0.542
164	2.339	+1.209	-1.028	1.00000	Y		+1.209	-1.028
165	2.222	+2.693	-0.712	0.86739	Y		+2.693	-0.712
166	2.111	+0.857	-0.700	0.99420	Y		+0.857	-0.700

Продолжение табл. 3.2

167	2.005	+1.222	-1.039	1.00000	Y	+1.222	-1.039
168	1.905	+2.064	-1.265	1.00000	Y	+2.064	-1.265
169	1.810	+1.146	-0.975	0.85186	Y	+1.146	-0.975
170	1.719	+1.625	-1.273	1.00000	Y	+1.625	-1.273
171	1.633	+2.111	-1.246	0.98358	Y	+2.111	-1.246
172	1.551	+0.654	-0.492	0.61514	Y	+0.654	-0.492
173	1.474	+1.265	-1.072	1.00000	Y	+1.265	-1.072
174	1.400	+1.726	-1.298	1.00000	Y	+1.726	-1.298
175	1.330	+0.194	-0.085	0.40171	Y	+0.194	-0.085
176	1.264	+1.686	-1.290	1.00000	Y	+1.686	-1.290
177	1.200	+0.404	-0.250	0.42049	Y	+0.404	-0.250
178	1.140	+1.061	-0.899	1.00000	Y	+1.061	-0.899
179	1.083	+1.493	-1.218	1.00000	Y	+1.493	-1.218
180	1.029	+0.528	-0.366	0.43703	Y	+0.528	-0.366
181	0.978	+2.037	-1.275	1.00000	Y	+2.037	-1.275
182	0.929	+0.492	-0.331	0.36216	Y	+0.492	-0.331
183	0.882	+1.126	-0.958	1.00000	Y	+1.126	-0.958
184	0.838	+1.196	-1.018	1.00000	Y	+1.196	-1.018
185	0.796	+0.475	-0.315	0.41395	-	+1.196	-1.018
186	0.757	+2.742	-0.644	0.61017	-	+1.196	-1.018
187	0.719	+1.478	-1.210	1.00000	Y	+1.478	-1.210
188	0.683	+0.548	-0.385	0.29867	-	+1.478	-1.210
189	0.649	+2.368	-1.076	0.81234	Y	+2.368	-1.076
190	0.616	+2.503	-0.943	0.80606	Y	+2.503	-0.943
191	0.585	+1.682	-1.289	1.00000	Y	+1.682	-1.289
192	0.556	+1.711	-1.295	1.00000	Y	+1.711	-1.295
193	0.528	+2.953	-0.322	0.15862	-	+1.711	-1.295
194	0.502	+0.122	-0.042	0.08243	-	+1.711	-1.295
195	0.477	+1.085	-0.921	0.45637	Y	+1.085	-0.921
196	0.453	+2.772	-0.601	0.49374	Y	+2.772	-0.601
197	0.430	+2.259	-1.161	1.00000	Y	+2.259	-1.161
198	0.409	+1.734	-1.299	1.00000	Y	+1.734	-1.299
199	0.388	+0.833	-0.676	0.20084	-	+1.734	-1.299
200	0.369	+1.139	-0.969	0.40907	Y	+1.139	-0.969
201	0.351	+0.392	-0.239	0.12435	-	+1.139	-0.969
202	0.333	+1.287	-1.089	1.00000	Y	+1.287	-1.089
203	0.316	+2.466	-0.982	0.71256	-	+1.287	-1.089
204	0.301	+2.304	-1.128	1.00000	Y	+2.304	-1.128
205	0.286	+2.587	-0.847	0.37397	-	+2.304	-1.128
206	0.271	+1.175	-1.000	0.62282	Y	+1.175	-1.000
207	0.258	+0.000	-0.000	0.02065	-	+1.175	-1.000
208	0.245	+1.195	-1.017	1.00000	Y	+1.195	-1.017
209	0.233	+0.440	-0.283	0.04260	-	+1.195	-1.017
210	0.221	+0.518	-0.357	0.05042	-	+1.195	-1.017
211	0.210	+2.427	-1.021	1.00000	Y	+2.427	-1.021
212	0.199	+2.140	-1.232	1.00000	Y	+2.140	-1.232
213	0.189	+1.804	-1.307	1.00000	Y	+1.804	-1.307
214	0.180	+1.477	-1.210	0.58366	-	+1.804	-1.307
215	0.171	+1.327	-1.118	0.33171	-	+1.804	-1.307
216	0.162	+0.105	-0.034	0.00039	-	+1.804	-1.307
217	0.154	+0.905	-0.748	0.02672	-	+1.804	-1.307
218	0.147	+0.125	-0.044	0.00018	-	+1.804	-1.307
219	0.139	+2.454	-0.994	0.10611	-	+1.804	-1.307
220	0.132	+2.770	-0.605	0.00496	-	+1.804	-1.307
221	0.126	+0.533	-0.371	0.00058	-	+1.804	-1.307
222	0.119	+0.640	-0.478	0.00097	-	+1.804	-1.307
223	0.113	+1.551	-1.245	0.58166	Y	+1.551	-1.245
224	0.108	+2.049	-1.271	1.00000	Y	+2.049	-1.271
225	0.102	+1.210	-1.029	0.09435	-	+2.049	-1.271
226	0.097	+0.277	-0.144	0.00001	-	+2.049	-1.271
227	0.092	+0.801	-0.642	0.00111	-	+2.049	-1.271
228	0.088	+0.479	-0.319	0.00002	-	+2.049	-1.271
229	0.083	+0.915	-0.758	0.00213	-	+2.049	-1.271
230	0.079	+0.340	-0.194	0.00000	-	+2.049	-1.271
231	0.075	+1.794	-1.306	1.00000	Y	+1.794	-1.306
232	0.071	+0.786	-0.628	0.00008	-	+1.794	-1.306
233	0.068	+0.110	-0.036	0.00000	-	+1.794	-1.306

Окончание табл. 3.2

234	0.065	+2.747	-0.637	0.00003	-		+1.794	-1.306
235	0.061	+2.478	-0.969	0.00410	-		+1.794	-1.306
236	0.058	+1.992	-1.288	0.73369	-		+1.794	-1.306
237	0.055	+2.486	-0.961	0.00194	-		+1.794	-1.306
238	0.053	+2.915	-0.384	0.00000	-		+1.794	-1.306
239	0.050	+0.639	-0.477	0.00000	-		+1.794	-1.306
240	0.047	+1.963	-1.295	0.78632	-		+1.794	-1.306
241	0.045	+2.408	-1.039	0.00267	-		+1.794	-1.306
242	0.043	+0.902	-0.745	0.00000	-		+1.794	-1.306
243	0.041	+2.915	-0.384	0.00000	-		+1.794	-1.306
244	0.039	+2.323	-1.113	0.00678	-		+1.794	-1.306
245	0.037	+1.031	-0.871	0.00001	-		+1.794	-1.306
246	0.035	+2.720	-0.675	0.00000	-		+1.794	-1.306
247	0.033	+1.952	-1.297	0.75512	Y		+1.952	-1.297
248	0.031	+1.788	-1.306	1.00000	Y		+1.788	-1.306
249	0.030	+0.526	-0.364	0.00000	-		+1.788	-1.306
250	0.028	+0.533	-0.371	0.00000	-		+1.788	-1.306
251	0.027	+0.207	-0.094	0.00000	-		+1.788	-1.306
252	0.026	+1.088	-0.924	0.00000	-		+1.788	-1.306
253	0.024	+2.103	-1.250	0.10035	-		+1.788	-1.306
254	0.023	+1.944	-1.298	0.72174	Y		+1.944	-1.298
255	0.022	+1.295	-1.095	0.00010	-		+1.944	-1.298
256	0.021	+2.673	-0.738	0.00000	-		+1.944	-1.298
257	0.020	+2.389	-1.056	0.00001	-		+1.944	-1.298
258	0.019	+0.389	-0.236	0.00000	-		+1.944	-1.298
259	0.018	+0.930	-0.773	0.00000	-		+1.944	-1.298
260	0.017	+2.065	-1.265	0.14343	-		+1.944	-1.298
261	0.016	+2.111	-1.246	0.03912	-		+1.944	-1.298
262	0.015	+1.748	-1.301	1.00000	Y		+1.748	-1.301
263	0.015	+2.002	-1.285	0.33208	-		+1.748	-1.301
264	0.014	+0.286	-0.151	0.00000	-		+1.748	-1.301
265	0.013	+1.497	-1.220	0.00209	-		+1.748	-1.301
266	0.012	+0.708	-0.547	0.00000	-		+1.748	-1.301
267	0.012	+2.139	-1.233	0.00310	-		+1.748	-1.301
268	0.011	+0.800	-0.642	0.00000	-		+1.748	-1.301
269	0.011	+2.151	-1.227	0.00094	-		+1.748	-1.301
270	0.010	+1.366	-1.144	0.00000	-		+1.748	-1.301

Результат: $x = 1.748$; $f(x) = -1.301$.

Таблица 3.3

Результаты поиска экстремума $f(x) \cdot \sin(5x)$

N	T	x	f(x)	P	accept?	x best	f(x) best
1	10000.000	+1.442	-0.953	1.00000	Y	+1.442	-0.953
2	9500.000	+1.523	-1.198	1.00000	Y	+1.523	-1.198
3	9025.000	+1.847	-0.249	0.99989	Y	+1.847	-0.249
4	8573.750	+1.143	+0.524	0.99991	Y	+1.143	+0.524
5	8145.062	+0.897	+0.721	0.99998	Y	+0.897	+0.721
6	7737.809	+2.922	-0.332	1.00000	Y	+2.922	-0.332
7	7350.919	+0.736	+0.294	0.99991	Y	+0.736	+0.294
8	6983.373	+2.655	-0.495	1.00000	Y	+2.655	-0.495
9	6634.204	+0.122	-0.025	0.99993	Y	+0.122	-0.025
10	6302.494	+0.104	-0.017	1.00000	Y	+0.104	-0.017
11	5987.369	+1.912	+0.179	0.99997	Y	+1.912	+0.179
12	5688.001	+1.999	+0.696	0.99991	Y	+1.999	+0.696
13	5403.601	+2.872	-0.440	1.00000	Y	+2.872	-0.440
14	5133.421	+2.224	+1.175	0.99969	Y	+2.224	+1.175
15	4876.750	+1.027	+0.791	1.00000	Y	+1.027	+0.791
16	4632.912	+1.812	-0.469	1.00000	Y	+1.812	-0.469
17	4401.267	+0.457	-0.225	0.99994	Y	+0.457	-0.225
18	4181.203	+2.549	-0.160	0.99998	Y	+2.549	-0.160
19	3972.143	+1.528	-1.207	1.00000	Y	+1.528	-1.207
20	3773.536	+0.698	+0.182	0.99963	Y	+0.698	+0.182
21	3584.859	+1.659	-1.161	1.00000	Y	+1.659	-1.161

Продолжение табл. 3.3

22	3405.616	+1.995	+0.672	0.99946	Y	+1.995	+0.672
23	3235.335	+0.855	+0.633	1.00000	Y	+0.855	+0.633
24	3073.569	+1.876	-0.061	1.00000	Y	+1.876	-0.061
25	2919.890	+2.213	+1.188	0.99957	Y	+2.213	+1.188
26	2773.896	+0.922	+0.761	1.00000	Y	+0.922	+0.761
27	2635.201	+1.327	-0.387	1.00000	Y	+1.327	-0.387
28	2503.441	+1.542	-1.229	1.00000	Y	+1.542	-1.229
29	2378.269	+0.273	-0.137	0.99954	Y	+0.273	-0.137
30	2259.355	+2.819	-0.531	1.00000	Y	+2.819	-0.531
31	2146.388	+0.302	-0.163	0.99983	Y	+0.302	-0.163
32	2039.068	+1.555	-1.243	1.00000	Y	+1.555	-1.243
33	1937.115	+1.616	-1.237	1.00000	Y	+1.616	-1.237
34	1840.259	+2.605	-0.366	0.99953	Y	+2.605	-0.366
35	1748.246	+0.973	+0.806	0.99933	Y	+0.973	+0.806
36	1660.834	+0.050	-0.003	1.00000	Y	+0.050	-0.003
37	1577.792	+1.178	+0.385	0.99975	Y	+1.178	+0.385
38	1498.903	+0.808	+0.509	0.99992	Y	+0.808	+0.509
39	1423.957	+2.807	-0.548	1.00000	Y	+2.807	-0.548
40	1352.760	+0.682	+0.139	0.99949	Y	+0.682	+0.139
41	1285.122	+0.988	+0.808	0.99948	Y	+0.988	+0.808
42	1220.865	+2.016	+0.783	1.00000	Y	+2.016	+0.783
43	1159.822	+0.971	+0.805	0.99998	Y	+0.971	+0.805
44	1101.831	+1.188	+0.341	1.00000	Y	+1.188	+0.341
45	1046.740	+1.384	-0.685	1.00000	Y	+1.384	-0.685
46	994.403	+2.420	+0.461	0.99885	Y	+2.420	+0.461
47	944.682	+0.327	-0.183	1.00000	Y	+0.327	-0.183
48	897.448	+1.683	-1.091	1.00000	Y	+1.683	-1.091
49	852.576	+0.063	-0.005	0.99873	Y	+0.063	-0.005
50	809.947	+2.069	+1.007	0.99875	Y	+2.069	+1.007
51	769.450	+1.585	-1.256	1.00000	Y	+1.585	-1.256
52	730.977	+1.528	-1.206	0.99993	Y	+1.528	-1.206
53	694.428	+1.911	+0.166	0.99803	Y	+1.911	+0.166
54	659.707	+1.778	-0.664	1.00000	Y	+1.778	-0.664
55	626.722	+0.886	+0.700	0.99783	Y	+0.886	+0.700
56	595.386	+2.126	+1.157	0.99923	Y	+2.126	+1.157
57	565.616	+0.917	+0.754	1.00000	Y	+0.917	+0.754
58	537.335	+1.260	-0.019	1.00000	Y	+1.260	-0.019
59	510.469	+2.644	-0.471	1.00000	Y	+2.644	-0.471
60	484.945	+2.809	-0.545	1.00000	Y	+2.809	-0.545
61	460.698	+0.838	+0.590	0.99754	Y	+0.838	+0.590
62	437.663	+1.402	-0.775	1.00000	Y	+1.402	-0.775
63	415.780	+0.397	-0.223	0.99867	Y	+0.397	-0.223
64	394.991	+1.833	-0.335	1.00000	Y	+1.833	-0.335
65	375.241	+2.274	+1.070	0.99626	Y	+2.274	+1.070
66	356.479	+1.048	+0.766	1.00000	Y	+1.048	+0.766
67	338.655	+0.102	-0.016	1.00000	Y	+0.102	-0.016
68	321.723	+0.629	+0.003	0.99994	Y	+0.629	+0.003
69	305.636	+2.185	+1.205	0.99607	Y	+2.185	+1.205
70	290.355	+1.885	+0.001	1.00000	Y	+1.885	+0.001
71	275.837	+1.712	-0.986	1.00000	Y	+1.712	-0.986
72	262.045	+1.419	-0.852	0.99949	Y	+1.419	-0.852
73	248.943	+2.816	-0.535	0.99873	Y	+2.816	-0.535
74	236.496	+2.100	+1.101	0.99310	Y	+2.100	+1.101
75	224.671	+2.862	-0.460	1.00000	Y	+2.862	-0.460
76	213.437	+2.714	-0.576	1.00000	Y	+2.714	-0.576
77	202.765	+2.285	+1.038	0.99207	Y	+2.285	+1.038
78	192.627	+1.306	-0.268	1.00000	Y	+1.306	-0.268
79	182.996	+0.638	+0.022	0.99841	Y	+0.638	+0.022
80	173.846	+2.066	+0.994	0.99443	Y	+2.066	+0.994
81	165.154	+0.145	-0.036	1.00000	Y	+0.145	-0.036
82	156.896	+0.607	-0.046	1.00000	Y	+0.607	-0.046
83	149.051	+1.188	+0.341	0.99741	Y	+1.188	+0.341
84	141.599	+1.193	+0.318	1.00000	Y	+1.193	+0.318
85	134.519	+1.023	+0.794	0.99647	Y	+1.023	+0.794
86	127.793	+2.063	+0.982	0.99853	Y	+2.063	+0.982
87	121.403	+1.972	+0.542	1.00000	Y	+1.972	+0.542
88	115.333	+1.017	+0.799	0.99778	Y	+1.017	+0.799

