Série 1 complexe

4éme sc

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe i.

À tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}}$.

1 a. Déterminer les points M tels que $M = M'$.

b. Déterminer l'affixe du point B' associé au point B d'affixe 1 .

c. Déterminer l'affixe du point C tel que l'affixe de son image C' soit 2 .

2 Étant donné un nombre complexe z, distinct de i, on pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ le nombre nombre complexe associé, avec x, x', y, y' réels.

a. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.

b. Déterminer l'ensemble Γ des points M, distincts de A, pour lesquels z' est réel.

c. Placer A, B, B', C, C' et représenter Γ sur une figure

3 Soit z un nombre complexe différent de i.

a. Montrer que l'on a $z' - \mathrm{i} = \frac{-1}{z-\mathrm{i}}$.

b. On suppose que M, d'affixe z, appartient au cercle γ de centre A et de rayon 1 .

Montrer que M' appartient à γ.

Exercice 2

Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose $f(z) = \frac{iz}{z-2}$ et $\mathrm{A}(2)$

1 Montrer que l'ensemble (E) des points du plan complexe $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$ est une droite parallèle à l'axe des imaginaires purs.

2 Montrer que $f(z)$ est un imaginaire pur si, et seulement si, z est réel.

Exercice 3

On pose $z = i + e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

1 a) Vérifier que pour tous réels a et b on a: $e^{ia} + e^{ib} = e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{a-b}{2}\right)}\right)$.

b) En déduire que $z = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$.

2 Dans cette question on pose $\theta = \frac{\pi}{3}$.

a) Ecrire z sous forme algébrique et puis vérifier que $|z| = \sqrt{2+\sqrt{3}}$.

b) Vérifier que $2+\sqrt{3} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$ et déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

3 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On donne les points A, B et M d'affixe respectives $-i, 1$ et $e^{i\theta}$.

a) Ecrire $\frac{Aff(\overrightarrow{AM})}{Aff(\overrightarrow{AB})}$ sous forme exponentielle.

b) En déduire la valeur de θ pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux

Exercice 4

Soit z un nombre complexe et $M(x, y)$ son image dans le plan complexe.

On pose $Z = |z|^2 - 2z + 3\bar{z}$. On pose $Z = X + iY$ ò X et Y sont deux réels

1) Calculer X et Y en fonction de x et y.

2) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit réel.
3) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z soit imaginaire.
4) En déduire l'ensemble des points M tel que l'on ait $\arg Z \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Exercice 5

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

On considère les points A, B, C et Dd' affixes respectives :

$$z_A = 1 + i\ ,\ z_B = 2 - \sqrt{3} + i \text{ et } z_C = 2 \text{ et } z_D = \sqrt{3} - i.$$

1 a) Donner la forme exponentielle de z_D.

b) Montrer que $OBCD$ est un parallélogramme.

2 Donner la forme exponentielle de z_A et puis la forme algébrique de $\frac{z_B}{z_A}$.

3 a) Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (\sqrt{3} - 1)e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En déduire la forme exponentielle de z_B.

c) Donner alors $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 6

Lyceena.tn

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère re les points A, B, E et Fd' affixes respectives $1{,}1 + e^{i\frac{\pi}{3}}, 1 + z_B^2$ et 2

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

1 a) Vérifier que $B \in \mathcal{C}$.

b) Déterminer un argument de $\frac{z_B - z_A}{z_F - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABF.

2 a) Montrer que pour tout réel $\theta \in]0, \pi\left[, 1 + e^{i\theta}\right. = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$.

b) Déterminer alors la forme exponentielle de z_B.

c) Montrer que les points A, B et E sont alignés.

3 Pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on considère les points M et $M'd'$ affixes respectives z et $1 + z^2$.

Montrer que $\frac{z^2}{z-1}$ est réel si et seulement si A, M et M' sont alignés.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $a = 2i, b = -\sqrt{3} + i$ et $c = -\sqrt{3} - i$ 1) Ecrire a, b et c sous forme exponentielle. Placer A, B et C sur une figure.

2) Soit $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{b}}{\mathrm{c} - \mathrm{b}}$.

a) Ecrire Z sous forme algébrique et puis exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 8

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ On donne les points A et B d'affixes respectives 1 et i

Pour tout point $M(z)$ du plan $P \setminus \{B\}$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{z}{z-i}$

1 On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels.

a) Montrer que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + (y-1)^2} \\ y' = \dfrac{x}{x^2 + (y-1)^2} \end{cases}$$

b) En déduire alors les ensembles suivants :

$\mathrm{E} = \{\mathrm{M(z)} \in \mathrm{P} \text{ tq } \mathrm{z}' \in \mathbb{R}\}$

$\mathrm{F} = \{\mathrm{M(z)} \in \mathrm{P}$ tq z' imaginaire $\}$

Lyceena.tn

2) a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$; vérifier que $z' - 1 = \frac{i}{z-i}$

b) En déduire que si le point $\mathrm{M}(z)$ varie sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon 1 alors le point $M'(\mathbf{z'})$ varie sur un cercle $\mathcal{E}'$ que l'on précisera.

Exercice 9

On donne les points $\mathrm{A}(2+i), \mathrm{B}(6+3i)$ et $\mathrm{C}(-1+7i)$.

1 Placer les points A, B et C dans le plan complexe $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ sur l'annexe.

2 a) Déterminer la forme algébrique du complexe $\frac{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{A}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}}$

b) En déduire que le triangle ABC est rectangle.

3 a) Déterminer l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tel que : $|z-2-i| = |z-6-3i|$.

Représenter (Δ) sur l'annexe.

b) On donne le point $E\left(\frac{5}{2}+5i\right)$. Montrer que le point E est le milieu de [BC].

4 a) Calculer la longueur EB.

b) Déterminer l'ensemble $(\mathcal{C})$ des points M d'affixe z tel que : $|z - z_{\mathrm{E}}| = \frac{\sqrt{65}}{2}$. Représenter $(\mathcal{C})$

c) Pourquoi les points A, B et C appartiennent à $(\mathcal{C})$?

Exercice 10

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ de l'annexe. L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1 a) Vérifier que $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

b) En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2 a) Montrer que pour tout entier naturel $n, z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n e^{in\frac{\pi}{6}}$.

b) Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3 Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Interpréter géométriquement d_n.

b) Calculer d_0.

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n)$.

d) En déduire que la suite (d_n) est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

4 a) Montrer que pour tout entier naturel $n, |z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{OA}_n\ \mathrm{A}_{n+1}$ est rectangle en A_n.

c) Construire A_5

Lyceena.tn