Продолжение табл. 3.3

89	109.566	+0.260	-0.126	1.00000	Y	+0.260	-0.126
90	104.088	+0.866	+0.658	0.99250	Y	+0.866	+0.658
91	98.884	+0.434	-0.229	1.00000	Y	+0.434	-0.229
92	93.939	+2.195	+1.202	0.98489	Y	+2.195	+1.202
93	89.242	+2.207	+1.194	1.00000	Y	+2.207	+1.194
94	84.780	+0.685	+0.146	1.00000	Y	+0.685	+0.146
95	80.541	+0.893	+0.713	0.99298	Y	+0.893	+0.713
96	76.514	+0.855	+0.631	1.00000	Y	+0.855	+0.631
97	72.689	+0.270	-0.135	1.00000	Y	+0.270	-0.135
98	69.054	+1.508	-1.165	1.00000	Y	+1.508	-1.165
99	65.601	+1.543	-1.229	1.00000	Y	+1.543	-1.229
100	62.321	+0.577	-0.105	0.98213	Y	+0.577	-0.105
101	59.205	+0.992	+0.808	0.98469	Y	+0.992	+0.808
102	56.245	+0.664	+0.088	1.00000	Y	+0.664	+0.088
103	53.433	+2.198	+1.201	0.97939	Y	+2.198	+1.201
104	50.761	+2.765	-0.582	1.00000	Y	+2.765	-0.582
105	48.223	+2.237	+1.155	0.96462	Y	+2.237	+1.155
106	45.812	+0.828	+0.563	1.00000	Y	+0.828	+0.563
107	43.521	+1.145	+0.516	1.00000	Y	+1.145	+0.516
108	41.345	+2.887	-0.410	1.00000	Y	+2.887	-0.410
109	39.278	+1.921	+0.233	0.98377	Y	+1.921	+0.233
110	37.314	+1.026	+0.792	0.98513	Y	+1.026	+0.792
111	35.448	+2.052	+0.940	0.99582	Y	+2.052	+0.940
112	33.676	+1.926	+0.262	1.00000	Y	+1.926	+0.262
113	31.992	+2.458	+0.273	0.99967	Y	+2.458	+0.273
114	30.393	+2.310	+0.953	0.97785	Y	+2.310	+0.953
115	28.873	+1.936	+0.330	1.00000	Y	+1.936	+0.330
116	27.429	+1.840	-0.289	1.00000	Y	+1.840	-0.289
117	26.058	+0.063	-0.005	0.98917	Y	+0.063	-0.005
118	24.755	+2.618	-0.406	1.00000	Y	+2.618	-0.406
119	23.517	+1.516	-1.183	1.00000	Y	+1.516	-1.183
120	22.341	+2.987	-0.185	0.95632	Y	+2.987	-0.185
121	21.224	+1.630	-1.219	1.00000	Y	+1.630	-1.219
122	20.163	+0.648	+0.049	0.93908	Y	+0.648	+0.049
123	19.155	+1.243	+0.074	0.99867	Y	+1.243	+0.074
124	18.197	+2.396	+0.582	0.97247	Y	+2.396	+0.582
125	17.287	+1.523	-1.198	1.00000	Y	+1.523	-1.198
126	16.423	+0.120	-0.023	0.93094	Y	+0.120	-0.023
127	15.602	+0.535	-0.168	1.00000	Y	+0.535	-0.168
128	14.822	+2.460	+0.261	0.97149	Y	+2.460	+0.261
129	14.081	+1.417	-0.844	1.00000	Y	+1.417	-0.844
130	13.377	+2.893	-0.396	0.96707	Y	+2.893	-0.396
131	12.708	+2.140	+1.178	0.88350	Y	+2.140	+1.178
132	12.072	+2.032	+0.855	1.00000	Y	+2.032	+0.855
133	11.469	+1.587	-1.255	1.00000	Y	+1.587	-1.255
134	10.895	+0.123	-0.025	0.89320	-	+1.587	-1.255
135	10.351	+0.905	+0.735	0.82506	Y	+0.905	+0.735
136	9.833	+0.972	+0.805	0.99287	Y	+0.972	+0.805
137	9.341	+1.522	-1.195	1.00000	Y	+1.522	-1.195
138	8.874	+1.518	-1.187	0.99904	Y	+1.518	-1.187
139	8.431	+1.460	-1.022	0.98068	Y	+1.460	-1.022
140	8.009	+2.096	+1.091	0.76810	Y	+2.096	+1.091
141	7.609	+0.131	-0.029	1.00000	Y	+0.131	-0.029
142	7.228	+0.568	-0.120	1.00000	Y	+0.568	-0.120
143	6.867	+1.411	-0.820	1.00000	Y	+1.411	-0.820
144	6.523	+1.094	+0.676	0.79518	Y	+1.094	+0.676
145	6.197	+2.024	+0.817	0.97743	Y	+2.024	+0.817
146	5.887	+0.673	+0.114	1.00000	Y	+0.673	+0.114
147	5.593	+2.836	-0.507	1.00000	Y	+2.836	-0.507
148	5.313	+2.751	-0.586	1.00000	Y	+2.751	-0.586
149	5.048	+0.435	-0.229	0.93168	Y	+0.435	-0.229
150	4.795	+1.424	-0.875	1.00000	Y	+1.424	-0.875
151	4.556	+0.841	+0.596	0.72391	Y	+0.841	+0.596
152	4.328	+2.216	+1.185	0.87278	Y	+2.216	+1.185
153	4.111	+1.873	-0.076	1.00000	Y	+1.873	-0.076
154	3.906	+2.121	+1.149	0.73083	Y	+2.121	+1.149
155	3.711	+1.395	-0.740	1.00000	Y	+1.395	-0.740

Продолжение табл. 3.3

156	3.525	+1.925	+0.260	0.75312	-		+1.395	-0.740
157	3.349	+0.859	+0.641	0.66221	-		+1.395	-0.740
158	3.181	+2.035	+0.869	0.60313	-		+1.395	-0.740
159	3.022	+0.251	-0.118	0.81416	Y		+0.251	-0.118
160	2.871	+2.443	+0.344	0.85120	Y		+2.443	+0.344
161	2.728	+1.975	+0.561	0.92345	Y		+1.975	+0.561
162	2.591	+2.483	+0.144	1.00000	Y		+2.483	+0.144
163	2.462	+0.205	-0.079	1.00000	Y		+0.205	-0.079
164	2.339	+2.742	-0.586	1.00000	Y		+2.742	-0.586
165	2.222	+1.656	-1.168	1.00000	Y		+1.656	-1.168
166	2.111	+1.814	-0.452	0.71238	-		+1.656	-1.168
167	2.005	+1.435	-0.925	0.88616	Y		+1.435	-0.925
168	1.905	+2.043	+0.905	0.38246	-		+1.435	-0.925
169	1.810	+0.402	-0.225	0.67893	-		+1.435	-0.925
170	1.719	+2.005	+0.723	0.38334	-		+1.435	-0.925
171	1.633	+0.940	+0.783	0.35126	Y		+0.940	+0.783
172	1.551	+1.963	+0.491	1.00000	Y		+1.963	+0.491
173	1.474	+1.908	+0.152	1.00000	Y		+1.908	+0.152
174	1.400	+0.902	+0.730	0.66217	Y		+0.902	+0.730
175	1.330	+1.170	+0.418	1.00000	Y		+1.170	+0.418
176	1.264	+2.370	+0.703	0.79830	Y		+2.370	+0.703
177	1.200	+2.474	+0.189	1.00000	Y		+2.474	+0.189
178	1.140	+0.765	+0.381	0.84525	Y		+0.765	+0.381
179	1.083	+2.637	-0.455	1.00000	Y		+2.637	-0.455
180	1.029	+0.411	-0.227	0.80145	Y		+0.411	-0.227
181	0.978	+1.760	-0.760	1.00000	Y		+1.760	-0.760
182	0.929	+1.593	-1.254	1.00000	Y		+1.593	-1.254
183	0.882	+0.073	-0.007	0.24340	-		+1.593	-1.254
184	0.838	+2.941	-0.287	0.31567	-		+1.593	-1.254
185	0.796	+2.899	-0.383	0.33480	Y		+2.899	-0.383
186	0.757	+1.332	-0.415	1.00000	Y		+1.332	-0.415
187	0.719	+2.312	+0.947	0.15041	-		+1.332	-0.415
188	0.683	+2.800	-0.556	1.00000	Y		+2.800	-0.556
189	0.649	+1.410	-0.811	1.00000	Y		+1.410	-0.811
190	0.616	+2.591	-0.319	0.44980	-		+1.410	-0.811
191	0.585	+0.130	-0.028	0.26273	-		+1.410	-0.811
192	0.556	+0.728	+0.271	0.14304	-		+1.410	-0.811
193	0.528	+0.769	+0.393	0.10234	-		+1.410	-0.811
194	0.502	+2.573	-0.254	0.32949	-		+1.410	-0.811
195	0.477	+1.493	-1.128	1.00000	Y		+1.493	-1.128
196	0.453	+0.912	+0.746	0.01599	-		+1.493	-1.128
197	0.430	+0.569	-0.119	0.09591	-		+1.493	-1.128
198	0.409	+2.149	+1.190	0.00345	-		+1.493	-1.128
199	0.388	+0.980	+0.808	0.00685	-		+1.493	-1.128
200	0.369	+0.194	-0.070	0.05690	-		+1.493	-1.128
201	0.351	+2.118	+1.142	0.00154	-		+1.493	-1.128
202	0.333	+0.318	-0.176	0.05745	-		+1.493	-1.128
203	0.316	+1.022	+0.795	0.00229	-		+1.493	-1.128
204	0.301	+2.094	+1.085	0.00063	-		+1.493	-1.128
205	0.286	+0.104	-0.017	0.02040	-		+1.493	-1.128
206	0.271	+1.795	-0.569	0.12738	Y		+1.795	-0.569
207	0.258	+2.215	+1.187	0.00110	-		+1.795	-0.569
208	0.245	+2.476	+0.181	0.04679	-		+1.795	-0.569
209	0.233	+2.476	+0.179	0.04010	-		+1.795	-0.569
210	0.221	+1.081	+0.706	0.00312	-		+1.795	-0.569
211	0.210	+0.758	+0.363	0.01181	-		+1.795	-0.569
212	0.199	+1.497	-1.137	1.00000	Y		+1.497	-1.137
213	0.189	+2.270	+1.082	0.00001	-		+1.497	-1.137
214	0.180	+2.664	-0.514	0.03141	-		+1.497	-1.137
215	0.171	+0.848	+0.614	0.00004	-		+1.497	-1.137
216	0.162	+0.055	-0.004	0.00093	-		+1.497	-1.137
217	0.154	+2.142	+1.181	0.00000	-		+1.497	-1.137
218	0.147	+1.393	-0.734	0.06380	-		+1.497	-1.137
219	0.139	+2.669	-0.522	0.01207	-		+1.497	-1.137
220	0.132	+1.502	-1.152	1.00000	Y		+1.502	-1.152
221	0.126	+2.806	-0.548	0.00819	-		+1.502	-1.152
222	0.119	+2.692	-0.556	0.00679	-		+1.502	-1.152

Окончание табл. 3.3

223	0.113	+0.071	-0.006	0.00004	-		+1.502	-1.152
224	0.108	+2.534	-0.093	0.00005	-		+1.502	-1.152
225	0.102	+1.883	-0.015	0.00002	-		+1.502	-1.152
226	0.097	+0.621	-0.016	0.00001	-		+1.502	-1.152
227	0.092	+2.224	+1.175	0.00000	-		+1.502	-1.152
228	0.088	+1.541	-1.228	1.00000	Y		+1.541	-1.228
229	0.083	+2.139	+1.178	0.00000	-		+1.541	-1.228
230	0.079	+1.603	-1.249	1.00000	Y		+1.603	-1.249
231	0.075	+2.479	+0.166	0.00000	-		+1.603	-1.249
232	0.071	+1.732	-0.900	0.00758	-		+1.603	-1.249
233	0.068	+0.973	+0.806	0.00000	-		+1.603	-1.249
234	0.065	+2.113	+1.130	0.00000	-		+1.603	-1.249
235	0.061	+2.883	-0.418	0.00000	-		+1.603	-1.249
236	0.058	+0.342	-0.194	0.00000	-		+1.603	-1.249
237	0.055	+0.549	-0.149	0.00000	-		+1.603	-1.249
238	0.053	+0.024	-0.000	0.00000	-		+1.603	-1.249
239	0.050	+0.263	-0.129	0.00000	-		+1.603	-1.249
240	0.047	+2.505	+0.038	0.00000	-		+1.603	-1.249
241	0.045	+0.304	-0.165	0.00000	-		+1.603	-1.249
242	0.043	+0.170	-0.053	0.00000	-		+1.603	-1.249
243	0.041	+1.071	+0.728	0.00000	-		+1.603	-1.249
244	0.039	+2.645	-0.475	0.00000	-		+1.603	-1.249
245	0.037	+1.822	-0.403	0.00000	-		+1.603	-1.249
246	0.035	+1.506	-1.160	0.07758	-		+1.603	-1.249
247	0.033	+2.240	+1.149	0.00000	-		+1.603	-1.249
248	0.031	+0.753	+0.346	0.00000	-		+1.603	-1.249
249	0.030	+2.677	-0.536	0.00000	-		+1.603	-1.249
250	0.028	+2.345	+0.818	0.00000	-		+1.603	-1.249
251	0.027	+2.795	-0.561	0.00000	-		+1.603	-1.249
252	0.026	+1.539	-1.224	0.38117	Y		+1.539	-1.224
253	0.024	+1.830	-0.355	0.00000	-		+1.539	-1.224
254	0.023	+2.165	+1.202	0.00000	-		+1.539	-1.224
255	0.022	+0.445	-0.228	0.00000	-		+1.539	-1.224
256	0.021	+2.407	+0.528	0.00000	-		+1.539	-1.224
257	0.020	+1.447	-0.971	0.00000	-		+1.539	-1.224
258	0.019	+2.102	+1.105	0.00000	-		+1.539	-1.224
259	0.018	+1.656	-1.168	0.04338	-		+1.539	-1.224
260	0.017	+2.914	-0.349	0.00000	-		+1.539	-1.224
261	0.016	+0.241	-0.109	0.00000	-		+1.539	-1.224
262	0.015	+2.618	-0.404	0.00000	-		+1.539	-1.224
263	0.015	+1.319	-0.339	0.00000	-		+1.539	-1.224
264	0.014	+0.332	-0.187	0.00000	-		+1.539	-1.224
265	0.013	+1.415	-0.834	0.00000	-		+1.539	-1.224
266	0.012	+1.295	-0.211	0.00000	-		+1.539	-1.224
267	0.012	+0.203	-0.077	0.00000	-		+1.539	-1.224
268	0.011	+1.478	-1.081	0.00000	-		+1.539	-1.224
269	0.011	+2.819	-0.532	0.00000	-		+1.539	-1.224
270	0.010	+0.292	-0.154	0.00000	-		+1.539	-1.224

Результат: $x = 1.539$; $f(x) = -1.224$.

Таблица 3.4

Результаты поиска экстремума $f(x)$ сверхбыстрым отжигом

N	T	x	f(x)	P	accept?	x best	f(x) best
1	3872.415	+2.824	-0.525	0.99993	Y	+2.824	-0.525
2	1424.582	+1.819	-1.307	1.00000	Y	+1.819	-1.307
3	524.074	+2.498	-0.949	0.99974	Y	+2.498	-0.949
4	192.796	+1.750	-1.302	1.00000	Y	+1.750	-1.302
5	70.926	+2.281	-1.145	0.99915	Y	+2.281	-1.145
6	26.092	+1.398	-1.165	1.00000	Y	+1.398	-1.165
7	9.599	+2.409	-1.038	0.99492	Y	+2.409	-1.038

Окончание табл. 3.4

8	3.531	+1.142	-0.972	0.99276	Y		+1.142	-0.972
9	1.299	+2.529	-0.914	0.98294	Y		+2.529	-0.914
10	0.478	+1.903	-1.304	1.00000	Y		+1.903	-1.304
11	0.176	+2.145	-1.230	0.84881	Y		+2.145	-1.230
12	0.065	+1.945	-1.298	1.00000	Y		+1.945	-1.298
13	0.024	+0.446	-0.288	0.00000	-		+1.945	-1.298
14	0.009	+1.236	-1.050	0.00002	-		+1.945	-1.298

Результат: $x = 1.945$; $f(x) = -0.298$.

Таблица 3.5

Результаты поиска экстремума $f(x) \cdot \sin(5x)$ сверхбыстрым отжигом

N	T	x	f(x)	P	accept?	x best	f(x) best
1	3872.415	+1.684	-1.088	1.00000	Y	+1.684	-1.088
2	1424.582	+2.887	-0.409	0.99982	Y	+2.887	-0.409
3	524.074	+2.972	-0.218	0.99986	Y	+2.972	-0.218
4	192.796	+0.127	-0.027	0.99962	Y	+0.127	-0.027
5	70.926	+1.669	-1.134	1.00000	Y	+1.669	-1.134
6	26.092	+1.082	+0.703	0.97310	Y	+1.082	+0.703
7	9.599	+0.423	-0.228	1.00000	Y	+0.423	-0.228
8	3.531	+1.121	+0.598	0.91331	Y	+1.121	+0.598
9	1.299	+0.699	+0.186	1.00000	Y	+0.699	+0.186
10	0.478	+0.350	-0.200	1.00000	Y	+0.350	-0.200
11	0.176	+0.565	-0.125	0.84862	Y	+0.565	-0.125
12	0.065	+1.917	+0.208	0.13632	Y	+1.917	+0.208
13	0.024	+0.737	+0.299	0.22513	Y	+0.737	+0.299
14	0.009	+2.409	+0.518	0.00006	-	+0.737	+0.299

Результат: $x = 0.737$; $f(x) = 0.299$.

Полученный по методу сверхбыстрого отжига результат отличается на 0,003 от результата по методу имитации отжига. Для мультимодальной функции можно заметить промах: «лучшая» точка была перемещена из окрестности глобального минимума в локальный.

Содержание отчета о лабораторной работе

Отчет должен включать в себя:

- 1) титульный лист;
- 2) цель работы;
- 3) постановку задачи;
- 4) графики исходных унимодальной и мультимодальной функций;
- 5) результаты эксперимента (таблицы для обеих исходных функций $f(x)$ и $f(x) \cdot \sin 5x$);
- 6) график зависимостей погрешности от числа точек N ;
- 7) выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем состоит сущность метода имитации отжига? Какова область применимости данного метода?
2. Поясните принцип разбиения интервала при данном поиске.
3. Назовите основные достоинства и недостатки данного метода поиска. Какова его вычислительная сложность?

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

- 1) графики исходных унимодальной и мультимодальной функций;
- 2) программную реализацию метода имитации отжига;
- 3) результаты работы метода для каждой из исходных функций;
- 4) отчет о лабораторной работе;
- 5) ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа № 4

Двумерный поиск для подбора коэффициентов простейшей нейронной сети на примере решения задачи линейной регрессии экспериментальных данных

Цель работы — ознакомиться с простейшей нейронной сетью и реализовать алгоритм поиска ее весовых коэффициентов на примере решения задачи регрессии экспериментальных данных.

Постановка задачи

В зависимости от варианта задания найти линейную регрессию функции $y(x)$ (коэффициенты наиболее подходящей прямой c , d) по набору ее N дискретных значений, заданных равномерно на интервале $[a, b]$ со случайными ошибками $e_i = \text{Arnd}(-0,5; 0,5)$. Выполнить расчет параметров c , d градиентным методом. Провести двумерный пассивный поиск оптимальных весовых коэффициентов нейронной сети (НС) регрессии.

Варианты заданий приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Варианты заданий

Номер варианта	c	d	a	b	N	A	Алгоритм поиска	
							c	d
1	3	1	-2	2	16	2	Пассивный	Золотое сечение
2	-4	2	-1	2	12	5	То же	Фибоначчи
3	0	3	-4	2	24	0,1	»	Дихотомия
4	-0,5	0	-2	2	16	2	»	Случайный
5	-500	200	0	10	24	1000	МНК	МНК
6	0,5	0	-2	1	20	1	Дихотомия	Пассивный
7	8	0	-4	2	24	10	Золотое сечение	То же
8	3	1	-1	3	16	3	Фибоначчи	»
9	-4	2	-3	3	12	6	Дихотомия	Фибоначчи
10	1	0	-2	2	24	2	То же	Золотое сечение
11	-10	0	-5	0	20	10	Золотое сечение	Дихотомия

Окончание табл. 4.1

Номер варианта	c	d	a	b	N	A	Алгоритм поиска	
							c	d
12	-1	3	0	3	10	3	Золотое сечение	Фибоначчи
13	1000	0	-5	5	20	2000	Фибоначчи	Дихотомия
14	-3	1	-3	0	8	3	То же	Золотое сечение
15	0,1	2	-5	0	32	0,2	МНК	МНК
16	-5	5	0	4	16	2	Дихотомия	Случайный
17	-0,5	2	-2	1	20	0,4	Золотое сечение	То же
18	-1	3	-1	2	8	1	Фибоначчи	»
19	-3	-2	-2	2	20	3	Пассивный	Пассивный
20	1	3	-2	2	10	1	МНК	МНК
21	-2	4	0	2	20	2	Случайный	Пассивный
22	-3	3	-2	2	16	1,5	То же	Дихотомия
23	1	3	1	2	16	0,2	»	Золотое сечение
24	2	2	-1	1	10	0,5	»	Фибоначчи
25	-1	3	-1	2	8	2	МНК	МНК

Основные теоретические сведения

Пусть имеется набор экспериментальных данных (x_i, t_i) ($i = \overline{1, N}$). Предположим, что имеется некоторая неизвестная зависимость $t_i = y(x_i)$. В первом приближении можно принять гипотезу о линейной зависимости (линейной регрессии) вида

$$y(x) = cx + d. \quad (4.1)$$

В качестве регрессионной модели выберем простейшую нейронную сеть* (рис. 4.1) с линейной функцией активации единственного нейрона:

$$f(\text{net}) = \text{net},$$

где net — комбинированный вход нейронной сети.

Алгоритм функционирования нейронной сети имеет вид

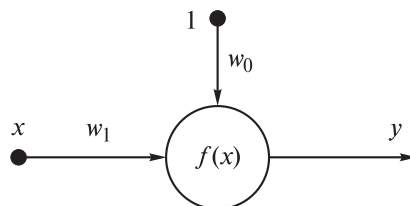


Рис. 4.1. Архитектура нейронной сети

*Басараб М.А., Коннова Н.С. Интеллектуальные технологии на основе искусственных нейронных сетей. Методические указания к выполнению лабораторных работ. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.

$$\text{net} = w_1 x + 1 \cdot w_0; \quad y(\text{net}) = f(\text{net}), \quad (4.2)$$

где w_1, w_0 — синтетические веса; y — *выход* нейронной сети.

Таким образом, комбинированный вход нейронной сети представляет собой линейную комбинацию входных сигналов (один из которых является постоянным *смещением*, равным единице) с *синаптическими весами* w_1, w_0 .

Из (4.2) следует, что, для того чтобы настроить нейронную сеть на выдачу выходного сигнала (4.1), достаточно отождествить веса с искомыми параметрами регрессии (4.1):

$$w_1 \equiv c; \quad w_0 \equiv d. \quad (4.3)$$

Теперь задача заключается в оптимальной настройке неизвестных весовых коэффициентов нейронной сети (см. (4.3)) (*обучение нейронной сети*) по экспериментальной выборке (x_i, t_i) , $(i = \overline{1, N})$.

В модели линейной регрессии параметры (4.3) должны быть выбраны таким образом, чтобы минимизировать сумму квадратов ошибок для всех точек (принцип наименьших квадратов):

$$E^2(w_1, w_0) = \sum_{i=1}^N [y(x_i) - t_i]^2 \rightarrow \min_{c, d}. \quad (4.4)$$

Следует отметить, что даже если гипотеза о линейной зависимости между переменными x, y верна, необязательно функция ошибки (см. (4.4)) будет *обращаться нуль*, поскольку в процессе эксперимента реальные данные могут быть получены с погрешностями e_i :

$$t_i = cx_i + d + e_i. \quad (4.5)$$

После подстановки (4.1) в (4.2) легко видеть, что функция двух переменных $E^2(c, d)$ является унимодальной. Для нахождения ее минимума можно использовать как градиентные, так и прямые методы поиска.

При *градиентном методе поиска* после подстановки (4.1) в (4.2) и приравнивания частных производных полученного выражения по c, d к нулю получим теоретические оценки коэффициентов регрессии (*метод наименьших квадратов* — МНК):

$$c^* = \frac{N \sum_i x_i t_i - \sum_i x_i \sum_i t_i}{N \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}; \quad d^* = \frac{\sum_i t_i - c^* \sum_i x_i}{N}. \quad (4.6)$$

Рассмотрим *прямой пассивный поиск*. Градиентные методы обучения нейронной сети, в частности метод Видроу–Хоффа, практически представляют собой численную реализацию МНК, точность которой зависит от числа *эпох обучения* (итераций). Несмотря на то, что для рассматриваемой задачи такой подход эффективен, его обобщение на случай более сложных архитектур ней-

ронных сетей может привести к вычислительной неустойчивости, а также к проблемам, связанным с быстродействием вычислений.

Рассмотрим подход, основанный на неградиентном прямом методе пассивного поиска экстремума функции ошибки (см. (4.2)).

Равномерно разобьем предположительные интервалы изменения иско-
мых параметров регрессии на двумерной сетке:

$$\begin{aligned} c_m &= c_{\min} + \frac{c_{\max} - c_{\min}}{N_1 - 1} m, \quad m = 0, \dots, N_1 - 1; \\ d_n &= d_{\min} + \frac{d_{\max} - d_{\min}}{N_2 - 1} n, \quad n = 0, \dots, N_2 - 1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Значения c_{\min} , c_{\max} и d_{\min} , d_{\max} следует подобрать самостоятельно исходя из экспериментальных данных соответствующего варианта.

При пассивном двумерном поиске необходимо сначала последовательно для каждого фиксированного значения c_m , $m = 0, \dots, N_1 - 1$, осуществлять процедуру одномерного пассивного поиска оптимальных параметров:

$$d'_m = \arg \min_{n=0, \dots, N_2-1} E^2(c_m, d_n). \quad (4.8)$$

Затем следует выбрать то значение c_m , которое обеспечивает минимум квадратичной ошибки:

$$c^* = \arg \min_{m=0, \dots, N_1-1} E^2(c_m, d'_m). \quad (4.9)$$

Рассчитав

$$(c^*, d^*) = \arg \min_{m=0, \dots, N_1-1} \min_{n=0, \dots, N_2-1} E^2(c_m, d_n), \quad (4.10)$$

получим решение задачи.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Рассчитайте равномерно распределенные на заданном по варианту интервале точки (N дискретных значений, число N вводит пользователь программы).
2. Постройте график заданной по варианту функций $f(x)$.
3. С помощью генератора псевдослучайных чисел с заданными параметрами осуществите зашумление рассчитанных в п. 1 точек, далее используйте их при регрессии.
4. Отобразите эти зашумленные точки на графике, построенном в п. 2.
5. Реализуйте программно описанную в разделе «Основные теоретические сведения» нейросетевую модель.

6. Используя заданные по варианту методы, осуществите поиск параметров c^* , d^* .
7. Постройте график полученной в п. 6 приближенной регрессии.
8. Вычислите и выведите на экран получившуюся погрешность приближения, используя рассчитанные с помощью найденных параметров c^* , d^* точки, и исходные отсчеты.

Пример выполнения лабораторной работы

Рассмотрим линейную регрессию (см. (4.1)) на интервале $a = 0$, $b = 3$ с известными параметрами

$$c = 0,5; \quad d = 2.$$

Набор данных содержит $N = 32$ отсчета.

При отсутствии шума ($A = 0$) МНК дает точные значения параметров регрессии (4.3): $c^* = c$; $d^* = d$.

Графики на рис. 4.2 иллюстрируют погрешности приближения в условиях шума (полужирная линия — точная зависимость, круглые маркеры — зашумленные отсчеты, тонкая сплошная линия — нейросетевая регрессия).

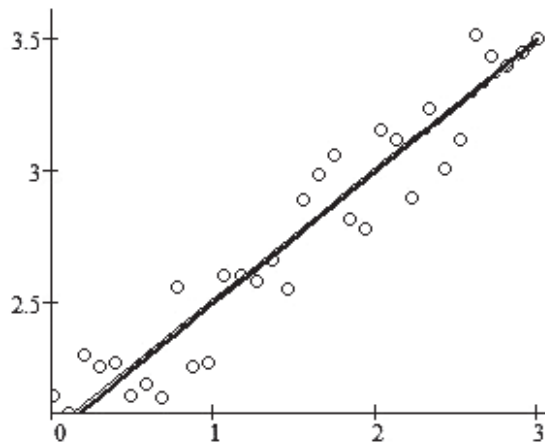


Рис. 4.2. Нейросетевая линейная регрессия экспериментальных данных (скриншот)

Аналогичные решения получаются по указанному в варианте алгоритмам поиска.

Содержание отчета о лабораторной работе

Отчет должен включать в себя:

- 1) титульный лист;
- 2) цель работы;
- 3) постановку задачи;
- 4) результаты эксперимента (аппроксимируемая функция $f(x)$, зашумленная функция и их графики);
- 5) график функции с параметрами, найденными по МНК, СКО;
- 6) результат обучения — набор вычисленных синаптических весов c^* , d^* для функции без шума и с шумом, СКО, графики аппроксимирующей и аппроксимируемой функций;
- 7) выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем суть метода наименьших квадратов?
2. Сформулируйте нейросетевой подход к задачам регрессии.
3. Объясните суть процедуры двумерного пассивного поиска.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

- 1) программную реализацию нейросети, аппроксимирующей заданную в варианте функцию;
- 2) результаты поиска весов;
- 3) отчет о лабораторной работе;
- 4) ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа № 5

Исследование генетических алгоритмов в задачах поиска экстремумов

Цель работы — изучить основные принципы действия генетических алгоритмов на примере решения задач оптимизации функций двух переменных.

Постановка задачи

Найти максимум функции $f(x, y)$ в области D с помощью простого генетического алгоритма. За исходную популяцию принять четыре случайных точки. Хромосома каждой особи состоит из двух генов — значений координат x, y . В качестве потомков выбрать результат скрещивания лучшего решения со вторым и третьим в порядке убывания значений функции приспособленности с последующей случайной мутацией обоих генов. В качестве критерия остановки эволюционного процесса задаться номером конечной популяции ($N \sim 10^1, \dots, 10^2$). Визуализировать результаты расчетов.

Варианты заданий приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Варианты заданий

Номер варианта	Вид функции $f(x, y)$	Область допустимых значений D
1	$\sin x / (1 + x^2 + y^2)$	$(-2, 2) \cdot (-2, 2)$
2	$\cos x \cos y \exp(y / 2)$	$(-2, 2) \cdot (-2, 2)$
3	$\exp(-x^2 - y^2) / (1 + x^2 + y^2)$	$(-2, 2) \cdot (-2, 2)$
4	$-\ln(1 + x^2 + y^2)$	$(-2, 2) \cdot (-2, 2)$
5	$\sin x \sin y / (1 + x^2 + y^2)$	$(0, 2) \cdot (-2, 2)$
6	$\cos x \cos y$	$(-2, 2) \cdot (-2, 2)$
7	$\exp(-x^2 - y^2)$	$(-2, 2) \cdot (-2, 2)$
8	$\sin x \exp(-x^2 - y^2)$	$(-2, 2) \cdot (-2, 2)$
9	$-\sqrt{\ln(1 + x^2 + y^2)}$	$(-1, 1) \cdot (-1, 1)$
10	$\sin^2 x / (1 + x^2 + y^2)$	$(0, 2) \cdot (-2, 2)$

Окончание табл. 5.1

Номер варианта	Вид функции $f(x, y)$	Область допустимых значений D
11	$1 / \sqrt{0,01 + x^2 + y^2}$	$(-1,1) \cdot (-1,1)$
12	$1 / (1 + x^2 + y^2)$	$(-2,2) \cdot (-2,2)$
13	$\cos x \cos y \exp(-x^2 - y^2)$	$(-2,2) \cdot (-2,2)$
14	$-\ln(1 + x^2 + y^2) + x^2 / 2$	$(-1,1) \cdot (-1,1)$
15	$\sin x \exp(-y^2) / (1 + x^2 + y^2)$	$(0,2) \cdot (-2,2)$
16	$-\cos x \cos y \ln(1 + x^2 + y^2)$	$(-1,1) \cdot (-1,1)$

Основные теоретические сведения

Генетические алгоритмы — это алгоритмы, которые позволяют найти удовлетворительное решение аналитически неразрешимых проблем через последовательный подбор и комбинирование искоемых параметров с использованием механизмов, напоминающих биологическую эволюцию. Они объединяют различные варианты применения эволюционных принципов для достижения поставленной цели.

Рассмотрим последовательность решения задачи оптимизации с помощью генетического алгоритма.

Сформулируем поставленную задачу как задачу нахождения максимума некоторой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, называемой *функцией приспособленности* (Fitness Function). Она должна быть определена на ограниченной области определения и принимать неотрицательные значения. При этом совершенно не требуются непрерывность и дифференцируемость.

Каждый параметр функции приспособленности кодируется строкой битов. В нашем случае параметрами являются координаты точек.

Особью будет называться строка, являющаяся конкатенацией строк упорядоченного набора параметров:

$$\begin{array}{cccccc} 1010 & 10110 & 101 & \dots & 10101 \\ | & | & | & | & | \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{array}$$

Популяция — совокупность всех особей, представляющих собой строки, кодирующие одно из решений задачи.

С помощью функции приспособленности наиболее приспособленные особи (более подходящие решения) получают возможность скрещиваться и давать потомство, наимудшие особи (плохие решения) удаляются из популяции и не дают потомства.

Таким образом, приспособленность нового поколения в среднем выше предыдущего.

В классическом генетическом алгоритме:

- начальная популяция формируется случайным образом;
- размер популяции (количество особей N) фиксируется и не изменяется в течение работы всего алгоритма;

- каждая особь генерируется как случайная L -битная строка, где L — длина кодировки особи;
- длина кодировки для всех особей одинакова.

Шаг генетического алгоритма состоит из трех стадий:

- 1) генерация промежуточной популяции (*intermediate generation*) путем отбора (*selection*) текущего поколения;
- 2) скрещивание (*recombination*) особей промежуточной популяции путем *кроссовера* (*crossover*), что приводит к формированию нового поколения;
- 3) мутация нового поколения.

Критерии останова генетического алгоритма:

- достижение заданного номера поколения;
- схождение (*convergence*) популяции. Схождением называется состояние популяции, когда все строки находятся в области некоторого экстремума и почти одинаковы. Таким образом, схождение популяции означает, что достигнуто решение, близкое к оптимальному. Итоговым решением задачи может служить наиболее приспособленная особь последнего поколения;
- достижение заданного лимита времени работы алгоритма;
- схождение функции приспособленности (фитнес-функции) и т. д.

Виды алгоритмов отбора (селекции — *selection*):

- рулеточный (пропорциональный отбор), вероятность выбора особи составляет

$$p_{sl_i} = \frac{\text{Fit}_i}{\sum_{k=1}^N \text{Fit}_k},$$

где Fit_k — значение функции i -й особи;

- элитарный;
- дальнее родство (ДР) — ближнее родство (БР):

$$\text{dist}_{\text{HAM}}(x_i, x_j) > R \sim \text{ДР};$$

$$\text{dist}_{\text{HAM}}(x_i, x_j) < R \sim \text{БР},$$

где dist_{HAM} — расстояние элемента; R — радиус скрещивания;

$$\text{ДР} \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \text{БР};$$

- случайный;
- детерминистский, выбираются особи, для которых выполняется условие

$$\text{Fit}_i \geq \text{Fit}_{\text{ave}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{Fit}_k,$$

где Fit_{ave} — среднее значение функции;

- гибридный (турнирный и др.).

Виды операторов кроссовера (crossover):

- однотоочечный;
- двухточечный;
- N -точечный (случайный и детерминированный);
- упорядоченный;
- «жадный» и др.

Виды операторов мутации:

- инвертирование гена;
- обмен генов: однотоочечный, двухточечный, N -точечный;
- инверсия сегмента;
- транспозиция;
- транслокация и др.

В самом общем виде схема генетического алгоритма (непростого) представлена на рис. 5.1, где R.I.P. — от англ. Rest in Peace (покойся с миром).

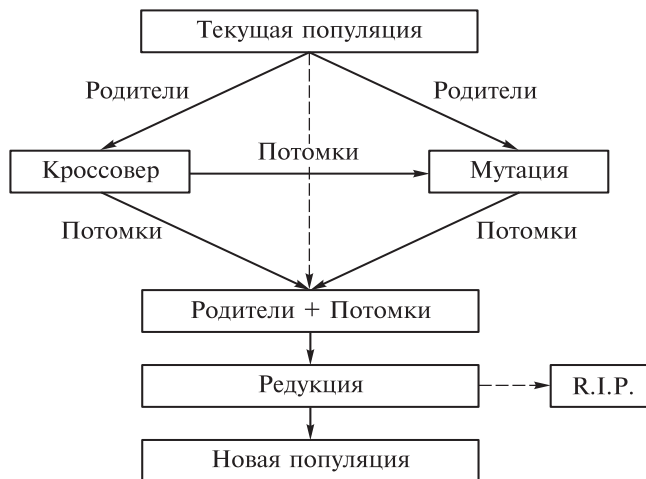


Рис. 5.1. Общая схема генетических алгоритмов

Класс генетических алгоритмов весьма широк, в том числе за счет использования различных вариаций и комбинаций видов операторов селекции, кроссовера и мутации.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Постройте график заданной по варианту функции-поверхности $f(x, y)$.
2. Сгенерируйте случайным образом (в заданном диапазоне значений) четыре стартовые особи, имеющие по две хромосомы каждая (координаты x, y). Рассчитайте значения фитнес-функции.
3. Выполните селекцию и скрещивание особей согласно заданию. Осуществите мутацию особей с заданной вероятностью. Сформируйте новую популяцию.

4. Повторите процедуру простого генетического алгоритма до выполнения критерия останова по заданию.

5. Визуализируйте всех особей первых десяти поколений, а также выведите на экран таблицу со значениями их хромосом и фитнес-функции. Добавьте в таблицу особей каждого 10-го поколения для $N \sim 10^1, \dots, 10^2$.

6. Сравните найденный с использованием генетического алгоритма оптимум функции двух переменных с теоретически ожидаемым.

Пример выполнения лабораторной работы

Пусть задана функция $f(x, y) = \exp(-x^2) \exp(-y^2) / (1 + x^2 + y^2)$ на области $D = (-2, 2) \cdot (-2, 2)$. График функции приведен на рис. 5.2. На графике видно, что реальное максимальное (искомое) значение функции находится в точке $[0; 0]$ и равно 1. Используем эти сведения для проверки полученного в ходе работы решения.

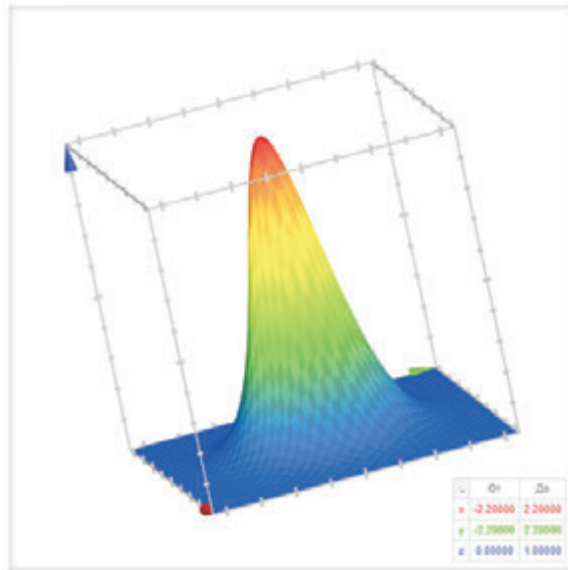


Рис. 5.2. График функции $f(x, y)$ (скриншот)

По условию задачи требуется написать программу, реализующую создание четырех особей, имеющих по две хромосомы каждая (координаты x, y). При этом создание особей происходит случайным способом (невоспроизводимый генератор псевдослучайных чисел — ГПСЧ). После создания особей программа должна выполнить расчет среднего и максимального значения ФИТ-функции* для популяции. Далее программа проводит селекцию (отбор)

*FIT — соответствует обозначению фитнес-функции в программе.

и последующий кроссовер особей в соответствии с условием задания. При этом следует учесть мутацию (положим вероятность мутации равной 25 %). Данные действия повторяются для каждого поколения (итерации алгоритма) для достижения критерия останова алгоритма, в данном случае — номера поколения N .

Сгенерированные числа, а также среднее и максимальное значения FIT-функции популяции для поколений $N = 1...10$ представлены в сводной табл. 5.2.

Таблица 5.2

Популяции для первых десяти итераций алгоритма

Номер поколения	x	y	FIT	Максимальное значение FIT	Среднее значение FIT
0 (исходное)	-0,276418	-2,02194	0,00300794	0,985333	0,301567
	0,896396	0,306229	0,214867		
	-1,84563	0,862288	0,00306143		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
1	-0,0764733	0,306229	0,82317	0,82317	0,337132
	0,896396	-0,0394116	0,247664		
	-0,0764733	0,862288	0,270183		
	-1,84563	-0,0394116	0,00751159		
2	-0,0764733	0,862288	0,270183	0,985333	0,573388
	-0,0764733	0,306229	0,82317		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	0,896396	0,306229	0,214867		
3	-0,0764733	0,306229	0,985333	0,985333	0,766005
	-0,0764733	-0,0394116	0,82317		
	-0,0764733	0,862288	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,270183		
4	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,944792
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	0,306229	0,82317		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
5	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
6	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		

Окончание табл. 5.2

Номер поколения	x	y	FIT	Максимальное значение FIT	Среднее значение FIT
7	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
8	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
9	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
10	-0,0764733	-0,0394116	0,985333	0,985333	0,985333
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		
	-0,0764733	-0,0394116	0,985333		

Для большей наглядности рекомендуется построить графики, содержащие визуализацию всех особей популяции по поколениям. На них можно увидеть, как положение особей сгущается вокруг реального положения искомого экстремума. На рис. 5.3 приведен график зависимости среднего значения FIT от номера популяции.

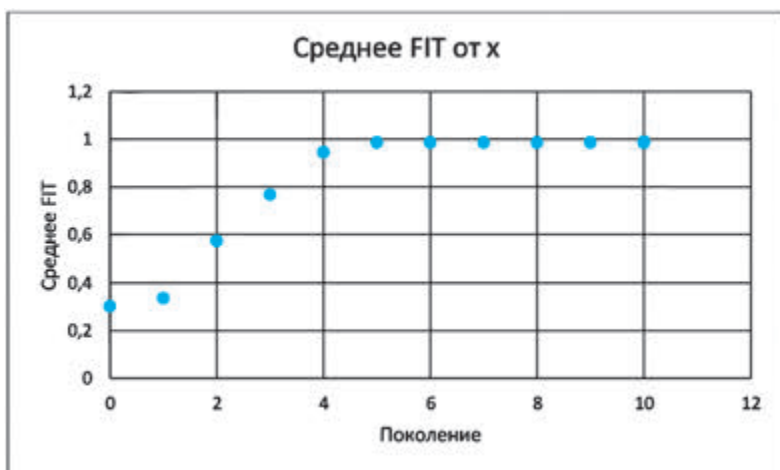


Рис. 5.3. График зависимости среднего значения FIT от номера популяции (скриншот)

Из табл. 5.2, а также из рис. 5.3 следует, что уже к пятому поколению происходит схождение алгоритма и хромосом всех особей в популяции, а результат вычисления приближен к искомому. Высокая скорость сходимости (что в задачах с большим количеством экстремумов может стать проблемой) обусловлена использованием элитарного механизма селекции особей для скрещивания. Решением этой проблемы может стать турнирный метод селекции, когда случайным образом особи поколения разбиваются на n групп по k особей и при этом в каждой группе проводится селекция. После этого все отобранные особи объединяются для кроссовера.

Содержание отчета о лабораторной работе

Отчет должен включать в себя:

- 1) титульный лист;
- 2) цель работы;
- 3) постановку задачи;
- 4) график заданной поверхности;
- 5) хромосомы всех особей, значения их фитнес-функций, максимальное и среднее значения для популяции каждого поколения для $N = 1..10$;
- 6) визуализацию популяций;
- 7) табличные значения параметров популяций для $N = 10...100$ с шагом 10;
- 8) выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы и задания

1. Каковы основные стадии классического генетического алгоритма?
2. В чем основная идея эволюционных алгоритмов?
3. Опишите основные преимущества и недостатки, а также область применимости генетических алгоритмов.
4. Перечислите виды алгоритмов селекции, кроссовера, мутации.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

- 1) программную реализацию генетического алгоритма;
- 2) результаты численного эксперимента для заданного варианта исходных данных;
- 3) графики исходной функции и популяции каждого поколения;
- 4) отчет о лабораторной работе;
- 5) ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа № 6

Решение задачи многокритериальной оптимизации

Цель работы — изучить постановку задачи многокритериальной оптимизации (МКО); овладеть навыками решения задач МКО с помощью различных методов, выполнить сравнительный анализ результатов, полученных с помощью разных методов.

Постановка задачи

Выбрать лучшую из альтернатив решения заданного варианта задачи МКО, используя следующие методы: 1) замена критериев ограничениями; 2) взвешивание и объединение критериев; 3) формирование и сужение множества Парето; 4) анализ иерархий.

Варианты заданий приведены в табл. 6.1. Заменить указанные в таблице критерии на обратные или альтернативные нельзя.

Таблица 6.1

Исходные данные

Номер варианта	Задача, альтернативы	Критерии	Описание предпочтений
1	Покупка автомобиля: A. Suzuki; B. Mitsubishi; C. Honda; D. Toyota	1. Стоимость. 2. Расходы на обслуживание. 3. Расход бензина. 4. Комфорт	Стоимость: Suzuki существенно дороже всех, Honda немного дороже Mitsubishi, Toyota существенно дешевле всех. Расходы на обслуживание: Mitsubishi дороже всех, Toyota и Suzuki примерно равны, Honda дешевле всех. Расход бензина: самый высокий у Suzuki, немного меньше у Honda, существенно меньше у Mitsubishi, самый низкий — у Toyota. Комфорт: самая комфортная — Toyota, чуть менее — Mitsubishi, существенно хуже — Honda, самая некомфортная — Suzuki.

Продолжение табл. 6.1

Номер варианта	Задача, альтернативы	Критерии	Описание предпочтений
2	Выбор университета для поступления: А. Oxford; В. МГУ; С. МФТИ; D. СГУ	1. Размер стипендии. 2. Квалификация преподавателей. 3. Стоимость жизни в городе. 4. Престижность диплома	Стипендия: Oxford не платит стипендии студентам, в СГУ — стипендия небольшая, в МФТИ — больше, в МГУ — существенно больше. Преподаватели: самые квалифицированные — в Oxford, чуть менее квалифицированные — в МГУ, менее — в МФТИ, самая низкая квалификация — в СГУ. Стоимость жизни: самая низкая — в г. Саратове, существенно выше — в Долгопрудном, гораздо выше — в Москве, самая высокая — в Лондоне. Диплом: самый престижный — Oxford, немного менее — МГУ, еще чуть менее — МФТИ, самый непрестижный — СГУ
3	Выбор спутницы жизни: А. Татьяна; В. Лариса; С. Наталья; D. Ольга	1. Внешность. 2. Финансовые запросы. 3. Домовитость. 4. Характер	Внешность: Лариса — красавица, Татьяна — довольно миловидна, Ольга — симпатична и стройна, Наталья — менее привлекательна. Финансовые запросы: самые большие — у Ольги, чуть менее — у Татьяны, выше среднего — у Натальи, ниже среднего — у Ларисы. Домовитость: самая хозяйственная — Наталья, чуть менее — Ольга, существенно менее — Татьяна, еще менее — Лариса. Характер: Лариса — мягкая и покладистая, Наталья — строгая, но справедливая, Татьяна — душа компании, но себе на уме, Ольга — с диктаторскими наклонностями
4	Выбор дороги: А. Автострада; В. Шоссе; С. Грунтовка; D. Проселок	1. Расстояние. 2. Качество покрытия. 3. Контроль. 4. Инфраструктура	Расстояние: самое большое — по автостраде, чуть меньше — по шоссе, существенно меньше — по грунтовке, самое короткое — по проселку. Качество покрытия: лучшее — на автостраде, существенно хуже — на шоссе, еще хуже — на грунтовке, отсутствует — на проселке. Контроль: самый жесткий — на автостраде, на шоссе — почти такой же жесткий, намного мягче — на грунтовке, на проселке — практически отсутствует. Инфраструктура: самая развитая — на шоссе, чуть менее — на автостраде, существенно менее — на грунтовке, на проселке — практически отсутствует

Продолжение табл. 6.1

Номер варианта	Задача, альтернативы	Критерии	Описание предпочтений
5	Выбор породы дерева для строительства: А. Береза. В. Сосна. С. Дуб. D. Лиственница	1. Цена за 1 м ³ . 2. Легкость обработки. 3. Долговечность. 4. Водостойкость	Цена: самый дорогой — дуб, лиственница — немного дешевле, сосна — еще дешевле, береза — самая дешевая. Обработка: самая легкая в обработке — береза, сосна — существенно тяжелее, дуб — еще тяжелее, самая тяжелая в обработке — лиственница. Долговечность: самая долговечная — лиственница, чуть менее — дуб, существенно менее — сосна, самая недолговечная — береза. Водостойкость: самая водостойкая — лиственница, чуть менее — сосна, существенно менее — дуб, еще менее — береза
6	Выбор устройства для работы: А. Компьютер. В. Ноутбук. С. Планшет. D. Смартфон	1. Начальная цена. 2. Стоимость обслуживания. 3. Объем памяти. 4. Размер экрана	Цена: компьютер и ноутбук сравнимы по стоимости, смартфон — немного дешевле, планшет — существенно дешевле. Обслуживание: самый дорогой — смартфон, планшет — немного дешевле, ноутбук — еще дешевле, самый дешевый — компьютер. Объем памяти: компьютер и ноутбук имеют и внешнюю, и оперативную память сравнимой емкости, планшет и смартфон — только оперативную память меньшей емкости. Экран: самый большой — у компьютера, немного меньше — у ноутбука, существенно меньше — у планшета, самый маленький — у смартфона
7	Выбор спутника жизни: А. Анатолий. В. Александр. С. Владимир. D. Сергей	1. Образование. 2. Физическая подготовка. 3. Внешность. 4. Характер	Образование: Сергей учится в аспирантуре, Александр закончил технический вуз, Владимир — военное училище, Анатолий — экономический колледж. Физподготовка: самый физически крепкий — Владимир, Александр и Сергей уступают немного, Анатолий — существенно. Внешность: Анатолий и Владимир — красавцы, Александр и Сергей — довольно симпатичны. Характер: Анатолий — повеса и сердцеед, Александр — оптимист и трудяга, Владимир — лидер и карьерист, Сергей — умница и самоед

Окончание табл. 6.1

Номер варианта	Задача, альтернативы	Критерии	Описание предпочтений
8	Выбор санатория: А. «Липецк», г. Липецк. В. «Сосновый бор», Тамбовский район. С. «Лесная жемчужина», г. Котовск. D. «Сосны», г. Пенза	1. Качество лечения. 2. Уровень сервиса. 3. Качество питания. 4. Расстояние от Москвы	Лечение: самое качественное — в «Липецке», чуть хуже — в «Соснах», еще хуже — в «Лесной жемчужине», самое некачественное — в «Сосновом бору». Сервис: лучший — в «Сосновом бору», немного хуже — в «Соснах», существенно хуже — в «Липецке» и «Лесной жемчужине». Питание: самое качественное — в «Соснах», немного хуже — в «Лесной жемчужине», существенно хуже — в «Липецке» и «Сосновом бору». Расстояние: дальше всего — до Пензы, до Липецка существенно ближе, «Сосновый бор» и «Лесная жемчужина» — среднее
9	Выбор интернет-провайдера: А. МГТС. В. Ростелеком. С. Акадо. D. Qwerty	1. Стоимость пакета «Эконом+ТВ». 2. Скорость. 3. Служба поддержки. 4. Качество услуг	Стоимость: самая большая — у «Ростелекома», немного меньше — у «МГТС», существенно меньше — у «Qwerty», самая маленькая — у «Акадо». Скорость: самый скоростной — «МГТС», чуть менее — «Qwerty», еще меньше — у «Ростелекома», самый медленный — «Акадо». Служба поддержки: самая оперативная и компетентная — у «МГТС», немного хуже — у «Акадо» и «Qwerty», самая плохая — у «Ростелекома». Услуги: лучшее качество — у «Qwerty», чуть хуже — у «Ростелекома», еще хуже — у «МГТС», самые некачественные — у «Акадо»
10	Выбор страны для поездки в отпуск: А. Испания. В. Турция. С. Куба. D. Индонезия	1. Цена тура (авиаперелет+проживание). 2. Удаленность от места жительства. 3. Качество пляжа. 4. Наличие интересных достопримечательностей	Цена: самая дорогая — Индонезия, Куба — немного дешевле, Испания — существенно дешевле, Турция — самая дешевая. Удаленность от места жительства: самая большая — у Индонезии, чуть ближе — Куба, Испания — существенно ближе, Турция — еще ближе. Качество пляжа: самый лучший — в Индонезии, немного хуже — на Кубе, еще менее — в Испании, наименее качественный — в Турции. Наличие интересных достопримечательностей: наибольшее количество — в Испании, существенно меньше — на Кубе, еще меньше — в Индонезии и меньше всего — в Турции

Основные теоретические сведения

Инженерные методы решения задач многокритериальной оптимизации заключаются в сведении задачи к однокритериальной и в решении ее известными алгоритмами однокритериальной оптимизации. Рассмотрим несколько методов.

Метод главного критерия

Одним из самых простых методов является *метод главного критерия* (замены критериев ограничениями). Как следует из названия, основная идея метода заключается в выборе одного из учитываемых критериев в качестве главного, оптимизируемого (на основе мнения лица, принимающего решение — ЛПР), а остальные критерии заменяются ограничениями. Ограничения, как правило, диктуются различными экономическими или технологическими соображениями и чаще всего задаются в виде «не менее X % от максимального значения по данному критерию среди всех альтернатив в задаче». Затем среди альтернатив, удовлетворяющих всем заданным ограничениям, выбирается та, значение главного критерия которой максимально (или минимально в зависимости от смысла задачи).

Взвешивание и объединение критериев. Другим подходом к поиску компромиссного решения задачи векторной оптимизации является сведение задачи к скалярной (однокритериальной) оптимизации с помощью свертки критериев: частные критерии $z_i(X)$, $X = (x_1, \dots, x_n)$ объединяются в обобщенный критерий $Z(X) = \Phi[z_1(X), z_2(X), \dots, z_m(X)]$, который затем оптимизируется. Существуют различные методы это выполнить, в том числе линейная свертка, мультипликативная и др. Наиболее распространенным обобщенным критерием является аддитивный — взвешенная сумма частных критериев.

Метод взвешенной суммы частных критериев. Обобщенный критерий записывается в виде

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m w_i z_i(X),$$

где w_i — весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq w_i \leq 1; \quad \sum_{i=1}^m w_i = 1.$$

Величина w_i — определяет важность i -го частного критерия, при этом более важному критерию приписывается больший вес.

Как правило, частные критерии имеют различную размерность, поэтому обобщенный критерий формируется из их нормированных значений: отношений «натуральных» частных критериев к некоторой нормирующей величине.

Варианты выбора нормирующего делителя:

- 1) директивные значения параметров, заданные заказчиком (указанные в техническом задании — ТЗ);
- 2) максимальные значения критериев, достигаемые в области допустимых решений (области D);
- 3) лучшие мировые достижения в данной области;
- 4) разность между максимальным и минимальным значениями критерия в области D :

$$\bar{z}_i(X) = \frac{z_i^{\max} - z_i(X)}{z_i^{\max} - z_i^{\min}}, \text{ или } \bar{z}_i(X) = \frac{z_i(X) - z_i^{\min}}{z_i^{\max} - z_i^{\min}}.$$

Нормированные критерии будем обозначать $\bar{z}_i(X)$, т. е. аддитивный критерий примет вид $Z(X) = \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X)$.

Если некоторые критерии требуется максимизировать, а другие минимизировать, следует изменить знак всех критериев одной из групп и решать задачу поиска минимума или максимума критерия $Z(X)$.

Пусть имеется два решения X_1 и X_2 . Для обоснования перехода от X_1 к X_2 необходимо вычислить сумму абсолютных изменений всех частных критериев:

$$\Delta Z = \sum_{i=1}^m w_i [\bar{z}_i(X_2) - \bar{z}_i(X_1)] = \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X_2) - \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X_1).$$

В случае $\Delta Z < 0$ решение X_2 признается лучшим, чем решение X_1 , если критерии $Z(X)$ минимизируются, а если максимизируется, то X_1 признается лучшим, чем X_2 . Тогда при поиске минимума $Z(X)$ оптимальному решению X_{opt} соответствует $\Delta Z \geq 0$ в случае перехода к любому другому решению X :

$$X : \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X) \geq \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X_{\text{opt}}),$$

а при поиске максимума $Z(X)$

$$\sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X) \leq \sum_{i=1}^m w_i \bar{z}_i(X_{\text{opt}}).$$

Таким образом, оптимальному решению соответствует минимум либо максимум суммы нормированных частных критериев.

Мультипликативная свертка

Теоретической основой использования мультипликативного обобщенного критерия задачи многокритериальной оптимизации является *принцип справедливой относительной компенсации*: справедливым следует считать такой ком-

промисс, когда суммарный уровень относительного снижения значений одного или нескольких критериев не превышает суммарного уровня относительного увеличения других критериев. Математическая формулировка условия оптимальности на основе этого принципа имеет вид

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Delta z_i(X)}{z_i(X)} = 0,$$

где $\Delta z_i(X)$ — приращение i -го критерия; $z_i(X)$ — его первоначальное значение.

Полагая $\Delta z_i(X) \ll z_i(X)$, можно записать

$$\sum_{i=1}^m \frac{\Delta z_i(X)}{z_i(X)} = \sum_{i=1}^m d(\ln z_i(X)) = d \ln \prod_{i=1}^m z_i(X) = 0,$$

откуда следует, что принцип справедливой относительной компенсации приводит к мультипликативному обобщенному критерию оптимальности

$$Z(X) = \prod_{i=1}^m z_i(X),$$

в который при неравноценности частных критериев вводятся весовые коэффициенты w_i :

$$Z(X) = \prod_{i=1}^m z_i^{w_i}(X).$$

Мультипликативный критерий иногда представляется в виде отношения

$$Z(X) = \frac{\prod_{i=1}^{m_1} z_i^+(X)}{\prod_{j=1}^{m_2} z_j^-(X)},$$

где в числителе перемножаются частные критерии, требующие максимизации и имеющие ограничения $z_i^+(X) \geq TT_i$, а в знаменателе — частные критерии, требующие минимизации и имеющие ограничения $z_j^-(X) \leq TT_j$; TT_i — значение технического требования, предъявленного к i -му критерию, $m_1 + m_2 = m$. Такая обобщенная целевая функция в дальнейшем подвергается максимизации.

Преимущество мультипликативного критерия заключается в том, что при его использовании не требуется нормирование частных критериев. Недостаточная величина одного частного критерия, которая может компенсироваться избыточной величиной другого, относится к недостатку.

Методы определения весовых коэффициентов

Вес критериев — самое тонкое место в проблеме многокритериального анализа в целом и приведенных выше методов в частности. Весовые коэффициенты (веса) w_i должны качественно отражать важность соответствующих частных критериев. Их значения выбираются исходя из анализа мирового уровня развития данной отрасли, из требований к проектируемому объекту и из существующих возможностей реализации этих требований.

Чаще всего веса назначают исходя из интуитивного представления о сравнительной важности критериев, но необходимы специальные процедуры получения весов. Наиболее популярны на практике методы экспертных оценок.

Метод ранжирования. Пусть экспертиза проводится группой из L экспертов, которые являются квалифицированными специалистами в той области, где принимается решение. Расставим частные критерии в порядке их важности. Цифрой 1 обозначают наиболее важный частный критерий, цифрой 2 — следующий по важности и т. д. Далее этот ранг 1 получает оценку m (число частных критериев), ранг 2 — оценку $(m - 1)$ и т. д. до ранга m , которому присваивается оценка 1. Обозначим полученные оценки r_{ik} , где i — номер эксперта, k — номер критерия. Значения элементов

$$r_i = \sum_{j=1}^L r_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Тогда весовые коэффициенты

$$w_i = \frac{r_i}{\sum_{i=1}^m r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Метод приписывания баллов. Эксперты оценивают важность частного критерия по шкале от 0 до 10, при этом разрешается оценивать важность дробными величинами или приписывать одну и ту же величину нескольким критериям. Обозначим h_{ji} балл j -го эксперта для i -го критерия, тогда вес i -го

критерия, установленный j -м экспертом, $r_{ji} = \frac{h_{ji}}{\sum_{i=1}^m h_{ji}}$, а значения весовых ко-

эффициентов определяются аналогично методу ранжирования.

Статистическая обработка результатов экспертных оценок. Если рассматривать результаты оценок каждого из экспертов как значения некоторой случайной величины, то к этим результатам можно применять методы математической статистики. Среднее значение оценки для i -го критерия выражает коллективное мнение группы экспертов. Степень согласованности мнений экспертов характеризуется дисперсией оценок

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L (r_{ji} - \bar{r}_i)^2.$$

Чем меньше значение дисперсии, тем с большей уверенностью можно опираться на значения η_i , $i=1, \dots, m$ как оценки степени важности частных критериев F_i , $i=1, \dots, m$. Весовые коэффициенты

$$w_i = \frac{\bar{r}_i}{\sum_{i=1}^m \bar{r}_i}, \quad i=1, \dots, m.$$

На достоверность экспертизы существенно влияют такие факторы, как численный состав экспертной группы, уровень компетентности экспертов, состав вопросов, представляемых экспертам, и т. д. Индивидуальные экспертные оценки также несут на себе печать случайности: настроение, самочувствие, обстановка, а также знание и опыт.

Формальные методы определения весовых коэффициентов — это приемы, позволяющие по информации о частных критериях оптимальности определять значения весовых коэффициентов w_i . Приведем два приема:

1. Для каждого частного критерия оптимальности F_i , $i=1, \dots, m$, вычисляется коэффициент относительного разброса по формуле

$$\delta_i = \frac{F_i^+ - F_i^-}{F_i^+} = 1 - \frac{F_i^-}{F_i^+},$$

где

$$F_i^- = \min_{X \in D} F_i(X), \quad F_i^+ = \max_{X \in D} F_i(X).$$

Весовые коэффициенты получают наибольшее значение для тех критериев, относительный разброс которых наиболее значителен:

$$w_i = \frac{\delta_i}{\sum_{k=1}^m \delta_k}, \quad i=1, \dots, m.$$

2. Пусть все $F_i^- \neq 0$, $i=1, \dots, m$. Рассматриваются коэффициенты

$$\beta_i(x) = \frac{F_i(x) - F_i^-}{F_i^-},$$

характеризующие отклонение частных критериев оптимальности от их наименьших значений, и важность i -го критерия зависит от выполнения неравенства

$$\beta_i \leq \xi_i. \quad (6.1)$$

Значения ξ_i , $i=1, \dots, m$, задаются ЛПР и характеризуют важность критериев (чем важнее критерий, тем меньше значение ξ_i).

Пусть R_i^* — наибольший радиус окрестности точки X_i^* — точки минимума i -го критерия оптимальности, точки которой x_1, \dots, x_n удовлетворяют неравенству (6.1):

$$R_i^* = \max_{X \in D} \left\{ \sum_{k=1}^n (x_k - x_k^*)^2 \mid \frac{F_i(x_1, \dots, x_n) - F_i^-}{F_i^-} \leq \xi_i \right\}.$$

Чем больше значение R_i^* , тем меньше выбирается значение весового коэффициента:

$$w_i = \frac{1/R_i^*}{\sum_{i=1}^m 1/R_i^*}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Метод попарных сравнений. Для самостоятельного выполнения анализа (без группы экспертов) рекомендуется следующий метод попарных сравнений критериев друг с другом:

$$f_i \succ f_j \Leftrightarrow \text{«цель } i \text{ важнее цели } j\text{»}.$$

Рассчитываются коэффициенты γ_{ij} :

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & f_i \succ f_j; \\ 0, & f_i \prec f_j; \\ 0,5 & f_i \sim f_j \end{cases}$$

(всего $m(m-1)/2$ значений).

Принимаются значения коэффициентов α_i :

$$\alpha_i = \sum_{j \neq i} \gamma_{ij}.$$

Метод Саати. Обобщением способа попарных сравнений является *метод Саати (метод анализа иерархий)*, где попарно сравниваются не только критерии между собой для определения их весовых коэффициентов, но и альтернативы друг с другом по принципу «каждая с каждой» по каждому из критериев. Реализация таких сравнений представлена в разделе «Пример выполнения лабораторной работы».

Формирование и сужение множества Парето

Рассмотрим следующий метод решения задачи многокритериальной оптимизации. Пусть для каждого решения $X = (x_1, \dots, x_n)$ из области D определен набор его оценок по всем критериям: $(z_1(X), z_2(X), \dots, z_m(X))$ — *векторная оценка* решения X . Сравнение двух любых решений представляет собой сравнение их векторных оценок. Далее будем считать, не нарушая общности, что оптимальным является решение, которому соответствует минимальное значение каждого частного критерия $z_i(X)$, $i = 1, \dots, m$.

При этом будем руководствоваться следующими правилами.

1. Решение X_1 доминирует решение X_2 , если

$$z_i(X_1) \leq z_i(X_2) \forall i = 1, \dots, m,$$

и хотя бы для одного (j -го) критерия

$$z_j(X_1) < z_j(X_2),$$

т. е. переход от X_2 к X_1 не приведет к росту значения какого-либо критерия, но значение одного из критериев точно уменьшится.

2. Решение, не доминируемое никаким другим решением, называется *Парето-оптимальным*. Множество таких решений называется *множеством Парето* (обозначается P , $P \subset D$). Парето-оптимальные решения располагаются между решениями, оптимальными с точки зрения каждого частного критерия.

3. Множество векторных оценок, соответствующих множеству D , называется *критериальным пространством* Y_D , множество Парето — *областью компромиссов* Y_P , множество доминируемых решений — *областью согласия* Y_C .

В области согласия Y_C нет противоречий между частными критериями оптимальности, т. е. в этой области существует решение, оптимальное с точки зрения всех критериев (рис. 6.1, а). В области компромиссов Y_P частные критерии противостоят друг другу: минимум по каждому из них соответствует различным Парето-оптимальным решениям (рис. 6.1, б).

Оптимальность по Парето означает, что невозможно улучшить значение одного из частных критериев, не ухудшая значения хотя бы одного из остальных.

Рассмотрим пример построения множества Парето.

Пусть множество D состоит из 11 решений, оцениваемых двумя критериями. Векторные оценки решений следующие:

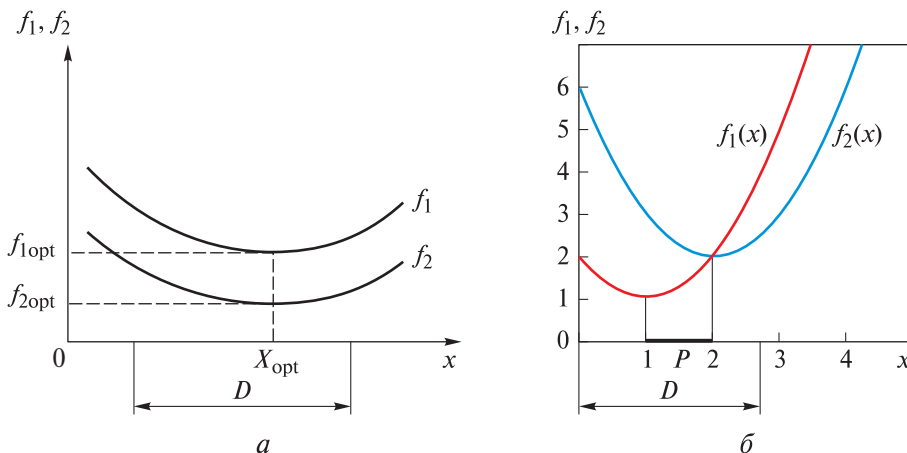


Рис. 6.1. Отсутствие (а) и наличие (б) противоречий между частными критериями

$$\begin{aligned}
 Z(X_1) &= (2; 4); Z(X_2) = (3; 5); Z(X_3) = (3; 3); Z(X_4) = (5; 2); \\
 Z(X_5) &= (4; 3); Z(X_6) = (1; 3); Z(X_7) = (2; 3); Z(X_8) = (3; 2); \\
 Z(X_9) &= (2; 2); Z(X_{10}) = (3; 1); Z(X_{11}) = (2; 1).
 \end{aligned}$$

Критериальное пространство иллюстрирует рис. 6.2, а. Множество Парето образуют решения, лежащие на правой верхней или левой нижней границе области D : если оба критерия необходимо максимизировать, то множество Парето образуют решения X_2, X_4, X_5 , а если минимизировать — то решения X_6, X_{11} .

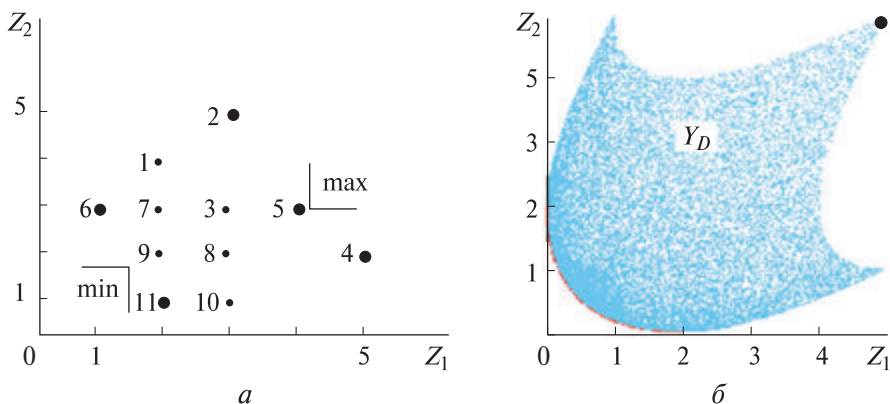


Рис. 6.2. Критериальное пространство (а) и множество Парето (б)

Замечания. 1. Для определения множества Парето используют правило «уголка»: уголок вида \perp используется для определения области компромиссов в критериальном пространстве, когда критерии максимизируются, а уголок \lrcorner — когда минимизируются [4].

2. В случае, когда множество D является непрерывным, критериальное пространство представляет собой некоторую область на плоскости (затенена на рис. 6.2, б). Множество Парето в данном случае представляет собой часть границы области Y_D : если критерии минимизируются — «юго-западную границу», если максимизируются — «северо-восточную».

3. Если область Y_D невыпуклая, ее Парето-оптимальная граница может состоять из отдельных линий и/или точек. На рис. 6.2, б для случая максимизации критериев это правый верхний пик.

Множество Парето в двумерном пространстве критериев ($m = 2$) называется *компромиссной кривой*. Если $(y_1^{(1)}, y_1^{(2)})$ и $(y_2^{(1)}, y_2^{(2)})$ — произвольные точки, принадлежащие компромиссной кривой (КК), и $y_1^{(1)} < y_2^{(1)}$, то $y_1^{(1)} > y_2^{(2)}$, т. е. в двумерном представлении критериального пространства КК не содержит ни горизонтальных, ни вертикальных отрезков. Она может состоять из

несвязных отрезков, содержать изолированные точки и представляет собой геометрическое место точек соприкосновения поверхностей уровня $z_1(X) = b_1$ и $z_2(X) = b_2$, в которых справедливо равенство:

$$\text{grad} z_1 = -\delta \text{grad} z_2, \quad 0 \leq \delta \leq \infty.$$

Если функции $z_1(X)$ и $z_2(X)$ дифференцируемы, то равенство

$$\text{grad} z_1 = -\delta \text{grad} z_2$$

эквивалентно системе алгебраических уравнений

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_j} = -\delta \frac{\partial z_2}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

которая определяет кривую в пространстве параметров

$$x_1 = \varphi_1(\delta), \dots, x_n = \varphi_n(\delta).$$

Компромиссная кривая представляет собой участок этой кривой, на котором $\delta \geq 0$, принадлежащий множеству D , и определяется параметрическими уравнениями:

$$z_1 = z_1(\varphi_1(\delta), \dots, \varphi_n(\delta)), \quad z_2 = z_2(\varphi_1(\delta), \dots, \varphi_n(\delta)), \quad \delta \geq 0.$$

Рассмотрим способы сужения множества Парето. *Оптимально-компромиссным решением* называется одно из Парето-оптимальных, предпочтительное с точки зрения ЛПР. Выбор ЛПР зависит от имеющейся информации о важности частных критериев.

Для выбора оптимально-компромиссного решения в каждой конкретной многокритериальной задаче необходимо использовать дополнительную информацию, которая при формировании совокупности критериев осталась неформализованной и потому неиспользованной.

Способы сужения множества Парето с использованием дополнительной информации:

1) *указание граничных значений критериев*. Дополнительная информация в этом случае имеет вид

$$z_i(X_{\text{opt}}) \leq C_i, \quad z_j(X_{\text{opt}}) \geq C_j, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad i \neq j.$$

Каждое из чисел C_i представляет собой верхнюю или нижнюю границу для i -го критерия;

2) *субоптимизация*. В этом случае дополнительная информация представляет собой указание на один из критериев как важнейший и задание граничных значений для остальных;

3) *лексикографическая оптимизация*. Критерии упорядочиваются по относительной важности следующим образом:

$$z_i \succ z_j \succ \dots \succ z_k, \quad i, j, k = 1, \dots, m, \quad i \neq j \neq k,$$

т. е. выбирается важнейший критерий, затем следующий за ним по важности и т. д. до наименее важного;

4) *методы ЭЛЕКТРА*. Для каждого из m критериев определяется вес — положительное число, характеризующее его важность;

5) *расстояние до точки утопии*, т. е. до точки с идеальными значениями по всем критериям.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Составьте вектор весов критериев, используя шкалу 1÷10, и нормализуйте его.

2. Замените критерии ограничениями, для этого выберите:

- а) главный критерий и минимально допустимые уровни для остальных;
- б) все приемлемые альтернативы и лучшую из них по главному критерию.

3. Осуществите формирование и сужение множества Парето, для этого выберите:

- а) два критерия и сформируйте множество Парето графическим методом;
- б) оптимальную альтернативу из множества Парето по минимуму расстояния до точки утопии (расстояния для вариантов выбираются как кольцо вычетов по модулю 3 от номера варианта: 1) Евклидово; 2) Манхэттен; 3) Чебышева).

4. Проведите взвешивание и объединение критериев:

а) составьте матрицу рейтингов альтернатив по критериям, используя шкалу 1÷10, и нормализуйте ее;

б) умножьте нормализованную матрицу на нормализованный вектор весов критериев и получите значения объединенного критерия для всех альтернатив. Выберите наиболее приемлемую альтернативу.

5. Реализуйте метод анализа иерархий:

а) для каждого из критериев составьте и нормализуйте матрицу попарного сравнения альтернатив, вектор приоритетов альтернатив, меру согласованности оценок и коэффициент их согласованности. Если коэффициент согласованности превосходит значение 0,1, вернитесь к составлению матрицы попарного сравнения альтернатив по соответствующему критерию;

б) составьте и нормализуйте матрицу попарного сравнения критериев, вектор приоритетов критериев, меру согласованности оценок и коэффициент их согласованности. Если коэффициент согласованности превосходит значение 0,1, вернитесь к составлению матрицы попарного сравнения критериев;

в) определите средневзвешенные рейтинги альтернатив путем умножения компонент векторов приоритетов альтернатив по критериям на соответствующую компоненту вектора приоритетов критериев. Выберите наиболее приемлемую альтернативу. Сравните полученный результат с результатом выбора в п. 4.

Пример выполнения лабораторной работы

Рассмотрим следующую задачу выбора материала водопроводных труб для ремонта.

Исходные данные:

- доступные альтернативы: А. Металлопласт; В. Армированный пластик; С. Нержавеющая сталь; D. Черная сталь;
- учитываемые критерии: 1. Дешевизна; 2. Допустимое давление; 3. Долговечность; 4. Внешний вид;
- описание предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР):

дешевизна. Самая дорогая — нержавеющая сталь, металлопласт немного дешевле, армированный пластик — еще дешевле, черная сталь — самая дешевая;

допустимое давление. Самое большое — у нержавеющей и черной стали, у металлопласта — существенно ниже, у армированного пластика — еще ниже;

долговечность. Самый долговечный — металлопласт, немного меньше — нержавеющая сталь, еще менее — армированный пластик, самая недолговечная — черная сталь;

внешний вид. Лучший — у армированного пластика, чуть хуже — у металлопласта, существенно хуже — у нержавеющей и черной стали.

Требуется выбрать лучшую из альтернатив решения предложенной задачи с точки зрения указанных критериев следующими методами:

- 1) заменой критериев ограничениями;
- 2) формированием и сужением множества Парето;
- 3) методом взвешивания и объединения критериев;
- 4) методом анализа иерархий.

Составим вектор весов критериев (с нашей точки зрения), используя шкалу 1÷10:

Дешевизна	Допустимое давление	Долговечность	Внешний вид
6	8	4	2

Нормализовав, получим вектор (0.3, 0.4, 0.2, 0.1).

Реализуем метод замены критериев ограничениями.

Составим матрицу A оценок для альтернатив:

Критерий \ Альтернатива	1	2	3	4
А	3	3	5	6
В	4	2	3	5
С	2	7	4	1
D	5	7	2	1

Выберем в качестве главного критерия критерий 1 — дешевизну.

Установим минимально допустимые уровни для остальных критериев:

- допустимое давление не менее $0,2A_{\max 2}$;
- долговечность не менее $0,5A_{\max 3}$;
- внешний вид не менее $0,1A_{\max 4}$.

Проведем нормировку матрицы A (кроме столбца главного критерия) по формуле

$$A_{ij} = \frac{A_{ij} - A_{\min j}}{A_{\max j} - A_{\min j}},$$

где $A_{\min j}$ и $A_{\max j}$ — минимальное и максимальное значения в столбце соответственно.

Получим следующую матрицу:

Критерий \ Альтернатива	1	2	3	4
A	3	1/5	1	1
B	4	0	1/3	0,8
C	1	1	2/3	0
D	5	1	0	0

Выберем приемлемые решения при заданных условиях. В нашем случае такое решение только одно: альтернатива А. Металлопласт.

Для данных оценок альтернатив ослабление ограничений по критериям 2–4 не приведет к существенным изменениям, только если снизить требования до 0. В случае решения задач, когда установленным ограничениям по критериям, кроме главного, удовлетворяет несколько альтернатив, среди них выбирается в качестве итогового решения та, значение главного критерия для которой максимально (или минимально, если критерий минимизируется).

Выполним формирование и сужение множества Парето.

Выберем в качестве главных критериев для данного метода допустимое давление и долговечность. Допустимое давление — по оси x , долговечность — по оси y . Сформируем множество Парето графическим методом (рис. 6.3). Оба критерия максимизируются, поэтому точка утопии находится в правом верхнем углу графика.

Исходя из графика, можно сказать, что манхэттенское расстояние до точки утопии минимально для альтернатив А. Металлопласт. Значит, альтернатива А оптимальна.

Проведем взвешивание и объединение критериев.

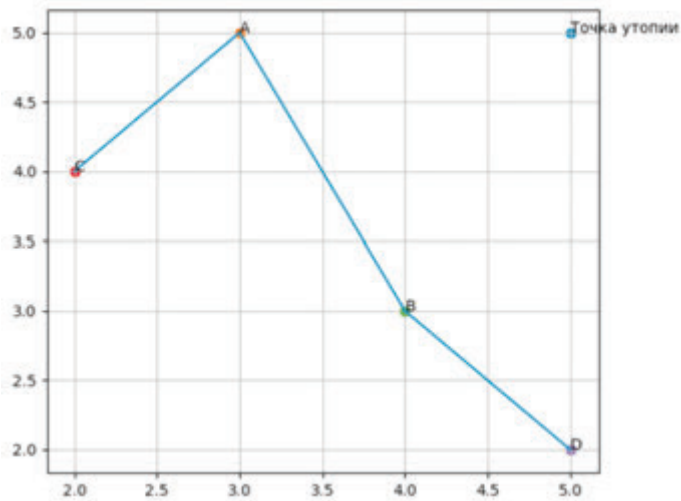


Рис. 6.3. Графическое решение методом формирования и сужения множества Парето (скриншот)

Составим матрицу рейтингов альтернатив по критериям, используя шкалу 1÷10:

Критерий \ Альтернатива	1	2	3	4
A	3	3	5	6
B	4	2	3	5
C	2	7	4	1
D	5	7	2	1

Нормализуем эту матрицу:

Критерий \ Альтернатива	1	2	3	4
A	3/14	3/19	5/14	6/13
B	2/7	2/19	3/14	5/13
C	1/7	7/19	2/7	1/13
D	5/14	7/19	1/7	1/13

Составим экспертную оценку критериев по методу попарного сравнения:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{12} &= 0,5; & \gamma_{23} &= 1; & \gamma_{34} &= 1; \\
 \gamma_{13} &= 1; & \gamma_{24} &= 1; \\
 \gamma_{14} &= 1;
 \end{aligned}$$

Получим вектор весов критериев:

$$\alpha_1 = 0,5 + 1 + 1 = 2,5;$$

$$\alpha_2 = 0,5 + 1 + 1 = 2,5;$$

$$\alpha_3 = 0 + 0 + 1 = 1;$$

$$\alpha_4 = 0 + 0 + 0 = 0;$$

Нормализуем его и получим

$$\alpha = (0,42; 0,42; 0,16; 0).$$

Умножим нормализованную матрицу на нормализованный вектор весов критериев и получим значения объединенного критерия для всех альтернатив:

$$\begin{pmatrix} 0,214 & 0,158 & 0,357 & 0,462 \\ 0,286 & 0,105 & 0,214 & 0,385 \\ 0,143 & 0,368 & 0,286 & 0,077 \\ 0,357 & 0,368 & 0,143 & 0,077 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,417 \\ 0,417 \\ 0,167 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,215 \\ 0,199 \\ 0,261 \\ 0,326 \end{pmatrix}.$$

Как следует из полученной интегральной оценки, наиболее приемлемой является альтернатива D. Черная сталь.

Отличие полученного решения по методу линейной свертки критериев от решений по предыдущим методам возникает из-за того, что в данном методе критерий прочности оказался важнее долговечности.

Рассмотрим метод анализа иерархий.

Для каждого из критериев составим и нормализуем матрицу попарного сравнения альтернатив.

Матрица для критерия «Дешевизна»:

	A	B	C	D	Сумма по строке	Нормированная сумма по строке
A	1	1/3	3	1/5	3,533	0,144
B	3	1	5	1/3	9,333	0,296
C	1/3	1/5	1	1/7	1,167	0,053
D	5	3	7	1	16	0,507

Отношение согласованности составит 0,11, немного больше 0,1.

Матрица для критерия «Допустимое давление»:

	A	B	C	D	Сумма по строке	Нормированная сумма по строке
A	1	2	1/5	1/5	3,4	1,102
B	1/2	1	1/7	1/7	1,785	0,054
C	5	7	1	1	14	0,421
D	5	7	1	1	14	0,421

Отношение согласованности составляет 0,01.

Матрица для критерия «Долговечность»:

	A	B	C	D	Сумма по строке	Нормированная сумма по строке
A	1	5	3	7	16	0,507
B	1/5	1	1/3	3	4,53	0,144
C	1/3	3	1	5	9,33	0,296
D	1/7	1/3	1/5	1	1,676	0,053

Отношение согласованности составляет 0,12, немного больше 0,1.

Матрица для критерия «Внешний вид»:

	A	B	C	D	Сумма по строке	Нормированная сумма по строке
A	1	1/3	5	5	11,33	0,33
B	3	1	7	7	18	0,529
C	1/5	1/7	1	1	2,343	0,069
D	1/5	1/7	1	1	2,343	0,069

Отношение согласованности составляет 1,39, намного больше 0,1. Данное противоречие возникает из-за огромной разницы между альтернативами исходя из условий задачи.

Матрица для критерия «Оценка приоритетов критериев»:

	1	2	3	4	Сумма по строке	Нормированная сумма по строке
A	1	3	5	7	16	0,507
B	1/3	1	3	5	9,333	0,295
C	1/5	1/3	1	3	12,2	0,144
D	1/7	1/5	1/3	1	1,676	0,053

Отношение согласованности составляет 0,12, немного больше 0,1.

Составим матрицу (i — альтернатива, j — критерий) и умножим ее на столбец оценки приоритетов:

$$\begin{pmatrix} 0,144 & 0,102 & 0,507 & 0,333 \\ 0,296 & 0,054 & 0,144 & 0,529 \\ 0,053 & 0,421 & 0,296 & 0,069 \\ 0,507 & 0,421 & 0,053 & 0,069 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,507 \\ 0,296 \\ 0,144 \\ 0,053 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,194 \\ 0,215 \\ 0,198 \\ 0,393 \end{pmatrix}.$$

Оценив полученный вектор, можем сделать вывод, что оптимальной альтернативой является D. Черная сталь.

В этой лабораторной работе при отношении согласованности больше 0,1 предлагается переназначение экспертных оценок альтернативам и повторение процедуры расчета и выбора.

Результаты могут отличаться в зависимости от применяемых методов решения, главным образом в зависимости от оценки критериев. В таких методах, как анализ иерархий и линейная свертка критериев, также сравниваются между собой и сами критерии. В рассмотренном примере можно заметить, что полученные отношения согласованности и вектор весов критериев α показывают следующее: сравнение альтернатив, которые сильно отличаются между собой по нескольким критериям, может оказываться неточным.

Содержание отчета о лабораторной работе

Отчет должен включать в себя:

- 1) титульный лист;
- 2) цель работы;
- 3) постановку задачи;
- 4) решения задачи по каждому из методов со всеми промежуточными шагами и указанием выбранных параметров;
- 5) выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем заключается сущность метода перевода критериев в ограничения? Перечислите их преимущества и недостатки.
2. Каков порядок формирования объединенного критерия?
3. Как можно оценить корректность экспертного выбора весов критериев?
4. Объясните основные этапы метода анализа иерархий.
5. В чем суть проверки согласованности оценок при анализе иерархий?

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

- 1) программную реализацию нейросети, аппроксимирующей заданную в варианте функцию;
- 2) результаты обучения сети со всеми промежуточными шагами;
- 3) отчет о лабораторной работе;
- 4) ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа № 7

Исследование стохастической фильтрации сигналов как задачи двухкритериальной оптимизации с использованием методов прямого пассивного поиска

Цель работы — изучить основные принципы многокритериальной оптимизации в комбинации с методами случайного и прямого пассивного поиска применительно к задаче фильтрации дискретного сигнала методом взвешенного скользящего среднего.

Постановка задачи

На интервале $[x_{\min}, x_{\max}]$ задан сигнал $f_k = f(x_k)$, где дискретная последовательность отсчетов $x_k = x_{\min} + k(x_{\max} - x_{\min}) / K$, $k = 0, \dots, K$, K — количество отсчетов. На сигнал наложен дискретный равномерный шум $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_K)$ с нулевым средним значением и амплитудой, равномерно распределенной на интервале $[-a, a]$: $\tilde{f}_k = f_k + \sigma_k$, $\sigma_k = \text{rnd}(-a, a)$. В зависимости от варианта работы необходимо осуществить *фильтрацию сигнала* \tilde{f}_k одним из *методов взвешенного скользящего среднего* [5].

В лабораторной работе используется *модельная задача* со следующими исходными данными:

$$\begin{aligned} f_k &= \sin x_k + 0,5; \\ x_k &= x_{\min} + k(x_{\max} - x_{\min}) / K; \\ x_{\min} &= 0, \quad x_{\max} = \pi; \\ k &= 0, \dots, K, \quad K = 100; \end{aligned}$$

- амплитуда равномерного шума $2a = 0,5$;
 - дискретизация веса свертки $\lambda_l = l / L$, $l = 0, \dots, L$, $L = 10$;
 - вероятность попадания в окрестность экстремума $P = 0,95$;
 - интервал неопределенности $\varepsilon = 0,01$;
 - размер скользящего окна: $r = 3$, $r = 5^*$.
- Варианты заданий приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Варианты заданий

Номер варианта	Метод фильтрации	Метрика близости
1	Среднее арифметическое	Евклидова
2	Среднее геометрическое	Манхэттен
3	Среднее гармоническое	Чебышева
4	Среднее квадратическое	Евклидова
5	Среднее арифметическое	Манхэттен
6	Среднее геометрическое	Чебышева
7	Среднее гармоническое	Евклидова
8	Среднее квадратическое	Манхэттен
9	Среднее арифметическое	Чебышева
10	Среднее геометрическое	Евклидова
11	Среднее гармоническое	Манхэттен
12	Среднее квадратическое	Чебышева
13	Среднее арифметическое	Евклидова
14	Среднее геометрическое	Манхэттен
15	Среднее гармоническое	Чебышева
16	Среднее квадратическое	Евклидова
17	Среднее арифметическое	Манхэттен
18	Среднее геометрическое	Чебышева
19	Среднее гармоническое	Евклидова
20	Среднее квадратическое	Манхэттен
21	Среднее арифметическое	Чебышева
22	Среднее геометрическое	Евклидова
23	Среднее гармоническое	Манхэттен
24	Среднее квадратическое	Чебышева

Основные теоретические сведения

В табл. 7.2 приведены формулы для расчета взвешенного скользящего среднего.

Таблица 7.2

Формулы для расчета взвешенного скользящего среднего

Метод расчета	Формула для расчета ($k = M, \dots, K-M$)
Среднее арифметическое	$\bar{f}_k(\alpha) = \sum_{j=k-M}^{k+M} \tilde{f}_j \alpha_{j+M+1-k}$
Среднее геометрическое	$\bar{f}_k(\alpha) = \prod_{j=k-M}^{k+M} \tilde{f}_j^{\alpha_{j+M+1-k}}$

Окончание табл. 7.2

Метод расчета	Формула для расчета ($k = M, \dots, K-M$)
Среднее гармоническое	$\bar{f}_k(\alpha) = \left(\sum_{j=k-M}^{k+M} \frac{\alpha_{j+M+1-k}}{\tilde{f}_j} \right)^{-1}$
Среднее квадратическое	$\bar{f}_k(\alpha) = \sqrt{\sum_{j=k-M}^{k+M} \tilde{f}_j^2 \alpha_{j+M+1-k}}$

В формулах, приведенных в табл. 7.1, \bar{f}_k — значение отфильтрованного сигнала; величина M выбирается из следующих соображений: $r = 2M + 1$ — размер заданного окна усреднения; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ — нормированные весовые коэффициенты, такие что

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1, \quad (\alpha_j \geq 0). \quad (7.1)$$

Набор весов α должен обеспечивать оптимизацию отфильтрованного сигнала по следующим критериям [5]:

$\omega(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha}$ (уровень зашумленности);

$\delta(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha}$ (уровень отличия от исходного сигнала).

В зависимости от варианта лабораторной работы используются тот или иной набор критериев зашумленности и отличия от исходного сигнала (табл. 7.3).

Таблица 7.3

Метрики, используемые при расчете критериев зашумленности и отличия от исходного сигнала

Метрика	Критерий зашумленности ω	Критерий отличия δ
Евклидова	$\sqrt{\sum_{k=1}^K (\bar{f}_k - \bar{f}_{k-1})^2}$	$\sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=0}^K (\bar{f}_k - \tilde{f}_k)^2}$
Манхэттен	$\sum_{k=1}^K \bar{f}_k - \bar{f}_{k-1} $	$\frac{1}{K} \sum_{k=0}^K \bar{f}_k - \tilde{f}_k $
Чебышева	$\max_{k=1, \dots, K} \bar{f}_k - \bar{f}_{k-1} $	$\max_{k=0, \dots, K} \bar{f}_k - \tilde{f}_k $

Так как оба критерия, ω и δ , являются взаимно противоречивыми, для решения задачи подбора весов α необходимо применять *методы многокритериальной оптимизации* [6]. В данной лабораторной работе следует использовать *линейную свертку критериев*:

$$J = \lambda\omega + (1 - \lambda)\delta \rightarrow \min_{\alpha}, \quad (\lambda \in [0, 1]).$$

Необходимо для различных значений весов $\lambda_l = l / L$ ($l = 0, \dots, L$), применяя *метод случайного поиска* [7], осуществить поиск минимума $J(\alpha)$ с заданной вероятностью попадания в окрестность экстремума P при допустимой длине интервала неопределенности ε . Число испытаний N при этом оценивается по формуле

$$N = \left\lceil \frac{\ln(1 - P)}{\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{x_{\max} - x_{\min}}\right)} \right\rceil.$$

Случайные значения весов берутся симметричными относительно центрального веса α_{M+1} и рассчитываются с учетом условия нормировки (7.1), т. е. равномерно распределены на последовательности остаточных интервалов:

$$\alpha_{M+1} = \text{rnd}(0, 1);$$

$$\alpha_m = \alpha_{r-m+1} = 0,5 \text{rnd}\left(0, 1 - \sum_{s=m+1}^{r-m} \alpha_s\right), \quad (m = 2, \dots, M);$$

$$\alpha_1 = \alpha_r = 0,5\left(1 - \sum_{s=2}^{r-1} \alpha_s\right).$$

Конечная цель работы заключается в нахождении оптимального веса λ^* (методом *прямого пассивного поиска* на сетке λ_l [1]), при котором минимизируется расстояние от приближенно найденного оптимального значения интегрального критерия $J^*(\omega^*, \delta^*)$ до *идеальной точки* $\hat{J}(\hat{\omega}, \hat{\delta}) = \hat{J}(0, 0) = 0$ [6]:

$$\text{dist}(J^*, \hat{J}) \rightarrow \min_{\lambda}.$$

Метрики расстояний dist приведены в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Метрики, используемые при расчете расстояния dist до идеальной точки

Метрика	Формула для расчета расстояния dist
Евклидова	$\sqrt{\omega^2 + \delta^2}$
Манхэттен	$ \omega + \delta $
Чебышева	$\max(\omega, \delta)$

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Постройте график заданной функции.
2. Добавьте шум с указанными в разделе «Постановка задачи» параметрами в сигнал (функцию) и постройте график зашумленной функции.
3. Для скользящего окна $r = 3$, используя *метод случайного поиска*, выполните поиск минимума $J(\alpha)$ и оптимальных значений весов, рассчитайте значения функционала J и критериев ω , δ для оптимальных значений весов.
4. Применяя метод пассивного поиска для всех значений $\lambda_l = l / L$ ($l = 0, \dots, L$), определите оптимальный вес λ^* , при котором минимизируется расстояние от приближенно найденного оптимального значения интегрального критерия $J^*(\omega^*, \delta^*)$ до идеальной точки.
5. Используя найденные в п. 4 параметры, постройте график отфильтрованной функции в той же плоскости координат, что и исходные функции.
6. Повторите эксперимент (пп. 3–5) для размера скользящего окна $r = 5^*$.

Пример выполнения лабораторной работы

Используем исходные данные, приведенные в разделе «Постановка задачи». Графики исходного сигнала, шума, очищенного сигнала для размера скользящего окна $r = 3$ приведены на рис. 7.1, а для $r = 5^*$ — на рис. 7.3. Графическое отображение найденных приближений к оптимальным критериям для $r = 3$ показано на рис. 7.2, а для $r = 5^*$ — на рис. 7.4. Распечатка результатов численного эксперимента для $r = 3$ представлена в табл. 7.5, а для $r = 5^*$ — в табл. 7.6.

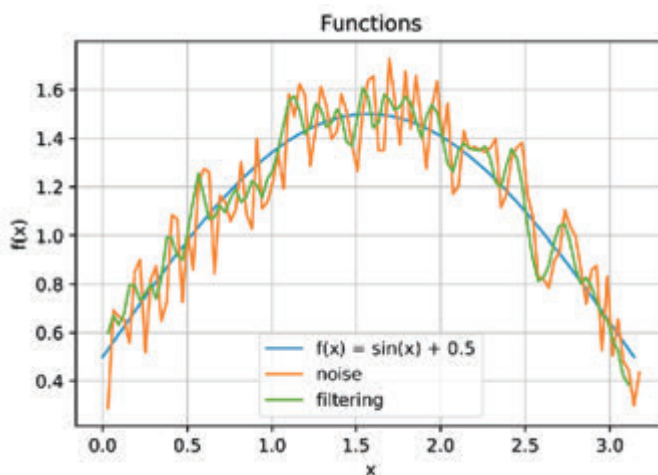


Рис. 7.1. Графики исходного сигнала, шума, очищенного сигнала для $r = 3$ (скриншот)

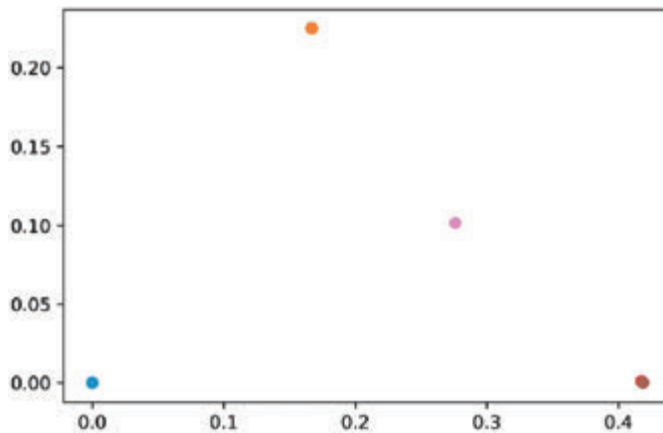


Рис. 7.2. Графическое отображение найденных приближений к оптимальным критериям в системе координат (ω, δ) в зависимости от весов λ_i для $r = 3$. Некоторые точки практически сливаются (скриншот)

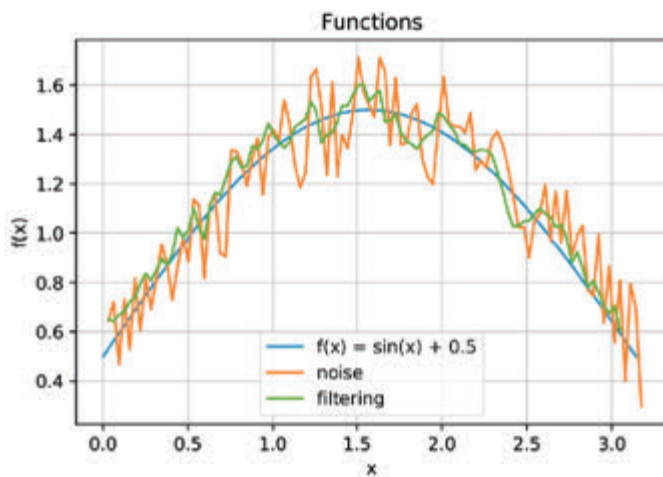


Рис. 7.3. Графики исходного сигнала, шума, очищенного сигнала для $r = 5$ (скриншот)

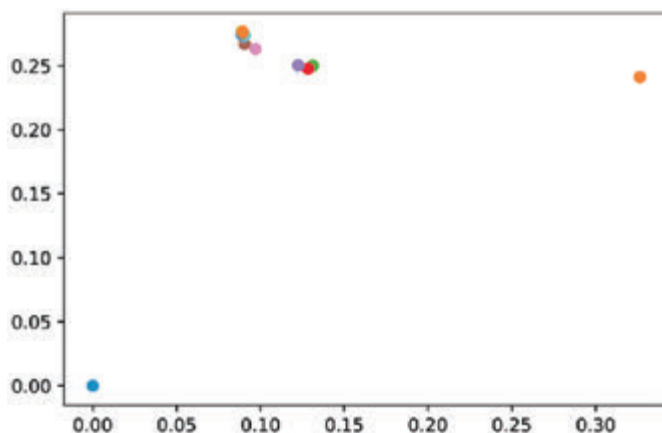


Рис. 7.4. Графическое отображение найденных приближений к оптимальным критериям в системе координат (ω, δ) в зависимости от весов λ_i для $r = 5$ (скриншот)

Таблица 7.5

Результаты численного эксперимента для $r = 3$ и оптимальное значение веса λ^* , функционала J и критериев ω, δ

h	dis	alpha	w	d
0.0	0.4179	[0.0007, 0.9986, 0.0007]	0.4179	0.0006
0.1	0.4182	[0.0004, 0.9993, 0.0004]	0.4182	0.0004
0.2	0.4175	[0.001, 0.998, 0.001]	0.4175	0.0009
0.3	0.4186	[0.0001, 0.9997, 0.0001]	0.4186	0.0001
0.4	0.4186	[0.0, 0.9999, 0.0]	0.4186	0.0001
0.5	0.276	[0.1196, 0.7607, 0.1196]	0.276	0.1019
0.6	0.225	[0.282, 0.436, 0.282]	0.1667	0.225
0.7	0.2251	[0.2821, 0.4359, 0.2821]	0.1667	0.2251
0.8	0.225	[0.282, 0.436, 0.282]	0.1667	0.225
0.9	0.2252	[0.2822, 0.4357, 0.2822]	0.1667	0.2252
1.0	0.2249	[0.2819, 0.4362, 0.2819]	0.1668	0.2249
h*	J	w	d	

Таблица 7.6

Результаты численного эксперимента для $r = 5$ и оптимальное значение веса λ^* , функционала J и критериев ω , δ

h	dis	alpha					w	d
0.0	0.3262	[0.0032,	0.479,	0.0356,	0.479,	0.0032]	0.3262	0.2414
0.1	0.2503	[0.2044,	0.237,	0.1173,	0.237,	0.2044]	0.131	0.2503
0.2	0.2478	[0.1955,	0.2525,	0.104,	0.2525,	0.1955]	0.1282	0.2478
0.3	0.2506	[0.1917,	0.2499,	0.1167,	0.2499,	0.1917]	0.1223	0.2506
0.4	0.2674	[0.1734,	0.2303,	0.1927,	0.2303,	0.1734]	0.0903	0.2674
0.5	0.2634	[0.1756,	0.2374,	0.174,	0.2374,	0.1756]	0.0969	0.2634
0.6	0.2727	[0.1603,	0.2319,	0.2157,	0.2319,	0.1603]	0.0897	0.2727
0.7	0.277	[0.1338,	0.2507,	0.2311,	0.2507,	0.1338]	0.0887	0.277
0.8	0.2744	[0.1596,	0.2285,	0.2238,	0.2285,	0.1596]	0.0903	0.2744
0.9	0.2753	[0.1388,	0.2492,	0.224,	0.2492,	0.1388]	0.0886	0.2753
1.0	0.2766	[0.1414,	0.2429,	0.2313,	0.2429,	0.1414]	0.0893	0.2766

h*	J	w	d
0.2	0.22388	0.1282	0.2478

Применяя случайный поиск для нахождения вектора α , прямой пассивный поиск — для поиска точки, максимально приближенной к точке утопии, можно усреднить значения функции и тем самым приблизить зашумленный график к графику изначального сигнала.

В результате расчета получены следующие значения функционала J и критериев ω , δ для оптимальных весов:

$$J = 0,25334;$$

$$\omega = 0,128;$$

$$\delta = 0,2848,$$

а также найдено оптимальное значение веса λ^* : $\lambda^* = 0,2$.

Отдельной задачей в данной лабораторной работе является выбор масштаба системы координат (ω, δ) для наглядного отображения рассчитанных точек. Графики исходного сигнала, шума (или зашумленного сигнала), очищенного сигнала удобнее и нагляднее строить в одной координатной плоскости.

Содержание отчета о лабораторной работе

Отчет должен включать в себя:

- 1) титульный лист;
- 2) цель работы;
- 3) постановку задачи (вариант работы);
- 4) графики сигналов $f_k, \bar{f}_k, \tilde{f}_k$;

- 5) найденные значения весов α для каждого значения λ_i ;
- 6) значения функционала J и критериев ω , δ для оптимальных значений весов;
- 7) графическое отображение найденных приближений к оптимальным критериям в системе координат (ω, δ) в зависимости от весов λ_i ;
- 8) найденное оптимальное значение веса λ^* ;
- 9) выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы и задания

1. Объясните принцип линейной свертки критериев.
2. Что такое идеальная точка?
3. Какова классификация методов поиска?
4. Объясните принцип простейшего случайного поиска на отрезке.
5. Объясните принцип прямого пассивного поиска на отрезке.

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

- 1) программную реализацию указанных алгоритмов;
- 2) результаты численных экспериментов для указанных в постановке задачи параметров;
- 3) отчет о лабораторной работе;
- 4) ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных структур и алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельного написания программы и подготовки отчета.

Лабораторная работа № 8

Построение сетевого графа работ и его анализ методом критического пути (CPM)

Цель работы — изучить задачи сетевого планирования в управлении проектами и приобрести навыки их решения с помощью метода критического пути (CPM — Critical Path Method).

Постановка задачи

Используя заданный набор работ с множествами непосредственно предшествующих работ (по варианту), необходимо: построить сетевой граф, провести его топологическое упорядочение и нумерацию; рассчитать и занести в таблицу поздние сроки начала и ранние сроки окончания работ, а также ранние и поздние сроки наступления событий; вычислить полный и свободный резервы времени работ, а также резерв времени событий; определить и выделить на сетевом графе критический путь.

Варианты заданий приведены в табл. 8.1 и 8.2.

Таблица 8.1

Варианты заданий длительности работ t

Название работы	Длительность работы t	Название работы	Длительность работы t
a	3	g	4
b	5	h	3
c	2	i	3
d	4	j	2
e	3	k	5
f	1		

Таблица 8.2

Варианты заданий множества предшествующих работ

Номер варианта	Наименование множества										
	P_a	P_b	P_c	P_d	P_e	P_f	P_g	P_h	P_i	P_j	P_k
1	∅	∅	∅	a	b	b	d	e	f, c	g	h, i
2	∅	∅	∅	c	c	a	a	d, g	h, e	b, f, i	e, h
3	∅	∅	a	a	d	d	d	c, b	g	f, i	e, j
4	∅	∅	∅	a	b	c	d	d	e, f	g	h, i

Окончание табл. 8.2

Номер варианта	Наименование множества										
	P_a	P_b	P_c	P_d	P_e	P_f	P_g	P_h	P_i	P_j	P_k
5	\emptyset	\emptyset	b	b	\emptyset	a	e, d	f, c, g	f, c, g	h	i
6	\emptyset	a	a	a	b	c	e, f	c	d	h, i	j, g
7	\emptyset	\emptyset	a	\emptyset	b, c	a	b, c	a	h, g	f, e, d	b, c
8	\emptyset	\emptyset	a	c	a	e, d	c	g	h, j, b, f	c	g
9	\emptyset	a	b, f	c, h	\emptyset	e	e	g, k	\emptyset	g, k	i
10	\emptyset	a	b, f	c	\emptyset	e	b, f	e	e	g, h	i, j
11	\emptyset	a	b, f, i	c	\emptyset	e	b, f, i	e	h	h	j
12	\emptyset	a	b, f	c, h	\emptyset	e	b, f	g, j	\emptyset	i	g, j
13	\emptyset	a	a	c	b	e, d	c	f, g	c	k, i	a
14	\emptyset	a	b, g, j	a	\emptyset	d, e, i	f	\emptyset	h	h	h
15	\emptyset	a	b	c, g	\emptyset	e	f, j	b	f, j	\emptyset	i, h
16	\emptyset	\emptyset	b	c	a	a	f	i	e	h, g, k	b

ВНИМАНИЕ! Обратите внимание, что P_n обозначены не названия событий, а лишь наименования множеств предшествующих работ! События и их нумерацию студент вводит самостоятельно.

Основные теоретические сведения

Основной алгоритм частичного упорядочивания

Следует начать с одного из элементов графа без предшественников, поместить его в голову списка и вычеркнуть из графа вместе с инцидентными дугами. Затем нужно повторить процедуру для оставшейся части графа. Пример применения этой процедуры показан на рис. 8.1.

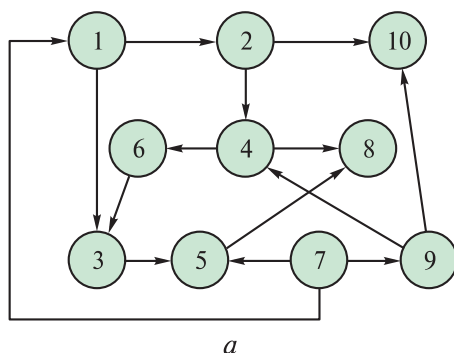


Рис. 8.1 (начало). Пример частичного упорядочивания сетевого графа:

a — до упорядочивания;

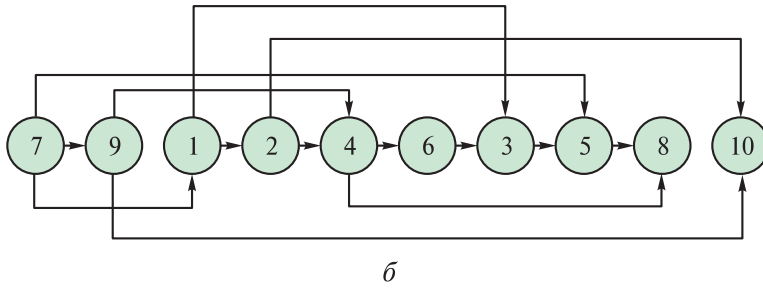


Рис. 8.1 (окончание). Пример частичного упорядочивания сетевого графа:

б — после упорядочивания

Метод критического пути (СРМ)

Исходными данными метода являются:

- список работ проекта;
- связи между работами;
- длительность выполнения работ;
- календарный план рабочего времени;
- календарный срок начала проекта.

Правила построения сетевой модели

При построении сетевой модели используются следующие правила:

- 1) строго одно начальное и одно завершающее события;
- 2) отсутствие «висячих вершин»: тупиковых, кроме завершающего события, и не имеющих входящих работ, кроме исходного события;
- 3) нумерация и направление дуг — слева направо;
- 4) строго одна работа между двумя соседними событиями; иначе — введение промежуточных событий и фиктивных работ (логическая связь между событиями, не требующая затрат ресурсов);
- 5) запрет на замкнутые контуры.

Параметры сетевой модели приведены на рис. 8.2.

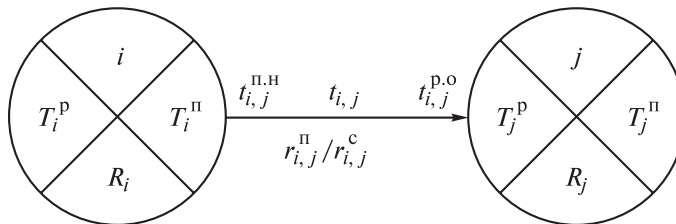


Рис. 8.2. Фрагмент сетевой модели:

T_i^p , T_j^p — ранние сроки наступления k -го события; i, j — номера события; T_i^n , T_j^n — поздние сроки совершения события; $t_{i,j}$ — длительность работы $i-j$; $t_{i,j}^{п.о}$, $t_{i,j}^{п.н}$ — ранний и поздний сроки окончания и начала работы соответственно; R_i , R_j — резерв времени события; $r_{i,j}^п$, $r_{i,j}^с$ — полный и свободный резервы времени работ соответственно

Алгоритм метода критического пути

При выполнении данного алгоритма будут рассчитаны параметры сетевой модели, расположение которых показано на рис. 8.2.

Алгоритм включает в себя три этапа.

1. Прямой ход.

1.1. Определение *раннего срока* T_1^p исходного события (обычно $T_1^p = 0$).

1.2. Расчет ранних сроков окончания работ $t_{i,j}^{p,o}$ для работ, исходящих из событий i с рассчитанными T_i^p :

$$t_{i,j}^{p,o} = T_i^p + t_{i,j}.$$

1.3. Расчет *раннего срока совершения* события T_i^p для событий, в которые входят работы с рассчитанными $t_{i,j}^{p,o}$:

$$T_i^p = \begin{cases} t_{i,j}^{p,o}, & i = 1; \\ \max\{t_{i,j}^{p,o}\}, & i > 1. \end{cases}$$

Шаги 1.2, 1.3 выполняются до насыщения (слева направо до конца линейно упорядоченного графа).

2. Обратный ход.

2.1. Определение *позднего срока завершающего события* T_k^n :

$$T_k^n = \begin{cases} T_k^p; \\ T_{\text{дир}}, \end{cases}$$

где $T_{\text{дир}}$ — директивный срок окончания работ.

2.2. Расчет *поздних сроков начала работ* $t_{i,j}^{n,h}$ для работ, входящих в события j с рассчитанными T_j^n :

$$t_{i,j}^{n,h} = T_j^n - t_{i,j}.$$

2.3. Расчет *позднего срока совершения события* T_i^n для событий, из которых исходят работы с рассчитанными $t_{i,j}^{n,h}$:

$$T_i^n = \begin{cases} t_{i,j}^{n,h}, & i = 1, \\ \min\{t_{i,j}^{n,h}\}, & i > 1. \end{cases}$$

Шаги 2.2, 2.3 выполняются до насыщения (справа налево до конца линейно упорядоченного графа).

3. Анализ сетевой модели.

3.1. Расчет *резервов времени событий*:

$$R_i = T_i^n - T_i^p.$$

3.2. Расчет *полных резервов времени работ* — максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить длительность выполнения каждой работы (i, j) :

$$r_{i,j}^n = T_j^n - T_i^p - t_{i,j}.$$

3.3. Расчет *свободных резервов времени работ* — минимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить длительность каждой работы (i, j) при условии, что все события наступают в свои ранние сроки:

$$r_{i,j}^c = T_j^p - T_i^p - t_{i,j}.$$

3.4. *Критическое время* $T_{кр}$ — минимальное время, в течение которого выполняется весь комплекс работ ($r_{i,j}^n \rightarrow \min$). Если $T_{дир}$ не задан, то $r_{i,j}^n = 0 \quad \forall i, j$.

Критический путь — путь между начальной и конечной вершинами сетевого графа, длина которого равна $T_{кр}$ с учетом подкритических путей — зоны комплекса работ.

Порядок выполнения лабораторной работы

1. Используя информацию о списке работ и предшествующих работах из варианта задания, постройте и топологически отсортируйте сетевой граф работ (по правилам построения сетевой модели).

2. Положите $T_1^p = 0$.

3. Реализуйте прямой ход метода критического пути, рассчитав ранние сроки окончания работ $t_{i,j}^{p,o}$, ранние сроки совершения событий T_i^p .

4. Определите поздний срок завершающего события.

5. Реализуйте обратный ход метода критического пути, рассчитав поздние сроки начала работ $t_{i,j}^{n,h}$, поздний срок совершения события T_i^n .

6. Рассчитайте полные и свободные резервы времени событий, работ.

7. Найдите и выделите критический путь, рассчитайте его длину.

Пример выполнения лабораторной работы

Пусть заданы параметры работ, приведенные в табл. 8.3. Имеется список работ, их длительность, связи между работами. Календарный срок начала проекта принять равным 0, директивный срок окончания не задан. Таким образом, в нашем распоряжении имеются все необходимые данные для применения метода критического пути.

Обратите внимание, что работы могут быть заданы не только цифрами, но и буквами и любыми другими символами. Названия работ в табл. 8.3 специально приведены схематично, чтобы не отвлекать от сути метода расчета.

Введем события (события — это вершины или круги на сетевом графе), соединим их в соответствии с описывающей задачу табл. 8.3 дугами (дуги — это работы на сетевом графе). Проведем топологическое упорядочивание сетевого графа, выстраивание линейного порядка (рис. 8.3). При необходимости перенумеруем события слева направо, получим граф, представленный на рис. 8.3.

Реализуем прямой и обратный ходы алгоритма по методу критического пути, этап анализа модели, рассчитаем по приведенным в разделе «Основные теоретические сведения» формулам параметры работ и свершения событий. Полученные значения представлены в табл. 8.4 и 8.5.

Таблица 8.3

Расшифровка работ

Номер работы	Название работы	Длительность работы t_{ij}	Предшествующие работы
1–2	<name_1–2>	1	—
2–7	<name_2–7>	14	1–2
7–8	<name_7–8>	1	2–7
1–3	<name_1–3>	2	—
3–4	<name_3–4>	3	1–3
4–5	<name_4–5>	1	3–4
5–8	<name_5–8>	8	4–5
8–9	<name_8–9>	2	7–8, 5–8
1–6	<name_1–6>	10	0
6–9	<name_6–9>	1	1–6
9–10	<name_9–10>	2	8–9, 6–9

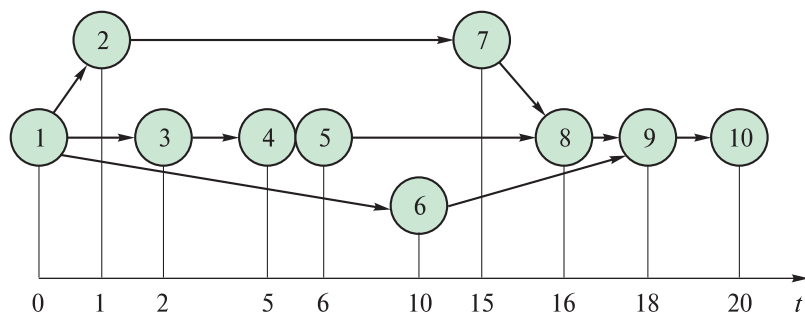


Рис. 8.3. Сетевой график задачи

Таблица 8.4

Параметры работ

(i, j)	Количество предшествующих работ	Длительность работы $t_{i,j}$	$t_{i,j}^{п.н}$	$t_{i,j}^{п.о}$	$r_{i,j}^п$	$r_{i,j}^с$
(1,2)	0	1	0	1	0	0
(1,3)	0	2	2	2	2	0
(1,6)	0	10	7	10	7	0
(2,7)	1	14	1	15	0	0
(3,4)	1	3	4	5	2	0
(4,5)	1	1	7	6	2	0
(5,8)	1	8	8	14	2	2
(6,9)	1	1	17	11	7	7
(7,8)	1	1	15	16	0	0
(8,9)	2	2	16	18	0	0
(9,10)	2	2	18	20	0	0

Таблица 8.5

Параметры событий

Номер события	Ранний срок свершения события: $T^p(i)$	Поздний срок свершения события: $T^n(i)$	Резерв времени $R(i)$
1	0	0	0
2	1	1	0
3	2	4	2
4	5	7	2
5	6	8	2
6	10	17	7
7	15	15	0
8	16	16	0
9	18	18	0
10	20	20	0

Приведем расшифровку выполненных расчетов.

Рассчитаем сроки свершения событий.

Для $i = 1$ (начального события) очевидно, что $T^p(1) = 0$.

Для $i = 2$: $T^p(2) = T^p(1) + t(1,2) = 0 + 1 = 1$.

Для $i = 3$: $T^p(3) = T^p(1) + t(1,3) = 0 + 2 = 2$.

Для $i = 4$: $T^p(4) = T^p(3) + t(3,4) = 2 + 3 = 5$.

Для $i = 5$: $T^p(5) = T^p(4) + t(4,5) = 5 + 1 = 6$.

Для $i = 6$: $T^p(6) = T^p(1) + t(1,6) = 0 + 10 = 10$.

Для $i = 7$: $T^p(7) = T^p(2) + t(2,7) = 1 + 14 = 15$.

Для $i = 8$: $\max(T^p(5) + t(5,8); T^p(7) + t(7,8)) = \max(6 + 8; 15 + 1) = 16$.

Для $i = 9$: $\max(T^p(6) + t(6,9); T^p(8) + t(8,9)) = \max(10 + 1; 16 + 2) = 18$.

Для $i = 10$: $T^p(10) = T^p(9) + t(9,10) = 18 + 2 = 20$.

Длина критического пути равна раннему сроку свершения завершающего события 10:

$$T_{кр} = T^p(10) = 20.$$

При определении поздних сроков свершения событий $T^n(i)$ движемся по сети в обратном направлении, т. е. справа налево.

Для $i = 10$ (завершающего события) поздний срок свершения события должен равняться его раннему сроку (иначе изменится длина критического пути):

$$T^n(10) = T^p(10) = 20.$$

Далее просматриваем строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т. е. 9. Просматриваем все строки, начинающиеся с номера 9:

$$i = 9: T^n(9) = T^n(10) - t(9, 10) = 20 - 2 = 18.$$

Далее просматриваем строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т. е. 8. Просматриваем все строки, начинающиеся с номера 8:

$$i = 8: T^n(8) = T^n(9) - t(8, 9) = 18 - 2 = 16.$$

Далее просматриваем строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т. е. 5. Просматриваем все строки, начинающиеся с номера 5:

$$i = 5: T^n(5) = T^n(8) - t(5, 8) = 16 - 8 = 8.$$

Далее просматриваем строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т. е. 4. Просматриваем все строки, начинающиеся с номера 4:

$$i = 4: T^n(4) = T^n(5) - t(4, 5) = 8 - 1 = 7.$$

Далее просматриваем строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т. е. 7. Просматриваем все строки, начинающиеся с номера 7:

$$i = 7: T^n(7) = T^n(8) - t(7, 8) = 16 - 1 = 15.$$

Далее просматриваем строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т. е. 6. Просматриваем все строки, начинающиеся с номера 6:

$$i = 6: T^n(6) = T^n(9) - t(6, 9) = 18 - 1 = 17.$$

Далее просматриваем строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т. е. 3. Просматриваем все строки, начинающиеся с номера 3:

$$i = 3: T^n(3) = T^n(4) - t(3, 4) = 7 - 3 = 4.$$

Далее просматриваем строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т. е. 2. Просматриваем все строки, начинающиеся с номера 2:

$$i = 2: T^n(2) = T^n(7) - t(2, 7) = 15 - 14 = 1.$$

Далее просматриваем строки, оканчивающиеся на номер предпоследнего события, т. е. 1. Просматриваем все строки, начинающиеся с номера 1:

$$\begin{aligned} i = 1: \min(T^n(2) - t(1, 2); T^n(3) - t(1, 3); \\ T^n(6) - t(1, 6)) = \min(1 - 1; 4 - 2; 17 - 10) = 0. \end{aligned}$$

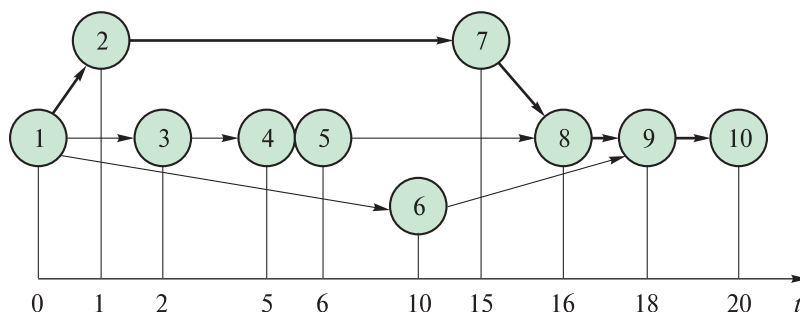


Рис. 8.4. Критический путь (выделен полужирными линиями)

Выберем те работы и события, для которых все резервы времени имеют нулевое значение. Они будут лежать на искомом критическом пути.

Выделим критический путь на графе полужирными линиями (рис. 8.4). Рассчитанные параметры также принято наносить на сетевой график в соответствии с указанной в разделе «Основные теоретические сведения» схемой. В пособии это не приводим, чтобы не загромождать график.

Содержание отчета о лабораторной работе

Отчет должен включать в себя:

- 1) титульный лист;
- 2) цель работы;
- 3) постановку задачи (вариант работы);
- 4) построенный исходный сетевой граф по условию задачи;
- 5) топологически упорядоченный и пронумерованный сетевой граф;
- 6) таблицу, содержащую поздние сроки начала и ранние сроки окончания работ, полный и свободный резервы времени всех работ;
- 7) таблицу, содержащую ранние и поздние сроки наступления событий, резервы времени событий;
- 8) найденный(-ые) критический(-ие) путь(-и);
- 9) выводы по результатам численного эксперимента.

Контрольные вопросы и задания

1. Опишите основную идею и практическую пользу метода критического пути.
2. Какие исходные данные необходимы для использования метода критического пути?
3. Объясните, что такое ранние сроки окончания и поздние сроки начала работ?
4. Чем отличается свободный резерв времени работы от полного?
5. Как определяется критический путь по расчетам в методе критического пути?

Порядок защиты лабораторной работы

Для защиты лабораторной работы студент должен продемонстрировать следующее:

- 1) решение предложенной по варианту задачи сетевого планирования;
- 2) все основные шаги метода критического пути, изложенные в задании;
- 3) результат решения;
- 4) отчет о лабораторной работе;
- 5) ответы на контрольные вопросы.

Критерии оценивания лабораторной работы

Выполнение поставленной задачи засчитывается студенту при успешной демонстрации всех пунктов, перечисленных в разделе «Порядок защиты лабораторной работы», в случае совпадения продемонстрированных результатов с теоретическими ожидаемыми, четкого изложения и обоснования реализованных алгоритмов, математически грамотного ответа на заданные вопросы, а также при условии самостоятельной подготовки отчета.

Литература

1. *Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С.* Методы оптимизации: учебник для вузов / под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 440 с. (Сер. Математика в техническом университете; вып. XIV).
2. *Карпенко А.П.* Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой: учебное пособие. М.: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. 446 с.
3. *Лемешко Б.Ю.* Методы оптимизации. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. 126 с.
4. *Карпушкин С.В.* Теория принятия проектных решений: учеб. пособие ТГТУ. Тамбов, 2015. 86 с.
5. *Вараюнь М.И., Антонов А.Ю.* Анализ стохастического дискретного фильтра для подавления шума // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. Вып. 1, 2007. С. 24–28.
6. *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 416 с.
7. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1973. 312 с.

Оглавление

Предисловие	3
Лабораторная работа № 1	
Исследование методов прямого поиска экстремума унимодальной функции одного переменного.....	5
Лабораторная работа № 2	
Исследование метода случайного поиска экстремума функции одного переменного	24
Лабораторная работа № 3	
Исследование алгоритма имитации отжига	32
Лабораторная работа № 4	
Двумерный поиск для подбора коэффициентов простейшей нейронной сети на примере решения задачи линейной регрессии экспериментальных данных	48
Лабораторная работа № 5	
Исследование генетических алгоритмов в задачах поиска экстремумов.....	54
Лабораторная работа № 6	
Решение задачи многокритериальной оптимизации	63
Лабораторная работа № 7	
Исследование стохастической фильтрации сигналов как задачи двухкритериальной оптимизации с использованием методов прямого пассивного поиска	81
Лабораторная работа № 8	
Построение сетевого графа работ и его анализ методом критического пути (CPM).....	92
Литература	102

Учебное издание

Коннова Наталья Сергеевна
Басараб Михаил Алексеевич
Колесников Александр Владимирович

**Программно-математическая реализация
методов оптимизации**

Редактор *О.М. Королева*
Художник *Я.М. Асинкритова*
Корректор *Н.В. Савельева*
Компьютерная верстка *Е.В. Жуковой*

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Подписано в печать 23.09.2021. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 8,45. Тираж 132 экз. Изд. № 934-2020. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, г. Москва, улица 2-я Бауманская, д. 5, к. 1.
info@bmstu.press
<https://bmstu.press>

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, г. Москва, улица 2-я Бауманская, д. 5, к. 1.
baumanprint@gmail.com